Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 29, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

Si f es continua y uno a uno en un intervalo I, entonces f es o bien creciente o bien decreciente en dicho intervalo I.

Demostración.

Sean $a_0 < b_0$ dos números del intervalo I. Al ser f uno a uno, se sabe que

$$\text{o bien } (i): f(b_0) - f(a_0) > 0,$$
$$\text{o bien } (ii): f(b_0) - f(a_0) < 0.$$

Veamos el caso (i). Se demostrará que la misma desigualdad se cumple para cualesquiera $a_1 < b_1$ del intervalo, de modo que f es creciente. (Un razonamiento análogo haría ver que si se cumple (ii), en ese caso f es de creciente).

Demostración.

Sean

$$x_t = (1-t)a_0 + ta_1 \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$y_t = (1-t)b_0 + tb_1$$

Entonces $x_0 = a_0$ y $x_1 = a_1$ y todos los puntos x_t están entre a_0 y a_1. De modo similar, todos los y_t están entre b_0 y b_1.
Así pues, los x_t e y_t están todos en el intervalo I. Además, puesto que $a_0 < b_0$ y $a_1 < b_1$, se tiene también

$$x_t < y_t' \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

considerando ahora la función

$$g(t) = f(y_t) - f(x_t) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

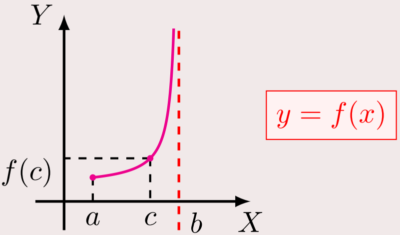
Esta función es continua en $[0,1]$, y cumple que $g(0) = f(b_0) - f(a_0) > 0$, en consecuencia $g(t) > 0$ para todo $t \in [0,1]$, de lo contrario la función no sería inyectiva.
Siendo así se tiene que $g(1) = f(b_1) - f(a_1) > 0$ para cualquier par $a_1 < b_1$. □

Función inversa

En primer lugar se supone que f es una función creciente continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.
Entonces, según el teorema de los valores intermedios, f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Por lo tanto, el dominio de f^{-1} es el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$. Análogamente, si f es continua y decreciente sobre $[a, b]$, entonces el dominio de f^{-1} en $[f(b), f(a)]$.
Si f es una función creciente continua sobre un intervalo abierto $]a, b[$, el análisis se hace algo más difícil.

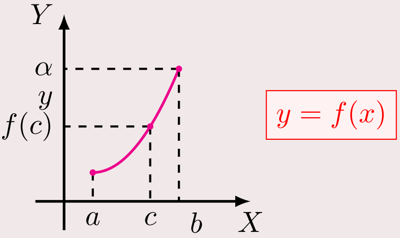
Función inversa

Para empezar, se elige algún punto c de $]a, b[$. Se verá primero cuáles son los valores mayores que $f(c)$ tomados por f. Una posibilidad es que f tiene valores arbitrariamente grande en este caso f toma todos los valores mayores que $f(c)$, según el teorema de los valores intermedios.



Función inversa

Si, por otra parte, f no toma valores arbitrariamente grandes, entonces $A = \{f(x) : c \leq x < b\}$ está acotado superiormente, de modo que A tiene una cota superior mínima α tal como see muestra en la figura.



Función inversa

Sea y un número cualesquiera con $f(c) < y < \alpha$. Entonces f toma algún valor $f(x) > y$ (puesto que α es la cota superior mínima de A). Según el teorema de los valores intermedios, f toma efectivamente el valor y. Observe que f no puede tomar el valor α mismo; pues si $\alpha = f(x)$ para $a < x < b$ y elegimos t con $x < t < b$, entonces $f(t) > \alpha$, lo cual es imposible.

Exactamente el mismo razonamiento sirve para valores menores que $f(c)$: o bien f toma todos los valores menores que $f(c)$, o bien existe un número $\beta < f(c)$ tal que f toma todos los valores comprendidos entre β y $f(c)$, pero no el mismo β.

Función inversa

El razonamiento entero puede repetirse si f es decreciente, y si el dominio de f es $\mathbb{R}$ o $]a, +\infty[$ o $]-\infty, a[$.

Resumiendo: si f es una función continua creciente cuyo dominio es un intervalo de una de las formas

$$]a, b[,]-\infty, b[,]a, +\infty[, \text{ o } \mathbb{R},$$

entonces el dominio de f^{-1} es también un intervalo de una de dichas cuatro formas.

Teorema

Si f es continua y uno-uno sobre un intervalo, entonces f^{-1} también es continua.

Demostración

Se sabe por el teorema anterior que f es o bien creciente o bien decreciente. Podemos suponer que f es creciente, ya que después se puede tratar el otro caso aplicando lo ya demostrado a $-f$.
Se demostrará que

$$\lim_{x\to b} f^{-1}(x) = f^{-1}(b)$$

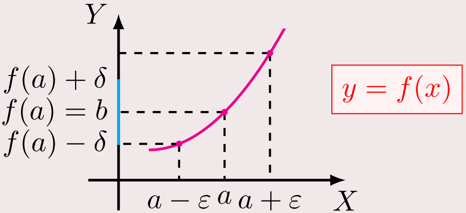
para todo b del dominio de f^{-1}. Un tal número b es de la forma $f(a) = b$ para algún a del dominio de f.

Demostración

Para cualquier $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $f(a) - \delta < x < f(a) + \delta$, entonces

$$a - \varepsilon < f^{-1}(x) < a + \varepsilon$$

La siguiente figura sugiere la manera de determinar δ (recuérdese que al mirar de lado se ve la gráfica de f^{-1}).

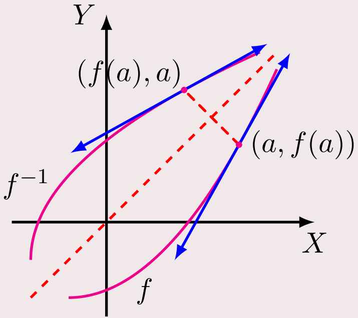


Demostración

Al ser $a-\varepsilon<a<a+\varepsilon$, se sigue que $f(a-\epsilon)<f(a)<f(a+\epsilon)$.
Se toma a δ como el más pequeño de los números $f(a+\varepsilon)-f(a)$ y $f(a)-f(a-\varepsilon)$.
Esta elección de δ asegura que $f(a-\varepsilon)\leq f(a)-\delta$ y $f(a)+\delta\leq f(a+\varepsilon)$. En consecuencia, si $f(a)-\delta<x<f(a)+\delta$, entonces $f(a-\varepsilon)<x<f(a+\varepsilon)$.
Al ser f creciente, f^{-1} es también decreciente, y obtenemos $f^{-1}(f(a-\varepsilon))<f^{-1}(x)<f^{-1}(f(a+\varepsilon))$, es decir, $a-\varepsilon<f^{-1}(x)<a+\varepsilon$, que es precisamente lo que se quería encontrar.

Derivada de la función inversa

La figura muestra la gráfica de una función uno-uno f con una recta tangente $\mathscr{L}$ en $(a, f(a))$.



Si se refleja la gráfica de f respecto de la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de f^{-1} y la tangente $\mathscr{L}'$ en el punto $(f(a), a)$. La pendiente de $\mathscr{L}'$ es la recíproca de la pendiente de $\mathscr{L}$.

Derivada de la función inversa

En otras palabras,

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Esta fórmula puede escribirse de manera que exprese $(f^{-1})'(b)$ directamente, para cada b del dominio de f^{-1},

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Contrariamente al razonamiento usado para la continuidad, esta "demostración" en imágenes se hace algo más complicada al formularla analíticamente.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivada de la función inversa

Hay otro procedimiento que podría intentarse. Puesto que sabemos que

$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

resulta tentador demostrar la fórmula deseada mediante una aplicación de la regla de la cadena:

$$f(f^{-1}(x))(f^{-1})(x) = 1,$$

de modo que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Derivada de la función inversa

Lamentablemente, esto no es una demostración de que f^{-1} es derivable, puesto que la regla de la cadena no puede aplicarse a no ser que se sepa ya que f^{-1} es derivable. Pero este razonamiento indica cómo tendrá que ser $(f^{-1})'(x)$ si f^{-1} es derivable, y puede también utilizarse para obtener alguna importante información preliminar.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

Si f es una función uno-uno continua definida sobre un intervalo y $f'(f^{-1}(a)) = 0$, entonces f^{-1} no es derivable en a.

Demostración.

Se tiene

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Si f^{-1} fuese derivable en a, la regla de la cadena implicaría que

$$f'(f^{-1}(a)).(f^{-1})'(a) = 1,$$

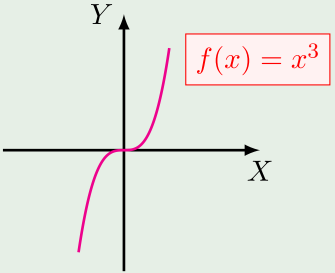
de donde

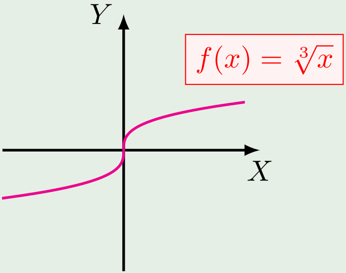
$$0.(f^{-1})'(a) = 1,$$

lo cual es absurdo. $\square$

Ejemplo

Un ejemplo sencillo al que es aplicable el teorema anterior lo constituye la función $f(x) = x^3$. Al ser $f'(0) = 0$ y $0 = f^{-1}(0)$, la función f^{-1} no es derivable en 0 (como se puede ver en las siguientes figuras).





Derivada de la función inversa

Una vez visto dónde no puede ser derivable una función inversa, estamos en condiciones para dar la demostración rigurosa de que en todos los demás casos la derivada viene dada por la fórmula que ya hemos "deducido" de dos maneras diferentes. Observe que el razonamiento a continuación utiliza la continuidad de f^{-1}, que ya se ha demostrado.

Teorema

Sea f una función uno-uno continua definida sobre un intervalo, y supongamos que f es derivable en $f^{-1}(b)$, con derivable $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Entonces f^{-1} es derivable en b, y

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demostración.

Si $b = f(a)$. Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h}$$

Ahora bien, todo número $b+h$ del dominio de f^{-1} puede escribirse de la forma

$$b + h = f(a+k)$$

para un k único (en rigor se debería poner $k(h)$, pero se usará k para mayor sencillez).

Demostración.

Entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(b+h)-a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(f(a+k))-a}{f(a+k)-b}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{k}{f(a+k)-f(a)}$$

Ahora, no es difícil obtener una expresión explícita de k, al ser $b+h=f(a+k)$ se tiene $f^{-1}(b+h)=a+k$ o $k=f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)$.

Demostración.

Ahora bien, según el teorema, la función f^{-1} es continua en b. Esto significa que k tiende hacia 0 cuando h tiende hacia 0. Al ser

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{k} = f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0,$$

esto implica que

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

$\square$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Para

- n impar, sea $f_n(x) = x^n$ para todo x;
- para n par, sea $f_n(x) = x^n, \ x \geq 0$.

Entonces f_n es una función uno-uno continua, cuya función inversa es $f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Ejemplo

Según el teorema se tiene, para $x \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
g_n'(x) &= \frac{1}{f_n'(f_n^{-1}(x))} \\
g_n'(x) &= \frac{1}{n(f_n^{-1}(x))^{n-1}} \\
g_n'(x) &= \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} \\
g_n'(x) &= \frac{1}{n} \cdot x^{(1/n)-1}
\end{aligned}
$$

Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas. Las funciones tangente y cotangente tienen período π y las restantes funciones trigonométricas tienen período 2π.

Una función periódica no es univalente. Por ejemplo $\operatorname{sen}(2n\pi + x) = \operatorname{sen} x$ para todo entero n, luego hay infinitos pares ordenados en la función sen con el mismo segundo elemento.

Como las funciones trigonométricas no son univalentes, no tienen funciones inversas.

Funciones trigonométricas inversas

Sin embargo, si restringimos adecuadamente el dominio por definición de cada una de las funciones trigonométricas obtenemos nuevas funciones restringidas que si son univalentes. Las inversas de estas funciones restringidas serán llamadas funciones trigonométricas inversas.

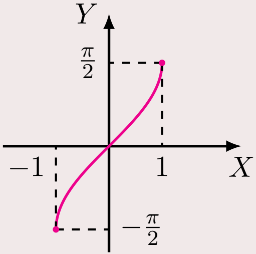
Por conveniencia, introduciremos la notación $f|_E$ para la función restringida

$$f|_E = \{(x, f(x))|x \in \mathrm{Dom}(f) \cap E\}.$$

Es decir, $f|_E$ es la función con dominio $\mathrm{Dom}(f) \cap E$ y la misma regla de correspondencia que f.

Función seno inverso

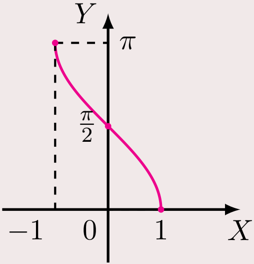
La función $\operatorname{sen}|_E$, donde $E = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, es una función univalente cuya inversa llamada seno inverso o arco seno, $(\operatorname{sen}|_E)^{-1} = \operatorname{arcsen}$, tiene dominio $\operatorname{Dom}(\operatorname{arcsen}) = [-1, 1]$ y rango $\operatorname{Ran}(\operatorname{arcsen}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



$$\boxed{f(x) = \operatorname{arcsen} x}$$

Función coseno inverso

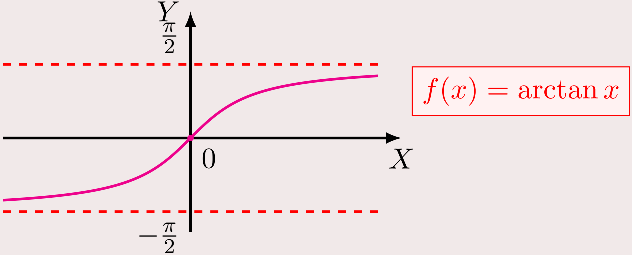
La función $\cos|_E$, donde $E = [0, \pi]$, es una función univalente cuya inversa llamada coseno inverso o arco coseno, $(\cos|_E)^{-1} = \operatorname{arccos}$, tiene dominio $\operatorname{Dom}(\operatorname{arccos}) = [-1, 1]$ y rango $\operatorname{Ran}(\operatorname{arccos}) = [0, \pi]$.



$$\boxed{f(x) = \arccos x}$$

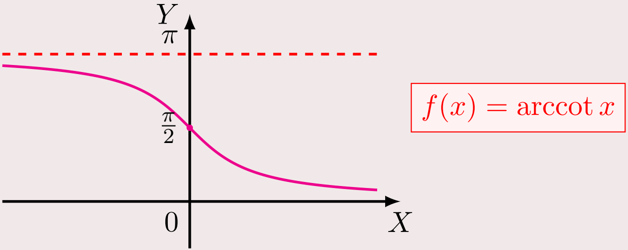
Función tangente inverso

La función $\tan|_E$, donde $E =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, es una función univalente cuya inversa llamada tangente inverso o arco tangente, $(\tan|_E)^{-1} = \arctan$, tiene dominio $\mathrm{Dom}(\arctan) =]-\infty, +\infty[$ y rango $\mathrm{Ran}(\arctan) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



Función cotangente inverso

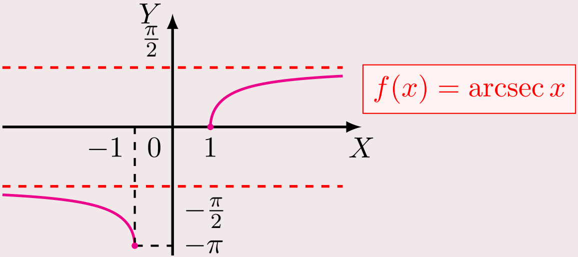
La función $\cot|_E$, donde $E =]0, \pi[$, es una función univalente cuya inversa llamada cotangente inverso o arco cotangente, $(\cot|_E)^{-1} = \operatorname{arccot}$, tiene dominio $\operatorname{Dom}(\operatorname{arccot}) =]-\infty, +\infty[$ y rango $\operatorname{Ran}(\operatorname{arccot}) =]0, \pi[$.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Función secante inverso

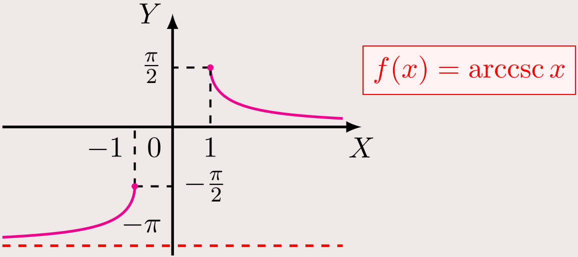
La función $\sec|_E$, donde $E = \mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, es una función univalente cuya inversa llamada secante inverso o arco secante, $(\sec|_E)^{-1} = \operatorname{arcsec}$, tiene dominio $\operatorname{Dom}(\operatorname{arcsec}) = \mathbb{R}] \setminus [-1, 1]$ y rango $\operatorname{Ran}(\operatorname{arcsec}) = \mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Función cosecante inverso

La función $\csc|_E$, donde $E =]-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup]0, \frac{\pi}{2}]$, es una función univalente cuya inversa llamada cosecante inverso o arco cosecante, $(\csc|_E)^{-1} = \operatorname{arccsc}$, tiene dominio $\operatorname{Dom}(\operatorname{arccsc}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ y rango $\operatorname{Ran}(\operatorname{arccsc}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivada de la función seno inverso

Se analizará el caso de la función arcsen. Como la función seno es derivable y con derivada no nula sobre $\left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, entonces la función arcsen es derivable sobre $]-1,1[$ y

$$D_x \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{D_x \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}.$$

Pero, $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$ sobre $]-1,1[$.
De este modo, se obtiene

$$D_x \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Tabla de derivadas de funciones trigonométricas inversas

f^{-1}	$\mathrm{Dom}(f^{-1})$	$F = Df^{-1}$	$\mathrm{Dom}(F)$
$\operatorname{arcsen}(x)$	$[-1,1]$	$D\operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$D\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$D\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$\mathbb{R}$	$D\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arcsec}(x)$	$\mathbb{R}\backslash]-1,1[$	$D\operatorname{arcsec}(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$
$\operatorname{arccsc}(x)$	$\mathbb{R}\backslash]-1,1[$	$D\operatorname{arccsc}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$

Funciones hiperbólicas

- $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\tanh(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$

Funciones hiperbólicas

- $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\operatorname{csch}(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sech}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Función seno hiperbólico

La función senh es derivable en $\mathbb{R}$. Analizamos la derivada

$$\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

observamos que la derivada no tiene punto crítico, siempre es mayor que cero, es decir que siempre es creciente. De modo que es uno-uno, con lo cual tiene inversa.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Función seno hiperbólico

Analizamos la segunda derivada,

$$\operatorname{senh}''(x) = \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

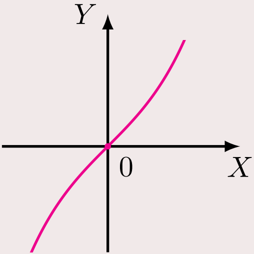
La segunda derivada solo es cero en $x = 0$, veamos si $x = 0$ es punto de inflexión.

- Como $f''(x) < 0$ en $x < 0$, la pendiente de la recta tangente disminuye conforme x aumenta.
- Como $f''(x) > 0$ en $x > 0$, la pendiente de la recta tangente aumenta conforme x aumenta.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Función seno hiperbólico

Gráfica del seno hiperbólico



$$\boxed{f(x) = \operatorname{senh} x}$$

Función coseno hiperbólico

La función $\cosh$ es derivable en $\mathbb{R}$. Analizamos la derivada

$$\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

De modo que la función tiene punto crítico en $x = 0$.

Función coseno hiperbólico

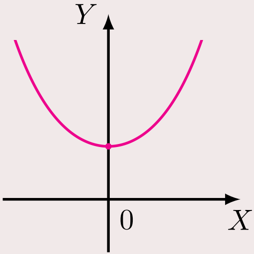
Analizamos la segunda derivada

$$\cosh''(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

que siempre es mayor que cero.
Es decir, la pendiente de la recta a la gráfica siempre aumenta.
En particular, en el punto crítico $x = 0$ donde $\cosh'(x) = 0$ tenemos un punto de mínimo.

Función coseno hiperbólico

Gráfica del coseno hiperbólico



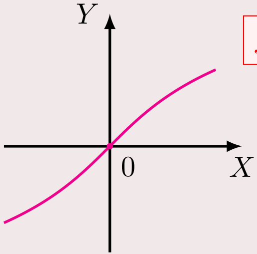
$$\boxed{f(x) = \cosh x}$$

Derivadas de funciones hiperbólicas

- $D_x \operatorname{senh}(x) = \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}.$
- $D_x \cosh(x) = \operatorname{senh}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$
- $D_x \tanh(x) = \operatorname{sech}^2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$
- $D_x \coth(x) = -\operatorname{csch}^2(x), \quad x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$
- $D_x \operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x) \tanh(x), \quad x \in \mathbb{R}.$
- $D_x \operatorname{csch}(x) = -\operatorname{csch}(x) \coth(x), \quad x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$

Función seno hiperbólico inverso

$$y = \operatorname{senh}(x) \iff x = \operatorname{arcsenh}(y).$$



$$\boxed{f(x) = \operatorname{arcsenh} x}$$

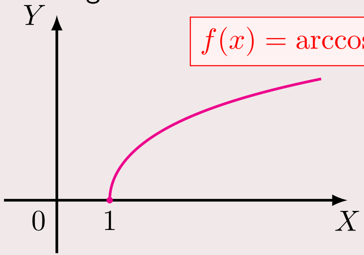
- $\operatorname{Dom}(\operatorname{arcsenh}) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{Ran}(\operatorname{arcsenh}) = \mathbb{R}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Función coseno hiperbólico inverso

$$y = \cosh(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{arccosh}(y).$$

Restringimos $\cosh$ a la rama creciente $E = [0, +\infty[$.



- $\operatorname{Dom}(\operatorname{arccosh}) = [1, +\infty[$
- $\operatorname{Ran}(\operatorname{arccosh}) = [0, +\infty[$

Forma explícita de la función $f(x) = \operatorname{arcsenh}(x)$

Se tiene, $y = \operatorname{arcsenh}(x) \iff x = \operatorname{senh}(x)$. Esto es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ e^{2y} - 2xe^y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Tomamos como variable e^y, luego

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}$$

Forma explícita de la función $f(x) = \operatorname{arcsenh}(x)$

Como $e^y > 0$, se tiene

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

de modo que

$$y = \operatorname{arcsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Forma explícita de la función $f(x) = \operatorname{arccosh}(x)$

Se tiene, $y = \operatorname{arccosh}(x) \iff x = \cosh(x)$. Esto es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ e^{2y} - 2xe^y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Tomamos como variable e^y, luego

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Forma explícita de la función $f(x) = \operatorname{arccosh}(x)$

Como $x \notin]-1, 1[$ y $e^y > 1$, pues hemos elegido esa rama para la inversa de $\cosh$. Luego

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

de modo que

$$y = \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Tabla funciones hiperbólicas inversas

Función inversa f^{-1}	$\mathrm{Dom}(f^{-1})$
$\operatorname{arcsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$[1, +\infty[$
$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$	$]-1, 1[$
$\operatorname{arccoth}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1-x}{1+x})$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
$\operatorname{arcsech}(x) = \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})$	$]0, 1]$
$\operatorname{arccsch}(x) = \ln(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\lvert x\rvert})$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivada de la función seno hiperbólico inverso

De la forma explícita $\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, derivamos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{d}{dx}\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}
$$

Derivada de la función seno hiperbólico inverso

También, si derivamos a ambos lados de $\operatorname{senh}(\operatorname{arcsenh}(x)) = x$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsenh}(x))}\\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{2}{e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} + e^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}}\\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{1+x^2+x\sqrt{x^2+1}}\\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas

- $D_x \operatorname{arcsenh}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $D_x \operatorname{arccosh}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
- $D_x \operatorname{arctanh}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas

- $D_x \operatorname{arccoth}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$
- $D_x \operatorname{arcsech}(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1$
- $D_x \operatorname{arccsch}(x) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}, \quad x \neq 0$

Sesión 01

[t]Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Ron Larson - Bruce Edwards
Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA