Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Junio 17, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Coordenadas polares

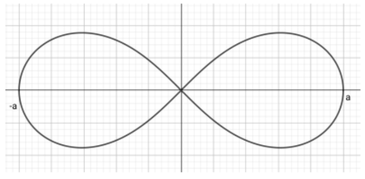
Hasta aquí hemos trabajado siempre con el sistema rectangular cartesiano de coordenadas que es la forma más usada de representar puntos del plano mediante pares de números.
Sin embargo en algunas ocasiones se necesita emplear un convenio diferente al cartesiano. Por ejemplo, en el trabajo de las carreteras, las curvas no se pueden hacer de cualquier manera, se debe lograr que la "curvatura" vaya aumentando gradualmente hasta ser máxima en el centro de la curvatura, a partir de donde comienza de nuevo a disminuir la curvatura hasta que la curva se convierte nuevamente en una recta.
Las curvas más frecuentemente usadas son las hipérbolas y la Lemniscata de Bernoulli. Esta curva, por cierto, también aparece en el análisis de ciertas antenas de radio.

Lemniscatas

Usualmente se llama Lemniscata a una curva en el plano que tiene forma de ocho. La más conocida es la Lemniscata de Bernoulli, cuya ecuación en forma cartesiana es:

$$(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0.$$

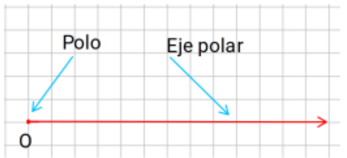
Lo principal es notar que no es posible expresarla en forma explícita, despejando y como función de x. Su gráfica es:

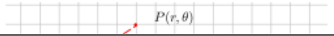


Coordenadas polares

Vamos a presentar una manera diferente de asignarle a cada punto del plano un par de coordenadas, el llamado sistema polar. En este sistema algunas curvas, como la lemniscata, tienen ecuaciones mucho más simples.
En lugar de dos ejes que se intersecan a 90° en el origen, el sistema polar utiliza como referencia un punto, llamado polo, y un semieje que comienza en el polo y que se denomina eje polar.

Las coordenadas polares de un punto P del plano son:
r: distancia dirigida (con signo) de P a Q.
θ: ángulo (en radianes) desde





Coordenadas polares

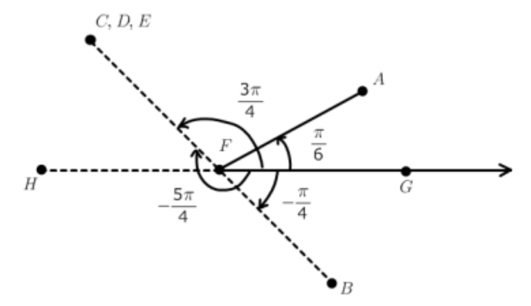
Convenio de signos:

r: Positivo si se mide en la dirección del lado final de θ.

θ: Positivo si el ángulo se genera por el movimiento del eje polar en sentido
antihorario.
Negativo si el ángulo se genera por el movimiento del eje polar en
sentido horario.

Ejemplo

$A\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right), B\left(2,-\dfrac{\pi}{4}\right), C\left(2,\dfrac{3\pi}{4}\right), D\left(-2,-\dfrac{\pi}{4}\right), E\left(2,-\dfrac{5\pi}{4}\right),$
$F(0,\pi), G(3,0), H(3,\pi).$



Nótese que aunque cada par ordenado solo corresponde a un punto

Curvas en coordenadas polares

Una ecuación en r, θ de la forma:

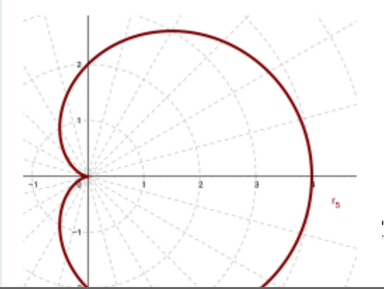
$$r = f(r, \theta), \qquad \text{o de forma más general} \quad F(r, \theta) = 0,$$

se satisface, en general, para infinitos pares (r, θ).
Trazando en el plano polar este conjunto infinito de puntos se obtiene usualmente un curva que se denomina "gráfica" de la ecuación polar.

Ejemplo

$$r = 2 + 2\cos\theta.$$

- Si $\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 4.$
- Cuando θ aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$, r disminuye de 4 a 2.
- Cuando θ aumenta de $\frac{\pi}{2}$ a π, r disminuye de 2 a 0.
- Cuando θ aumenta de π a $\frac{3\pi}{2}$, r aumenta de 0 a 2



Relación entre coordenadas cartesianas y polares

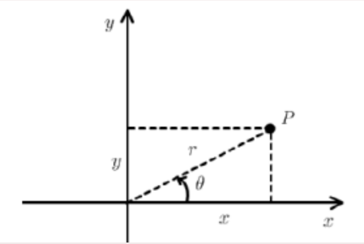
Tomemos un sistema cartesiano y uno polar superpuestos, de modo que el polo y el origen coincidan y el eje polar corresponda con el semieje OX positivo, entonces un punto P del plano tiene coordenadas cartesianas (x, y) y polares (r, θ).
En la figura se muestra un caso en que $r > 0$.
Se tiene

$$x = r\cos\theta \ ,$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \ ,$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \ ,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \ .$$



Ejemplo

- Cartesianas: $(2,1)$.
  Polares:

$$r = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 0.464 \text{ rad.}$$

  Luego las coordenadas en polares es: $(\sqrt{5}, 0.464)$.

- Polares: $(3, \frac{\pi}{6})$.
  Cartesianas:

$$x = 3\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$y = 3\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}.$$

Ejemplo

Lemniscata.
En cartesianas es:

$$(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$$

usando las identidades de las coordenadas polares

$$(r^2)^2 - a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

$$r^4 - a^2r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

$$r^2(r^2 - a^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)) = 0$$

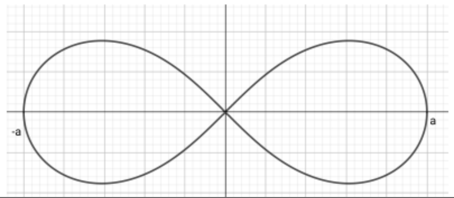
$$r^2 = 0 \quad \text{(el polo) ó} \quad r^2 = a^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$r^2 = a^2\cos 2\theta \quad \text{Lemniscata}$$

Ejemplo

Nótese que (en la ecuación $r^2 = a^2 \cos 2\theta$):

- Para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \cos 2\theta \leq 1$ y se obtienen dos valores de r, uno positivo y otro negativo;
- Para $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$, se tiene $\frac{\pi}{2} < 2\cos\theta < \frac{3\pi}{2}$ y $\cos 2\theta < 0$, por lo cual no existen puntos en el sector $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$;
- Después de $\frac{3\pi}{4}$, $\cos 2\theta$ se hace de nuevo positivo y aparece la otra parte de la Lemniscata.



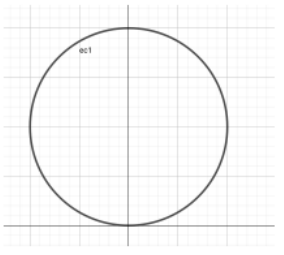
Ejemplo

Polares: $r = 4\cos\theta$.

Cartesianas:

$$r^2 6 = 4r\operatorname{sen}\theta$$
$$x^2 + y^2 = 4y$$
$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$
$$x^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

Circunferencia con centro en $(0,2)$ y radio 2.

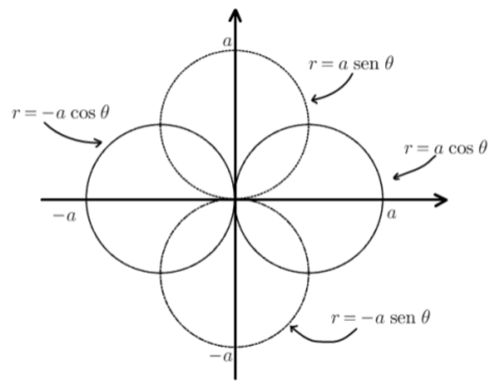


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Circunferencias notables

De modo similar al ejemplo anterior se tiene:



Ejemplo

Trazar las circunferencias:

- $r = 3\cos\theta$.
- $r = -2\,\mathrm{sen}\,\theta$.
- $r = 1$.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA