Universidad Nacional de Ingeniería **Jueves, 30 de noviembre de 2023**

Facultad de Ciencias **Periodo académico: 2023-2**

Escuela Profesional de Matemática

Práctica Calificada N° 5

Curso: Cálculo Diferencial BMA01

---

1. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones con una adecuada justificación: (5pts)

   a) Por la regla de L'Hôpital se tiene que
   $$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-5x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x-2}=3.$$

   b) Es posible aplicar la regla de L'Hôpital, luego de una manipulación, al siguiente límite:
   $$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{1/x}.$$

   c) $p(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2$ es el polinomio de Taylor de orden 2 para $f(x)=e^{\operatorname{sen}(x)}$, alrededor de $x=0$.

   d) El Polinomio de Taylor alrededor de $x=0$ con los tres primeros términos no-nulos de la función f, dada por $f(x)=\operatorname{senh}(x)$, es $p(x)=\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$.

Solución.

a) (1pto) FALSO.

Se ha hecho una factorización y simplificación
$$\frac{2x^2-x-1}{3x^2-5x+2}=\frac{(2x+1)(x-1)}{(3x-2)(x-1)}=\frac{2x+1}{3x-2}$$
no se ha considerado el cociente de derivadas: $\dfrac{4x-1}{6x-5}$.

b) (1pto) VERDADERO.

Considerando
$$\frac{x}{e^{-x}} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{e^{-x}}\to 0 \quad \text{cuando } x\to -\infty$$

c) (1pto) VERDADERO.

Tenemos que $f'(x)=\cos(x)\,e^{\operatorname{sen}x}$, $f''(x)=-\operatorname{sen}(x)\,e^{\operatorname{sen}x}+\cos^2(x)\,e^{\operatorname{sen}x}$, luego
$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=1$$
así
$$P_2[f,0](x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2$$

d) (2pts) VERDADERO.

Tenemos que $f^{(k)}=\operatorname{senh}$ si k es par, y $f^k=\cosh$, luego

$f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f^{(3)}(0)=1$, $f^{(4)}(0)=0$, $f^{(5)}(0)=1$

Así
$$p(x)=x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5$$
es el polinomio de Taylor de f alrededor de 0, con los tres primeros términos no-nulos.

$\square$

2. a) Evalúe el siguiente límite

$$L = \lim_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 3x)^{1/x}$$

(2 pts)

b) ¿Para que valores de a y b es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2} \right) = 0$$

(3 pts)

Sugerencia: si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty$ *cuando* $x \to 0$, *entonces* $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Solución.

a) Hacemos $y = (1 + \operatorname{sen} 3x)^{1/x}$, tomando logaritmo a ambos lados, se tiene $\ln y = \dfrac{1}{x} \ln (1 + \operatorname{sen} 3x)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ln y &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (1 + \operatorname{sen} 3x)}{x} \\
\lim_{x\to 0^+} \ln y &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+\operatorname{sen} 3x} \cdot 3\cos 3x}{1} && \text{Aplicamos L'Hôpital} \\
\lim_{x\to 0^+} \ln y &= \lim_{x\to 0^+} \frac{3\cos 3x}{1 + \operatorname{sen} 3x} \\
\lim_{x\to 0^+} \ln y &= 3
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ln y &= 3 \\
\ln \left(\lim_{x\to 0^+} y \right) &= 3 \\
\lim_{x\to 0^+} y &= e^3
\end{aligned}$$

b) Sea $L = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x^2} + a + \dfrac{b}{x^2} \right)$. Luego,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x + ax^3 + bx}{x^3} \\
L &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x + 3ax^2 + b}{3x^2} && \text{Aplicamos L'Hôpital}
\end{aligned}$$

Para que este último límite exista, $b + 2 = 0 \to b = -2$.

Finalmente, reemplazamos

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x + 3ax^2 + 2}{3x^2} \\
L &= \lim_{x\to 0} \frac{-4\operatorname{sen} 2x + 6ax}{6x} && \text{Aplicamos L'Hôpital} \\
L &= \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos 2x + 6a}{6} && \text{Aplicamos L'Hôpital} \\
L &= \frac{6a - 8}{6}
\end{aligned}$$

Como $L = 0$, se tiene $a = \dfrac{4}{3}$

$\square$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un función 3-veces derivable. Sean x_0, x_1, x_2 son reales donde $x_1 = x_0 + h$ y $x_2 = x_1 + h$ con $h > 0$ pequeño. Demuestre que
$$f''(x_1) \approx \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} \qquad \text{(5pts)}$$

Solución.

Por el teorema de Taylor: $f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + r_2(x_1)$. Si consideramos $r_2(x_1)$ como un número pequeño, entonces
$$f(x) \approx f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x - x_1)^2$$

Así,
$$f(x_0) \approx f(x_1) - f'(x_1)h + \frac{f''(x_1)}{2!}h^2 \qquad (1)$$
$$f(x_2) \approx f(x_1) + f'(x_1)h + \frac{f''(x_1)}{2!}h^2 \qquad (2)$$

De (1) más (2): $f''(x_1) \approx \dfrac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2}$ □

4. El costo de comprar x m^2 (metros cuadrados) de cierto material es $f(x)$, siendo $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ 3-veces derivable tal que $2 = f(4) = f'(4) = 2f^{(2)}(4) = f^{(3)}(4)$. Si con este material se desea construir láminas cuadradas.

   a) Si $f^{(3)}$ es decreciente con $f^{(3)} \geq 0$ en $[4, 5]$, determine una cota de error al aproximar el costo $f(4.1)$ con la evaluación de 4.1 en $T_2(f, 4)$. (2.5 pts)

   b) Modelar la función de costo g que resulta al considerar que la lámina cuadrada tenga u m (metros) de lado. Luego calcular $T_2(g, 2)$. (2.5 pts)

Solución.

a) Por el Teorema del resto de Lagrange y al ser $f^{(3)}$ decreciente y $f^{(3)} \geq 0$ en $[4, 5]$
$$|f(4.1) - T_2(f,4))(4.1)| \leq \frac{1}{6}(4.1 - 4)^3 \operatorname{máx}\left\{ f^{(3)}(\eta) \;:\; \eta \in \langle 4,\, 4.1\rangle \right\} = \frac{f^3(4)}{6}10^{-3} = \frac{10^{-3}}{3}.$$

b) Si la lámina cuadrada tenie u m de lado entonces se necesita u^2 m^2 de material, resultando en la función de costo $g : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definido como
$$g(u) = f(u^2)$$

Luego $g'(u) = f'(u^2)(2u)$, $g^{(2)}(u) = f^{(2)}(u^2)(4u^2) + 2f'(u^2)$, por tanto
$$\begin{aligned} T_2(g, 2)(x) =& f(4) + f'(4)(4)(x - 2) + [f^{(2)}(4)(16) + 2f'(4)]\frac{(x - 2)^2}{2} \\ =& \, 2 + 8(x - 2) + 10(x - 2)^2 \end{aligned}$$

□

Universidad Nacional de Ingeniería **Jueves, 16 de noviembre de 2023**
Facultad de Ciencias **Periodo académico 2023-2**
Escuela Profesional de Matemática

Solucionario de la PC 4

Curso: Cálculo diferencial BMA01

---

1. En cada item, justifique si el enunciado es verdadero o falso. (5pts)

   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces g es derivable.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ambas derivables, entonces $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ con $f'' > 0$, entonces la gráfica de $h(x) = [f(x)]^2$ es cóncava para arriba.

   d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con hasta tercera derivada continua. Si $a \in \mathbb{R}$ cumple que $f'(a) = f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$ entonces a es un punto de inflexión de f.

   Solución:

   a) (*1* pto) **Falso:** $f(x) = x^3$ es diferenciable pero su inversa $g(x) = \sqrt[3]{x}$ no es diferenciable en el origen.

   b) (*1* pto) **Verdadero:** Tenemos que $(g \circ f)(x) = (x)$, luego $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$, así $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c) (*1* pto) **Verdadero:** Tenemos que $h'(x) = 2f'(x)f(x)$, luego $h''(x) = 2[f'(x)]^2 + 2f''(x)f(x) > 0$, así la gráfica de h es cóncava hacia arriba.

   d) (*2* pts) **Verdadero:** Digamos que $f'''(a) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f''(a) < f''(w)$ para $a - \delta < x < a < w < a + \delta$, esto es

   $$f''(x) < 0 < f''(w)$$

   así a es un punto de inflexión de f.

2. Dado $f(x) = x^3 + 4x + 2$, determine la pendiente de la recta tangente al gráfico de $g(x) = xf^{-1}(x)$ en el punto $x = 7$. (5pts)

   Solución: Tenemos que $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0$, luego $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tenemos la inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable y

   $$[f^{-1}](f(w)) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{3w^2 + 4} \qquad \forall\, w \in \mathbb{R}$$

   luego

   $$[f^{-1}]'(x) = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2 + 4} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

   .

   Como $f(1) = 7$ entonces $f^{-1}(7) = 1$, luego $[f^{-1}]'(7) = \dfrac{1}{7}$. Así

   $$g'(x) = f^{-1}(x) + x[f^{-1}]'(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{g'(7) = 2}\ .$$

3. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ siendo I un intervalo tal que $f'' > 0$ en I, así la gráfica de f es cóncava hacia arriba. Si $x_0 \in I$ es un punto crítico de f, dé una prueba formal (demostración) de que $f(x_0)$ es mínimo global de f. (5pts)

   Solución: Tenemos que $f' : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente, luego tenemos que para $x < x_0 < w$:

$$f'(x) < f'(x_0) < f'(w) \qquad \text{esto es} \qquad f'(x) < 0 < f'(w)$$

   Luego por el criterio de la primera derivada $f(x_0)$ es el mínimo global de $f : I \to \mathbb{R}$.

4. *a*) Una partícula se mueve en línea recta de tal forma que su distancia recorrida al cabo de t segundos es dada por $x(t) = 2t^2 + t$. Determine *la velocidad promedio* de la partícula entre los instantes $t = 3$ y $t = 5$. (2.5 pts)

   b) Un cubo de metal de lado de longitud $x > 0$ se está expandiendo uniformemente como consecuencia de calentamiento. Determine **la tasa de cambio instantánea** del volumen con respecto a la longitud de su lado cuando $x = 2$. (2.5 pts)

   Solución:

   a) Tenemos que la velocidad promedio entre los instantes $t = 3$ y $t = 5$ es:

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{x(5) - x(3)}{5 - 3} = \frac{55 - 21}{2} = 17\,.$$

   b) La función volumen es $V(x) = x^3$, donde $x > 0$. Luego $V'(x) = 3x^2$, así

$$V'(2) = 12$$

   es la tasa de cambio instantánea del volumen con respecto a la longitud cuando $x = 2$.

Universidad Nacional de Ingeniería **Jueves, 2 de noviembre de 2023**
Facultad de Ciencias **Semestre: 2023-2**
Escuela Profesional de Matemática

Solucionario de la PC 3

Curso: Cálculo diferencial BMA01

---

1. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique su respuesta.

   a) Se puede aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = \pi/2 \\ \tan x & , \quad x \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\} \end{cases}$. (1 pto)

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ con máximo global en $x = a$ entonces $\ln(f)$ también tiene un máximo global en $x = a$. (2 pts)

   c) Sean $f, g : [0, 4] \to \mathbb{R}$ diferenciables. Si las gráficas de f y g se intersecan en el punto $(2, 2)$ de modo que las rectas tangentes en dicho punto forman un ángulo de $90°$, entonces necesariamente $f'(2) \neq 0$. (2 pts)

   Solución:

   a) **Falso:** No se puede aplicar por que f no es continua en $x = \pi/2$.

   b) **Verdadero:** A partir de

   $$f(x) \leq f(a) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

   y del hecho que ln es creciente, tenemos que

   $$\ln[f(x)] \leq \ln[f(a)] \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

   luego $\ln \circ f$ tiene un máximo global en $x = a$.

   c) **Verdadero:** Por contracción: si $f'(2) = 0$ tendríamos que el ángulo de inclinación ϕ de la recta tangente a la gráfica de g es $\pi/2$, pero no está definida la tangente de $\pi/2$, así no existitía $g'(2)$, lo que es una contradicción con la hipótesis inicial. Por lo tanto $f'(2) \neq 0$ necesariamente.

2. *a)* Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

   $$h(x) = f^2(x) - 1 \qquad \text{en } x = 0 \qquad (2.5 \text{ pts})$$

   b) Dada $g(x) = 3x^2 + 5$ se define $k(x) = [g(x)]^{17}$, halle $k'(f(x))$. (2.5 pts)

   Solución:

   a) Tenemos que

   $$h'(x) = 2f(x)f'(x)$$
   $$h'(x) = 2\sin x \cos x \quad \to \quad h'(0) = 0$$

   luego una ecuación de la recta tangente (horizontal) a la gráfica de h en $x = 0$ es $\mathcal{L} :\ \boxed{y = -1}$.

b) Tenemos

$$k'(x) = 17[g(x)]^{16} g'(x) \quad \to \quad k'(x) = 17[3x^2+5]^{16}(6x)$$

así

$$\boxed{k'(f(x))) = 102 \operatorname{sen} x (3 \operatorname{sen}^2 x + 5)^{16}}$$

3. Un cohete que se tiene emplazado al pie de una colina cuya pendiente es de 1/5 se dispara hacia la loma y sigue una trayectoria dada por

$$y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x$$

a) Determine el punto P de la colina donde el cohete choca.

(1 pto)

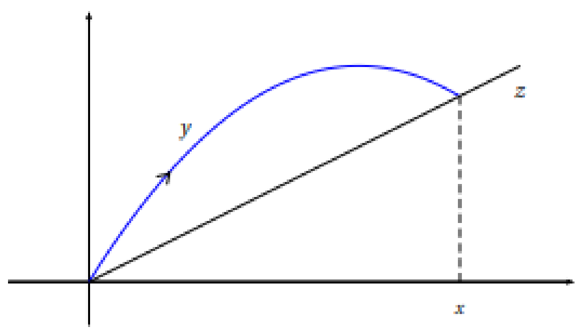
b) ¿Cuál es la pendiente de la trayectoria del cohete cuando choca contra la colina?

(2 pts)

c) Calcule (x_1, y_{max}) para la trayectoria del cohete.

(2 pts)

Solución:



a) La colina tiene por ecuación $y = \frac{1}{5}x$, resolviendo

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x \\ \\ y = \dfrac{1}{5}x \end{cases} \quad \to \quad x = 0 \ \vee \ x = 5$$

luego $\boxed{P = (5,1)}$ es el punto de choque del proyectil con la colina.

b) Derivando y con respecto de x en la ecuación de la trayectoria:

$$\frac{dy}{dx}(x) = \ -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$$

luego

$$\boxed{\frac{dy}{dx}(5) = \ -\frac{4}{5}}$$

es la pendiente de la trayectoria cuando choca contra con la colina.

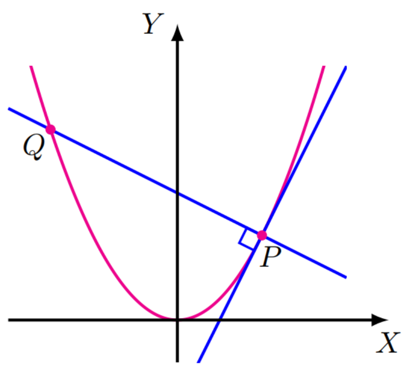
c) Tenemos

$$y = -\frac{1}{5}(x-6)x$$

entonces $y_{\text{máx}}$ cuando $x_1 = 3 < 5$ así

$$\boxed{(x_1, y_{\text{máx}}) = \left(3, \frac{9}{5}\right)}$$

4. Sea $P = (a, a^2)$ un punto del primer cuadrante que está en la parábola $y = x^2$, así $a > 0$. Sea Q el punto donde la recta normal en P interseca a la parábola tal como se muestra en la figura siguiente



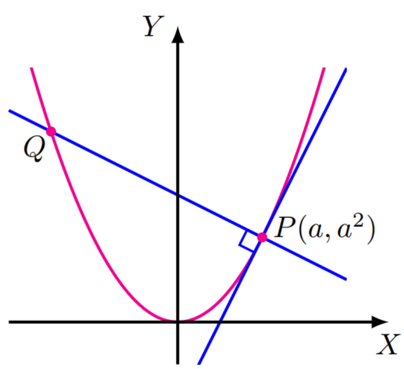
a) Halle una ecuación de la recta normal a la parábola en P. (1 pto)

b) Halle el punto Q en función de $a > 0$. (1 pto)

c) Si la segunda coordenada de Q es $g(a)$, demuestre que la función $g : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ satisface $g''(a) > 0$ para todo $a > 0$. (1 pto)

d) Analice la existencia de un mínimo global para g. (2 pts)
Sugerencia: analice los cambios de signo de g'.

Solución:



a) Tenemos que $2a$ es la pendiente de la recta tangente a $y = x^2$ en el punto $P = (a, a^2)$, luego $-\dfrac{1}{2a}$ es la pendiente de la recta normal en el punto P, así

$$\mathcal{L}^{\perp} : \ y = a^2 - \frac{1}{2a}(x-a)$$

esto es

$$\mathcal{L}^{\perp}: \boxed{y = a^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}x}$$

b) El punto Q es el punto de intersección entre la parábola y $\mathcal{L}^{\perp}$ diferente de P, tenemos

$$\begin{cases} y = x^2 \\ \\ y = a^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a}x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -\left(a + \frac{1}{2a}\right) \ \vee \ x = a$$

Como $Q \neq P$ entonces $\boxed{Q = \left(-\left(a + \dfrac{1}{2a}\right), \left(a + \dfrac{1}{2a}\right)^2\right)}$.

c) Tenemos

$$g(a) = a^2 + \frac{1}{4a^2} + 1$$

luego

$$\boxed{g''(a) = 2 + \frac{3}{2a^4} > 0}$$

d) Tenemos que

$$g'(a) = 2a - \frac{1}{2a^3} = \frac{4a^2 - 1}{2a^3}$$

$g'(a) = 0$ si y solo si $2a = \dfrac{1}{2a^3}$, luego $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ es el único punto crítico de g.

Notamos que $g' < 0$ en $\langle 0, 1/\sqrt{2}\rangle$ y $g' > 0$ en $\langle 1/\sqrt{2}, +\infty\rangle$.

Por lo tanto g tiene un mínimo global en $\boxed{a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ con valor mínimo $\boxed{g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2}$

Universidad Nacional de Ingeniería **Jueves, 30 de noviembre de 2023**

Facultad de Ciencias **Periodo académico: 2023-2**

Escuela Profesional de Matemática

Práctica Calificada N° 5

Curso: Cálculo Diferencial BMA01

---

1. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones con una adecuada justificación: (5pts)

   a) Por la regla de L'Hôpital se tiene que
   $$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-5x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x-2}=3.$$

   b) Es posible aplicar la regla de L'Hôpital, luego de una manipulación, al siguiente límite:
   $$\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{1/x}.$$

   c) $p(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2$ es el polinomio de Taylor de orden 2 para $f(x)=e^{\operatorname{sen}(x)}$, alrededor de $x=0$.

   d) El Polinomio de Taylor alrededor de $x=0$ con los tres primeros términos no-nulos de la función f, dada por $f(x)=\operatorname{senh}(x)$, es $p(x)=\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$.

2. a) Evalúe el siguiente límite
   $$L=\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}3x)^{1/x}$$
   (2 pts)

   b) ¿Para que valores de a y b es verdadera la ecuación siguiente?
   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{x^3}+a+\frac{b}{x^2}\right)=0$$
   (3 pts)

   Sugerencia: si $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\to+\infty$ *cuando* $x\to 0$*, entonces* $\nexists\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un función 3-veces derivable. Sean x_0,x_1,x_2 son reales donde $x_1=x_0+h$ y $x_2=x_1+h$ con $h>0$ pequeño. Demuestre que
   $$f''(x_1)\approx\frac{f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)}{h^2}$$
   (5pts)

4. El costo de comprar x m^2 (metros cuadrados) de cierto material es $f(x)$, siendo $f:\langle 0,+\infty\rangle\to\mathbb{R}$ 3-veces derivable tal que $2=f(4)=f'(4)=2f^{(2)}(4)=f^{(3)}(4)$. Si con este material se desea construir láminas cuadradas.

   a) Si $f^{(3)}$ es decreciente con $f^{(3)}\geq 0$ en $[4,5]$, determine una cota de error al aproximar el costo $f(4.1)$ con la evaluación de 4.1 en $T_2(f,4)$. (2.5 pts)

   b) Modelar la función de costo g que resulta al considerar que la lámina cuadrada tenga u m (metros) de lado. Luego calcular $T_2(g,2)$. (2.5 pts)

Universidad Nacional de Ingeniería **Jueves, 16 de noviembre de 2023**
Facultad de Ciencias **Periodo académico: 2023-2**
Escuela Profesional de Matemática

Práctica Calificada N° 4

Curso: Cálculo diferencial BMA01

---

1. En cada item, justifique si el enunciado es verdadero o falso. (5pts)

   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces g es derivable.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ambas derivables, entonces $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ con $f'' > 0$, entonces la gráfica de $h(x) = [f(x)]^2$ es cóncava para arriba.

   d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con hasta tercera derivada continua. Si $a \in \mathbb{R}$ cumple que $f'(a) = f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$ entonces a es un punto de inflexión de f.

2. Dado $f(x) = x^3 + 4x + 2$, determine la pendiente de la recta tangente al gráfico de $g(x) = xf^{-1}(x)$ en el punto $x = 7$. (5pts)

3. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ siendo I un intervalo tal que $f'' > 0$ en I, así la gráfica de f es cóncava hacia arriba. Si $x_0 \in I$ es un punto crítico de f, dé una prueba formal (demostración) de que $f(x_0)$ es mínimo global de f. (5pts)

4. *a*) Una partícula se mueve en línea recta de tal forma que su distancia recorrida al cabo de t segundos es dada por $x(t) = 2t^2 + t$. Determine <u>*la velocidad promedio*</u> de la partícula entre los instantes $t = 3$ y $t = 5$. (2.5 pts)

   b) Un cubo de metal de lado de longitud $x > 0$ se está expandiendo uniformemente como consecuencia de calentamiento. Determine **la tasa de cambio instantánea** del volumen con respecto a la longitud de su lado cuando $x = 2$. (2.5 pts)

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Jueves, 2 de noviembre de 2023
Semestre: 2023-2

Práctica Calificada 3

Curso: Cálculo diferencial BMA01

---

1. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique su respuesta.

   a) Se puede aplicar el teorema de Rolle a $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = \pi/2 \\ \tan x & , \quad x \in [0,\pi] \setminus \{\pi/2\} \end{cases}$. (1 pto)

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ con máximo global en $x = a$ entonces $\ln(f)$ también tiene un máximo global en $x = a$. (2 pts)

   c) Sean $f, g : [0,4] \to \mathbb{R}$ diferenciables. Si las gráficas de f y g se intersecan en el punto $(2,2)$ de modo que las rectas tangentes en dicho punto forman un ángulo de $90°$, entonces necesariamente $f'(2) \neq 0$. (2 pts)

2. *a)* Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

   $$h(x) = f^2(x) - 1 \qquad \text{en } x = 0$$ (2.5 pts)

   b) Dada $g(x) = 3x^2 + 5$ se define $k(x) = [g(x)]^{17}$, halle $k'(f(x))$. (2.5 pts)

3. Un cohete que se tiene emplazado al pie de una colina cuya pendiente es de $1/5$ se dispara hacia la loma y sigue una trayectoria dada por

   $$y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x$$

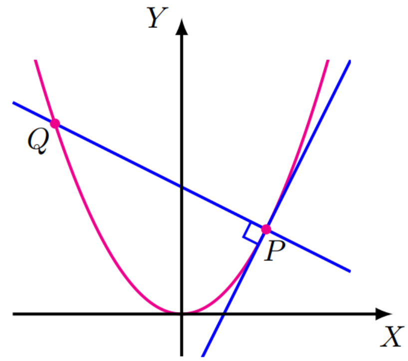
   a) Determine el punto P de la colina donde el cohete choca. (1 pto)

   b) ¿Cuál es la pendiente de la trayectoria del cohete cuando choca contra la colina? (2 pts)

   c) Calcule (x_1, y_{max}) para la trayectoria del cohete. (2 pts)

(*Continua en la siguiente página*)

4. Sea $P = (a, a^2)$ un punto del primer cuadrante que está en la parábola $y = x^2$, así $a > 0$. Sea Q el punto donde la recta normal en P interseca a la parábola tal como se muestra en la figura siguiente



a) Halle una ecuación de la recta normal a la parábola en P. (1 pto)

b) Halle el punto Q en función de $a > 0$. (1 pto)

c) Si la segunda coordenada de Q es $g(a)$, demuestre que la función $g : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ satisface $g''(a) > 0$ para todo $a > 0$. (1 pto)

d) Analice la existencia de un mínimo global para g. (2 pts)
Sugerencia: analice los cambios de signo de g'.

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Jueves, 14 de diciembre de 2023
Periodo académico: 2023-2

Examen Final

Curso: Cálculo diferencial — BMA01

1. Determinar la verdad o la falsedad de los siguientes enunciados. Justifique su respuesta.

   a) Si $f(x) = e^{3x+1} + \ln(x)$, entonces $f^{(2)}(x) = 3^2 e^{3x+1} + \dfrac{1}{x^2}$. (1 pto)

   b) La función $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - \frac{8}{x} - 6\ln(x) + 7$, tiene como puntos críticos a $x = 2$ y $x = 4$. (1 pto)

   c) La función f del item anterior, tiene máximo absoluto en $x = 1$. (1 pto)

   d) Existe el límite $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{sen} x)^{\sec x}$. (2 pts)

2. En cada caso, determine las dimensiones de una caja de base cuadrada con

   a) Volumen 12 y área superficial mínima. (2.5 pts)

   b) Área de superficie 20 y volumen máximo. (2.5 pts)

3. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f''' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, sea $P(x) = P_2[f, 0](x)$ el segundo polinomio de Taylor de f alrededor del origen. Pruebe que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0. \qquad \text{(5 pts)}$$

Nota: Puede usar todo lo anterior a Polinomios de Taylor.

4. La lemniscata es una curva C cuya ecuación polar está dada por

$$r = \sqrt{2\operatorname{sen}(2\theta)}.$$

   a) Determine rr', rx' y ry', todos en $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. (3 pts)

   (Donde $'$ es la derivada con respecto de θ)

   b) Determine una ecuación cartesiana de la recta tangente a C cuando $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. (2 pts)

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Lunes, 12 de junio de 2023
Semestre: 2023-1

Práctica Calificada 4

Curso: Cálculo diferencial **BMA01**

---

1. Justifique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. (5pts)

   a) La aproximación lineal es exacta únicamente en el caso que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un polinomio de grado menor o igual a 1.

   b) Si $f^{(n)}(x)$ existe para todo $x \in [a, b]$ entonces $f^{(n-1)}$ es acotada en $[a, b]$, donde $n > 1$.

   c) Se puede aplicar aproximación lineal a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto $x_0 = 0$ y $h = 0.1$ para aproximar $f(0.1)$.

   d) Es posible aplicar el teorema de Rolle a la función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x - 1| + x(x - 2)$ para todo $x \in [0, 2]$.

2. Consideremos a la curva (5pts)

$$x^2 - y = \cos\left(\frac{2}{3}\pi xy\right)$$

   Determine la recta tangente a $y = y(x)$ en el punto $(1, 1/2)$.

3. Sea $n > 1$ un número entero. Utilizando el teorema del valor medio, demuestre que para cada $x > 0$ se tiene que (5pts)

$$\sqrt[n]{1+x} < 1 + \frac{x}{n}.$$

4. Un cable de longitud L metros se divide a una distancia $0 \leq x \leq L$ de uno de sus extremos. Con el primer pedazo de cable (si $x > 0$) se forma un el borde de un cuadrado y con el otro se forma una circunferencia (si $x < L$).

   a) Encuentre una función continua $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ que determine la suma de las áreas que encierran el borde del cuadrado y la circunferencia. (1pto)

   b) Explique porqué la función f alcanza su máximo en un punto de $[0, L]$. (1pto)

   c) Indicar el máximo entre los 2 números: $f(0)$ y $f(L)$. (1pto)

   d) Si $L = 4 + \pi$, calcule el valor máximo de f y un punto $x \in [0, 4 + \pi]$ donde alcanza el valor máximo. (2pts)

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Semestre 2023-1

Práctica Calificada N° 3

Curso: Cálculo diferencial **BMA01**

---

1. En cada enunciado siguiente indique si es verdadero o falso. Justificando su respuesta. (5 pts)

   1. La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es acotada, entonces f alcanza su valor máximo. V
   2. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(-1) < 0 < f(1)$, entonces existe $c \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(c) = 0$. F
   3. La recta tangente a $\mathcal{C}: \ y = x^2 + \operatorname{sen} x$ en el punto $(0,0)$ tiene pendiente 1.
   4. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f'_+(0) < 0 < f'_-(1)$, entonces existe f alcanza su mínimo en algún punto $c \in \langle 0, 1 \rangle$.

2. Considere la curva C definida como (5 pts)

$$y = 9 - 4x - \frac{8}{x}, \qquad x > 0.$$

   El punto $P(x,y)$ en C tiene la coordenada $x = 2$. La recta tangente en P intercepta al eje X en A y la recta normal en P intercepta al eje X en B. Encuentre el área del triángulo APB.

3. El número n es un entero positivo y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función

$$f(x) = \sqrt{e^{x^n} + 1}$$

   a) (1pt) Calcule $f'(1)$.

   b) (2pt) Determine para qué valores de n se tiene que

$$f'(x) = x \left(\frac{f^2(x) - 1}{f(x)} \right), \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

   c) (2pt) Determine para qué valores de n se tiene que

$$f'(x) \neq 0, \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

(*Continua en la siguiente página la pc*)

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que (5 pts)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} & , x > 0 \\ \dfrac{\cos(x^3) - 1}{x^2} & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Determine si existe $f'(0)$.

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022_1**

[Cod: BMA01] Examen Sustitutorio [Curso: Cálculo Diferencial]
[Sección:ABCD] [Profesor: R. Metzger/G. Panizo/J. Valverde/F. Villanueva]

Duración: 100 minutos

1. Resuelva cada uno de los siguientes ítems:

   a) Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que para cada $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Si f es continua en 0, demuestre que f es continua en su dominio. (2,5 pts.)

   b) Si f es una función derivable en $\mathbb{R}$ y a es un número real tal que para cada $x \in \mathbb{R}$: $f(x+a) = f(x)$, utilice la definición de derivada para demostrar que $f'(x+a) = f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (2,5 pts.)

Solución (a).

Sea a un punto cualquiera en $\mathbb{R}$, se debe de probar que: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Asmismo, se puede ver que de la propidad de f se tiene que $f(0) = 0$ Haciendo el cambio de variable $x = a + h$ se tiene:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

aplicando la propiedad de f y de limite de una suma:

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}\{f(a) + f(h)\} = \lim_{h\to 0} f(a) + \lim_{h\to 0} f(h) = f(a) + f(0) = f(a)$$

Con esto se acaba de probar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ para cualquier a en el dominio de f.

Solución (b).

aplicando definición de derivada:

$$f'(x+a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+a+h) - f(x+a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

esto último aplicando la propiedad de f y definición de derivada.

2. Resuelva cada uno de los siguientes ítems:

a) Sea $f\colon \left[0;\frac{\pi}{2}\right\rangle \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2tanx - \frac{\pi}{cosx}.$$

Determine una extensión continua g: $\longrightarrow \mathbb{R}$ de f , o justifique por qué no existe.

(3 pts.)

<u>Solución (a)</u>. Dado que la regla de correspondencia de la función f se expresa como

$$f(x) = \frac{2senx - \pi}{cosx}$$

se tiene que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$$

Por lo tanto, f no tiene una extensión continua a $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Sea $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\colon\ f(x) = \frac{cosx - 1}{\sqrt[3]{x}+1}.$$

Determine la función f' indicando su dominio. (2 pts.)

<u>Solución (b)</u>.

Resolución: La función es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$, pues en ese dominio se puede aplicar la derivación de cociente.

Como la función $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ no es derivable en cero, solo se puede determinar usando la definición.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos(x)-1}{\sqrt[3]{x}+1} - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1} = 0.$$

La función f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$.

$Dom(f') = \mathbb{R} - \{-1\}$.

3. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones con una adecuada justificación:

a) Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones y $a \in A'$. Si no existen los límites $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x)$, entonces no existe $\lim\limits_{x\longrightarrow a}[f(x)+g(x)]$. (1 pto.)

<u>Solución (a)</u>. FALSO

Considere las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ . & . \\ 1 & x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ . & . \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

Es claro que no existen

$$\lim_{x\to 0} f(x) \quad , \qquad \lim_{x\to 0} g(x)$$

Pero $\lim\limits_{x\to 0}\{f+g\}(x) = 3$

b) Sean $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es creciente en I, entonces la función $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = e^{f(x)}$ es creciente en I. (1 pto.)

<u>Solución (b)</u>. VERDADERO

La función g es creciente en I, pues es la composición de dos funciones crecientes.

c) Si $f(x) = lnx$, entonces $f'(-1) = -1$. (1 pto.)

<u>Solución (c)</u>. FALSO

$-1 \notin Dom(f)$

d) Existe $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^3 - x^2}$. (1 pto.)

<u>Solución (d)</u>. FALSO

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}/x^3 - x^2 \geq 0\} = \{0\} \cup [1;+\infty\rangle$

Luego, 0 no es punto de acumulación de $Dom(f)$. Por lo tanto, no existe el límite dado.

e) Sea $\mathcal{C}$ una curva cuya ecuación en coordenadas polares es $\mathcal{C}\colon r = f(\theta)$. Si P es un punto cuyas coordenadas polares $(r_0;\theta_0)$ no satisfacen la ecuación de $\mathcal{C}$, entonces P no pertenece a la curva $\mathcal{C}$. (1 pto.)

<u>Solución (e)</u>. FALSO

Consideremos la curva $\mathcal{C}\colon r = cos\theta$. Las coordenadas $(0;\pi)$ no satisfacen la ecuación de $\mathcal{C}$, sin embargo el punto dado (polo) si pertenece a la curva.

4. Considere una elipse de centro $(0;0)$ y semiejes a y b con $a > b$ y cuyo eje focal es el eje X. Sea $A(m;0)$ cualquier punto del eje focal. Halle el punto de la elipse más cercano al punto $A(m;0)$. (5 pts.)

<u>Solución</u>

Para

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

encontramos para la distancia de cualquier punto (x, y) en la elipse desde el punto $(m, 0)$, la expresión

$$d(x) = \sqrt{(x-m)^2 + b^2\left(1 - x^2/a^2\right)},$$

donde $-a \leq x \leq a$. La función $f(x) = d^2$ es convexa ($f'' > 0$). Tiene su mínimo en el mismo x que la función d. El único punto crítico de f está en $x = m/\left(1 - b^2/a^2\right)$. Si este punto se encuentra en el dominio de d, representa el punto mínimo; si no, el mínimo de d corresponde al punto final del eje mayor más cercano a c. En consecuencia, encontramos $x = \frac{m}{(1-b^2/a^2)}$, $y = \pm\frac{b}{a^2-b^2}\sqrt{(a^2-b^2)^2 - a^2m^2}$. $d = b\sqrt{1 - \frac{m^2}{a^2-b^2}}$, si $m \leq a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$, y $x = a$, $y = 0$, $d = m - a$, si $m \geq a\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$.

UNi, 20 de agosto 2022.

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Lunes, 10 de julio de 2023
Semestre: 2023-1

Examen Final

Curso: Cálculo diferencial **BMA01**

1. Indique y justifique si es verdadero o falso cada una de las siguientes afirmaciones: *(4 pts)*
   a) Las gráficas polares de $r = \cos(2\theta)$ y $r = -\cos(2\theta)$ son las mismas. F
   b) $\arctan(\operatorname{senh} x) = \operatorname{arc\,sen}(\tanh x)$.
   c) Si la función f es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ tal que $f'(x) > 0$ para cada x en $]a,b[$, entonces f es convexa en $[a,b]$. F

2. Halle el área máxima que un rectángulo inscrito en la elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

con lados paralelos a los ejes coordenados, puede tener. *(4 pts)*
Sugerencia: ¿Cuál es el vértice superior derecho del rectángulo?

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Pruebe que:
   a) Si $f(tx) = tf(x)$ para todo $t, x \in \mathbb{R}$ entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (*Obs: No se está asumiendo que f es derivable*) *(2 pts)*
   b) Si f es k-veces derivable y $f(tx) = t^k \cdot f(x)$ para todo $t, x \in \mathbb{R}$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c \cdot x^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. *(2 pts)*

4. Considere la curva polar $\mathcal{C}$ de ecuación polar

$$r^2 = \tan^3\theta + \tan\theta \quad \text{donde} \quad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$$

   a) Halle una ecuación de $\mathcal{C}$ en coordenadas cartesianas. *(1 pto)*
   b) Analice si $\mathcal{C}$ es simétrica con respecto el eje polar y el polo. *(1 pto)*
   c) Determine la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $P = (\sqrt{2}, \measuredangle \pi/4)$. *(2 pts)*

5. Dados cuatro "puntos de control"

$$P_0 = (a_0, b_0), P_1 = (a_1, b_1), P_2 = (a_2, b_2), P_3 = (a_3, b_3),$$

la curva de Bezier cúbica C es la curva definida por las ecuaciones paramétricas:

$$C : \begin{cases} x = a_0(1-t)^3 + 3a_1t(1-t)^2 + 3a_2t^2(1-t) + a_3t^3 \\ y = b_0(1-t)^3 + 3b_1t(1-t)^2 + 3b_2t^2(1-t) + b_3t^3 \end{cases}, \quad t \in [0,1]$$

   a) Muestre que el segmento $\overline{P_0P_1}$ es tangente a la curva cúbica de Bézier en el punto P_0, si $a_0 \neq a_1$. *(2 pts)*
   b) Calcule la parametrización de la curva cúbica de Bézier si los puntos de control son $P_0 = (1,4), P_1 = (3,12), P_2 = (6,15), P_3 = (7,4)$ *(1 pto)*
   c) Halle la pendiente de la recta tangente a la curva cúbica de Bézier del item *b*) en el punto de $t = 1/3$. *(1 pto)*

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: BMA01] **Examen final** [Curso: Cálculo Diferencial]
[Sección: ABCD] **[Profesor: R. Metzger/G. Panizo/J. Valverde/F. Villanueva]**

Duración: 100 minutos.

---

1. Analice la verdad o falsedad de la siguiente afirmación. Justifique su procedimiento.

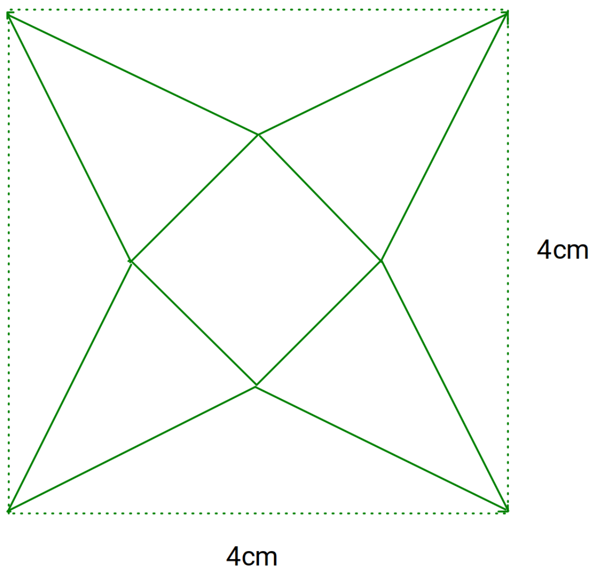
   a) Si f es una función tal que $f''(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(0) = 0$, entonces $xf'(x) > f(x)$ para todo $x > 0$. 2pts.

   b) Si $\mathcal{C}$ es la curva cuya ecuación en coordenadas polares es $r^2 = f(\theta)$, con f una función par, entonces $\mathcal{C}$ tiene simetrías respecto al polo, al eje polar y al eje $\theta = \frac{\pi}{2}$. 2pts.

   c) Para graficar una función polar $r = f(\theta)$, basta hacerlo para $\theta \in [0, 2\pi]$. 1pts.

2. Sea $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$. Si f' toma valores tanto positivos como negativos, entonces f tiene un único mínimo local en $]a, b[$. 5pts.

3. Una pirámide de base cuadrada y cuatro caras, cada una en forma de triángulos isósceles, se forma cortando cuatro triángulos de una pieza cuadrada de cartón de 4cm de lado (ver figura) y doblando los triángulos resultantes para formar las paredes de la pirámide. ¿Cuál es el mayor volumen que puede tener dicha pirámide? 5pts



4. Determine:

   a) El Polinomio de Taylor alrededor de $x = 0$ con la menor cantidad de términos que aproxime la función f, dada por $f(x) = \operatorname{senh}(x)$, para $x \in < -0,5; 0,5 >$, con un error menor a 0,003. [sug.: considere $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{3}{2}$, para cualquier $x \in < -0,5; 0,5 >$]. 3pts.

   b) la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$C : \begin{cases} x(t) &= 2(t - \operatorname{sen}(t)) \\ y(t) &= 2(1 - \cos(t)), \end{cases}$$

   para $t = \pi/2$. 2pts.

Resolución 1:

(a) Verdadero: Defina $g(x) = xf'(x) - f(x)$. Se tiene $g(0) = 0$ y $g'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x)$. Luego $g'(x) > 0$ en $x > 0$. Lo que indica que es creciente a la derecha de cero. Como $g(0) = 0$, se tiene $g(x) \geq 0$ para todo $x > 0$. Además, no existe en $x > 0$ otro $\tilde{x}$ con $g(\tilde{x}) = 0$, pues $g'(x) > 0$. Luego $g(x) > 0$ para todo $x > 0$.

(b) Verdadero: Suponiendo que, en coordenadas polares (r, θ), satisface la ecuación, entonces:

$r^2 = f(-\theta)$, también la satisface: tiene simetría respecto del eje polar.

$(-r)^2 = f(-\theta)$, también la satisface: tiene simetría respecto del eje Y.

$(-r)^2 = f(\theta)$, también la satisface: tiene simetría respecto del polo.

(c) Falso: Por ejemplo: $r = \operatorname{sen}(\theta/3)$.

Resolución 2:

Sean c y d tales que $f'(c) < 0$ y $f'(d) > 0$. Como f'' existe y es positiva en todo punto, f' es continua y creciente. Luego $c < d$. Además, por el teorema del valor intermedio aplicado a f', existe un punto x_0 entre c y d tal que $f'(x_0) = 0$.

Como f' es creciente x_0 es el único punto en donde f' se anula. Por el criterio de la segunda derivada f tiene un mínimo local en x_0. Además, como f' no se anula en ningún otro punto, no existe otro mínimo local de f en $]a, b[$.

Resolución 3:

Sean $2x$, p y h el lado de la base, la altura de una cara y la altura de la pirámide, respectivamente. Se cumple

$$x + p = 2\sqrt{2} \qquad \text{i.e.} \qquad p = 2\sqrt{2} - x.$$

También, $h^2 + x^2 = p^2$, de modo que

$$h^2 + x^2 = 8 - 4\sqrt{2}x + x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad h = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}.$$

Entonces, el volumen de la pirámide queda

$$V(x) = \frac{1}{3}(4x^2)\left(2\sqrt{2 - \sqrt{2}x}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{2x^4 - \sqrt{2}x^5}, \qquad \text{con} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Así

$$V'(x) = \frac{8}{3}\frac{1}{2}\frac{8x^3 - 5\sqrt{2}x^4}{\sqrt{2x^4 - \sqrt{2}x^5}}$$

Entonces, $V'(x) = 0$, cuando $x = 0$ y $x = \frac{4\sqrt{2}}{5}$.

Para hallar el mínimo evaluamos: $V(0) = 0, \quad V(\frac{4\sqrt{2}}{5}) = \frac{256\sqrt{2}}{75\sqrt{5}}, \quad V(\sqrt{2}) = 0.$

Luego el volumen máximo es: $\frac{256}{75}\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Resolución 4:

(a) como :

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & , \quad n \text{ par} \\ 1 & , \quad n \text{ impar} \end{cases}$$

El polinomio de Taylor P_n, desarrollado alrededor del cero, es de la forma:
$P_n(x) = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots$
$x \in < -0,5; 0,5 >$
como el resto es de la forma:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}, \ c \in < 0; |x| >$$

y para obtener una aproximación con un error no menor de 0,003, usando la sugerencia, se debe de cumplir

$$|R_n| < \frac{3}{2}\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3}{1000}.$$

Esta relación se cumple a partir de $n = 4$
Así:
$\operatorname{senh}(x) \approx \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!}$, con el error solicitado.

(b) Primero se determina la pendiente de la recta: $m = \dfrac{dy}{dx}$
como $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$
Así $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(1-\cos(t)}{2\operatorname{sen}(t)}$
evaluado en $t = \pi/2$, se tiene $m = 1$.
El punto de paso es $(\pi - 2; 2)$
Luego, la recta tangente a la curva c es $y - 2 = 1(x - \pi + 2)$

UNI, 8 de agosto del 2022

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: BMA01] **Examen final** [Curso: Cálculo Diferencial]
[Sección: ABCD] **[Profesor: R. Metzger/G. Panizo/J. Valverde/F. Villanueva]**

Duración: 100 minutos.

---

1. Analice la verdad o falsedad de la siguiente afirmación. Justifique su procedimiento.

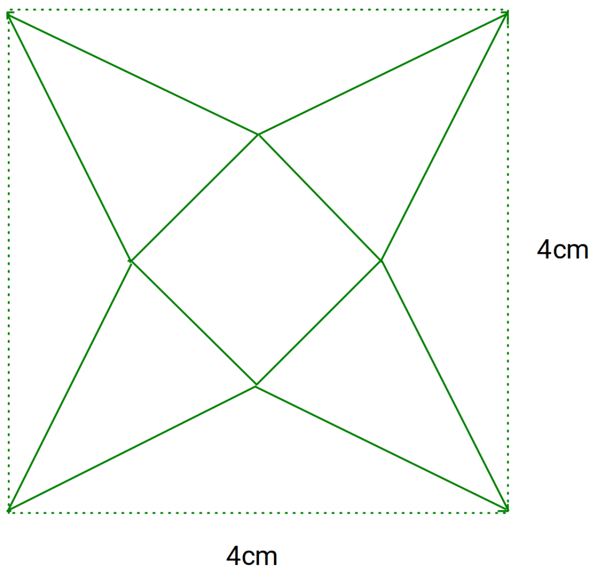
   a) Si f es una función tal que $f''(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(0) = 0$, entonces $xf'(x) > f(x)$ para todo $x > 0$. 2pts.

   b) Si $\mathcal{C}$ es la curva cuya ecuación en coordenadas polares es $r^2 = f(\theta)$, con f una función par, entonces $\mathcal{C}$ tiene simetrías respecto al polo, al eje polar y al eje $\theta = \frac{\pi}{2}$. 2pts.

   c) Para graficar una función polar $r = f(\theta)$, basta hacerlo para $\theta \in [0, 2\pi]$. 1pts.

2. Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ tal que $f''(x) > 0$ para todo $x \in]a,b[$. Si f' toma valores tanto positivos como negativos, entonces f tiene un único mínimo local en $]a,b[$. 5pts.

3. Una pirámide de base cuadrada y cuatro caras, cada una en forma de triángulos isósceles, se forma cortando cuatro triángulos de una pieza cuadrada de cartón de 4cm de lado (ver figura) y doblando los triángulos resultantes para formar las paredes de la pirámide. ¿Cuál es el mayor volumen que puede tener dicha pirámide? 5pts



4. Determine:

   a) El Polinomio de Taylor alrededor de $x = 0$ con la menor cantidad de términos que aproxime la función f, dada por $f(x) = \text{senh}(x)$, para $x \in < -0,5; 0,5 >$, con un error menor a 0,003. [sug.: considere $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{3}{2}$, para cualquier $x \in < -0,5; 0,5 >$]. 3pts.

   b) la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$C : \begin{cases} x(t) &= 2(t - \text{sen}(t)) \\ y(t) &= 2(1 - \cos(t)), \end{cases}$$

   para $t = \pi/2$. 2pts.

UNI, 8 de agosto del 2022

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática | Ciclo 2022-1

[Cod: BMA01 Curso: Cálculo Diferencial]

Propuesta para la quinta calificada

---

1. **Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:**

   a) $f(x) = 1/x$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$. (1 pto)

   b) Si $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ alcanza su valor mínimo en $c \in \langle a, b\rangle$ entonces $f'(c) = 0$. (1 pto)

   c) Si $f''(c) = 0$ entonces c es un punto de inflexión. (1.5 ptos)

   d) Si f es derivable y convexa entonces alcanza un mínimo cuando existe $c \in \mathrm{dom}(f)$ tal que $f'(c) = 0$. (1.5 ptos)

Solución

a) Falso. f'' cambia de signo pero $x = 0$ no es parte del dominio.

b) Falso. Tenemos $f(x) = |x|$ tiene mínimo en $x = 0$ pero no es derivable.

c) Falso. Tenemos $f(x) = x^4$ no tiene puntos de inflexión pero $f''(0) = 0$.

d) Verdadero. Si f es derivable y convexa entonces $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$, luego $f(x) \geq f(c), \forall x \in \mathrm{dom}(f)$

2. **Sea $f : [0, 1] \to [-2, 1]$ con $f(x) = x^6 - \frac{5}{2}x^4 - \frac{3}{2}x + 1$. Demuestre que f tiene inversa y f^{-1} es derivable.**

Solución

$$f'(x) = 6x^5 - 10x^3 - \frac{3}{2}$$
$$f''(x) = 30x^4 - 30x^2 = 30x^2(x^2 - 1)$$

Como $f''(x) < 0$ si $0 < x < 1$, por lo tanto f' es decreciente en $[0, 1]$, luego $f'(x) < f'(0) < 0$ para todo x en $\langle 0, 1\rangle$, esto implica que f es decreciente y por lo tanto inyectiva, ademas si $0 \leq x \leq 1$ entonces $-2 = f(1) \leq f(x) \leq f(0) = 1$ luego $ran(f) = [-2, 1]$. f al ser sobreyectiva e inyectiva tiene inversa. Como f' no se anula en $[0, 1]$ entonces f^{-1} es derivable.

3. Dada la función f y sus derivadas:

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x}, \quad f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2} \quad \text{y} \quad f''(x) = \frac{2x^3+4}{x^3}.$$

Determine:

a) Puntos críticos e intervalos de monotonía. (1.5 ptos.)

b) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad. (1.5 ptos.)

c) Asíntotas. (1 pto.)

d) Bosqueje la gráfica de la función. (1 pto.)

Solución

a) Puntos críticos e intervalos de monotonía.

- El conjunto de puntos críticos es $\{1\}$.
- f es creciente en $\langle 1, +\infty\rangle$.
- f es decreciente en los intervalos $\langle -\infty, 0\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$.

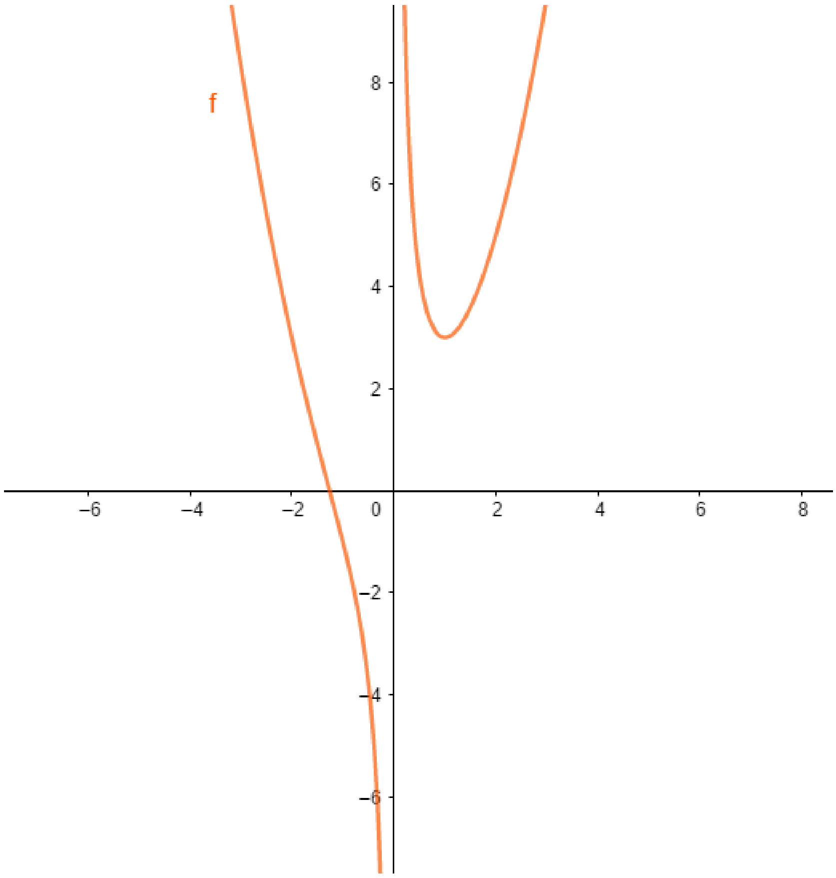
b) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad.

- Puntos de inflexión es $x = -\sqrt[3]{2}$.
- f es cóncava hacia arriba en los intervalos $\left\langle -\infty, -\sqrt[3]{2}\right\rangle$ y $\langle 0, +\infty\rangle$.
- f es cóncava hacia abajo en $\left\langle -\sqrt[3]{2}, 0\right\rangle$.

c) Asíntotas.

- Asíntota vertical. $x = 0$:
$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{x^3+2}{x} = \frac{2}{0^{\pm}} = \pm\infty.$$
- Asíntota horizontal. No tiene:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty.$$
- Asíntota oblicua. No tiene:
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{2}{x^2}\right) = \pm\infty.$$

d) Gráfica.



4. **Considere una plancha de cartón en forma rectangular, midiendo un metro de largo por ochenta centímetros de ancho. Retire de las cuatro esquinas un cuadrado de lado x, y obtenga una caja de base rectangular doblando los lados.**

   a) **Modele el problema con una función que calcule el volumen, planteando cómo obtener el volumen máximo. (3 puntos.)**

   b) **Determine el valor de x que maximiza el volumen, y el volumen máximo. (2 puntos.)**

Solución

SOLUCIÓN

a) **Sea x la altura, $100 - 2x$ el largo de la base y $80 - 2x$ el ancho de la base de la caja. El volumen es dado por:**

$$V(x) = (100 - 2x)(80 - 2x)x \Leftrightarrow V(x) = 8000x - 360x^2 + 4x^3.$$

Considerando que $0 < x < \text{mín}\{40, 50\}$. definimos que debemos calcular

$$\underset{S.A: \quad x\in\langle 0,40\rangle}{\text{máx}} V(x) = 4x^3 - 360x^2 + 8000x.$$

Calculando los puntos críticos de la función objetivo $V(x)$:

$$V'(x) = 8000 - 720x + 12x^2 = 0.$$

b) Haciendo $V'(x) = 0$, tenemos que

$$8000 - 720x + 12x^2 = 0$$

cuyas raíces $x_1 = \frac{90+10\sqrt{21}}{3} \approx 45,27$ y $x_2 = \frac{90-10\sqrt{21}}{3} \approx 14,72$ son los puntos críticos de la función.

Note que $f' > 0$ para $x < \frac{90-10\sqrt{21}}{3}$ y $f' < 0$ para $x > \frac{90-10\sqrt{21}}{3}$, luego, f es creciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{90-10\sqrt{21}}{3}\right)$ y decrescente en intervalo $\left(\frac{90-10\sqrt{21}}{3}, +\infty\right)$.

Luego, $x = \frac{90-10\sqrt{21}}{3}$ cm proporciona el volumen máximo $V\left(\frac{90-10\sqrt{21}}{3}\right) = 52513,8$ cm^3.

UNI, 4 de julio de 2022

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2022-1

[Cod: BMA01 Curso: Cálculo Diferencial]

Cuarta Práctica Calificada

Solucionario

---

1. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) La función f dada por $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2} - x^2}$ verifica las condiciones del teorema de Rolle en su dominio de definición. (1.5 pto)

   b)
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3/x}+4}{e^{1/x}-4} = 0.$$
(1.5 ptos)

   c) Si $xy = y^2 + 1$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y+x}$. (1pto)

   d) Dada la función $f(x) = x[\![x]\!]$ con dominio en $\langle 0, 2\rangle$. El conjunto de puntos críticos de f es intervalo $\langle 0, 1\rangle$. (1 pto)

Solución

a) Es verdadero. El dominio de f:

$$x \in \mathrm{dom}(f) \Leftrightarrow \frac{x}{2} - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Luego el dominio de f es $\mathrm{dom}(f) = [0, 1/2]$.

Las condiciones del teorema de Rolle:

- Es claro que f es continua en $[0, 1/2]$ y derivable en $\langle 0, 1/2\rangle$.
- $f(0) = f(1/2) = 0$

b) Es falso. Ya que al aplicar límite directamente tenemos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3/x}+4}{e^{1/x}-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{3/x}+4\right)}{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{1/x}-4\right)} = \frac{0+4}{0-4} = -1.$$

c) Falso. ya que al derivar implicitamente:

$$y + xy' = 2yy' \Longrightarrow y' = \frac{y}{2y - x}.$$

d) Falso. Redefiniendo la función f y derivando:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x < 1 \\ x, & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Como f no es continua en 1, entonces no es derivable ahí. Así el conjunto de puntos críticos (donde $f'(x) = 0$ o no existe) es $\langle 0, 1]$.

2. *a*) Sean $a < c < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Demuestre que si f derivable en $\langle a, c\rangle$ y en $\langle c, b\rangle$ y $\lim\limits_{x \to c} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ entonces $f'(c)$ existe y se tiene que $f'(c) = L$. (3 pto)

   b) Demostre que $|\operatorname{sen}(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$; para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (2 pto)

Solución

a) Demostración.

Para todo $x \neq c$ en (a, b) existe z_x entre x y c tal que por el TVM

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(z_x)$$

luego

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} f'(z_x) = L$$

Nótese que si $x \to c$ entonces $z_x \to c$.

b) Demostración.

Si $\alpha = \beta$ es evidente. Suponga $\alpha < \beta$; definamos la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Por el Teorema de Valor Médio, existe $x_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$; luego:

$$\cos(x_0) = \frac{\operatorname{sen}(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

sabiendo que $|\cos(x_0)| \leq 1$, obtenemos el resultado.

3. *a*) **Calcule por medio de diferenciales el valor aproximado de**

$$E = \sqrt[3]{(3{,}01)^2 + (4{,}02)^2 + (10{,}03)^2}$$

(2.5 pto)

b) **Si y es definida implícitamente por la ecuación**

$$y^3 + 2y^2x + x^3 - 4x + 2y - 2 = 0$$

calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ en el punto $(1,1)$. **(2.5 pto)**

Solución

a) **Sea $f(x) = \sqrt[3]{(3+x)^2 + (4+2x)^2 + (10+3x)^2}$, luego**

$$f(0) = 5, \quad f(0{,}01) = E$$

por lo tanto

$$E \approx f(0) + f'(0)(0{,}01)$$

como

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{82+28x}{((3+x)^2 + (4+2x)^2 + (10+3x)^2)^{2/3}} \implies f'(0) = \frac{82}{75}$$

$$\implies E \approx 5 + \frac{82}{7500} = 5,011$$

b) **Si y es definida implícitamente por la ecuación**

$$y^3 + 2y^2x + x^3 - 4x + 2y - 2 = 0$$

podemos derivar en forma implícita

$$2y^2 + 3x^2 - 4 + (2 + 3y^2 + 4xy)y' = 0 \implies y'(1) = -1/9$$

derivamos nuevamente

$$6x + (2 + 3y^2 + 4xy)y'' + (6yy' + 4xy' + 8y)y' = 0 \implies y''(1) = -424/729 = -0{,}58$$

4. **En el plano XY un punto P se mueve sobre la circunferencia de centro $O(0;0)$ y de radio 4 cm en el primer cuadrante en sentido horario desde el punto $A(0;4)$ hacia el punto $B(4;0)$. Calcule la velocidad con la que cambia S, el área del triángulo OPA cuando la distancia entre P y A es de $\sqrt{8}$ cm y crece a razón de $1\,cm/s$.**

Solución

Si $P = (x, y)$ tenemos la ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 16 \quad (1)$$

$$d(P, A) = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = \sqrt{8} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{x^2 + (y-4)^2}) = 1 \quad (3)$$

$$S = 2x \quad (4)$$

de (1) y (2):

$$x = \sqrt{7}, y = 3$$

reemplazando (1) en (3) y derivando

$$1 = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{(y-4)^2 + 16 - y^2}\right) = \frac{d}{dt}(\sqrt{32 - 8y}) = \frac{-4}{\sqrt{32-8y}}\frac{dy}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{2}}{2} cm/s$$

de (4) y (1)

$$\frac{dS}{dt} = 2\frac{dx}{dt} = 2\frac{d}{dt}\sqrt{16 - y^2} = -\frac{2y}{\sqrt{16 - y^2}}\frac{dy}{dt}$$

luego cuando $y = 3$ y $\frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{3}{7}\sqrt{14} \approx 1{,}6\, cm/s$$

Uni, 4 de julio de 2022[*]

[*]Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2021-2**

[Cod: BMA01 Curso: Cálculo Diferencial]

Propuesta de la Cuarta Práctica Calificada

---

1. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Si $f'(x_0) = 0$ entonces la curva $\mathcal{C}$ de ecuación $f(x) - y^3 = 0$ tiene recta tangente horizontal en $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$. (1.5 pto)

   b) Sea $f : (a, c) \to \mathbb{R}$ continua y $b \in (a, c)$. Si $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b) \cup (b, c)$ entonces f es constante.(1 pto)

   c) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Si a y b no son extremos globales de f entonces f'' tiene al menos una raiz. (1.5 pto)

   d) Sea $f : [a, b] \to (0, +\infty)$ derivable. Si f es estrictamente creciente entonces f^2 no posee punto crítico. (1 pto)

Solución

a) (Falso) Sea $f(x) = x^2$ y $x_0 = 0$, cumple que $f'(x_0) = 0$, y la ordenada y_0 tal que $(0, y_o)$ este en la curva, cumple $0 = (y_0)^3$, entonces $y_0 = 0$. Pero en $(0, 0)$ no existe la derivada implicita $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2y^2}$.

b) (Verdadero) Por TVM existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c_1, \forall x \in (a, b)$ y $f(x) = c_1, \forall x \in (b, c)$, luego como f es continua en b, se cumple que $c_1 = \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) = \lim_{x\to b^+} f(x) = c_2$.

c) (Verdadero) Por continuidad de f en $[a, b]$ existe un minimo c_1 y maximo global c_2 que por hipótesis debe estar en (a, b), entonces $f'(c_1) = 0 = f'(c_2)$, luego por TVM existe $d \in (a, b)$ tal que $f''(d) = 0$.

d) (Falso) Sea $f : [-1, 1] \to (0, +\infty)$ con $f(x) = x^3 + 2$, es estrictamente creciente y $g(x) = f^2(x) = (x^3 + 1)^2$, cumple que $g'(x) = 2(x^3 + 2)3x^2$. Pero $g'(0) = 0$.

2. En cada uno de los apartados use el teorema de valor medio o el teorema de valor medio generalizado o el teorema de Rolle.

a) Sea $f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-5)$. Pruebe que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene exactamente tres raíces reales.. (2.5 pto)

b) Pruebe que la función $\tan(x)$ en el intervalo $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ es una función monótona creciente. .(2.5 pto)

Solución

a) Como f es un polinomio es derivable en $\mathbb{R}$ y tiene los puntos $-2, -1, 1, 5$ como sus ceros. Podemos usar el teorema de Rolle en cada intervalo $[-2,-1]$, $[-1,1]$ y $[1,5]$. Por lo tanto, existen $c_1 \in \langle -2, -1\rangle$, $c_2 \in \langle -1, 1\rangle$ y $c_3 \in \langle 1, 5\rangle$ tal que $f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0$. Puesto que además $f'(x)$ es un polinomio de grado tres no puede tener mas raíces, por lo tanto se tiene el resultado.

b) Sean $x_1, x_2 \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ con $x_1 < x_2$, entonces como la función $\tan(x)$ es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en $\langle x_1, x_2\rangle$ por el teorema de valor medio existe $c \in \langle x_1, x_2\rangle$ tal que

$$\tan(x_2) - \tan(x_1) = (\tan(c))'(x_2 - x_1) = \sec^2(c)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow \tan(x_1) < \tan(x_2).$$

3. *a*) Calcule por medio de diferenciales el valor aproximado de

$$E = \arctan\left(\sqrt{(2{,}03)^2 + 0{,}02 - e^{0{,}01}}\right)$$

(2.5 pto)

b) Si y es definida implícitamente por la ecuación

$$x^3 + 2x^2y + y^3 - 4y + 2x - 2 = 0$$

calcule $\frac{d^3y}{dx^3}$ en el punto $(1, 1)$. (2.5 pto)

Solución

a) Sea $f(x) = \arctan\left(\sqrt{(2+3x)^2 - e^x + 2x}\right)$, luego

$$f(0) = \frac{\pi}{3}, \quad f(0{,}01) = E$$

por lo tanto

$$E \approx f(0) + f'(0)(0{,}01)$$

como

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1 + (2+3x)^2 - e^x + 2x}\right) \frac{6(2+3x) - e^x + 2}{2\sqrt{(2+3x)^2 - e^x + 2x}} \implies f'(0) = \frac{13}{8\sqrt{3}}$$

$$\implies E \approx \frac{\pi}{3} + \frac{13}{800\sqrt{3}} = 1{,}0566$$

b) Si y es definida implícitamente por la ecuación

$$x^3 + 2x^2y + y^3 - 4y + 2x - 2 = 0$$

podemos derivar en forma implícita

$$3x^2 + 2x^2y' + 4xy + 3y^2y' - 4y' + 2 = 0 \implies y'(0) = -9$$

$$6x + 4y + (2x^2 + 3y^2 - 4)y'' + 8xy' + 6y(y')^2 = 0 \implies y''(1) = -424$$

$$6+(-4x+6y)y''+(-2x^2+3y^2-4)y'''-8y'-8xy''-4y'+6(y')^3+12yy'y'' = 0 \implies y'''(1) = -59124$$

4. Una pecera sin tapa, de $3m$ de altura y base rectangular, tiene un volumen de $12m^3$. Encuentre las dimensiones de la pecera que ocupa un mínimo de material lateral.

Solución

Si x es el largo y el ancho es y entonces

$$3xy = 12 \implies y = 4/x$$

luego el material necesario es

$$M = 6x + 6y + xy = 6x + 24/x + 4, x > 0$$

los puntos críticos son:

$$M'(x) = 6 - 24/x^2 = 0 \implies x = 2$$

para $x < 2$ la función M es decreciente y para $x > 2$ es creciente por lo que M tiene mínimo absoluto en $x = 2$, de donde $y = 2$ y $\min M = 28m^2$.

UNI, 22 de noviembre de 2021*

*Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2021-2

[Cod: BMA01 Curso: Cálculo Diferencial]

Propuesta de la Cuarta Práctica Calificada

---

1. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable. Si $f'(x_0) = 0$ entonces la curva $\mathcal{C}$ de ecuación $f(x) - y^3 = 0$ tiene recta tangente horizontal en $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$. (1.5 pto)

   b) Sea $f : (a, c) \to \mathbb{R}$ continua y $b \in (a, c)$. Si $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b) \cup (b, c)$ entonces f es constante.(1 pto)

   c) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos veces derivable. Si a y b no son extremos globales de f entonces f'' tiene al menos una raiz. (1.5 pto)

   d) Sea $f : [a, b] \to (0, +\infty)$ derivable. Si f es estrictamente creciente entonces f^2 no posee punto crítico. (1 pto)

2. En cada uno de los apartados use el teorema de valor medio o el teorema de valor medio generalizado o el teorema de Rolle.

   a) Sea $f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-5)$. Pruebe que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene exactamente tres raíces reales.. (2.5 pto)

   b) Pruebe que la función $\tan(x)$ en el intervalo $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ es una función monótona creciente. .(2.5 pto)

3. a) Calcule por medio de diferenciales el valor aproximado de

$$E = \arctan\left(\sqrt{(2{,}03)^2 + 0{,}02 - e^{0{,}01}}\right)$$

(2.5 pto)

   b) Si y es definida implícitamente por la ecuación

$$x^3 + 2x^2y + y^3 - 4y + 2x - 2 = 0$$

   calcule $\frac{d^3y}{dx^3}$ en el punto $(1, 1)$. (2.5 pto)

4. Una pecera sin tapa, de $3m$ de altura y base rectangular, tiene un volumen de $12m^3$. Encuentre las dimensiones de la pecera que ocupa un mínimo de material lateral.

Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias - Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2021-2**

Práctica Calificada N^{0}03 de Cálculo Diferencial - BMA01-A/B/C/D **08/11/2021**

1. Encuentre la suma de los enteros a que aseguren la existencia de $x \in \langle 1, 2\rangle$ tal que

$$2a^3 - 7a^2x + 7ax^2 - 2x^3 = 0.$$

(5 ptos.)

Solución: Para $a \in \mathbb{R}$, definimos $f(x) = a^3 - (7/2)a^2x + (7/2)ax^2 - x^3$, ésta es una función continua en $[1, 2]$. Por lo tanto, si aseguramos que $f(1)$ y $f(2)$ tienen signos contrarios podemos aplicar el teorema del cero. En efecto,

$$\begin{aligned} f(1) &= a^3 - (7/2)a^2 + (7/2)a - 1 = (a-1)(a-2)(a-1/2) \quad \text{y} \\ f(2) &= a^3 - 7a^2 + 14a - 8 = (a-1)(a-2)(a-4). \end{aligned}$$

Si $f(1)f(2) < 0$ entonces

$$(a-1)^2(a-2)^2(a-1/2)(a-4) < 0 \implies 1/2 < a < 4, a \neq 1, a \neq 2$$

Así, solo tiene una solución entera $a = 3$. Por lo tanto la suma es 3.

2. Dadas las funciones f y g no nulas en $x \neq x_0$, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en x_0, y $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$. Demuestre que f es derivable en x_0 si y solo si g es derivable en x_0 y $f'(x_0) = g'(x_0)$. (4 ptos.)

Solución: Dando forma a las fracciones:

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(x)}{x-x_0} = \frac{\frac{g(x)}{f(x)}f(x)}{x-x_0} = \frac{\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}} \tag{1}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)}{x-x_0} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)}g(x)}{x-x_0} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{1}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}} \tag{2}$$

$(\Rightarrow)$. Como existe el $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ y existe $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, por regra de derivación, existe $g'(x_0)$ y

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}} = \frac{1}{\frac{1}{f'(x_0)}} = f'(x_0).$$

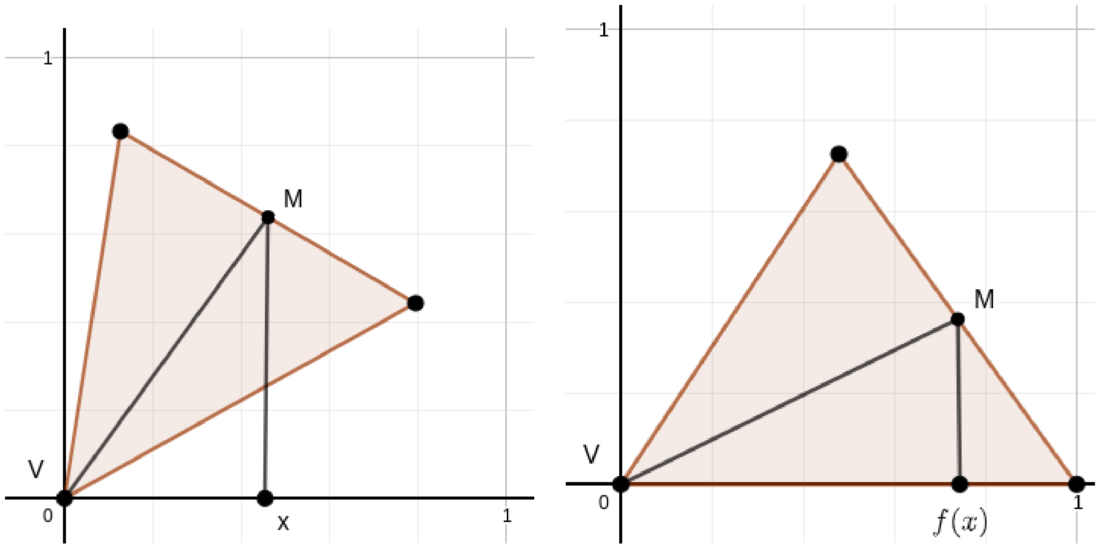
$(\Leftarrow)$. La prueba es similar solo sustituir f por g en la prueba de la condición necesaria y usar la ecuación (2).

3. Un bloque delgado en forma de triángulo equilátero con lado de longitud 1 unidad tiene su cara en la vertical del plano xy con un vértice en el origen. Bajo la influencia de la gravedad, girará alrededor de V hasta que un lado golpee el piso, en el eje x. Denótese con x la abscisa inicial del punto medio M, del lado opuesto a V, y sea $f(x)$ la abscisa final de este punto. Suponga que el bloque queda en equilibrio cuando M está directamente arriba de V.

   a) Determine el dominio y rango de f. (2 ptos.)

   b) En el dominio de f, ¿en dónde es discontinua? (1.5 ptos.)

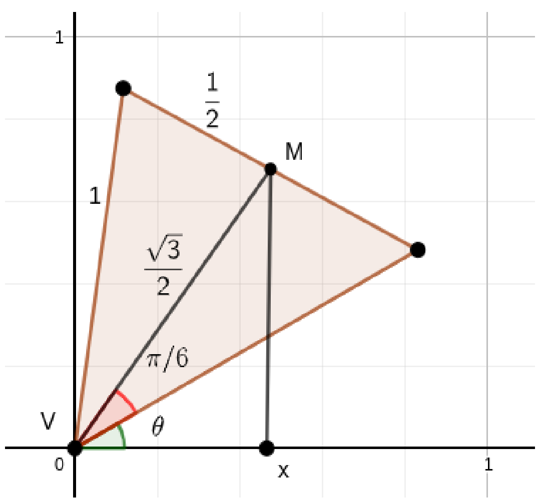
   c) ¿El teorema de valor intermedio asegura la existencia de puntos fijos, es decir los puntos $c \in \operatorname{dom}(f)$ donde $f(c) = c$?. Identifique los puntos fijos de f. (1.5 ptos.)



Posición inicial Posición final

Solución:

a) Tenemos



Del gráfico $x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta + \frac{\pi}{6})$, donde $0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3}$; por lo que $x \in [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$. Así,

$$\mathrm{dom}(f) = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right].$$

Además si $x > 0$, hacemos $\theta = 0$ para obtener $f(x)$ y si $x < 0$ hacemos $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} -3/4 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 3/4 & , x > 0. \end{cases}$$

Luego el rango es:

$$\mathrm{ran}(f) = \{-3/4, 0, 3/4\}.$$

b) Vemos que

$$\lim_{x\to 0^-} = -3/4 \neq 3/4 = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Es decir, la función no es continua en $x = 0$.

c) Como la función f no es continua no es aplicable el teorema de valor intermedio, sin embargo vemos que $f(0) = 0$, $f(3/4) = 3/4$, $f(-3/4) = -3/4$ por lo que $0, 3/4, -3/4$, son puntos fijos.

4. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(1) = 0$ entonces $\mu_1 f$ es derivable. (1.5 ptos)

b) Sea $f : [-1, 1] \to (0, +\infty)$ derivable tal que posee recta normal en todos sus puntos, entonces $ln \circ f$ también posee recta normal en todos los puntos de su dominio. (1.5 pto)

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{sen} \circ f$ es derivable en $x = 0$ entonces f es derivable en $x = 0$. (1.5 pto)

d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0 = f(x)$ entonces $|f|$ es derivable en $x = 0$. (1.5 pto)

Solución:

a) (Falso) Sea $f(x) = x^2 - 2x + 2$, cumple que $f'(1) = 2(1) - 2 = 0$, pero $\mu_1(x)f(x) = 0, \forall x < 1$ y $\mu_1(1)f(1) = 1$, por tanto $\mu_1 f$ es discontinua en $x = 1$ lo que implica no sea derivable.

b) (Verdadero) Al poseer recta normal en todos sus puntos entonces $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$, luego como $[ln \circ f]'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, entonces $[ln \circ f]'(x) \neq 0, \forall x \in [-1, 1]$, poseyendo recta normal en todos sus puntos.

c) (Falso) Considerar la función

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{Si } x \ge 0, \\ x + 2\pi, & \text{Si } x < 0. \end{cases}$$

cumple que $\operatorname{sen} \circ f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es diferenciable, pero f no lo es en $x = 0$.

d) (Verdadero) Pues dado $g(x) = |f(x)|$, se tiene que $g(0) = 0$, cumpliendo que

$$g'_+(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|f(x)|}{x} = -\lim_{x \to 0^-} \frac{|f(x)|}{|x|} = 0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{|f(x)|}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|f(x)|}{x} = g'_+(0).$$

1. Encuentre la suma de los enteros a que aseguren la existencia de $x \in \langle 1, 2\rangle$ tal que

$$2a^3 - 7a^2x + 7ax^2 - 2x^3 = 0.$$

(5 ptos.)

2. Dadas las funciones f y g no nulas en $x \neq x_0$, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en x_0, y $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$. Demuestre que f es derivable en x_0 si y solo si g es derivable en x_0 y $f'(x_0) = g'(x_0)$. (4 ptos.)

3. Un bloque delgado en forma de triángulo equilátero con lado de longitud 1 unidad tiene su cara en la vertical del plano xy con un vértice en el origen. Bajo la influencia de la gravedad, girará alrededor de V hasta que un lado golpee el piso, en el eje x. Denótese con x la abscisa inicial del punto medio M, del lado opuesto a V, y sea $f(x)$ la abscisa final de este punto. Suponga que el bloque queda en equilibrio cuando M está directamente arriba de V.

   a) Determine el dominio y rango de f. (2 ptos.)

   b) En el dominio de f, ¿en dónde es discontinua? (1.5 ptos.)

   c) ¿El teorema de valor intermedio asegura la existencia de puntos fijos, es decir los puntos $c \in \text{dom}(f)$ donde $f(c) = c$?. Identifique los puntos fijos de f. (1.5 ptos.)

4. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(1) = 0$ entonces $\mu_1 f$ es derivable. (1.5 ptos)

   b) Sea $f : [-1, 1] \to (0, +\infty)$ derivable tal que posee recta normal en todos sus puntos, entonces $ln \circ f$ también posee recta normal en todos los puntos de su dominio. (1.5 pto)

   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\text{sen} \circ f$ es derivable en $x = 0$ entonces f es derivable en $x = 0$. (1.5 pto)

   d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0 = f(x)$ entonces $|f|$ es derivable en $x = 0$. (1.5 pto)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
CURSO : CÁLCULO DIFERENCIAL
CICLO : 2021_02

EXAMEN FINAL

PREGUNTA 1

Dada la función

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+1}\right)$$

1. Determine su dominio. (1 pto)
2. Determine las asíntotas. (1 pto)
3. Determine los intervalos donde f es creciente y donde f es decreciente. (1 pto)
4. Determine los intervalos donde f es cóncava y donde f es convexo. (1 pto)
5. Esboce la gráfica de f. (1 pto)

PREGUNTA 2

a) Sean las funciones f y g de modo que $f'(x) < g'(x)$ para todo x. Pruebe que si $a < b$ entonces $f(b) - f(a) < g(b) - g(a)$ (2,5pt)

b) Pruebe que $\dfrac{tan(b)}{tan(a)} > \dfrac{b}{a}$ si $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ (2,5pt)

PREGUNTA 3

Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

a) Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función tal que para cada $x \in A$: $f'(x) = 0$, entonces f es constante.

b) Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$ funciones reales de una variable real, donde f es derivable. Si para cada $x \in A$: $g(x) = e^{f(x)}$, entonces los intervalos en los que f y g son crecientes son iguales.

c) Si P es el punto del plano cuyas coordenadas polares son $(0; \pi/2)$, entonces P no pertenece a la curva $\mathcal{C} : r = 1 - 2\cos\theta$.

d) Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función que tiene máximo local en x_0, entonces $f'(x) = 0$.

e) Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son curvas con ecuaciones paramétricas

$$\mathcal{C}_1 = \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{C}_2 = \begin{cases} x = e^t \\ y = e^t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

entonces $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$.

PREGUNTA 4

Una empresa de turismo vende viajes en grupos de 10 a 60 personas a 250 soles por persona, si el grupo es de mas de 20 personas entonces se ofrece un descuento a cada turista de 5 soles por cada turista adicional a los 20. Operar un bus con capacidad de 30 pasajeros le cuesta a la empresa 500 soles, incluyendo gastos de personal y combustible. Encuentre el tamaño del grupo que maximiza la ganancias de la empresa si por cada turista la empresa paga un seguro de 2 soles.

UNI, 20 de diciembre de 2021.

Universidad Nacional de Ingeniería Jueves, 5 de octubre de 2023
Facultad de Ciencias Semestre académico: 2023-2
Escuela Profesional de Matemática

Solucionario de la PC 2

Curso: Cálculo diferencial BMA01

---

1. Indique si es verdadero o falso en cada uno de los siguientes enunciados justificando su respuesta.

   a) La función signo sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad tipo salto en $x = 0$. (1pto)

   b) Sea $f : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, entonces f es acotada. (1pto)

   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $g(x) = f(x^2)$ es continua entonces f es continua. (1pto)

   d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(x) \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ entonces $f > 1$ en $\mathbb{R}$, ó $f < 1$ en $\mathbb{R}$. (2pts)

   Solución:

   a) **Verdadero:** Tenemos que $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 < 1 = \lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$.
   Así, en $x = 0$, la función signo tiene una discontinuidad tipo salto.

   b) **Falso:** Contra-ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$, donde $0 < x \leq 1$, tenemos que $f(\langle 0, 1]) = [1, +\infty)$ no es acotado.

   c) **Falso:** Contra-ejemplo: $f(x) = \mathcal{U}(x)$ la función escalón unitario, tenemos que $x \mapsto f(x^2) = 1$ es una función continua, pero sabemos que $\mathcal{U}$ no es continua en el origen.

   d) **Verdadero:** Por contradicción, si hubieran $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ tales que

   $$f(x_1) < 1 < f(x_2)$$

   entonces $x_1 \neq x_2$, luego restringiendo f al intervalo cerrado de extremos x_1 y x_2, tenemos una función continua. Por el teorema de valor intermedio, existe c entre x_1 y x_2 tal que $f(c) = 1$, una contracción. Por lo tanto: $f < 1$ en $\mathbb{R}$, ó $f > 1$ en $\mathbb{R}$.

2. Analice la existencia de asíntotas a la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida como

   $$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \neq 0. \qquad \text{(5pts)}$$

   Solución:

   - **Asíntota vertical:** Tenemos que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to 0^+$, luego la recta $x = 0$ es una asíntota vertical a la gráfica de f. Análogamente, $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$.
   - **No hay asíntotas horizontales:** Notamos que $f(x) \to \pm\infty$ si $x \to \pm\infty$, luego la gráfica de f no tiene asíntotas horizontales.
   - **Asíntota oblicua:** Tenemos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, luego $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = 2$, así

     la recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua a la derecha y a la izquierda para el gráfico de f.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

   $$\operatorname{sen}(2x - \pi) < f(x) < \frac{3 - 2\cos(2x)}{2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,. \qquad \text{(5pts)}$$

   Pruebe que existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 1$.

   Solución: Tenemos que

   $$f(0) < 1/2 < 1 < f(3\pi/4)$$

   Considerando $f : [0, 3\pi/4] \to \mathbb{R}$, función continua, por el teorema de valor intermedio, existe $x_0 \in \langle 0, 3\pi/4\rangle$ tal que

   $$f(x_0) = 1\,.$$

4. Un sábado, tres personas empezaron a subir una montaña a las 7am y llegaron a la cima a las 12 del medio-día. Al día siguiente, domingo, empezaron a descender a las 7am y llegaron a su punto de inicio a las 10am. Pruebe que existe un instante t entre las 7am y las 10am del día sábado y del día domingo, en que las personas se encontraban a una misma altura, esto es, se encontraban a la misma altura a la "*misma hora*" del día sábado y del día domingo. (5pts)

   Solución:

   Sean $g : [7, 10] \to \mathbb{R}$ la función altura del día sábado y
   $h : [7, 10] \to \mathbb{R}$ la función altura del día domingo.

   Ambas funciones, g y h, son continuas, luego $f := g - h : [7, 10] \to \mathbb{R}$ es una función continua.

   Tenemos que

   $$f(7) < 0 < f(10)$$

   por el teorema de valor intermedio, existe $t^* \in \langle 7, 10 \rangle$ tal que $f(t^*) = 0$, esto a la hora t^* del día sábado y del día domingo, las 3 personas se encontraban a una misma altura.

Universidad Nacional de Ingeniería Jueves, 5 de octubre de 2023
Facultad de Ciencias Semestre académico: 2023-2
Escuela Profesional de Matemática

Práctica Calificada N° 2

Curso: Cálculo diferencial BMA01

---

1. Indique si es verdadero o falso en cada uno de los siguientes enunciados justificando su respuesta.

   a) La función signo sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad tipo salto en $x = 0$. (1pto)

   b) Sea $f : \langle 0, 1] \to \mathbb{R}$ continua, entonces f es acotada. (1pto)

   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $g(x) = f(x^2)$ es continua entonces f es continua. (1pto)

   d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Si $f(x) \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ entonces $f > 1$ en $\mathbb{R}$, ó $f < 1$ en $\mathbb{R}$. (2pts)

2. Analice la existencia de asíntotas a la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \neq 0.$$

(5pts)

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\operatorname{sen}(2x - \pi) < f(x) < \frac{3 - 2\cos(2x)}{2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

(5pts)

   Pruebe que existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 1$.

4. Un sábado, tres personas empezaron a subir una montaña a las 7am y llegaron a la cima a las 12 del medio-día. Al día siguiente, domingo, empezaron a descender a las 7am y llegaron a su punto de inicio a las 10am. Pruebe que existe un instante t entre las 7am y las 10am del día sábado y del día domingo, en que las personas se encontraban a una misma altura, esto es, se encontraban a la misma altura a la "*misma hora*" del día sábado y del día domingo. (5pts)

Universidad Nacional de Ingeniería Jueves, 21 de setiembre de 2023
Facultad de Ciencias Semestre académico: 2023-2
Escuela Profesional de Matemática

Solucionario de la PC 1

Curso: Cálculo diferencial BMA01

1. Indique si es verdadero o falso en cada uno de los siguientes enunciados justificando su respuesta.

   I. Si f, g y h son funciones definidas en todo $\mathbb{R}$, entonces $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$. (1 pto)

   II. La función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ es una función impar. (2 pts)

   III. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, entonces el límite $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ existe y es igual a $f(2)$. (2 pts)

   Solución:

   I. **Falso:** Sean $f(x) = 1$, $g(x) = x$ y $h(x) = x^2$, entonces

   $$f \circ (g+h) = 1 \neq 2 = f \circ g + f \circ h$$

   II. **Verdadero:** Notemos que

   $$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(\sqrt{x^2+1} - x) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x} \times (\sqrt{x^2+1} + x)\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}\right) \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} f(x) &= -\ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) \\ f(x) &= -f(x) \end{aligned}$$

   así $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ es una función impar. (2 puntos)

   III. **Falso:** Tenemos que $\lim\limits_{x \to 2^-} [\![x]\!] = 1$, mientras que $\lim\limits_{x \to 2^-} [\![-x]\!] = -2$, luego

   $$\lim_{x \to 2^-} ([\![x]\!] + [\![-x]\!]) = -1$$

   pero $f(2) = 0 \neq -1$.

2. Evalúe cada uno de los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{[\![1/x]\!]}$. (2.5 pts)

   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1})$. (2.5 pts)

   Solución:

   a) Tenemos que $1/x \to +\infty$ cuando $x \to 0^+$, luego $[\![1/x]\!] \to +\infty$ cuando $x \to 0^+$, de allí que

   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{[\![1/x]\!]} = 0$$

   Como $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$, se sigue que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{[\![1/x]\!]} = 0$.

b) Tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1} &= \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}} \times (\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

luego $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)=0$.

3. Sea $F : \langle 0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ tal que

i. $F(xy)=F(x)+F(y),\ \forall\, x,y>0$ ii. $F(x)>0,\ \forall\, x>1$ iii. $\lim\limits_{h\to 0} F(1+h)=0$

Demuestre que

a) F es creciente. (1 pto)

b) Para $x>0$ y $n\in\mathbb{N}$: $F(x^n)=nF(x)$. (1 pto)

c) Para $x>0$ y $n\in\mathbb{N}$: $F(\sqrt[n]{x})=\dfrac{1}{n}F(x)$. (1 pto)

d) Si $a>0$ entonces $\lim\limits_{h\to 0} F(a+h)=F(a)$. (2 pts)

Solución:

a) Dados $0<x<y$ tenemos que $y/x>0$, luego $F(y/x)>0$, además

$$F(x)+F(y/x)=F(y) \quad\Rightarrow\quad F(x)<F(y)\,.$$

Por lo tanto, F es creciente.

b) Tenemos que

$$\begin{aligned}F(\underbrace{x\cdot\cdots\cdot x}_{n \text{ veces}}) &= \underbrace{F(x)+\cdots+F(x)}_{n \text{ veces}} \\ F(\underbrace{x\cdot\cdots\cdot x}_{n \text{ veces}}) &= nF(x)\end{aligned}$$

c) Tenemos que

$$\begin{aligned}nF(\sqrt[n]{x}) &= F([\sqrt[n]{x}]^n) \\ nF(\sqrt[n]{x}) &= F(x)\end{aligned}$$

luego $F(\sqrt[n]{x})=\dfrac{1}{n}F(x)$.

d) Notemos que

$$F(a+h)=F(a)+F\left(1+\frac{h}{a}\right) \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to 0} F(a+h)=F(a)\,.$$

4. En un experimento se observa la dinámica de evolución del número de bacterias, cuya ley tiene el siguiente comportamiento

$$y(t)=\frac{r}{1+Ce^{-t}},$$

donde t es el tiempo medido en días, $y(t)$ es el número de bacterias medido en millones, en el instante t; r y C son parámetros constantes que se determinan experimentalmente. Se sabe que en el día 0 se inicia con medio millón de bacterias y que al pasar mucho tiempo la población de bacterias se estabiliza en 40 millones.

a) Determine los parámetros r y C. (3 pts)

b) Determine en qué instante la población de bacterias alcanzará la cifra de 10 millones. (2 pts)

Solución:

a) Tenemos $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \boxed{r = 40}$ y además $\dfrac{r}{1+C} = 1/2$, entonces $\boxed{C = 79}$.

b) Calculando $t > 0$ de manera que $y(t) = 10$, esto es

$$\frac{40}{1+79e^{-t}} = 10 \quad \to \quad \boxed{t = \ln\frac{79}{3}} \text{ días}\,.$$