Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 21, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Indique si la siguiente proposición es verdadero o falso: Si $f'(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R}$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

Podemos descomponer el rango de f, del siguiente modo

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f(\cup[n, n+1]) \\ f(\mathbb{R}) &= \bigcup f([n, n+1]) \\ f(\mathbb{R}) &= \bigcup [f(n), f(n+1)] \end{aligned}$$

¿Por qué es esta última igualdad? Veamos,

- La función es inyectiva. De lo contrario tendría un punto con derivada cero.
- Se tiene $\cdots < f(n-1) < f(n) < f(n+1) < \cdots$, de lo contrario alguna derivada sería menor o igual a 0.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

Ahora veamos que $\operatorname{Ran}(f) = \mathbb{R}$.
En cada intervalo $[f(n), f(n+1)]$ se tiene $f(n+1) - f(n) > 1$.
En efecto, del teorema del valor medio,

$$\begin{aligned}
\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} &= f(n+1)-f(n) \\
\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} &= f\prime(c) \\
\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} &> 1
\end{aligned}$$

para algún $c \in]n, n+1[$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

Siendo así,

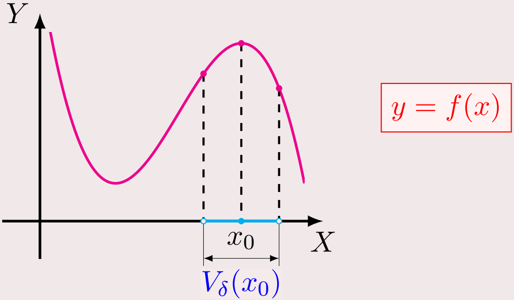
$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \bigcup [f(n), f(n+1)] \\ f(\mathbb{R}) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

Definición (Máximo relativo o máximo local)

Sea $f : X \to \mathbb{R}$. La función f tiene un máximo relativo o máximo local en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ si existe una vecindad $V_\delta(x_0)$ tal que

$$f(x) \leqslant f(x_0), \quad \forall x \in V_\delta(x_0) \cap X$$

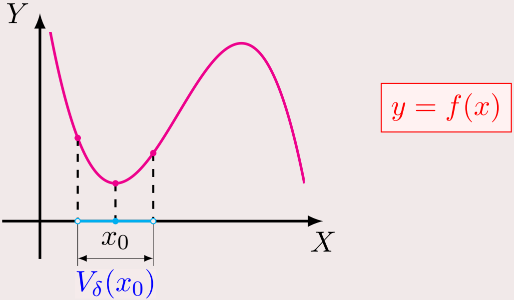


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Mínimo relativo o mínimo local)

Sea $f : X \to \mathbb{R}$. La función f tiene un mínimo relativo o mínimo local en $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ si existe una vecindad $V_\delta(x_0)$ tal que

$$f(x_0) \leqslant f(x), \forall x \in V_\delta(x_0) \cap X$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

Los máximos y mínimos relativos de f se denominan valores extremos.

Teorema

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ *y* $a \in X'_- \cap X'_+$*. Si* f *es diferenciable en* a *y* $f'(a) > 0$*, entonces existe* $\delta > 0$ *tal que si* $a - \delta < x < a$ *entonces* $f(x) < f(a)$ *y si* $a < x < a + \delta$ *entonces* $f(x) > f(a)$

Demostración.

En efecto, para $\varepsilon = f'(a) = d > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - d\right| < d$.

Luego, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$.

De manera análoga si X fuera un intervalo con extremos a, b y $f'(a) > 0$ entonces f tendrá un mínimo relativo en a. Si $f'(a) < 0$, entonces f tendrá un máximo relativo en a. $\square$

Observación

Si $x_0 \in]a, b[$ y $f'(x_0) \neq 0$ entonces f no toma un valor extremo en x_0.

Teorema (Fermat)

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f tiene un mínimo o máximo en $x_0 \in$ Int(I). Si f es diferenciable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un punto crítico de f si $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe.

Ejemplo

Halle los puntos críticos de $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ si:

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 100$$

Calculamos f'

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 12x + 40 \\ &= 4(x^3 - 6x^2 + 3x + 10) = 4(x-2)(x+1)(x-5) \end{aligned}$$

Los puntos críticos de f son 2 y 5.

Observación

Observamos que no todos los valores extremos de una función se dan en puntos críticos, por ejemplo

- $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en 0, pero no es diferenciable en ese punto.
- $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ no tiene puntos críticos, pero por ser continua en un intervalo cerrado y acotado tiene máximo y mínimo.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ tiene punto crítico en 0 pero no tiene valores extremos.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ tiene punto crítico en 0 y también alcanza un valor extremo.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

Teorema (Criterio de la primera derivada)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ *una función continua en* I *y derivable en el interior de* $I \setminus \{x_0\}$.

- *Si* $f'(x) > 0$ *para* $x < x_0$ *y* $f'(x) < 0$ *para* $x > x_0$, *entonces* f *tiene un máximo en* x_0.
- *Si* $f'(x) < 0$ *para* $x < x_0$ *y* $f'(x) > 0$ *para* $x > x_0$, *entonces* f *tiene un mínimo en* x_0.

Método para hallar mínimos y máximos absolutos

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Para encontrar el máximo o mínimo absoluto de f, evaluamos f en

- Los extremos del intervalo, a y b;
- los puntos críticos, es decir donde la derivada se anula; y
- los puntos donde f no es derivable.

El mayor de los valores calculados es el máximo absoluto, y el menor de los valores calculados es el mínimo absoluto.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Criterio de la segunda derivada)

Si f tiene un punto crítico en x_0, y es dos veces diferenciable en x_0, entonces

- *Si $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un punto de mínimo local.*
- *Si $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un punto de máximo local.*

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

En el primer caso al ser x_0 punto crítico, entonces $f'(x_0) = 0$ y como la segunda derivada en x_0 es $f''(x_0) > 0$ se tiene que para un $\delta > 0$ pequeño se tiene $f'(x_0) > 0$ en los $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ y $f'(x_0) > 0$ los $x \in]x_0, x_0 + \delta[$.
Usando el criterio de los intervalos de monotonía (Criterio de la primera derivada), tenemos que x_0 es un punto de mínimo. $\square$

Observación

El teorema anterior no dice nada respecto de los puntos donde $f''(x) = 0$. Cuando x_0 es punto crítico y $f''(x_0) = 0$, no podemos afirmar nada sobre máximos o mínimos en x_0.

Ejemplo

Las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$, $h(x) = -x^4$.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. **Comprenda el problema** El primer paso consiste en leer detenidamente el problema hasta que se entienda claramente. Pregúntese: ¿qué es lo desconocido? ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayoría de los problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar en este las cantidades dadas y las cantidades requeridas.

Pasos para la resolución de problemas de optimización

3. **Introduzca la notación** Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada (se le llamará Q por ahora). También seleccione símbolos $(a, b, c, \ldots, x, y)$ para otras cantidades desconocidas y etiquete el diagrama con estos símbolos. Puede ser provechoso utilizar iniciales como símbolos sugerentes, por ejemplo, A para el área, h para la altura, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.

Pasos para la resolución de problemas de optimización

5. Si Q se ha expresado como una función de más de una variable en el paso 4, utilice la información dada para encontrar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. Utilice estas ecuaciones para eliminar todas, excepto una de las variables en la expresión para Q. Así Q se expresará en función de una variable x, es decir, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Utilice los métodos para encontrar los valores máximo o mínimo absolutos de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado.

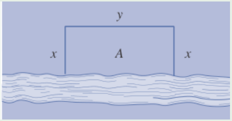
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Un agricultor tiene $1\,200$ m de material y quiere construir una malla para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita malla a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

Resolución

La figura ilustra el caso general.



Se quiere maximizar el área A del rectángulo. Sea x y y el largo y el ancho, respectivamente, del rectángulo (en metros). Entonces, se quiere expresar A en términos de x y y:

$$A = xy \tag{1}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

Se utiliza la información dada de que la longitud total de la malla es 1200 m, esto es, $2x + y = 1\,200$.
Así, $y = 1200 - 2x$, reemplazando en (1) se tiene

$$\begin{aligned} A &= x(1\,200 - 2x) \qquad (2)\\ A &= 1\,200x - 2x^2 \qquad (3)\end{aligned}$$

Observe que $x \geq 0$ y $x \leq 600$ (de lo contrario $A < 0$), por lo que la función que se desea maximizar es

$$A(x) = 1200x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 600$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

La derivada es $A'(x) = 1\,200 - 4x$, por lo que para encontrar los números críticos se resuelve

$$1200 - 4x = 0$$

que da $x = 300$. El valor máximo de A se debe producir en este número crítico o en un punto final del intervalo. Ya que $A(0) = 0$, $A(300) = 180\,000$ y $A(600) = 0$.
Luego el valor máximo se da cuando $A(300) = 180\,000$.
Por tanto, el campo rectangular debe tener 300 m de largo y 600 m de ancho.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA