Relación de Equivalencia y Orden

Ronald Mas,
Angel Ramirez

2 de junio de 2021

Contenido

Relación de equivalencia

Dado el conjunto $A \neq \emptyset$. Una relación $\sim$ definida sobre A decimos que es una **relación de equivalencia** si cumple las siguientes propiedades:

i) Reflexiva
Si para todo $a \in A$ se tiene $(a, a) \in \sim$.

ii) Simétrica
Si $(a, b) \in \sim$ entonces $(b, a) \in \sim$.

iii) Transitiva
Si $(a, b) \in \sim$ y $(b, c) \in \sim$ entonces $(a, c) \in \sim$.

Notaciones:

- Escribimos $a \sim b$ en vez de $(a, b) \in \sim$.
- Usamos $R, \sim, \equiv, etc$ para denotar a un relación de equivalencia.

Relación de equivalencia

Dado el conjunto $A \neq \emptyset$. Una relación $\sim$ definida sobre A decimos que es una **relación de equivalencia** si cumple las siguientes propiedades:

i) Reflexiva
   Si para todo $a \in A$ se tiene $(a, a) \in \sim$.

ii) Simétrica
   Si $(a, b) \in \sim$ entonces $(b, a) \in \sim$.

iii) Transitiva
   Si $(a, b) \in \sim$ y $(b, c) \in \sim$ entonces $(a, c) \in \sim$.

Notaciones:

- Escribimos $a \sim b$ en vez de $(a, b) \in \sim$.
- Usamos $R, \sim, \equiv, etc$ para denotar a un relación de equivalencia.

Relación de equivalencia

Dado el conjunto $A \neq \emptyset$. Una relación $\sim$ definida sobre A decimos que es una **relación de equivalencia** si cumple las siguientes propiedades:

i) Reflexiva
   Si para todo $a \in A$ se tiene $(a, a) \in \sim$.

ii) Simétrica
   Si $(a, b) \in \sim$ entonces $(b, a) \in \sim$.

iii) Transitiva
   Si $(a, b) \in \sim$ y $(b, c) \in \sim$ entonces $(a, c) \in \sim$.

Notaciones:

- Escribimos $a \sim b$ en vez de $(a, b) \in \sim$.
- Usamos $R, \sim, \equiv, etc$ para denotar a un relación de equivalencia.

Ejemplo 1

Para $A = \mathbb{Z}$ se define la relación $\sim$ sobre A como:

$$x \sim y \leftrightarrow x + y \text{ es un número par.}$$

En efecto:

- Reflexiva: $x + x = 2x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. ✓
- Simétrica: Si $x + y = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ entonces $y + x = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. ✓
- Transitiva: Si $x + y = 2k$ y $y + z = 2r$ para algunos $k, r \in \mathbb{Z}$ entonces $x + z = 2k + 2r - 2y$ es par.✓

Por tanto $\sim$ es una relación de equivalencia.

Ejemplo 1

Para $A = \mathbb{Z}$ se define la relación $\sim$ sobre A como:

$$x \sim y \leftrightarrow x + y \text{ es un número par.}$$

En efecto:

- Reflexiva: $x + x = 2x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$. ✓
- Simétrica: Si $x + y = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$ entonces $y + x = 2k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. ✓
- Transitiva: Si $x + y = 2k$ y $y + z = 2r$ para algunos $k, r \in \mathbb{Z}$ entonces $x + z = 2k + 2r - 2y$ es par.✓

Por tanto $\sim$ es una relación de equivalencia.

Ejemplo 2

Para $A = M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ se define la relación $\sim$ sobre A como:

$$A \sim B \leftrightarrow det(A - B) = 0$$

En efecto

- Reflexiva: $det(A - A) = 0$, para todo $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.✓
- Simétrica: Si $det(A - B) = 0$ entonces $det(B - A) = (-1)^2.det(A - B) = 0$.✓
- Transitiva: Si $det(A - B) = 0$ y $det(B - C) = 0$ entonces $det(A - C) = 0$. $\times$
  Considera: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

Por tanto $\sim$ no es una relación de equivalencia.

Ejemplo 2

Para $A = M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ se define la relación $\sim$ sobre A como:

$$A \sim B \leftrightarrow det(A - B) = 0$$

En efecto

- Reflexiva: $det(A - A) = 0$, para todo $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.✓
- Simétrica: Si $det(A - B) = 0$ entonces $det(B - A) = (-1)^2.det(A - B) = 0$.✓
- Transitiva: Si $det(A - B) = 0$ y $det(B - C) = 0$ entonces $det(A - C) = 0$. $\times$
  Considera: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

Por tanto $\sim$ no es una relación de equivalencia.

Clase de equivalencia y conjunto cociente

Definición

Sea R una relación de equivalencia definida sobre el conjunto $A \neq \emptyset$, definamos la clase de equivalencia de $a \in A$ como:

$$R[a] = \{b \in A : bRa\}.$$

Definición

Sea R una relación de equivalencia definida sobre el conjunto $A \neq \emptyset$, definamos el conjunto cociente

$$\frac{A}{R} = \{R[a] : a \in A\}$$

Observaciones:

- Usamos $R[x], [x], \overline{x}, etc$ para denotar la clase de equivalencia de x.
- La relación de equivalencia tiene la propiedad de particionar el conjunto A.

Clase de equivalencia y conjunto cociente

Definición

Sea R una relación de equivalencia definida sobre el conjunto $A \neq \emptyset$, definamos la clase de equivalencia de $a \in A$ como:

$$R[a] = \{b \in A : bRa\}.$$

Definición

Sea R una relación de equivalencia definida sobre el conjunto $A \neq \emptyset$, definamos el conjunto cociente

$$\frac{A}{R} = \{R[a] : a \in A\}$$

Observaciones:

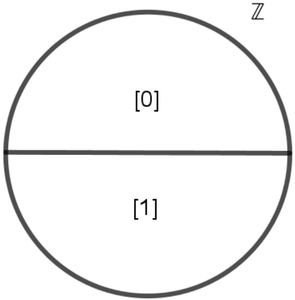
- Usamos $R[x], [x], \overline{x}, etc$ para denotar la clase de equivalencia de x.
- La relación de equivalencia tiene la propiedad de particionar el conjunto A.

Ejemplo

Ejemplo: Del ejemplo 1) se tiene que:

- $[0] = [\pm 2] = [\pm 4] = \cdots$
- $[\pm 1] = [\pm 3] = [\pm 5] = \cdots$

Luego se tiene: $\frac{\mathbb{Z}}{\sim} = \{[0], [1]\}$
Es decir se tiene:



Propiedades

Para toda relación R en X con $X \neq \emptyset$, se tiene:

1) $R[x] \neq \emptyset$, para todo $x \in X$.
2) Para todo par de elementos $x, y \in X$ se cumple:

$$R[x] = R[y] \text{ o } R[x] \cap R[y] = \emptyset.$$

3) Si R y S son relaciones de equivalencia sobre X y $R[x] = S[x], \forall x \in X$ entonces $R = S$.

Prueba:

1) Como R es reflexiva se tiene que $x \in R[x]$, $\forall x \in X$, luego $R[x]$ es no nulo.

Continua Prueba:

2) Sean $x, y \in X$ se presenta dos casos:
   a) Si $x \, R \, y$, entonces veamos que $R[x] \subseteq R[y]$. Sea $z \in R[x]$ entonces $x \, R \, z$, por ser R simétrica $z \, R \, x$, luego por ser R transistiva $z \, R \, y$, de donde se concluye que $z \in R[y]$. La otra inclusión es similar.
   b) Si x no esta relacionado con y, supomgamos que $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$ entonces existe $z \in X$ tal que $x \, R \, z$ y $y \, R \, z$, luego por ser R simétrica y transitiva se tiene $x \, R \, y$ lo cual es una contradicción.
3) Sea $(x, y) \in R$ entonces $y \in R[x] = S[x]$ entonces $(x, y) \in S$. La otra inclusión es similar.

Relación de orden parcial

Dado el conjunto $A \neq \emptyset$ y una relación $\preceq$ definida sobre A. Decimos que $\preceq$ es una **relación de orden parcial** si cumple las siguientes propiedades:

i) Reflexiva
Si para todo $a \in A$ se tiene $(a, a) \in \preceq$.

ii) Antisimétrica
Si $(a, b) \in \preceq$ y $(b, a) \in \preceq$ entonces $a = b$.

iii) Transitiva
Si $(a, b) \in \preceq$ y $(b, c) \in \preceq$ entonces $(a, c) \in \preceq$.

Notaciones:

- Escribimos $a \preceq b$ en vez de $(a, b) \in \preceq$.
- Usamos las letras $R, \preceq, \prec, etc$ para denotar a un relación de orden.

Dado el conjunto $A \neq \emptyset$ y una relación $\preceq$ definida sobre A. Decimos que $\preceq$ es una **relación de orden parcial** si cumple las siguientes propiedades:

i) Reflexiva
Si para todo $a \in A$ se tiene $(a, a) \in \preceq$.

ii) Antisimétrica
Si $(a, b) \in \preceq$ y $(b, a) \in \preceq$ entonces $a = b$.

iii) Transitiva
Si $(a, b) \in \preceq$ y $(b, c) \in \preceq$ entonces $(a, c) \in \preceq$.

Notaciones:

- Escribimos $a \preceq b$ en vez de $(a, b) \in \preceq$.
- Usamos las letras $R, \preceq, \prec, etc$ para denotar a un relación de orden.

Relación de orden total o lineal

Decimos que $\preceq$ es una **relación de orden total o lineal** si cumple:

i) $\preceq$ es una relación de orden parcial.

ii) Para todo $a, b \in A$ se tiene que $(a, b) \in \preceq$ o $(b, a) \in \preceq$

Observación:

- Los elementos de A que cumplan la propiedad *ii*) se denominan **elementos comparables** caso contrario serán elementos no comparables.

Definición

Sea $(X, \preceq)$ un conjunto ordenado, decimos que un elemento $x \in X$ es un predecesor inmediato del elemento $y \in X$ si:

- $x \prec y$.
- *No existe $t \in X$ tal que $x \prec t \prec y$.*

Denotamos la relación de un predecesor inmediato como $\lhd$.

Relación de orden total o lineal

Decimos que $\preceq$ es una **relación de orden total o lineal** si cumple:

i) $\preceq$ es una relación de orden parcial.

ii) Para todo $a, b \in A$ se tiene que $(a, b) \in \preceq$ o $(b, a) \in \preceq$

Observación:

- Los elementos de A que cumplan la propiedad *ii*) se denominan **elementos comparables** caso contrario serán elementos no comparables.

Definición

Sea $(X, \preceq)$ un conjunto ordenado, decimos que un elemento $x \in X$ es un predecesor inmediato del elemento $y \in X$ si:

- $x \prec y$.
- *No existe $t \in X$ tal que $x \prec t \prec y$.*

Denotamos la relación de un predecesor inmediato como $\lhd$.

Proposición

Sea $(X, \preceq)$ *un conjunto ordenado finito. Entonces para todo* $x, y \in X$, *se tiene que* $x \prec y$ *si y sólo si existen elementos* $\{x_i\}_{i=1}^{k} \subset X$ *tal que*

$$x \lhd x_1 \lhd \cdots \lhd x_k \lhd y$$

Demostración.

Para $k = 0$ se tiene que $x \lhd y$.
La ida queda como tarea, veamos la vuelta:
Si $x \lhd x_1 \lhd \cdots \lhd x_k \lhd y$ entonces $x \preceq x_1 \preceq \cdots \preceq x_k \preceq y$ y por la transitividad de $\preceq$ se tiene que $x \preceq y$.

□

Ejemplo

Para $A = \mathbb{N}$ definamos la relación $|$ sobre A como:

$$a|b \leftrightarrow \text{existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } b = ak.$$

- Reflexiva: $a|a$, $\forall a \in A$.✓
- Antisimétrica: Si $a|b$ y $b|a$ entonces existen $r, s \in \mathbb{N}$ tal que $b = ra$ y $a = sb$, luego $sb = a = sra$. Al simplificar a se tiene $sr = 1$ lo que implica que $s = r = 1$, por tanto $a = b$.✓
- Transitiva: Si $a|b$ y $b|c$ entonces existen $r, s \in \mathbb{N}$ tal que $b = ra$ y $c = sb$, luego $c = sra$, por tanto $a|c$.✓

Decimos que $|$ es una relación de orden parcial pero no total ya que existen elementos no comparables como por ejemplo 2 y 3.