CODIFICACIÓN DE ÁRBOLES.

Profesores del curso:

Ronald Mass [1]

Ángel Ramírez [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

6 de julio de 2020

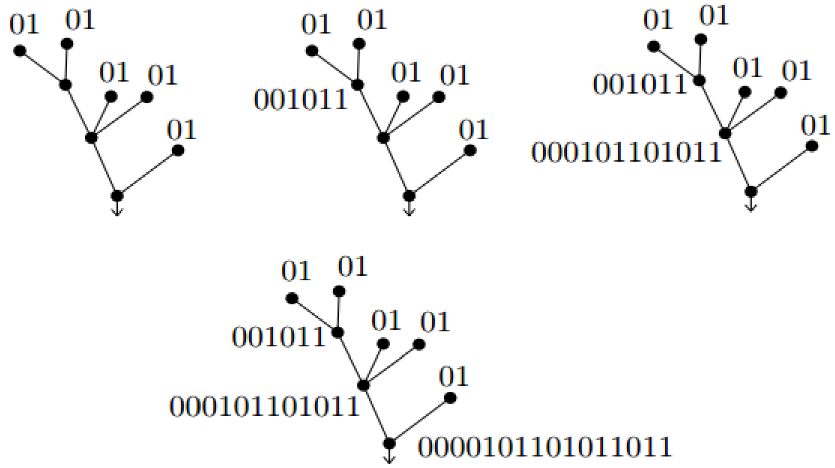
Tabla de contenidos

Codificación de árboles plantados

Se sigue los siguientes pasos:

1. Cada vértice distinto de la raíz se le asigna el código 01.
2. Sea v un vértice con hijos $v_1, v_2, \ldots, v_t$ (escritos en el orden de izquierda a derecha). Si A_i es el código del hijo v_i entonces el vértice v recibe el código $0A_1A_2\ldots A_t1$.

Codificación de árboles plantados (cont.)

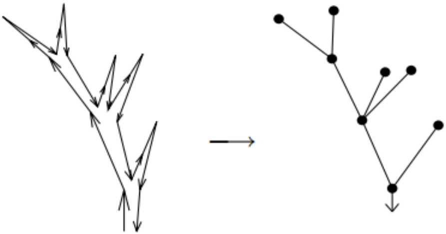


Decodificando códigos

0000101101011011

$\downarrow$

$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow \longrightarrow$



Codificando árboles con raíz

Para árboles con raíz (T, r) se tiene un código similar usando el método para árboles plantados, para esto cambiamos la segunda regla para árboles plantados por la siguiente regla:

2) Suponga que cada hijo w de un vértice v le sido asignado el código $A(w)$. Denotemos los hijos de v mediante $w_1, w_2, \ldots, w_t$ y además $A(w_1) \leq A(w_2) \leq \ldots A(w_t)$. Luego, el vértice v recibe el código: $0A_1A_2\ldots A_t1$, donde $A_i = A(w_i)$

¿Qué significa $A \leq B$ en el código anterior?

Para dos secuencias A y B se entiende por $A \leq B$ que A es menor o igual que B en algún ordenamiento lineal fijo de todas las secuencias finitas de ceros y unos. Por definición, podemos usar el llamado **ordenamiento lexicográfico**. Dos secuencias distintas $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ son comparados como sigue:

1. Si A es un segmento inicial de B entonces $A < B$. Si B es un segmento inicial de A entonces $B < A$. Por ejemplo: $0010 < 00100$ y $0 < 0111$.
2. En otro caso, sea j el menor índice tal que $a_j \neq b_j$. Entonces, si $a_j < b_j$ decimos que $A < B$, y si $a_j > b_j$ entonces decimos que $A > B$. Por ejemplo: $011 < 1$ y $10011 < 10110$.

Excentricidad de un vértice

Para un vértice v de un grafo, el símbolo $ex_G(v)$ denota el máximo de las distancias de v hacia los otros vértices.
El número $ex_G(v)$ es llamado **excentricidad** del vértice v en el grafo G. Se puede entender que los vértices con excentricidad grande permanecen sobre la periferie de G.

Centro de un grafo

$C(G)$ denota el conjunto de todos los vértices de G con **excentricidad mínima**. El conjunto $C(G)$ es llamado el **centro** de G.

El ejemplo de un ciclo (así como muchos otros grafos) muestra que algunas veces el centro puede coincidir con todo el conjunto de vértices.

Para árboles tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1

Para cualquier árbol T, $C(T)$ tiene al menos 2 vértices. Si $C(T)$ consiste de dos vértices x e y entonces $\{x, y\}$ es una arista.

Demostración: Describimos a continuación un procedimiento para determinar el centro de un árbol. Sea $T(V, E)$ un árbol dado. Si T tiene a lo más 2 vértices, entonces su centro coincide con el conjunto de vértices y la proposición se cumple. En otro caso, sea $T' = (V', E')$ el árbol que se obtiene de T después de remover todas sus hojas, es decir:

$$V' = \{x \in V \;/\; deg_T(x) > 1\},$$

$$E' = \{\{x, y\} \in E \;/\; deg_T(x) > 1 \quad \text{y} \quad deg_T(y) > 1\}$$

Observe que $V(T') \neq \emptyset$, desde que no todos los vértices de T pueden ser hojas. Además, para cualquier vértice v, los vértices más distantes de v son necesariamente las hojas, y por tanto, para cada $v \in V'$ se obtiene:

$$ex_T(v) = ex_{T'}(v) + 1.$$

En particular, se obtiene $C(T') = C(T)$. Si T' tiene por lo menos 3 vértices, repetimos la construcción descrita, en otro caso, hemos encontrado el centro de T.

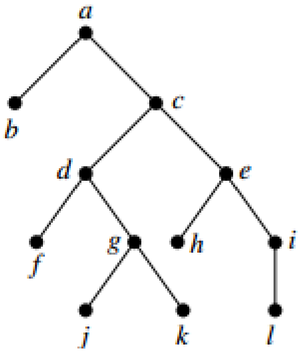
Código de un árbol

1. Si el centro de T es un único vértice, entonces definimos el código de T como el código del árbol con raíz (T, v).
2. Si el centro de T consiste de una arista $e = \{x_1, x_2\}$, consideramos el grafo $T - e$. Este grafo tiene exactamente dos componentes T_1 y T_2; la notación es elegida de tal modo que $x_i \in V(T_i)$. Considere: la letra A denota el código del árbol con raíz (T_1, x_1) y la letra B denota el código del árbol con raíz (T_2, x_2). Si $A \leq B$ según el **ordenamiento lexicográfico**, el árbol T es codificado por el código del árbol con raíz (T, x_1) y para $A \geq B$ su código es el código de (T, x_2).

Lo descrito permite codificar un árbol.

Ejemplo:

Find every vertex that is a center in the given tree:



Ejemplo:

A tree T has 17 nodes and the degree of each node is either 1 or 4. After Alice added some edges to this graph, it has an Eulerian circuit. At least how many edges did she add?

Solution:
Let k be the number of nodes with degree 4. The tree has 16 edges, so the sum of the degrees is

$$\sum_{v \in V} deg_T(v) = 4k + (17 - k) = 32.$$

We get that $k = 5$. The tree has nodes with odd degree. By adding 6 edges, Alice can achieve that every degree of the graph is even, thus it contains an Eulerian circuit.

Ejemplo:

a) How many nonisomorphic unrooted trees are there with 4 vertices?

b) How many nonisomorphic rooted trees are there with 4 vertices?

Solution:

a) There are 2 non isomorphic unrooted trees with 4 vertices: the 4 chain and the tree with one trivalent vertex and three pendant vertices.

b) There are 4 non isomorphic rooted trees with 4 vertices, since we can pick a root in two distinct ways from each of the two trees in **(a)**.

Ejemplo:

Prove that every tree with at least two vertices is a bipartite graph.

Solution:
Choose a root for the treee T. Then, let X consist of the vertices of even level, and let Y be the vertices of odd level. Then, T is bipartite on X and Y.