# Inducción matemática y Principio del buen orden

Profesores del curso:
Ronald Mass [1]
Ángel Ramírez [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

5 de mayo de 2020

# Tabla de contenidos

A lo largo del curso aceptaremos los siguientes conjuntos con sus propiedades:

1. Número naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.
2. Números enteros $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$, es decir: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
3. Números racionales $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \,/\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ donde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.
4. Números reales $\mathbb{R}$.

# Sumatorias y productorias

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales, entonces los símbolos $\sum$ (sumatoria) y $\prod$ (productoria) se definen como sigue:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{y} \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

**Ejemplos:**

$$\sum_{j=2}^{5} \frac{1}{2j} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10}, \quad \text{y}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{n+1}{n}\right) = n+1.$$

# Tabla de contenidos

**Definición 1**

*Diremos que un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ posee un* **menor elemento** *si existe $s \in S$ tal que $s \leq x$ para todo $x \in S$. En tal caso diremos que $s$ es el* **menor elemento** *de $S$.*

**Definición 2**

*Diremos que un subconjunto $H \subset \mathbb{R}$ es* **bien ordenado** *si todo subconjunto no vacío de $H$ posee un menor elemento.*

# Principio del buen orden

El conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ es bien ordenado, es decir, cualquier subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ y $S \neq \emptyset$ posee un menor elemento.

# Ejemplo:

En un torneo cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores exactamente una vez, y cada juego entrega un ganador y un perdedor. Decimos que los jugadores $p_1, p_2, \ldots, p_m$ forma un **ciclo** de largo $m$ si $p_1$ le gana a $p_2$, $p_2$ le gana a $p_3$, ..., $p_{m-1}$ le gana a $p_m$ y $p_m$ le gana a $p_1$.

Use el principio del buen orden para demostrar que si hay un ciclo $p_1, p_2, \ldots, p_m\,(m \geq 3)$ en un torneo, entonces hay un ciclo de largo 3.

# Solución:

Por contradicción. Asuma que no hay ciclo de largo 3.

El conjunto:
$S = \{n \in \mathbb{N} \, / \text{existen jugadores} \quad p_1, \ldots p_n \quad \text{que forman un ciclo}\}$
es no vacío ya que por hipótesis existe $m \geq 3$ tal que $p_1, \ldots p_m$ es un ciclo, entonces $m \in S$.

Por el Principio del Buen Orden, existe $k \in S$ que es su menor elemento y $p_1, p_2, \ldots, p_k$ es un ciclo de largo $k$.

Considere jugadores $p_1, p_2$ y $p_3$. Entonces $p_1$ le ganó a $p_3$, de lo contrario habría un ciclo de largo 3.

Pero entonces, $p_1, p_3, \ldots, p_{k-1}$ es también un ciclo, esta vez de largo $k - 1$ lo cual es una contradicción.

# Ejemplo: Algoritmo de la división

Para $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b > 0$, entonces existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

**Solución:**
Defina el conjunto: $S = \{a - bx \,/\, x \in \mathbb{N},\ a - bx \geq 0\}$.
Observe que para $x = -|a|$ entonces
$a - bx = a + |a|b \geq a + |a| \geq 0$ entonces $x = -|a| \in S$.
Luego: $S \neq \emptyset$ y $S \subset \mathbb{N}$, entonces por el principio del buen orden existe un elemento mínimo $r \in S$ de la forma $r = a - bq$ para algún $q \in \mathbb{Z}$.
Por definición $r \geq 0$.

# Ejemplo: Algoritmo de la división (cont.)

Veamos también que $r < b$. En efecto, si $r \geq b$ entonces $r - b \geq 0 \Rightarrow a - bq - b \geq 0$, es decir:

$$0 \leq r - b = a - (q + 1)b$$

es decir, $r - b$ sería un elemento de $S$ menor que el elemento mínimo $r$, lo cual es una contradicción.
Lo anterior prueba la existencia.
Ahora vamos a probar la unicidad:
Supongamos que $a$ tiene dos representaciones, es decir, existen $q, q' \in \mathbb{Z}$ y $r, r' \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$qb + r = a = q'b + r', \quad 0 \leq r, r' < b,$$

# Ejemplo: Algoritmo de la división (cont.)

luego: $0 \leq r < b$ y $-b < -r' \leq 0$ entonces $-b < r - r' < b$ y por tanto:$|r - r'| < b$.
A partir de las expresiones para " $a$ " resulta:

$$b > |r - r'| = b|q' - q| \Rightarrow |q' - q| < 1$$

donde en $\mathbb{Z}$ la única posibilidad es $q' - q = 0$, es decir, $q = q'$ y así $r = r'$

# Tabla de contenidos

# Principio de inducción simple

Sea $X$ un subconjunto de los números naturales tal que:

a. $1 \in X$.

b. Si dado $n \in X$ implica que $n+1 \in X$.

Entonces $X$ es el conjunto de los números naturales, es decir, $X = \mathbb{N}$.

**Demostración:**
Por contradicción. Asuma que el conjunto $X$ satisface **(a)** y **(b)** pero $X \neq \mathbb{N}$. Entonces existe al menos un $n \in \mathbb{N}$ pero $n \notin X$.

Entonces el conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \notin X\}$ es no vacío y $S \subset \mathbb{N}$.

Entonces por el principio del buen orden existe $n_0 \in S$ que es el menor elemento de $S$.

Como $X$ cumple **(a)**, es decir, $1 \in X$, entonces $n_0 > 1$ y desde que $n_0$ es el menor elemento de $S$ entonces $n_0 - 1 \in X$.

Como $X$ cumple **(b)** implica que $(n_0 - 1) + 1 = n_0 \in X$ lo cual es una contradicción.

Sean $\{P_n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, un conjunto de propiedades cuya certeza queremos probar. Si:

1. La propiedad es cierta para $n = n_0$.
2. Si la propiedad es cierta para $n = k$ también lo es para $n = k + 1$.

Entonces la propiedad es cierta para $n \geq n_0$.

**Ejemplo:** Demuestre por inducción que todo número mayor o igual que 8 puede escribirse como una suma de treses (3) y cincos (5).

# Solución:

El caso base de la inducción es $n = 8$, así se tiene: $8 = 5 + 3$. Por tanto, la propiedad es cierta para $n = 8$.
Supongamos que la propiedad se cumple para un cierto número $k$, es decir, $k$ se puede poner como suma de treses y cincos. Esto quiere decir que existen $a$ y $b$ enteros mayores o iguales que 0 tales que:

$$k = 3a + 5b.$$

Siendo esto cierto, ¿se puede poner $k + 1$ como suma de treses y cincos?. Distinguiremos dos casos: $b > 0$ y $b = 0$.
Si $b > 0$, en la descomposición de $k$ tenemos por lo menos un 5 y podremos poner:

$$k = 3a + 5(b - 1) + 5,$$

# Solución: (cont.)

por tanto: $k+1=3a+5(b-1)+6=3(a+2)+5(b-1)$. Si $b=0$, tenemos que $k$ es múltiplo de 3, es decir, $k=3a$. Pero como $k\geq 8$, entonces $k=9,12,15,\ldots$, lo que quiere decir que $a\leq 3$, de esta forma se tiene:

$$k=3(a-3)+9$$

y en consecuencia: $k+1=3(a-3)+10=3(a-3)+2(5)$. Por tanto, si $k$ cumple la propiedad también la cumple $k+1$. Puesto que la base de la inducción está probada para $n=8$, podemos concluir que todo número mayor o igual que 8 se puede expresar como suma de treses y cincos.

# Principio de inducción fuerte

Una propiedad $P(n)$ que cumple:

a. $P(1)$ es cierto, y
b. para todo número natural $n$ se cumple $P(j)$ para todo $j = 1, \ldots, n$ entonces $P(n+1)$ se sigue cumpliendo.

entonces $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Observaciones:**

1. La inducción fuerte da mayor flexibilidad para probar algo respecto a la inducción simple.
2. En la inducción fuerte se puede usar cualquier hipótesis inductiva previa.

# Demostración del Principio de inducción fuerte

Defina el conjunto $X = \{n \in \mathbb{N} \,/\, P(n) \quad \text{es verdadero}\}$. Demostremos que $X = \mathbb{N}$.

Considere el conjunto $Y = \mathbb{N} \backslash X$. Afirmamos que $Y = \emptyset$. Caso contrario, tenemos $Y \neq \emptyset$ e $Y \subset \mathbb{N}$, entonces por el principio del buen orden, existe un mínimo elemento $p \in Y$. Note que $p \notin X$

Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < p$ se cumple que $n \in X$, esto es para $n = 1, 2, \ldots, p - 1$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

De la parte **(b)** del principio de inducción fuerte se tiene que $P(p)$ es verdadero, es decir $p \in X$, lo cual es una contradicción.

# Ejemplo:

La **sucesión de Fibonacci** $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demuestre que $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

**Solución**

Usaremos el principio de inducción fuerte.

Definimos

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} \,/\, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\right\}.$$

Luego:

# Ejemplo: (cont.)

- Para $n = 1$:
$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2\sqrt{5}}{2}\right] = 1.$$
- Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1, 2, \ldots, n-1, n \in S$.

Demostremos que $n+1 \in S$:
Sabemos que $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ y como $n-1, n \in S$ entonces:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

# Ejemplo: (cont.)

Observe:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right]$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right]$$

además:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}+1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}+1$$

# Ejemplo: (cont.)

Por tanto, reemplazando en $F_{n+1}$ resulta:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) \\ &- \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} \\ &- \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} \end{aligned}$$

# Ejemplo: (cont.)

simplificando:

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

ordenando:

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],$$

así $n+1 \in S$ y del principio de inducción fuerte concluimos que $S = \mathbb{N}$.

## Variante del principio de inducción fuerte 1

Sea $P(n)$ una propiedad que depende del parámetro $n \in \mathbb{N}$ y suponga que:

a. $P(n_0)$ es verdadero para un cierto $n_0 \in \mathbb{N}$.
b. Siempre que $P(k)$ es verdadero y que $P(m)$ es verdadero para cualquier $n_0 < m < k$ se tendrá que $P(k+1)$ es verdadero.

Entonces la afirmación $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n > n_0$.

# Ejemplo:

Demuestre usando inducción fuerte que todo entero $n > 1$ puede ser escrito como un producto de números primos (¿Puede usarse el primer principio de inducción?).

**Solución:**
Considere la propiedad:

$$P(n) = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \quad \text{puede ser escrito como producto de números primos}\}$$

- Caso base: $n_0 = 2$ y observe que $P(n_0)$ es verdadero.
- Hipótesis inductiva: Considere $k + 1 \in \mathbb{N}$ y asuma por hipótesis inductiva que todo $P(j)$ es verdadero para todo $j \in [2, k]$ y $j \in \mathbb{N}$. Esto significa que $j$ puede ser escrito como un producto de primos para todo $j \in [2, k]$.

# Ejemplo: (cont.)

Demostremos que $P(k+1)$ es verdadero. Tenemos dos casos:

- Si $k+1$ es primo, entonces $P(k+1)$ es verdadero.
- Si $k+1$ no es primo: en este caso existen dos enteros $r, s \in [2, k]$ tal que $k+1 = rs$. Por hipótesis inductiva, $r$ y $s$ pueden ser escritos como producto de primos.

Así podemos concluir que $k+1$ puede ser escrito como producto de primos.
En conclusión, $P(n)$ es verdadero para todo $n \geq n_0$ y $n \in \mathbb{N}$.

## Variante del principio de inducción fuerte 2

Sean $b \in \mathbb{N}$ y $j$ un entero positivo. Entonces, una propiedad $P(n)$ se se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq b$ si:

a. $P(b), P(b+1), \ldots, P(b+j)$ son verdaderas, y
b. para todo $k \geq b+j$, si $P(l)$ es verdadero para cada $l \in [b, k]$ entonces $P(k+1)$ es verdadero.

# Ejemplo:

Demuestre que cualquier cantidad entera positiva mayor o igual a 12 pesos puede ser pagada usando sólo monedas de 4 y 5 pesos.

**Solución:**
El conjunto

$$P(k) = \{k \in \mathbb{N} \,/\, k \quad \text{pesos puede pagarse con monedas sólo de 4 y 5 pesos}\}$$

Para el caso inductivo, observe que esto es cierto para los casos: $j = 12, 13, 14, 15$.
Nuestra hipótesis inductiva indica que la propiedad $P(j)$ es verdadera para todo $j \in [12, k]$ donde $j \in \mathbb{N}$ y $k$ es un entero mayor o igual a 15.

# Ejemplo: (cont.)

Queremos demostrar que $P(k+1)$ sea verdadera, es decir, $k+1$ pesos puede ser pagada sólo con monedas de 4 y 5 pesos.

Dado que $k \geq 15$, por hipótesis inductiva, la propiedad es cierta para $k-3$.

Es decir, $k-3$ pesos puede ser pagada sólo con monedas de 4 y 5 pesos. Por tanto, si agregamos una moneda más de 4 pesos obtenemos la cantidad $k+1$, la cual viene repartida en monedas sólo de 4 y 5 pesos.

# Tabla de contenidos

Tanto el Principio del buen orden como los principios de inducción son axiomas acerca de los naturales $\mathbb{N}$, es decir, no pueden demostrarse sino que son parte de la definición de $\mathbb{N}$. Resulta sorprendente el siguiente resultado:

### Teorema 1

*Las siguientes proposiciones son equivalentes sobre* $\mathbb{N}$*:*

1. *Principio del buen orden.*
2. *Principio de inducción fuerte.*
3. *Principio de inducción.*

Hemos demostrado el Principio de inducción matemática y el principio de inducción fuerte usando como hipótesis el Principio del buen orden.

Demostremos ahora el Principio del buen orden usando como hipótesis el Principio de inducción matemática.

# Demostración:

Sea $X \subset \mathbb{N}$ y $X \neq \emptyset$. Supongamos que $X$ no tiene elemento mínimo, es decir:

$$\forall\, m \in X \quad \exists n \in A \quad \text{tal que} \quad m \geq n$$

Si $1 \in X$ entonces $1 < n$ para todo $n \in X$, lo cual no puede ocurrir porque $X$ no tiene menor elemento, entonces $1 \notin X$. Sea $Y = \mathbb{N} \backslash X$, entonces $1 \in Y$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1, 2, 3, \ldots, k \in Y$. Entonces, $k + 1 \in B$ de lo contrario, $k + 1$ sería el primer elemento de $X$, lo cual no ocurre pues $X$ no tiene elemento mínimo.
Por tanto, por el principio de inducción se tiene que $Y = \mathbb{N}$ y como $Y = \mathbb{N} \backslash X$ entonces $X = \emptyset$ lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, $X$ debe tener un elemento mínimo.