Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2020-II

Álgebra Lineal I - Solucionario Práctica Calificada N^o 1
CM-1B2 A-B-C

---

1. Considere el $\mathbb{R}$- espacio vectorial $U = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/f$ es una aplicación$\}$ y los conjuntos $V = \{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/g$ es una aplicación par$\}$ y $W = \{h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/h$ es una aplicación impar$\}$.

   a) demuestre que V y W son subespacios de U. 2 puntos

   b) demuestre que $U = V \oplus W$. 3 puntos

   c) halle $v \in V$ y $w \in W$ tal que $x^3 + e^x = v + w$ 1 punto

   SOLUCIÓN.

   a) Sean $f, g \in V$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

   $$af(-x) + bg(-x) = af(x) + bg(x) \quad \Rightarrow \quad af + bg \in V$$

   Sean $f, g \in W$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

   $$af(-x) + bg(-x) = -af(x) - bg(x) \quad \Rightarrow \quad af + bg \in W$$

   b) Sea $f \in U$.

   $$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

   donde $v(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \in V$ y $w(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \in W$. De esta manera, $U = V + W$.
   Si $f \in V \cap W$ se tiene que $f(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   c)

   $$v = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad w = x^3 + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) Sean U y W son subespacios del espacio vectorial V. Si $\dim(V) = 3$ y $\dim(U) = \dim(W) = 2$ entonces $\dim(U \cap W) = 1$. 2 puntos

   b) Sea V un $\mathbb{R}$ espacio vectorial. Si $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ entonces $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \text{Span}\{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_4 - v_1\}$. 2 puntos

   c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Ker}(T) = \langle (0, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$ e $\text{Im}(T) = \langle (1, 0, 1), (2, 1, 0) \rangle$. 2 puntos

SOLUCIÓN.

a) Falso. El conjunto $U = W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0\}$ es un subespacio de dimensión 2 de $V = \mathbb{R}^3$ y $U \cap W = U$.

b) Verdadero. Si $v \in \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, entonces

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) v_1 + \alpha_2 (v_2 - v_1) + \alpha_3 (v_3 - v_1) + \alpha_4 (v_4 - v_1) \\ &= \beta_1 v_1 + \alpha_2 (v_2 - v_1) + \alpha_3 (v_3 - v_1) + \alpha_4 (v_4 - v_1) \end{aligned}$$

Si $v \in \text{Span}\{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_4 - v_1\}$, entonces

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \beta_2 (v_2 - v_1) + \beta_3 (v_3 - v_1) + \beta_4 (v_4 - v_1) \\ &= (\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4) v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4 \\ &= \alpha_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4 \end{aligned}$$

c) Verdadero. Primero extendemos el conjunto $\{(0, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$ a a una base de $\mathbb{R}^4$, $\{v_1, v_2, (0, 1, -1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$. A continuación, el teorema de extensión por linealidad implica que es suficiente definir T sobre los elementos de la base:

$$\begin{gathered} T(v_1) = (1, 0, 1), \quad T(v_2) = (2, 1, 0), \\ T((0, 1, -1, 1)) = (0, 0, 0) \quad \text{y} \quad T((0, 1, 0, 1)) = (0, 0, 0). \end{gathered}$$

3. Sea $T \colon \mathbb{C}^4 \to M_2(\mathbb{C})$ definida por $T((a, b, c, d)) = \begin{pmatrix} a+b & a+b+c \\ a+b+c & a+d \end{pmatrix}$. Halle una base de la imagen de T. ¿T es sobreyectiva? 3 puntos

SOLUCIÓN. La imagen de T es

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \left\{ \begin{bmatrix} a+b & a+b+c \\ a+b+c & a+d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Las últimas tres matrices son linealmente independientes y $\text{Dim}(\text{Im}(T)) = 3$. Por lo tanto, forma una base de $\text{Im}(T)$ y T no es sobreyectiva.

4. Sea V un $\mathbb{R}$- espacio vectorial de dimensión 3, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V, y t un parámetro real.

$T(v_1) = v_1 + v_2$, $T(v_2) = v_1 - v_2$, $T(v_3) = v_1 + tv_3$ define una aplicación lineal $T : V \to V$.

Encuentre los valores de t para el cual T es sobreyectiva. 5 puntos

SOLUCIÓN. Como B es una base de V, entonces para todo $v \in V$ existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Luego

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) v_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) v_2 + \alpha_3 t v_3$$

Para encontrar el valor de t recurrimos al Teorema de la dimensión del núcleo e imagen, i.e.,

$$\dim V = \dim KerT + \dim ImT$$

$KerT = \{v \in V : T(v) = 0\}$. Luego $T(v) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)v_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)v_2 + \alpha_3 t v_3 = 0$, de donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 t &= 0 \end{aligned}$$

Para $t \neq 0$, resolviendo el sistema se tiene, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Luego

$0 = v \in KerT$, $KerT = \{0\}$, de donde $\dim KerT = 0$

Como $ImT \subset V$ y $\dim ImT = \dim V - \dim KerT = 3 - 0 = 3 = \dim V$, esto implica que $ImT = V$. Por tanto T es sobreyectiva.

Ahora si $t = 0$, el sistema tiene por solución $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_3$, de donde

$\alpha_3(-\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 + v_3) = v \in KerT$. Luego $\dim KerT = 1$,

$\dim ImT = \dim V - \dim KerT = 3 - 1 = 2 \neq \dim V$. Por tanto T no es sobreyectiva.

En conclusión T es suryectiva solamente cuando $t = 0$.

UNI, 20 de noviembre 2020

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2020-2**

[Cod: CM1B2, Sección: A, B, C]
[Curso: Álgebra Lineal I]

Práctica Calificada $\mathcal{N}^o$ 2 - Solucionario

1. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   a) Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial finito dimensional. Si W_1 y W_2 son dos subespacios de V, entonces $(W_1+W_2)^o \subset W_1^o \cap W_2^o$.

   [1.5 puntos]

   b) Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial finito dimensional, y S, T subespacios de V. Si $V = S \oplus T$, entonces $\dim(S^o \oplus T^o) \neq \dim V^{**}$.

   [1.5 puntos]

   c) Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial. Si $T_1, T_2 : V \to V$ son dos proyecciones tales que $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$, entonces $T_1 \circ T_2$ es también una proyección.

   [1.5 puntos]

   d) Sean U, V dos $\mathbb{K}$–espacios vectoriales finito dimensionales y $T : U \to V$ una transformación lineal. Si la transpuesta de $T^\nabla : V^* \to U^*$ es inyectiva, entonces T es sobreyectiva.

   [1.5 puntos]

SOLUCIÓN

a) **Verdadero**. Sea $f \in (W_1+W_2)^o$ entonces $f(x) = 0$ para todo $w \in W_1 + W_2$.
Desde que $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ entonces $f(w_1) = 0$ para todo $w_1 \in W_1$. Por tanto $f \in W_1^o$
Análogamente se muestra que $f \in W_2^o$, esto concluye que $f \in W_1^o \cap W_2^o$.

b) **Falso**.

$$\begin{aligned}
\dim(S^o \oplus T^o) &= \dim S^o + \dim T^o \\
&= (\dim V - \dim S) + (\dim V - \dim T) \\
&= 2\dim V - \underbrace{(\dim S + \dim T)}_{\dim V}, V = S \oplus T \\
&= \dim V = \dim V^* = \dim V^{**}
\end{aligned}$$

c) **Verdadero**.

$$\begin{aligned}
(T_1 \circ T_2) \circ (T_1 \circ T_2) &= T_1 \circ (T_2 \circ \underbrace{(T_1 \circ T_2)}_{T_2 \circ T_1}) = T_1 \circ (\underbrace{(T_2 \circ T_2)}_{T_2} \circ T_1) \\
&= \underbrace{(T_1 \circ T_2)}_{T_2 \circ T_1} \circ T_1 = T_2 \circ \underbrace{(T_1 \circ T_1)}_{T_1} = T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2
\end{aligned}$$

d) **Verdadero**. $\dim V^* = \underbrace{\dim Ker T^\triangledown}_{0} + \dim Im T^\triangledown = \dim Im T^\triangledown$

Como U y V son de dimensión finita, entonces $\underbrace{\dim T(U)}_{\dim Im T} = \underbrace{\dim T^\triangledown(V^*)}_{\dim Im T^\triangledown}$. Además $\dim V^* = \dim V$.

Por tanto $\dim V = \dim Im T$ lo que significa que T es sobreyectiva.

2. Sea $V = \{a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$ el $\mathbb{R}-$espacio vectorial de polinomios de grado ≤ 1. Encuentre la base $\{v_1, v_2\}$ de V que es dual a la base $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ de V^* definido por

$$\varphi_1(f(x)) = \int_0^3 f(x)dx \quad \text{y} \quad \varphi_2(f(x)) = \int_0^4 f(x)dx$$

[4 puntos]

SOLUCIÓN

Sea $v_1 = a + bx$ y $v_2 = c + dx$. Por definición de base dual

$$\varphi_1(v_1) = 1,\ \varphi_1(v_2) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi_2(v_1) = 0,\ \varphi_2(v_2) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(v_1) &= \int_0^3 (a+bx)dx = \left[ax + \tfrac{b}{2}x^2\right]_0^3 = 3a + \tfrac{9}{2}b = 1 \\ \varphi_2(v_1) &= \int_0^4 (a+bx)dx = \left[ax + \tfrac{b}{2}x^2\right]_0^4 = 4a + 8b = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{aligned} \varphi_1(v_2) &= \int_0^3 (c+dx)dx = \left[cx + \tfrac{d}{2}x^2\right]_0^3 = 3c + \tfrac{9}{2}d = 0 \\ \varphi_2(v_2) &= \int_0^4 (c+dx)dx = \left[cx + \tfrac{d}{2}x^2\right]_0^4 = 4c + 8d = 1 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo cada sistema se tiene, $a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$ y $c = -\frac{3}{4}$, $d = \frac{1}{2}$.

Así, $\left\{v_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x, v_2 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x\right\}$ es la base de V dual a $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

3. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f & e \\ 0 & 1 & g & d \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

a) Si la matriz M es la matriz escalonada reducida de A. Halle los valores de a, b, c, d, e, f, g

[2.5 puntos]

b) Demuestre que el espacio de filas de la matriz A:

$$\mathcal{F}(A) = \langle (1,0,f,e), (0,1,g,d), (0,0,1,c), (0,0,a,b) \rangle$$

es igual al subespacio

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 :\ 3x - y - 2z + t = 0\}$$

[2.5 puntos]

SOLUCIÓN

a) La matriz escalonada reducida de A es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $a = 0$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 1$, $e = -3$, $f = 0$, $g = 0$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A) &= \langle (1,0,0,3),(0,1,0,1),(0,0,1,2),(0,0,0,0)\rangle \\ &= \langle (1,0,0,3),(0,1,0,1),(0,0,1,2)\rangle\end{aligned}$$

Por otro lado, si $u \in U$ se tiene:

$$\begin{aligned}u &= (x,y,z,t) = (x, 3x-2z+t, z, t) \\ &= x(1,3,0,0) + z(0,-2,1,0) + t(0,1,0,1)\end{aligned}$$

Entonces, $U = \langle (1,3,0,0),(0,-2,1,0),(0,1,0,1)\rangle$ y $\dim U = 3$.
Además, $\mathcal{F}(A) \subset U$ y $\dim \mathcal{F}(A) = 3$.

4. Determine la inversa, si existe, de la siguiente matriz,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mediante el método de resolución de sistemas de ecuaciones.

[5 puntos]

SOLUCIÓN

Sean $a^1 = (1,2,3)$, $a^2 = (1,-1,1)$ y $a^3 = (1,0,1)$ los vectores filas de A, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}.$$

Consideremos los vectores canónicos

$$e^1 = (1,0,0),\ e^2 = (0,1,0) \text{ y } e^3 = (0,0,1)$$

la cual es una base para $\mathbb{R}^3$,
Sabemos que cualquier vector en $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de esta base, es decir,

$$\begin{aligned} a^1 &= 1e^1 + 2e^2 + 3e^3 & (\alpha) \\ a^2 &= 1e^1 - 1e^2 + 1e^3 & (\beta) \\ a^3 &= 1e^1 + 0e^2 + 1e^3. & (\gamma) \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, expresemos los vectores e^1, e^2, e^3 como una combinación lineal de los vectores a^1, a^2, a^3 partiendo del sistema de ecuaciones (1).
$(\gamma)-(\beta)$: $\quad e^2 = \quad -a^2 + a^3,$
$(\gamma)-(\alpha)$: $\quad e^3 = \frac{1}{2}a^1 + a^2 - \frac{3}{2}a^3,$
reemplazamos estas ecuaciones en la ecuación (α) obteniéndose

$$e^1 = -\frac{1}{2}a^1 - a^2 + \frac{5}{2}a^3.$$

Luego, la matriz A es inversible, entonces

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Los Profesores

UNI, 7 de diciembre de 2020[1]

[1] Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2020-2**

[Cod: CM1B2, Sección: A, B, C]
[Curso: Álgebra Lineal I]

Examen Parcial-Solucionario

1. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$, donde E es un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, y sea P la proyección de E. Demuestre que T conmuta con P si, y solamente si $\operatorname{Im}(P)$ y $\operatorname{Ker}(P)$ son $T-$invariantes

   [*Un subespacio F de E es un $T-$invariante si $T(F) \subset F$, esto es, para todo $x \in F$ se verifica que $T(x) \in F$*]

   [5 ptos.]

   SOLUCIÓN

   $(\Rightarrow)$ Supongamos que $T \circ P = P \circ T$. Sea $x \in \operatorname{Ker}(P)$ entonces $P(x) = 0$. Luego

$$\begin{aligned}(T \circ P)(x) &= (P \circ T)(x)\\ T(P(x)) &= P(T(x))\\ 0 &= P(T(x))\end{aligned}$$

   entonces $T(x) \in \operatorname{Ker}(P)$. Por consiguiente $T(\operatorname{Ker}(P)) \subset \operatorname{Ker}(P)$

   Ahora sea $x \in \operatorname{Im}(P)$, como P es proyección entonces $P(x) = x$. Luego

$$\begin{aligned}(T \circ P)(x) &= (P \circ T)(x)\\ T(P(x)) &= P(T(x))\\ T(x) &= P(T(x))\end{aligned}$$

   entonces $T(x) \in \operatorname{Im}(P)$.Por consiguiente $T(\operatorname{Im}(P)) \subset \operatorname{Im}(P)$

   $(\Leftarrow)$ Supongamos que $\operatorname{Ker}(P)$ e $\operatorname{Im}(P)$ son subespacios $T-$invariantes. Como P es una proyección, entonces $E = \operatorname{Ker}(P) \oplus \operatorname{Im}(P)$.

   Luego cada $x \in E$ se escribe de manera única como $x = y + z$, donde $y \in \operatorname{Ker}(P)$, $z \in \operatorname{Im}(P)$. De donde $P(y) = 0$, $P(z) = z$. Así $P(x) = P(y) + P(z) = P(z) = z$.

$$\begin{aligned}(T \circ P)(x) &= T(P(x))\\ &= T(z) \qquad\qquad (1)\end{aligned}$$

   Como $\operatorname{Ker}(P)$ e $\operatorname{Im}(P)$ son subespacios $T-$invariantes, entonces $T(y) \in \operatorname{Ker}(P)$ y $T(z) \in \operatorname{Im}(P)$. Entonces

$$\begin{aligned}(P \circ T)(x) &= P(T(y+z))\\ &= P(T(y) + T(z))\\ &= \underbrace{P(T(y))}_{0} + \underbrace{P(T(z))}_{T(z)}\\ &= T(z) \qquad\qquad (2)\end{aligned}$$

   De (1) y (2) se concluye que $T \circ P = P \circ T$

2. Sea $f \in \mathcal{L}(E)$, y sean α, β dos números reales distintos y no nulos. Suponga además que

$$(f - \alpha I_{d_E}) \circ (f - \beta I_{d_E}) = 0 \quad \text{y} \qquad E = \mathrm{Im}(f - \alpha I_{d_E}) + \mathrm{Im}(f - \beta I_{d_E}).$$

Demuestre que $E = \mathrm{Ker}(f - \alpha I_{d_E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \beta I_{d_E})$, donde I_{d_E} es el operador lineal identidad en E.
[$\mathcal{L}(E) = \{T : E \to E, T \textit{ es un operador lineal}\}$]

[5 ptos.]

SOLUCIÓN

Sea $x \in \mathrm{Ker}(f - \alpha I_{d_E}) \cap \mathrm{Ker}(f - \beta I_{d_E})$, de donde $(f - \alpha I_{d_E})(x) = 0$, $(f - \beta I_{d_E})(x) = 0$.
Luego, $f(x) = \alpha x$ y $f(x) = \beta x$. De aquí $(\alpha - \beta)x = 0$.
Como $\alpha \neq \beta$, entonces $x = 0$. Por tanto $\mathrm{Ker}(f - \alpha I_{d_E}) \cap \mathrm{Ker}(f - \beta I_{d_E}) = \{0\}$ (1)
Por otro lado se tiene $(f - \alpha I_{d_E}) \circ (f - \beta I_{d_E}) = 0$, luego $(f - \alpha I_{d_E})((f - \beta I_{d_E})(x)) = 0$, para todo $x \in E$.
Sea $y = (f - \beta I_{d_E})(x)$, $(f - \alpha I_{d_E})(y) = 0$, lo que implica que $y \in \mathrm{Ker}(f - \alpha I_{d_E})$. Pero $y \in \mathrm{Im}(f - \beta I_{d_E})$.
Por tanto,
$\mathrm{Im}(f - \beta I_{d_E}) \subset \mathrm{Ker}(f - \alpha I_{d_E})$ (2)
Como α β son dos números reales totalmente arbitrarios, entonces en este caso la composición de funciones conmuta, esto es, $(f - \beta I_{d_E}) \circ (f - \alpha I_{d_E}) = 0$
Por tanto,
$\mathrm{Im}(f - \alpha I_{d_E}) \subset \mathrm{Ker}(f - \beta I_{d_E})$ (3)
Por hipótesis se tiene $E = \mathrm{Im}(f - \alpha I_{d_E}) + \mathrm{Im}(f - \beta I_{d_E})$, entonces para todo $x \in E$, $x = y + z$, donde $y \in \mathrm{Im}(f - \alpha I_{d_E})$, $z \in \mathrm{Im}(f - \beta I_{d_E})$.
Por (2) y (3), $y \in \mathrm{Ker}(f - \beta I_{d_E})$, $z \in \mathrm{Ker}(f - \alpha I_{d_E})$. Por tanto, $E = \mathrm{Ker}(f - \alpha I_{d_E}) + \mathrm{Ker}(f - \beta I_{d_E})$.
Finalmente, teniendo en cuenta (1), $E = \mathrm{Ker}(f - \alpha I_{d_E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \beta I_{d_E})$

3. Sea V un $\mathbb{K}$–espacio vectorial finito dimensional y $v_1, \ldots, v_m \in V$. Defina una aplicación lineal $\Gamma : V^* \to \mathbb{K}^m$ por

$$\Gamma(\varphi) = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_m))$$

Pruebe que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es linealmente independiente si y solo si Γ es sobreyectiva.

[5 ptos.]

SOLUCIÓN

($\to$) $v_1, \ldots, v_m$ es LI:
entonces para cualquier $(f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{K}^m$, existe un $\varphi \in V^*$ tal que

$$\varphi(v_i) = f_i \ , \ i \in I_m$$

Ahora extendemos $\{v_1, \ldots, v_m\}$ a una base de V y aplicamos el teorema de extensión por linealidad. Luego por la definición de Γ, tenemos que

$$\Gamma(\varphi) = (f_1, \ldots, f_m)$$

osea Γ es sobreyectiva.

($\leftarrow$) Γ es sobreyectiva.
Supongamos que $\{v_1, \ldots, v_m\} esLD$, entonces existen $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{K}$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{m} k_i v_i = 0$$

con algunos $k_i \neq 0$. Sea $k_i \neq 0$, entonces v_i puede ser escrito como una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m$. Por lo tanto $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ no está en la imagen de Γ (donde 1 se ubica en la componente i-ésima).

Por otro lado por la sobreyectividad de Γ, tenemos que existe $\varphi \in V^*$ tal que

$$\Gamma(\varphi) = (0,\ldots,0,1,0\ldots,0)$$

Entonces

$$\varphi(v_j) = 0, \varphi(v_i) = 1\ ,\ \ j \in I_m - \{i\}$$

Esto implica que $\varphi(v) = 0$ si v es combinación lineal de $v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_m$. Por esto $\varphi(v_i) = 0$. Sin embargo $\varphi(v_i) = 1$, lo cual es una contradicción con la sobreyectividad de Γ, que vienbe de suponer que el conjunto de vectores es LD. Por lo tanto $\{v_1,\ldots,v_m\}$ es LI.

4. Considere las siguiente bases en $\mathbb{R}^2$:

$$B_1 = \{v^1 = (1,-2), v^2 = (3,-4)\}, \quad \text{y} \quad B_2 = \{w^1 = (1,3), w^2 = (3,8)\}.$$

a) Encuentre las coordenadas del vector $v = (v_1,v_2)$ relativa a la base B_1. [1 pto.]

b) Halle la matriz cambio de base P de B_1 a B_2. [1 pto.]

c) Encuentre las coordenadas del vector $w = (w_1,w_2)$ relativa a la base B_2. [1 pto.]

d) Halle la matriz cambio de base Q de B_2 a B_1. [1 pto.]

e) ¿ Qué relación existe entre las matrices P y Q? Justifique su respuesta. [1 pto.]

SOLUCIÓN

a) Sean $x,y \in \mathbb{R}$ tales que $v = xv^1 + yv^2$, entonces

$$v = (v_1,v_2) = xv^1 + yv^2 = x(1,-2) + y(3,-4) = (x+3y, -2x-4y),$$

es decir, nos encontramos con el siguiente sistema

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & v_1 \\ -2x & - & 4y & = & v_2 \end{array},$$

de donde, tenemos $x = -2v_1 - \frac{3}{2}v_2,\ \ y = v_1 + \frac{1}{2}v_2$, por tanto

$$v = (v_1,v_2) = (2v_1 - \frac{3}{2}v_2)v^1 + (v_1 + \frac{1}{2}v_2)v^2,$$

es decir,

$$\Big[(v_1,v_2)\Big]_{B_1} = (2v_1 - \frac{3}{2}v_2, v_1 + \frac{1}{2}v_2)^t.$$

b) En este caso, expresemos $w^1, w^2 \subset B_2$ como una combinación lineal de los elementos v^1, v^2 de B_1, entonces

$$\begin{aligned} w^1 &= (1,3) = -\frac{13}{2}v^1 + \frac{5}{2}v^2 \\ w^2 &= (3,8) = -18v^1 + 7v^2, \end{aligned}$$

entonces

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & -18 \\ \frac{5}{2} & 7 \end{bmatrix}$$

c) Sean $x,y \in \mathbb{R}$ tales que $w = xw^1 + yw^2$, entonces

$$w = (w_1,w_2) = xw^1 + yw^2 = x(1,3) + y(3,8) = (x+3y, 3x+8y),$$

entonces, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & 3y & = & w_1 \\ 3x & + & 8y & = & w_2 \end{array},$$

resolviendo, obtenemos $x = -8w_1 + 3w_2,\ \ y = 3w_1 - w_2$, por tanto

$$w = (w_1, w_2) = (-8w_1 + 3w_2)w^1 + (3w_1 - w_2)w^2,$$

es decir,

$$\Big[(w_1, w_2)\Big]_{B_2} = (-8w_1 + 3w_2, 3w_1 - w_2)^t.$$

d) Ahora expresemos $v^1, v^2 \subset B_1$ como una combinación lineal de los elementos w^1, w^2 de B_2, entonces

$$\begin{aligned} v^1 =& (1,-2) = -14w^1 + 5w^2 \\ v^2 =& (3,-4) = -36w^1 + 13w^2, \end{aligned}$$

entonces

$$Q = \begin{bmatrix} -14 & -36 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

e) De la matrices Q y P se tiene

$$QP = \begin{bmatrix} -14 & -36 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & -18 \\ \frac{5}{2} & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

se observa que $Q = P^{-1}$

Los Profesores

UNI, 24 de diciembre de 2020[1]

[1] Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2020-II

Álgebra Lineal I - Solución de la Práctica Calificada N^o 3
CM-1B2 A-B-C

---

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, sonde las variables son x, y, z:

$$\begin{cases} (k+2)x & + & 2ky & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & kz & = & -k \\ & & y & + & z & = & k \end{cases}$$

   a) Halle los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el rango de la matriz aumentada del sistema es 3. ¿Halle el conjunto solución del sistema para cada valor de k?(Justifique su respuesta) (2.5 puntos)

   b) Halle los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el rango de la matriz aumentada del sistema es 2. ¿Halle el conjunto solución del sistema para cada valor de k? (Justifique su respuesta) (2.5 puntos)

   Solución. Luego de operaciones elementales se tiene:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & -k \\ 0 & 1 & 1 & k \\ 0 & 0 & -(k+1)(k+5) & (k+1)(-3k+1) \end{array}\right)$$

   Por lo tanto,

   a) Si $k \neq -1$ el rango de la matriz aumentada es igual a 3.
      1) Si $k \neq -5$ se tiene solución única.
      2) Si $k = -5$ el sistema no tiene solución.

   b) Si $k = -1$ el rango de la matriz aumentada es igual a 2 y el conjunto solución es

$$\{(-1-\lambda, -1-\lambda, \lambda) \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2. *a*) Sea V un espacio vectorial de los polinomios reales de grado a lo más siete y consideremos la aplicación $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$b(v, w) = v(2)w(11) + v(5)w(7).$$

   Pruebe que b es bilineal.

   b) Sean $V = \mathbb{R}(n, n)$ y $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación definida por

$$b(A, B) = traza(AB).$$

   Pruebe que b es bilineal y simétrica.

   Solución.

a) Sean $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ cualesquiera, entonces

- $$\begin{aligned} b(v_1 + \alpha v_2, w) &= \big(v_1 + \alpha v_2\big)(2)w(11) + \big(v_1 + \alpha v_2\big)(5)w(7) \\ &= v_1(2)w(11) + \alpha v_2(2)w(11) + v_1(5)w(7) + \alpha v_2(5)w(7) \\ &= \big(v_1(2)w(11) + v_1(5)w(7)\big) + \alpha\big(v_1(2)w(11) + v_1(5)w(7)\big) \\ &= b(v_1, w) + \alpha b(v_2, w). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} b(v, w_1 + \alpha w_2) &= v(2)(w_1 + \alpha w_2)(11) + v(5)(w_1 + \alpha w_2)(7) \\ &= v(2)w_1(11) + \alpha v(2)w_2(11) + v(5)w_1(7) + \alpha v(5)w_2(7) \\ &= \big(v(2)w_1(11) + v(5)w_1(7)\big) + \alpha\big(v(2)w_2(11) + v(5)w_2(7)\big) \\ &= b(v, w_1) + \alpha b(v, w_2). \end{aligned}$$

Por tanto b es bilineal.

b) Sean $A = [a_{ij}], A_1 = [a^1_{ij}], A_2 = [a^2_{ij}], B = [b_{ij}], B_1 = [b^1_{ij}], B_2 = [b^2_{ij}] \in V$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ cualesquiera, entonces

- $$\begin{aligned} b(A_1 + \alpha A_2, B) = traza((A_1 + \alpha A_2)B\big) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a^{(1)}_{ji} + \alpha a^{(2)}_{ji})b_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a^{(1)}_{ji} b_{ij} + \alpha \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a^{(2)}_{ji} b_{ij} \\ &= b(A_1, B) + \alpha b(A_2, B). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} b(A, B_1 + \alpha B_2) = traza\big(A(B_1 + \alpha B_2)\big) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(b^{(1)}_{ij} + \alpha b^{(2)}_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} b^{(1)}_{ij} + \alpha \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} b^{(2)}_{ij} \\ &= b(A, B_1) + \alpha b(A, B_2). \end{aligned}$$

Por tanto b es bilineal.

- $$\begin{aligned} b(A, B) &= traza(A, B) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{jk} = traza(B, A) \\ &= b(B, A). \end{aligned}$$

Por tanto b es simétrico.

3. Consideremos V un espacio vectorial, una aplicación $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada **forma cuadrática** si existe una forma bilineal $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(v) = b(v, v)$
Ahora sean $V = \mathbb{R}^3$ un espacio vectorial, $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación definida

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 3x_3^2.$$

a) Pruebe que una forma cuadrática.

b) Encuentre la matriz respecto a la base canónica.

Solución.

a) Fácilmtente se comprueba que φ es una forma cuadrática, basta ver que

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha\overline{x}) = \varphi(\alpha(x_1, x_2, x_3)) &= (2\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 - 2(\alpha x_1)(\alpha x_3) - 3(\alpha x_3)^2 \\ &= \alpha^2\big(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 3x_3^2\big) = \alpha^2\varphi(\overline{x}).\end{aligned}$$

b) Definamos la aplicación $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$b(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2}\big[\varphi(\overline{x} + \overline{y}) - \varphi(\overline{x}) - \varphi(\overline{y})\big].$$

Antes simplifiquemos b

$$\begin{aligned}b(\overline{x}, \overline{y}) = &\frac{1}{2}\big[\big(2(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 - (x_1 + y_1)(x_3 + y_3) - 3(x_3 + y_3)^2\big) + \\ &- \big(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 - 3x_3^2\big) - \big(2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_3 - 3y_3^2\big)\big] \\ = &\frac{1}{2}\big[2x_1^2 + 4x_1y_1 + 2y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 - 2x_1x_3 - 2x_1y_3 - 2y_1x_3 - 2y_1y_3 + \\ &- 3x_3^2 - 6x_3y_3 - y_3^2 - 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 + 3x_3^2 - 2y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 3y_3^2\big] \\ = &\frac{1}{2}\big[4x_1y_1 + 2x_2y_2 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 - 6x_3y_3\big] \\ = &\, 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_3.\end{aligned}$$

Veamos que b es bilineal:

- $$\begin{aligned}b(\overline{x} + \overline{z}, \overline{y}) &= 2(x_1 + z_1)y_1 + (x_2 + z_2)y_2 - (x_1 + z_1)y_3 - (x_3 + z_3)y_1 - 3(x_3 + z_3)y_3 \\ &= \big[2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_3\big] + \big[2z_1y_1 + z_2y_2 - z_1y_3 - z_3y_1 - 3z_3y_3\big] \\ &= b(\overline{x}, \overline{y}) + b(\overline{z}, \overline{y}).\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}b(\overline{x}, \overline{y} + \overline{z}) &= 2x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) - x_1(y_3 + z_1) - x_3(y_1 + z_3) - 3x_3(y_3 + z_3) \\ &= \big[2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_3\big] + \big[2x_1z_1 + x_2z_2 - x_1z_3 - x_3z_1 - 3x_3z_3\big] \\ &= b(\overline{x}, \overline{y}) + b(\overline{x}, \overline{z}).\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}b(\overline{x}, \alpha\overline{y}) &= 2x_1(\alpha y_1) + x_2(\alpha y_2) - x_1(\alpha y_3) - x_3(\alpha y_1) - 3x_3(\alpha y_3) \\ &= \alpha(2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_3) \\ &= \alpha b(\overline{x}, \overline{y}),\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}b(\alpha\overline{x}, \overline{y}) &= 2(\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 - (\alpha x_1)y_3 - (\alpha y_3)x_1 - 3(\alpha x_3)y_3 \\ &= \alpha(2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_3) \\ &= \alpha b(\overline{x}, \overline{y}),\end{aligned}$$

Por tanto b es bilineal.
Luego la matriz respecto a la base canónica

$$\begin{aligned}b(\overline{x}, \overline{y}) &= 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_3 \\ &= [x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

4. Sea A una matriz de orden 2×2 sobre el campo $\mathbb{K}$, y suponga que $A^2 = 0$. Demuestre que para cada escalar c, se tiene que $\det(cI - A) = c^2$

Solución.

Sea $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, entonces $A^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yw \\ xz + wz & yz + w^2 \end{pmatrix}$

Como $A^2 = 0$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} x^2 + yz &= 0 && (1) \\ y(x + w) &= 0 && (2) \\ z(x + w) &= 0 && (3) \\ yz + w^2 &= 0 && (4) \end{aligned}$$

Ahora, $\det(cI - A) = \det \begin{pmatrix} c - x & -y \\ -z & c - w \end{pmatrix} = (c-x)(c-w) - yz = c^2 - c(x+w) + xw - yz$

Por tanto, $\det(cI - A) = c^2 - c(x + w) + \det A$ (5)

Ahora, supongamos $x + w \neq 0$, entonces las ecuaciones (2) y (3) implican que $y = z = 0$.

Así $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$, pero $A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix}$. Como $A^2 = 0$, eso implica que también $x = w = 0$ lo cual es una contradicción a la suposición $x + w \neq 0$.

Así necesariamente $A^2 = 0$ implica que $x + w = 0$, de donde $w = -x$. De este modo $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$

Luego teniendo en cuenta (1) o (4), se tiene

$\det A = -x^2 - yz = 0$

Por tanto $A^2 = 0$ implica que $x + w = 0$ y $\det A = 0$

Finalmente por (5) tenemos, $\det(cI - A) = c^2$.

UNI, 20 de noviembre 2020

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2020-II

Álgebra Lineal I - Práctica Calificada N^o 4
CM-1B2 A-B-C

---

1. Sea $\langle , \rangle$ un producto interno sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial W y $A\colon W \to W$ un isomorfismo. Demuestre que $\langle u, v\rangle_2 := \langle Au, Av\rangle$ es un producto interno para W. (2 puntos)

   Demostración:

   a) $\langle u, v\rangle_2 = \langle Au, Av\rangle = \langle Av, Au\rangle = \langle v, u\rangle_2$

   b) $\langle u + \lambda w, v\rangle_2 = \langle A(u + \lambda w), Av\rangle = \langle Au + \lambda Aw, Av\rangle = \langle Au, Av\rangle + \lambda\langle Aw, Av\rangle = \langle u, v\rangle_2 + \lambda\langle w, v\rangle_2$

   c) $\langle u, u\rangle_2 = \langle Au, Au\rangle \geq 0$ y $\langle u, u\rangle_2 = 0$ si y solo si $Au = 0$, como A es un isomorfismo $u = 0$.

2. Sea $V = \{A \in M_3(\mathbb{R})\colon A^t = A\}$.

   a) Demuestre que $\langle S, T\rangle := \mathrm{Tr}(ST)$ es un producto interno sobre V. (2 puntos)
   Solución:

   1) $\mathrm{Tr}(ST) = \mathrm{Tr}(TS)$.
   2) $\mathrm{Tr}(R(T + S)) = \mathrm{Tr}(RT + RS) = \mathrm{Tr}(RT) + \mathrm{Tr}(RS)$.
   3) $\mathrm{Tr}((\alpha \cdot R)S) = \alpha \cdot \mathrm{Tr}(RS) = \mathrm{Tr}(R(\alpha \cdot S))$
   4) $\langle T, T\rangle = \mathrm{Tr}(T^2) = \sum_{ij} T_{ij}^2 \geq 0$ y es igual a 0 si y solo si $T_{ij} = 0$

   b) Sean $A = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   i) Determine la proyección ortogonal de A sobre el subespacio $\mathrm{span}(B,\ C)$. (3 puntos)

   ii) ¿Los matrices B y C son ortogonales? (justifique su respuesta). (1 punto)

   iii) Halle una base ortonormal del subespacio $\mathrm{span}(A,\ B,\ C)$. (2 puntos)

   Solución:

   i) Sea $D = \mathrm{Proy}_{\mathrm{span}(B,C)} A$.

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{\langle A, B\rangle}{\langle B, B\rangle} B + \frac{\langle A, C\rangle}{\langle C, C\rangle} C \\
D &= \frac{16}{4} B + \frac{12}{12} C \\
D &= 4B + C \\
D &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ii) Los vectores B y C son ortogonales: $\langle B, C\rangle = 0$.

iii) Como las matrices B y C son ortogonales, basta considerar la matriz

$$U = A - D = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la base ortonormal es

$$\left\{ \frac{1}{2}B,\ \frac{1}{2\sqrt{3}}C,\ \frac{1}{\sqrt{155}}U \right\}$$

3. Determine los valores propios y vectores propios de la matriz $q(A)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y q es un polinomio definido por $q(x) = x^2 + x - 1$. (5 puntos)

Solución: Sabemos que $q(A) = A^2 + A - \mathrm{I}$ y si λ es un valor propio de A y v su correspondiente vector propio asociado a λ, entonces $Av = \lambda v$ y por tanto

$$q(A)v = (A^2 + A - \mathrm{I})v = \lambda^2 v + \lambda v - v = (\lambda^2 + \lambda - 1)v = q(\lambda)v$$

de donde se observa que $q(\lambda)$ es el valor propio de $q(A)$ y su correspondiente vector propio asociado es v.
Basta, entonces, calcular los valores y vectores propios de A.

a) **Cálculo de los valores propios**:
El polinomio característico de A está dado por

$$p_{_A}(\lambda) = det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = \lambda^2 - 4 = 0.$$

de donde los valores propios A son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 2$.
Por tanto $q(\lambda_1) = q(-2) = 1$ **y** $q(\lambda_2) = q(2) = 5$.

b) **Cálculo de los vectores propios**:
De $Av = \lambda v$ se tiene $(A - \lambda \mathrm{I})v = \mathbf{0}$, con $v = (v_1, v_2)^t$, entonces para
$\lambda_1 = -2$:

$$(A - \lambda_1)v = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 3 \\ 1 & -1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3v_1 + 3v_2 \\ v_1 + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

note que $v_1 + v_2 = 0$, entonces $v_2 = -v_1$, haciendo $v_1 = 1$, luego $v_2 = -1$, **por tanto** $v^1 = (1, -1)^t$.
$\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1)v = \begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 3 \\ 1 & -1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 + 3v_2 \\ v_1 - 3v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

aquí $v_1 - 3v_2 = 0$, entonces $v_1 = 3v_2$, haciendo $v_2 = 1$, luego $v_1 = 3$, **por tanto** $v^2 = (3; 1)^t$

4. Sea la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\operatorname{Ker}(A-\lambda I) = \operatorname{Ker}\left((A-\lambda I)^2\right)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Utilizando el concepto de polinomio minimal, demuestre que A es diagonalizable.

(5 puntos)

Solución:

Sea λ un valor propio de A. Supongamos que λ tiene multiplicidad algebraica ≥ 2. Entonces λ es raíz del polinomio minimal $m_A(x) = (x-\lambda)^2 q(x)$, de donde $m_A(A) = (A-\lambda I)^2 q(A) = 0$.

Así para cualquier vector $w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, se tiene $(A-\lambda I)^2 q(A) w = 0$. Sea $v = q(A)w$, luego $(A-\lambda I)^2 v = 0$. Pero $\operatorname{Ker}\left((A-\lambda I)^2\right) = \operatorname{Ker}(A-\lambda I)$. Por tanto se tiene $(A-\lambda I)v = 0$, lo que implica que $m_A(x) = (x-\lambda)q(x)$ lo cual es una contradicción a la minimalidad de m_A.

Por tanto todos los autovalores de A tienen multiplicidad algebraica 1, luego A es diagonalizable.

UNI, 15 de enero 2021

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2020-2**

[Código-Curso: CM-1B2 - Álgebra Lineal I A B C]

Solución del Examen Final

1. Sobre el espacio $P_2[x]$, considere el producto interno dado por

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Aplique el proceso de $Gram-Schmidt$ a la base $\{1, x, x^2\}$ para obtener una base ortonormal de $P_2[x]$.

Solución

Aplicando el proceso de Gram-Schmidt iniciando con el vector 1 de la base, se obtiene la base ortonormal

$$\left\{1, 2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

2. Sean U, W subespacios vectoriales finito dimensionales de V. Pruebe que $P_U P_W = 0$ si y solo si $\langle u, w\rangle = 0$ para todo $u \in U$ y todo $w \in W$.

OBS: P_U denota la proyección ortogonal sobre el subespacio U.

Solución

($\Rightarrow$) Supongamos que $P_U P_W = P_U w = 0$. Para cualquier $w \in W$ se tiene que $P_U P_W w = 0$, de esto se tiene que $w \in U^{\perp}$. Luego se tiene que

$$\langle u, w\rangle = 0 \text{ , para todo } u \in U$$

Pero recordemos que w fue escogido arbitrariamente, de esto se tiene que $\langle u, w\rangle = 0$ para todo $u \in U$ y todo $w \in W$.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que $\langle u, w\rangle = 0$ para todo $u \in U$ y todo $w \in W$. Entonces $W \subset U^{\perp}$, luego se tiene que $P_U W = 0$, es más, se tiene que $P_U P_W = 0$ dado que para todo $v \in V$ tenemos que $P_W v \in W$.

3. Halle los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Note que la matriz A también puede ser expresada por cuatro bloques, cada una de ellas de orden 2×2, es decir,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

por tanto el polinomio característico asociada a la matriz A es de la forma

$$p_A(\lambda) = p_{A_{11}}(\lambda)p_{A_{22}}(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-4)\big[(\lambda-4)(\lambda-2)+1\big] = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-3)^2,$$

de dónde, los valores propios son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ (ambos de multiplicada algebraica uno) y $\lambda_3 = 3$ (multiplicidad algebraica dos).
Hallando los vectores propios correspondientes

- $\lambda = 2$, en este caso tenemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

  de dónde tenemos que $y = z = x = 0$, en este caso escogemos $w = 1$, por tanto $v^1 = (1,0,0,0)^t$.

- $\lambda = 4$, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

  por tanto se tiene $z = y = 0$, y $2w + x = 0$, luego escogemos $w = -1$, y $x = 2$, entonces tenemos $v^2 = (-1,2,0,0)^t$.

- $\lambda = 3$, entonces el sistema es de la forma

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

  luego tenemos $y = -z$, $x = -z$ y $w = -z$, ahora hacemos $z = -1$, entonces $v^3 = (1,1,1,-1)^t$.
  Para el segundo vector correspondiente a este valor propio tenemos

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

  resolviendo este sistema tenemos $y = 1 - z$, $x = -z$ y $w = 4 - z$, haciendo $z = 1$ obtenemos $v^4 = (3,-1,0,1)^t$.

4. Determine e^{tA}, para todo $t \in \mathbb{R}$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

El polinomio característico asociado está dado por

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} = \underset{c_1 + c_2 + c_3}{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -1+\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -1+\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2 = 0$$

de dónde los valores propios son $\lambda_1 = 4$ (multiplicidad algebraica uno) y $\lambda_2 = 1$ (multiplicidad algebraica dos).

Cálculo de los vectores propios:

- $\lambda_1 = 4$ en este caso tiene el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

  se dónde $z = y = x$, entonces $v^1 = (1, 1, 1)^t$.

- $\lambda_1 = 1$ resolviendo el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

  luego tenemos $(-y - z, y, z)^t = y(-1, 1, 0)^t + z(-1, 0, 1)^t$, en este caso podemos escoger $y = z = 1$, con lo cual tenemos $v^2 = (-1, 1, 0)^t$ y $v^3 = (-1, 0, 1)^t$.
  Por tanto, se tiene

$$P = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  por tanto

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$\boldsymbol{P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J}$$

Por tanto la matriz

$$\boldsymbol{e^{tA} = P^{-1}e^{tJ}P = P^{-1}\begin{bmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{4t}+2e^{t} & -e^{4t}+e^{t} & -e^{4t}+e^{t} \\ -e^{4t}+2e^{t} & e^{4t}+2e^{t} & e^{4t}-e^{t} \\ -e^{4t}+2e^{t} & e^{4t}-e^{t} & e^{4t}+2e^{t} \end{bmatrix},}$$

para todo $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Uni, 19 de Febrero del 2021*

*Hecho en LaTeX