DISTANCIA EN GRAFOS. MATRIZ DE ADYACENCIA. SECUENCIA DE GRADOS.

Profesores del curso:

Ronald Mass [1]

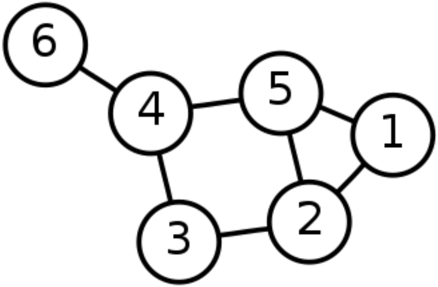
Ángel Ramírez [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

19 de junio de 2020

Tabla de contenidos

Sea $G = (V, E)$ un **grafo conexo**. Definimos la **distancia** entre dos vértices $v, v' \in V(G)$, denotado por $d_G(v, v')$, como la longitud del camino simple más corto desde v hasta v' en G.



Observe que $d_G : V(G) \times V(G) \to \mathbb{R}$ es una función llamada **función distancia** o **métrica** del grafo G. Esta métrica tiene las siguientes propiedades:

1. $d_G(v, v') \geq 0$ para todo $v, v' \in V(G)$.
2. $d_G(v, v') = 0$ si y sólo si $v = v'$.
3. Simetría: $d_G(v, v') = d_G(v', v)$ para cualquier par $v, v' \in V(G)$.
4. Desigualdad triangular: $d_G(v, v'') \leq d_G(v, v') + d_G(v', v'')$ para todo $v, v', v'' \in V(G)$.

Una función $d : V(G) \times V(G) \to \mathbb{R}$ que satisfacen las propiedades 1–4 es llamada **métrica** sobre el conjunto $V(G)$. El par $(V(G), d)$ es llamado **espacio métrico**.

La función distancia d_G cumple además las siguientes propiedades:

1. $d_G(v, v')$ es un enetro no negativo para cualquier $v, v' \in V(G)$.
2. Si $d_G(v, v'') > 1$ entonces existe un vértice $v' \neq v''$ y $v \neq v'$ tal que $d_G(v, v') + d_G(v', v'') = d_G(v, v'')$.

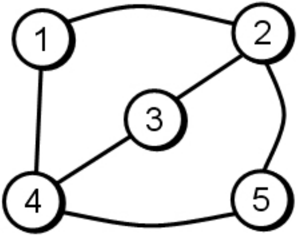
Tabla de contenidos

Definición 1

Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices. Denote los vértices por $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (en algún orden arbitrario). La **matriz de adyacencia** *de G, con respecto a la numeración realizada en los vértices, es una matriz $n \times n$ definida por la siguiente regla:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & si \quad \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Ejemplo:



M	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

Figura 1: Matriz de adyacencia

Proposición 1

Sea $G = (V, E)$ *un grafo con vértices* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *y sea* $A = A_G$ *su respectiva matriz de adyacencia.* A^k *denota la potencia* $k-$*ésima de la matriz* A*.* $a_{ij}^{(k)}$ *denota el elemento de la matriz* A^k *en la posición* (i, j)*. Entonces,* $a_{ij}^{(k)}$ *es el número de caminos de longitud exactamente* k *desde el vértice* v_i *hasta el vértice* v_j *en el grafo* G*.*

Demostración:

Procedemos por inducción.

1. Un camino de longitud 1 entre dos vértices significa exactamente que estos vértices están unidos por una arista, y de aquí para $k = 1$ la proposición sólo reformula la definición de la matriz de adyacencia.
2. Sea $k > 1$, y sean v_i, v_j dos vértices arbitrarios (posiblemente idénticos). Cualquier camino de longitud k de v_i hacia v_j consiste de una arista desde v_i a algún vecino v_l y de camino de longitud $k-1$ desde v_l hasta v_j:

Demostración: (cont.)

Demostración: (cont.)

Por hipótesis de inducción, el número de caminos de longitud $k-1$ desde v_l hasta v_j es $a_{lj}^{(k-1)}$. De aquí el número de caminos de longitud k desde v_i hacia v_j es:

$$\sum_{\{v_i,v_l\}\in E(G)} a_{lj}^{(k-1)} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}a_{lj}^{(k-1)}$$

Pero esto es exactamente el elemento en la posición (i,j) en el producto de las matrices A y A^{k-1}, es decir: $a_{ij}^{(k)}$.

Corolario 1

La distancia de cualquier dos vértices v_i y v_j satisface:

$$d_G(v_i, v_j) = \min\{k \geq 0 \,/\, a_{ij}^{(k)} \neq 0\}.$$

Tabla de contenidos

Definición 2 (Grado de un vértice)

Sea G un grafo y sea v un vértice de G. El número de aristas de G que contienen el vértice v es denotado por el símbolo $deg_G(v)$. Este número es llamado **grado** *de v en el grafo G.*

Definición 3 (Secuencia de grado)

Denotando los vértices de G por $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (en algún orden elegido arbitrariamente). La secuencia

$$(deg_G(v_1), deg_G(v_2), \ldots, deg_G(v_n))$$

es llamado **secuencia de grado** *del grafo G o* **score** *de G.*

Observaciones:

1. No haremos distinción entre dos scores si uno de ellos se puede obtener a partir del otro al reordenar sus términos.
2. Por convención, escribiremos los scores en orden no decreciente, es decir, el primer valor será el más pequeño.
3. Dos grafos isomorfos tienen el mismo score, así, dos grafos con score diferente son necesariamente no isomorfos.
4. Por otro lado, grafos con el mismo score no son necesariamente isomorfos. Analice los siguientes grafos:

Figura 2: Score: (2,2,2,2,2,2). Grafo no conexo (Izquierda). Grafo conexo (Derecha).

Ejemplo:

Determine si K_4 es un subgrafo de $K_{4,4}$. Si su respuesta es afirmativa, entonces grafique. Caso contrario, justifique.

Demostración:

Ejemplo: (cont.)

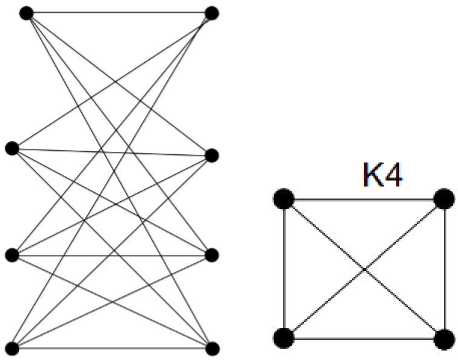


Figura 3: $K_{4,4}$ a la izquierda.

Ejemplo: (cont.)

Afirmamos que K_4 no es un subgrafo de $K_{4,4}$. Procedemos a demostrarlo. Sean X e Y las dos partes de $K_{4,4}$. Para cada subgrafo H de $K_{4,4}$ con 4 vértices, alguno de sus vértices están en X y los otros están en Y. Así tenemos los siguientes casos:

1. $V(H) \in X$ o $V(H) \subset Y$. Entonces H no debe tener aristas porque un grafo bipartito no tiene aristas cuyos ambos extremos están en X (respectivamente en Y). Así, H no es K_4.
2. Tres vértices de H están en X y uno está en Y(o viceversa). Entonces a lo más uno de los vértices en H tiene grado a lo más 3 y el resto de los vértices tienen grado a lo más 1. Pero, la secuencia de grados de K_4 es (3,3,3,3). Así, H no es K_4 en este caso.

Ejemplo: (cont.)

3. Dos vértices de H están en X y los otros dos están en Y. Entonces el máximo grado de un vértice en H es 2, y así H no es K_4.

Desde que hemos considerado todos los subgrafos posibles de $K_{4,4}$ con 4 vértices y ninguno de ellos puede ser K_4, entonces K_4 no es un subgrafo de $K_{4,4}$.

Proposición 2

Para cada grafo $G = (V, E)$ se cumple:

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E|.$$

Demostración:
El grado de un vértice v es el número de aristas que contienen a v. Cada arista contiene 2 vértices, y de aquí sumando sobre todos los grados se obtiene el doble del número de aristas.

Corolario 2 (Lema de Handshake)

En cualquier grafo, el número de vértices de grado impar es par.

Teorema 1 (Teorema del score)

Sea $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ una secuencia de números naturales $n > 1$. Suponga que $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ y sea el símbolo D' que denota a la secuencia $(d'_1, \ldots, d'_{n-1})$ donde:

$$d'_i = \begin{cases} d_i, & para \quad i < n - d_n \\ d_i - 1, & para \quad i \geq n - d_n \end{cases}$$

Por ejemplo, para $D = (1, 1, 2, 2, 2, 3, 3)$, tenemos $D' = (1, 1, 2, 1, 1, 2)$. Entonces D es el score de un grafo si y sólo si D' es el score de un grafo.