Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2024–I

EXAMEN FINAL
ÁLGEBRA LINEAL I
CM1B2

---

1. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $f(x) \in \mathbb{K}[x]$. Pruebe que: [5 pts]

   a) Si A o B es inversible entonces AB y BA poseen el mismo polinomio característico.

   b) Si $g(x) = xf(x)$ con $f(AB) = 0$ entonces $g(BA) = 0$.

2. Dado el espacio proyectivo [5 pts]

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2} = \{(x : y : z) : (x, y, z) \in (\mathbb{Z}_2)^3 - \{(0, 0, 0)\}\}.$$

   Responde:

   a) ¿Cuántos elementos tiene?.

   b) ¿Cuántas rectas tiene?.

   c) ¿Cuántos puntos tiene cada recta?.

   d) ¿Cuántas rectas pasan por cada punto?.

3. Use adecuadamente la forma canónica de Jordan para calcular e^{At}, donde: [5pts]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dada la siguiente cónica: [5pts]

$$\mathcal{C} : 4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0,$$

   se pide:

   a) Clasificar la cónica.

   b) Calcule las asíntotas de la cónica.

   c) Determine los ejes de la cónica.

   d) Determine el centro de la cónica.

   e) Determine los vértices de la cónica.

Solución;

1) a)

$$\begin{aligned} p(x) &= det(xI - AB) \\ &= det(xAA^{-1} - AB) \\ &= det(A) \cdot det(xA^{-1} - B) \\ &= det(xA^{-1} - B) \cdot det(A) \\ &= det(xA^{-1}A - BA) \\ &= det(xI - BA). \end{aligned}$$

b) Supongamos que $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, luego

$$f(AB) = \sum_{i=0}^{n} a_i (AB)^i = 0.$$

Al reemplazar BA en g se tiene

$$\begin{aligned} g(BA) &= BA \cdot f(BA) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i B(AB)^i A \\ &= Bf(AB)A \\ &= 0. \end{aligned}$$

2) a) El espacio proyectivo sobre $\mathbb{Z}_2$ esta dada por

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2} = \{(x : y : z) : (x, y, z) \in (\mathbb{Z}_2)^3 - \{(0, 0, 0)\}\}.$$

Como cada componente en la terna $(x : y : z)$ toma 2 valores entonces el total de ternas diferentes serían 8, pero como no puede tomar $(0 : 0 : 0)$, la cantidad total de elementos que tiene $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2}$ es 7.

b) La recta proyectiva esta dada por

$$\mathcal{L} = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}_2} : ax + by + cz = 0\}$$

Cada recta esta determinada por la terna (a, b, c), donde al menos una componente es no nulo. En caso, $z = 0$ es llamada la recta al infinito denotada por $\mathcal{L}_\infty$. Por tanto la cantidad de rectas es 7.

c) Analicemos por casos:

i) Si $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ entonces los puntos que contiene la recta son: $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0)$ y $(1 : 1 : 0)$. Es decir la cantidad de puntos que tiene son 3. De igual modo se obtiene para los casos que $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ y $(a, b, c) = (1, 0, 0)$.

ii) Si $(a, b, c) = (0, 1, 1)$ entonces los puntos que contiene la recta son: $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 1)$ y $(1 : 1 : 1)$. Es decir la cantidad de puntos que tiene son 3. De igual modo se obtiene para los casos que $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ y $(a, b, c) = (1, 0, 1)$.

iii) Si $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ entonces los puntos que contiene la recta son: $(1 : 1 : 0), (1 : 0 : 1)$ y $(0 : 1 : 1)$. Es decir la cantidad de puntos que tiene son 3.

d) Analicemos por casos:

i) Si $(x : y : z) = (0 : 0 : 1)$ entonces las rectas que pasan por este punto son dadas por $x = 0, y = 0$ y $x + y = 0$. La cantidad de rectas es 3. De igual manera se obtiene 3 para los puntos $(x : y : z) = (0 : 1 : 0)$ y $(1 : 0 : 0)$.

ii) Si $(x : y : z) = (0 : 1 : 1)$ entonces las rectas que pasan por este punto son dadas por: $x = 0, y + z = 0$ y $x + y + z = 0$. La cantidad de rectas es 3.

iii) Es similar a los otros dos casos.

3) Se calcula el polinomio característico de la matriz A:

$$\chi_A(x) = det \begin{pmatrix} 2-x & -2 & 0 \\ 3 & -8-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} = -(x-1)(x+1)(x+5) \tag{1}$$

Se obtienen 3 autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = -5$. Por tanto, A es una matriz diagonalizable. Se calculan sus autovectores respectivos:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Luego, la matriz de cambio de base P y la forma canónica de Jordan $J(A)$, son:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Sabemos que:

$$e^A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

y además:

$$e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} e^{J(A)t} &= \textstyle\sum_{k=0} \frac{1}{k!}(J(A)t)^k \\ &= \textstyle\sum_{k=0} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^k \end{pmatrix} t^k \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0} \frac{1}{k!} t^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0} \frac{1}{k!}(-t)^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0} \frac{1}{k!}(-5t)^k \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

$$e^{J(A)t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Finalmente:

$$e^{At} = Pe^{J(A)t}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{7}{4} & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \dfrac{7e^{4t}-3}{4e^{5t}} & \dfrac{-7e^{4t}+7}{4e^{5t}} & 0 \\ \dfrac{3e^{4t}-3}{4e^{5t}} & \dfrac{-3e^{4t}+7}{4e^{5t}} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \tag{7}$$

4) Se determina la matriz A asociada a la cónica $\mathcal{C}$, dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Luego:

- $det(A) = -7$
- $A_{13} = 1$
- $A_{23} = -4$
- $A_{33} = -4$

Por tanto:

i) Como $det(A) \neq 0$ and $A_{33} < 0$, entonces la cónica $\mathcal{C}$ es no degenerada y se trata de una hipérbola.

ii) Las asíntotas de una cónica son definidas como la recta polar que cruza los puntos impropios de la cónica. Por tanto, determinamos los puntos impropios:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= (-a_{12} \pm \sqrt{-A_{33}}, a_{11}, 0) \\ &= (\pm 2, 4, 0) \end{aligned} \tag{9}$$

y las respectivas rectas vienen dadas por $pAX^T = 0$:

$$\mathcal{A}_1 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{10}$$

$$\mathcal{A}_1 : 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \tag{11}$$

$$\mathcal{A}_2 : \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

$$\mathcal{A}_2 : 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \tag{13}$$

iii) Determinamos el centro:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{A_{13}}{det(A)} & \frac{A_{23}}{det(A)} & \frac{A_{33}}{det(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

En coordenadas cartesianas, el centro es: $C = \left(-\frac{1}{4}, 1\right)$.

iv) Ahora se calculan las pendientes de los ejes de la cónica, como solución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0 \tag{15}$$

de donde resulta:

$$m = 0 \tag{16}$$

Entonces, la ecuación cartesiana del eje es:

$$y - 1 = 0\left(x + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \mathcal{L}_1 : y = 1.$$

que en coordenadas homogéneas, resulta:

$$\mathcal{L}_1 : x_2 = x_3.$$

su respectivo eje conjugado se calcula a partir de:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_2 : 4x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

v) Finalmente, para calcular los vértices de la cónica, se debe de intersectar los ejes con la cónica. Primero observe que $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{C} = \emptyset$, por tanto, debemos de calcular $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{C}$ y obtener dos puntos de intersección. En efecto:

$$\mathcal{C} : 4x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0, \quad \mathcal{L}_1 : x_2 = x_3,$$

resulta:

$$4x_1^2 + 2x_1x_3 = 0 \Rightarrow x_1(2x_1 + x_3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_1 = -\frac{1}{2}x_3$$

Por tanto, los vértices son:

$$V_1 = (x_1, x_2, x_3) = (0, x_2, x_2) \Rightarrow V_1 = (0, 1, 1)$$

$$V_2 = (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{x_2}{2}, x_2, x_2\right) \Rightarrow V_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

los cuales, en coordenadas cartesianas, resultan:

$$V_1 = (0, 1), \quad V_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

24 de Junio del 2024

EXAMEN PARCIAL
ÁLGEBRA LINEAL I
CM1B2

---

1. Dado U, V espacios vectoriales. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones: (4pts)

   a) $T : U \to V$ es inyectiva si y sólo si lleva vectores LI en U en vectores LI en V.

   b) $T : U \to V$ es sobreyectiva si y sólo si lleva un conjunto de generadores de U en un conjunto de generadores de V.

2. Dado el operador lineal $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la reflexión respecto a la recta $y = ax$. (6pts)

   a) Pruebe que la matriz asociada a R respecto a la base canónica B_1 esta dada por

   $$[R]_{B_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-a^2}{1+a^2} & \dfrac{2a}{1+a^2} \\ \\ \dfrac{2a}{1+a^2} & \dfrac{a^2-1}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

   b) Determine el núcleo e imagen de R.

   c) Dada la base $B_2 = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 = (1, a)$ y $v_2 = (-a, 1)$. Determine $[R]_{B_1}^{B_2}$ la matriz cambio de base de B_1 a B_2.

3. Sea D una función determinante. Use inducción para demostrar que: (5pts)

   $$D[A_n, A_{n-1}, \ldots, A_2, A_1] = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D[A_1, A_2, \ldots, A_n], \quad A \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

4. Considere las siguientes matrices: (5pts)

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   Se pide:

   a) Determine los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A tiene rango 3. Para el(los) valor(es) de λ obtenido(s), la siguiente ecuación $AX = B^{-1}A^2$, ¿ tiene solución única?.

   b) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal, donde $dim(V) < \infty$. La **traza** de T se define como $tr(T) = tr(A_T)$, donde A_T es alguna matriz asociada a T. Demuestre que esta definición no depende de A_T, sino, solamente de T.

Solución:

1) a) **(Verdadero)**

$\Rightarrow$) Supongamos que T es inyectiva y sea $u_1, \dots, u_n$ vectores linealmente independientes. Si

$$\begin{array}{rcl} c_1T(u_1) + \cdots + c_nT(u_n) & = & 0 \\ T(c_1u_1 + \cdots + c_nu_n) & = & 0 \\ c_1u_1 + \cdots + c_nu_n & = & 0 \end{array}$$

por tanto $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que T no es inyectiva entonces existen $u, v \in U$ con $u \neq v$ tal que $T(u) = T(v)$, luego $T(u-v) = 0$, así $\{T(u-v)\}$ no es linealmente independiente pero $u-v \neq 0$, es decir $\{u-v\}$ es linealmente independiente, lo cual es una contradicción.

b) **(Verdadero)**

$\Rightarrow$) Supongamos que T es sobreyectiva. Si $S \subset U$ es un conjunto generador de U entonces $T(S) \subset V$. Por otro lado, sea $v \in V$ cualquiera entonces existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$, además existen $\{u_i\}_{i \in I} \subset S$ tal que $u = \sum_{i \in I} c_iu_i$, es decir

$$v = T(u) = \sum_{i \in I} c_iT(u_i).$$

$\Leftarrow$) Supongamos que T no es sobreyectiva entonces existe $v \in V$ tal que $v \notin Im(T)$, luego $v \neq T(u), \forall u \in U$, en particular para un conjunto de generadores $S = \{u_i\}_{i \in I}$, como $\{T(u_i)\}_{i \in I}$ es un conjunto generador de V se tiene que $v = \sum_{i \in I} c_iTu_i$. Por tanto

$$v = T(\sum_{i \in I} c_iu_i)$$

lo cual es una contradicción.

2) a) El operador esta dado por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x', ax') \end{array}$$

Para $v = (x, y)$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl} d(v, o)^2 & = & d(Pv, 0)^2 + d(v, Pv)^2 \\ x^2 + y^2 & = & (x')^2 + a^2(x')^2 + (x - x')^2 + (y - ax')^2 \end{array}$$

Supongamos que $x' \neq 0$, al dividir por x' en ambos mienbros y operando se tiene

$$x' = \frac{1}{1 + a^2}x + \frac{a}{1 + a^2}y.$$

Al considerar la base canónica se tiene la matriz deseada.

b)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2} & \dfrac{2a}{1 + a^2} \\ \\ \dfrac{2a}{1 + a^2} & \dfrac{a^2 - 1}{1 + a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al operar se tiene que $x = -ay$, así se presentan dos opciones:

- Si $a = 0$ se tiene que $Ker(R) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$, para calcular la imagen se puede cancelas la constante $1 + a^2$ en la matriz, así $(x + ay, ax + a^2y) = (x + ay)(1, a)$, como $a = 0$ se tiene que $Im(R) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

- Si $a \neq 0$ se tiene que

$$Ker(R) = \{(-a, 1) : a \in \mathbb{R}\}, \quad Im(R) = \langle (1, a) \rangle.$$

c) La matriz cambio de base esta dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

3) Procedemos por inducción matemática:

i) Para $n = 1$ entonces $A = [a_{11}] \in \mathbb{K}$ y así $D[A_1] = D[A_1]$.

ii) **Hipótesis inductiva**: Suponemos que es válido para $n = m$, es decir: $D' : \mathbb{K}^{m\times m} \to \mathbb{K}$. Luego, dado $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$, se cumple: Si $A_j \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ son las columnas de A entonces:

$$D'[A_m, A_{m-1}, \ldots, A_2, A_1] = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} D'[A_1, A_2, \ldots, A_m].$$

iii) Veamos que se cumple para $n = m + 1$, es decir: $D : \mathbb{K}^{(m+1)\times(m+1)} \to \mathbb{K}$ y $A \in \mathbb{K}^{(m+1)\times(m+1)}$ donde $A = [A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}]$ y $A_j \in \mathbb{K}^{(m+1)\times 1}$ son las columnas de A, se debe probar:

$$D[A_{m+1}, A_m, A_{m-1}, \ldots, A_2, A_1] = (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)(m)} D[A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}].$$

En efecto, defina la matriz $B = [A_{m+1}, A_m, A_{m-1}, \ldots, A_2, A_1] \in \mathbb{K}^{(m+1)\times(m+1)}$ y aplicamos la expansión de Laplace a la matriz B, manteniendo la primera columna, es decir:

$$D[B] = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} b_{i1} D'(B_{i1})$$

reemplazando por la respectiva columna de la matriz A, resulta:

$$D[B] = D[A_{m+1}, A_m, A_{m-1}, \ldots, A_2, A_1] = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+m+1} a_{i,m+1} D'[A_{i,m+1}]$$

Observe que en cada submatriz $A_{i,m+1} \in \mathbb{K}^{m\times m}$ se tienen elementos desde la columna 1 hasta la columna m de la matriz A eliminando la fila i en todas ellas, es decir, son de la forma:

$$A_{i,m+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,m} \\ & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \ldots & a_{i-1,m} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \ldots & a_{i+1,m} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{m,m} \end{pmatrix} = [\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_m] \in \mathbb{K}^{m\times m}.$$

entonces se puede aplicar la hipótesis inductiva:

$$D'[\hat{A}_m, \hat{A}_{m-1}, \ldots, \hat{A}_2, \hat{A}_1] = (-1)^{\frac{1}{2}(m)(m-1)} D'[\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_m].$$

resultando:

$$D[A_{m+1}, A_m, A_{m-1}, \ldots, A_2, A_1] = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+m+1} a_{i,m+1} (-1)^{\frac{1}{2}(m)(m-1)} D'[\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_m].$$

es decir:

$$D[A_{m+1}, A_m, A_{m-1}, \dots, A_2, A_1] = (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)(m)} \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+m+1} a_{i,m+1} [\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_m].$$

entonces:

$$D[A_{m+1}, A_m, A_{m-1}, \dots, A_2, A_1] = (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)(m)} D[A_1, A_2, \dots, A_m, A_{m+1}].$$

4) *a*) La matriz A tiene rango 3 si y sólo si su determinante es distinto de cero. Por tanto:

$$rg(A) = 3 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0, \lambda \neq 2.$$

Luego, la matriz tendrá rango 3 si y sólo si $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0, 2\}$.
Luego, para que el sistema $AX = B^{-1}A^2$ tenga solución única, basta que las matrices A y B sean invertibles, lo cual ocurre para todo $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0, 2\}$ y observando que $det(B) = -1 \neq 0$.

b) Basta demostrar que la traza de una transformación lineal no depende de la base elegida. Por tanto, sean β y γ dos bases de V. Considere también Q la matriz de cambio de base, por tanto, se cumple:

$$[T]_\beta = Q^{-1}[T]_\gamma Q$$

recuerde que para matrices se cumple $tr(AB) = tr(BA)$, por tanto:

$$tr([T]_\beta) = tr(Q^{-1}[T]_\gamma Q) = tr(QQ^{-1}[T]_\gamma) = tr([T]_\gamma),$$

por tanto, la traza de T no depende de la matriz asociada a T. Sólo depende de T.

Los profesores[1]
Lima, 08 de Mayo del 2024.

[1] Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2024–I

EXAMEN SUSTITUTORIO
ÁLGEBRA LINEAL I
CM1B2

---

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operador lineal definido por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. [5pts]

   a) Verifique que $T^2 - (a + d)T = (bc - ad)I$.

   b) Usea el item anterior para probar que, si $ad - bc \neq 0$, entonces existe un operador $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $TS = ST = I$.

2. Responde [5pts]

   a) Escribe la ecuación de la recta proyectiva en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ que pasa por los puntos con coordenadas homogéneas $(1 : 2 : 3)$ y $(0 : -1 : 1)$.

   b) Dadas las rectas proyectivas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. ¿En que punto se intersectan las líneas proyectivas con ecuaciones homogéneas?

$$x - y + z = 0 \;\text{ y }\; x + 2y + 3z = 0.$$

3. Let V be a finite dimensional real inner product space. Let $T \in \mathcal{L}(V)$. Let U be a subspace of V that is invariant under T. [5pts]

   a) Show that $U^\perp$ is invariant under T^*.

   b) Construct an example of a $T \in \mathcal{L}(V)$ with a subspace U for which U is invariant under T but $U^\perp$ is not invariant under T. In your answer, give V, T and U, then show that U is invariante under T and show that $U^\perp$ is not invariant under T.

4. Se sabe que $(2, 1, -5)$ y $(-1, -1, 3)$ son autovectores de la matriz: [5pts]

$$A = \begin{pmatrix} 5 & x & y \\ z & 4 & t \\ -11 & -13 & -9 \end{pmatrix}$$

   Determine la forma canónica de Jordan de A y una matriz de paso P tal que $J_A = P^{-1}AP$.

Solución:

1. a) Expresión izquierda:

$$\begin{aligned} T^2(x, y) &= T(ax + by, cx + dy) \\ &= (a^2x + aby + bcx + bdy, acx + bcy + cdx + d^2y) \end{aligned}$$

Además

$$(a+d)T(x,y) = (a^2x+aby+adx+bdy, acx+ady+cdx+d^2y)$$

Al restar se tiene el resultado deseado

$$\begin{aligned}[T^2-(a+d)T](x,y) &= bc(x,y)-ad(x,y)\\ &= (bc-ad)(x,y)\\ &= (bc-ad)I(x,y)\end{aligned}$$

b) Como

$$T[\frac{1}{bc-ad}(T-(a+d)I)] = I,$$

además

$$[\frac{1}{bc-ad}(T-(a+d)I)]T = I.$$

Defino $S = \dfrac{1}{bc-ad}(T-(a+d)I)$.

2. a) La recta que pasa por los puntos esta dada por la determinante de la siguiente matriz igualada a 0

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la recta que pasa por éstos puntos es:

$$5x - y - z = 0.$$

b) Para determinar el punto de interesección entre las rectas se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x-y+z &= 0\\ x+2y+3z &= 0\end{aligned}$$

Al restar se tiene que $y = -2/3z$, y al reemplazar se tiene $x = -5/3z$, por tanto el punto de intersección es:

$$(\frac{-5}{3}z : \frac{-2}{3}z : z) = (-5 : -2 : 3).$$

3. *a*) Sea $w \in U^{\perp}$, y sea $u \in U$, entonces $Tu \in U$. Luego:

$$0 = \langle w, Tu\rangle = \langle T^*w, u\rangle$$

para todo $u \in U$ y $w \in U^{\perp}$, lo que implica que $U^{\perp}$ es T^*-invariante.

b) Defina $T \in \mathbb{R}^2$ por $T(w,z) = (z,0)$. Luego, $T(w,0) = (0,0)$ para todo $w \in \mathbb{R}$. Luego, observe que:

$$U = \{(w,0)/w \in \mathbb{R}\}$$

es T-invariante. Con el producto interno usual:

$$U^{\perp} = \{(0,z)/z \in \mathbb{R}\}$$

Pero $T(0,z) = (z,0)$, entonces $U^{\perp}$ no es T-invariante.

4. Usando el primer autovector, se obtiene el autovalor $\lambda_1 = -2$.
Usando el segundo autovector, se obtiene el autovalor $\lambda_2 = -1$.
Usando la definición de autovalor-autovector, se obtiene el sistema:

$$\begin{array}{rcl} 10 + x - 5y & = & -4 \\ -5 - x + 3y & = & 1 \end{array}$$

resolviendo el sistema, resulta: $x = 6, y = 4$.
De forma similar, se obtiene el sistema:

$$\begin{array}{rcl} -z - 4 + 3t & = & 1 \\ 2z + 4 - 5t & = & -2 \end{array}$$

resolviendo el sistema, resulta: $t = 4, z = 7$.
Así, se obtiene la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & 4 & 4 \\ -11 & -13 & -9 \end{pmatrix}$$

Calculamos su polinomio característico:

$$P_A(x) = det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 7x + 6$$

siendo sus raíces: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 3$.
Calculamos el autovector correspondiente a $\lambda_3 = 3$:

$$(A - \lambda_3 I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 7 & 1 & 4 \\ -11 & -13 & -12 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

resolviendo, se obtiene: $v_1 = v_2, v_3 = -2v_2$, entonces:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz P buscada es:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la forma canónica de Jordan de la matriz A es:

$$J_A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Puede comprobarse que se cumple:

$$PJ_AP^{-1} = A.$$

18 de Julio del 2024

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2024-1**

[Cod: CM1B2 Curso: Álgebra Lineal I]
[Prof: L. Roca, D. Caytuiro]

Práctica Calificada 1
Solucionario

---

1. Justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

   a) Si V es un $K-$espacio vectorial y $W \subset V$ es un subespacio entonces $0_{\frac{V}{W}} + W = W$.
   b) Si $V = U \oplus W$ entonces todo vector $v \in V$ se escribe de manera única como $v = 2u - w$ donde $u \in U$, $w \in W$.
   c) Si U y W son subespacios de V y $\dim U < \dim \mathrm{W}$ entonces $U \subset W$.
   d) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que Im $T = \mathbb{R}^2$.
   e) Si $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^2$ es tal que $f(a + bx) = (a^2, b^2)$ entonces f define una transformación lineal.

   Solución.

   a) Verdadero, porque $0_{\frac{V}{W}} = W$
   b) Verdadero, por que $v = u_1 + w_1$ de manera única y podemos hacer $u = \frac{1}{2}u_1$, $w = -w_1$.
   c) Falso. Por ejemplo un plano que contiene al origen es de dimensión 2 y una recta normal que contiene al origen es de dimensión 1.
   d) Verdadero. Podemos hacer $T(x, y, z) = (x, y)$.
   e) Falso. Pues si $p(x) = 1 + x$, $q(x) = 1 + x$, entonces $p(x) + q(x) = 2 + 2x$, por lo tanto

   $$f(p(x) + q(x)) = (4, 4) \neq (1, 1) + (1, 1) = f(p(x)) + f(q(x))$$

   $\square$

2. Dado $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y + z = 0, x + 2y + t = 0\}$, calcule una base para $\frac{\mathbb{R}^4}{S}$.

   Solución. Si $u = (x, y, z, t) \in S$ entonces

   $$x = -\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}t$$
   $$y = \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t$$

   por lo tanto $u = z\underbrace{(-2/3, 1/3, 1, 0)}_{u_1} + t\underbrace{(1/3, -2/3, 0, 1)}_{u_2}$, donde $u_1, u_2 \in S$ y son linealmente independientes, por lo que S es de dimensión 2 y podemos completar una base de $\mathbb{R}^4$ escogiendo $e_1 = (1, 0, 0, 0) \notin S$, y $e_2 = (0, 1, 0, 0) \notin S$.
   Si $v \in \mathbb{R}^4$ entonces

   $$\begin{aligned} v + S &= a_1u_1 + a_2u_2 + b_1e_1 + b_2e_2 + S \\ &= b_1e_1 + b_2e_2 + S \\ &= b_1(e_1 + S) + b_2(e_2 + S) \end{aligned}$$

por lo que $[e_1]$, $[e_2]$ generan $\frac{\mathbb{R}^4}{S}$. Además son l.i. pues si

$$\begin{aligned} b_1[e_1]+b_2[e_2] &= 0_{V/S} \\ [b_1e_1+b_2e_2] &= S \\ b_1e_1+b_2e_2 &\in S \\ b_1e_1+b_2e_2 &= a_1u_1+a_2u_2 \\ b_1e_1+b_2e_2-a_1u_1-a_2u_2 &= 0 \end{aligned}$$

entonces $b_1=b_2=0$.

Por lo tanto una base de $\frac{\mathbb{R}^4}{S}$ es $\{e_1+tu_1+su_2, s,t\in\mathbb{R}\}$, $\{e_2+tu_1+su_2, s,t\in\mathbb{R}\}$. □

3. En el desarrollo de un proyecto de inteligencia artificial se está actualizando un programa de toma de decisiones, para lo cual se necesita comprobar si el siguiente conjunto V es un espacio vectorial: X es un conjunto no vacío, $V=\mathcal{P}(X)$, $K=\mathbb{Z}_2$.

$$\begin{array}{ccl} + & : & B+C=B\triangle C \\ . & : & 0\cdot B=\emptyset,\ 1\cdot B=B \end{array}$$

[5 ptos.]

Solución.

- $(B+C)+D=(B\triangle C)\triangle D=B\triangle(C\triangle D)=B+(C+D)$.
- $B+C=B\triangle C=C\triangle B=C+B$.
- $\exists\overline{0}\in V: B+\overline{0}=B, \forall B\in V$
  Tomamos $\overline{0}=\emptyset$.
- $\forall B\in V\exists(-B)\in V: B+(-B)=\overline{0}$
  Tomamos para cada $B\in V$: $-B=B$, pues $B\triangle B=\emptyset$.
- Veamos que: $\lambda.(\eta B)=(\lambda.\eta).B$
  Evaluamos y comprobamos

$$\begin{array}{lll} \lambda=0, & \eta=0: & 0.(0.B)=0.\emptyset=\emptyset=0.B=(0{,}0).B \\ \lambda=0, & \eta=1: & 0.(1.B)=0.B=(0{,}1).B \\ \lambda=1, & \eta=0: & 1.(0.B)=1.\emptyset=\emptyset=0.B=(1{,}0).B \\ \lambda=1, & \eta=1: & 1.(1.B)=1.B=(1{,}1).B \end{array}$$

- Veamos que: $(\lambda+\eta).B=\lambda.B+\eta.B$ Evaluamos y comprobamos

$$\begin{array}{lll} \lambda=0, & \eta=0: & (0+0).B=0.B=0.B+\emptyset=0.B+0.B \\ \lambda=0, & \eta=1: & (0+1).B=1.B=\emptyset+1.B=0.B+1.B \\ \lambda=1, & \eta=0: & \text{Análogo al anterior} \\ \lambda=1, & \eta=1: & (1+1).B=0.B=\emptyset=B\triangle B=1.B+1.B \end{array}$$

- Veamos que: $\lambda.(B+C)=\lambda.B+\lambda.C$ Evaluamos y comprobamos

$$\begin{array}{ll} \lambda=0: & 0.(B+C)=\emptyset=0.B+0.B \\ \lambda=1: & 1.(B+C)=B+C=1.B+1.C \end{array}$$

□

Sea $T:V\to W$ una transformación lineal, S un subespacio de $\mathrm{Nu}(T)$ y la aplicación de paso al cociente $\pi:V\to\frac{V}{S}$. Si se sabe que existe una única $T':\frac{V}{S}\to W$, tal que $T=T'\circ\pi$ pruebe que T' es inyectiva si y solo si $S=\mathrm{Nu}(T)$. [5 ptos.]

Solución.

($\rightarrow$) T' es inyectiva.

Sea $v \in Nu(T) \setminus S$: $T(v) = 0 = T'([v])$, con $[v] \neq [0]$

entonces $[v] \in Nu(T') = \{[0]\}$, dado que T' es inyectiva. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $S = Nu(T)$.

($\leftarrow$) $S = Nu(T)$ $S = Nu(T)$.

Sea $[v] \in Nu(T') : T'([v]) = T(v) = 0$

entonces $v \in Nu(T) = S$ con lo cual $[v] = [0]$.

luego $Nu(T) = \{[0]\}$, por lo tanto T' es inyectiva.

$\square$

UNI, 9 de abril de 2024[1]

[1]Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2024-I

Curso: Álgebra Lineal I
Profesores: L. Roca, D. Caytuiro,

Solucionario de la Práctica Calificada 2
CM-1B2 A,B

---

1. Encuentre una base del subespacio generado por los vectores: $v_1 = (2, -6, -9, 7, -6)$, $v_2 = (6, 6, 7, -1, 8)$, $v_3 = (1, -7, -3, 5, -3)$, $v_4 = (-3, 5, 15, -9, 9)$.
   SOLUCIÓN:

   Por eliminación gaussiana aplicada a la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & -9 & 7 & -6 \\ 6 & 6 & 7 & -1 & 8 \\ 1 & -7 & -3 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 15 & -9 & 9 \end{bmatrix} \underset{F_{13}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -7 & -3 & 5 & -3 \\ 6 & 6 & 7 & -1 & 8 \\ 2 & -6 & -9 & 7 & -6 \\ -3 & 5 & 15 & -9 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{c} F_{21}(-6) \\ \longrightarrow \\ F_{31}(-2) \\ F_{31}(3) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -7 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 48 & 25 & -31 & 26 \\ 0 & 8 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -16 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{F_{23}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -7 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 8 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 48 & 25 & -31 & 26 \\ 0 & -16 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} F_{32}(-6) \\ \longrightarrow \\ F_{42}(2) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -7 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 8 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   por lo tanto la base buscada es

$$\{(1, -7, -3, 5, -3), (0, 8, -3, 3, 0), (0, 0, 43, -13, 0)\}$$

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - z, 2y + 3z)$$

   Si $U = \text{span}\{(1, 2, 1)\}$ y $V = \text{span}\{(2, 1, 3)\}$ y $S : \frac{\mathbb{R}^3}{U} \to \frac{\mathbb{R}^3}{V}$ es tal que $S(u + U) = Tu + V$, determine la matriz de representación de la transformación lineal S.
   SOLUCIÓN:

   Busquemos una base para $\frac{\mathbb{R}^3}{U}$, esta se obtiene completando una base de U, como $\dim U = 1$ necesitamos 2 vectores l.i para completar una base de $\mathbb{R}^3$, entonces $\{e_1 + U, e_2 + U\}$ es la base buscada. Del mismo modo $\{e_1 + V, e_2 + V\}$ es una base de $\frac{\mathbb{R}^3}{V}$.

$$S(e_1 + U) = Te_1 + V = (2, 3, 0) + V = 2(e_1 + V) + 3(e_2 + V)$$

$$S(e_2+U)=Te_2+V=(1,0,2)+V=a(e_1+V)+b(e_2+V)=(a,b,0)+V$$

por lo tanto

$$(1-a,-b,2)\in V \implies (1-a,-b,2)=r(2,1,3) \implies r=\frac{2}{3}, b=-\frac{2}{3}, a=-\frac{1}{3}$$

y

$$S(e_2+U)=-\frac{1}{3}(e_1+V)-\frac{2}{3}(e_2+V)$$

de modo que la matriz de representación es

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

3. Demuestre el siguiente isomorfismo:

$$\frac{V^*}{S^0}\cong S^*.$$

SOLUCIÓN:

Para esto consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & V^* & \longrightarrow & S^* \\ & f & \longmapsto & f|_S \end{array}$$

donde recordemos que $f|_S$ denota a la restricción de f sobre S. Esta aplicación es claramente sobreyectiva (solo basta considerar para un $f\in S^*$, la extendemos sobre V, simplemente asignando un valor $0\in\mathbb{K}$ a los vectores de $V\setminus S$).
Además $Nu(\varphi)=S^0$, pues $f|_S=0$ si y solo si f se anula en S, o sea si y solo si $f\in S^0$.
Luego aplicamos el teorema fundamental de las transformaciones lineales y obtenemos que

$$\frac{V^*}{Nu(\varphi)}=\frac{V^*}{S^0}\cong S^*$$

4. Sea U un subespacio de V tal que $\dim\left(\frac{V}{U}\right)<\infty$. Pruebe que existe un subespacio W de V tal que $\dim(W)$=$\dim\left(\frac{V}{U}\right)$ y $V=U\oplus W$.

SOLUCIÓN:

Dado que $\dim\left(\frac{V}{U}\right)<\infty$, existen vectores $w_1,\ldots,w_n\in V$ tal que $\{[w_1],\ldots,[w_n]\}$ es base de $\frac{V}{U}$. Es claro notar que el conjunto $\{w_1,\ldots,w_n\}$ es LI.
Consideremos $W=\text{Span}\{w_1,\ldots,w_n\}$, asi $\dim W=\dim\frac{V}{U}$.
Veamos que $V=U\oplus W$:

- Sea $v\in V$, luego $[v]=\sum_{i=1}^n \kappa_i[w_i]$, entonces $v-\sum_{i=1}^n\kappa_i w_i\in U$.
  De esto,
  $$v=v-\sum_{i=1}^n\kappa_i w_i \;+\; \sum_{i=1}^n \kappa_i w_i\in U+W$$
- Sea $v\in V\cap W$, como $v\in W$ entonces existen escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tales que $v=\sum_{i=1}^n\lambda_i w_i$.
  Además $v\in U$, entonces $[v]=[0]=\sum_{i=1}^n\lambda_i[w_i]$ y dado que $\{[w_1],\ldots,[w_n]\}$ es LI, se tiene que $\lambda_i=0$ para todo $i\in I_n$.

$$\therefore V=U\oplus W$$

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2024-1**

[Cod: CM1B2 Curso: Álgebra Lineal I]
[Prof: L. Roca, D. Caytuiro]

Práctica Calificada 3

---

1. Dada A una matriz real 5×3 tal que $Ax \neq 0$, cuando $x \neq 0$. Justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) El sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene mas de una solución. [1 pto.]
   b) Las columnas de A son l.d. [1 pto.]
   c) Si $x \neq 0$ entonces $A^T Ax \neq 0$. [1 pto.]
   d) $A^T A$ es no singular. [1 pto.]
   e) $B = (A^T A)^{-1} A^T$ es la inversa de A. [1 pto.]

   Solución.

   a) Falso. Sean x, y tales que $Ax = 0$, $Ay = 0$ entonces $A(x - y) = 0$, luego $x = y$.
   b) Falso. Las columnas de A son l.i, pues $Ax = 0 \implies x = 0$.
   c) Verdadero. Si $A^T Ax = 0$ entonces $x^T A^T Ax = 0 = (Ax)^T (Ax)$, de donde $Ax = 0$ y por lo tanto $x = 0$.
   d) Verdadero. $A^T A$ es simétrica y por la afirmación *c*) las columnas de $A^T A$ son l.i y por lo tanto $A^T A$ tiene inversa.
   e) Falso. $BA = (A^T A)^{-1} A^T A = I$ es 3×3 pero AB es 5×5.

   □

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Demuestre que cualquier forma m-lineal alternada $f \in A^m(V)$ con $m > n$ es nula. [5 ptos]

   Solución. Al tener m vectores de entrada, por ser una cantidad mayor a la dimensión, automáticamente el conjunto es LD, por ende, cualquier forma m-lineal alternada será nula. □

3. Demuestre

   a. Si existe una forma $r-$lineal alternada $f : U \times \cdots \times U \to \mathbb{K}$ tal que $f(v_1, \ldots, v_r) \neq 0$, entonces los vectores $v_1, \ldots, v_r$ son linealmente independientes. [3 ptos]
   b. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que $A^2 = \lambda A$. Si $det(A) \neq 0$, entonces $det(A) = \lambda^n$. [2 ptos]

   Solución.

   a. Supongamos que sean LD, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$v_1 = \sum_{i=2}^{r} \lambda_i v_i$$

para ciertos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Luego podemos expresar

$$0 \neq f(v_1, \ldots, v_r) = f\left(\sum_{i=2}^{r} \lambda_i v_i, \ldots, v_r\right)$$

luego por ser $r-$lineal y alternada

$$0 \neq \sum_{i=2}^{r} \lambda_i f(v_i, v_2 \ldots, v_r) = 0$$

lo cual es una contradicción. Por tanto los vectores en mención son LI.

b. Aplicamos determinante a ambos lados de la igualdad del dato

$$det(A^2) = det(\lambda A)$$

luego por las propiedades del determinante y dado que A es matriz de orden n

$$[det(A)]^2 = \lambda^n det(A)$$

dado que $det(A) \neq 0$, se tiene

$$det(A) = \lambda^n$$

$\square$

4. Sea $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz

$$A_n = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Si $D_n = \det(A_n)$ encuentre a y b tales que

$$D_n = aD_{n-1} + bD_{n-2}$$

. [5 ptos.]

Solución. Aplicamos la formula de Laplace en la primer columna

$$D_n = 3D_{n-1} - \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \ldots & 1 & 3 \end{bmatrix}_{n-1\times n-1}$$

aplicamos nuevamente la fórmula de Laplace en la primera columna de la matriz $n-1\times n-1$ del segundo sumando.

$$D_n = 3D_{n-1} - 2\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \ldots & 1 & 3 \end{bmatrix}_{n-2\times n-2} + \det \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ 3 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & 2 \\ \ldots & 1 & 3 \end{bmatrix}_{n-2\times n-2}$$

como la última matriz tiene la primera fila nula entonces su determinante es cero:

$$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$$

entoces $a = 3$, $b = -2$. $\square$

UNI, 21 de mayo de 2024[1]

[1]Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2024-I

Curso: Álgebra Lineal I
Profesores: L. Roca, D. Caytuiro

Practica Calificada 4
CM-1B2 A,B

---

1. Sea $V = \{f \in C^2[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}$. Pruebe que $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x$ define un producto interno en V.

   Solución

   a) Sean $f, g, h \in V$. Por la linealidad de la integral

   $$\langle cf, h\rangle = c\,\langle f, h\rangle\,;\langle f, ch\rangle = c\,\langle f, h\rangle$$

   $$\langle f+g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$$

   $$\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$$

   b) Sea $f, g \in V$,

   $$\int_0^1 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g'(x)|_0^1 - \int_0^1 f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [fg' - f'g]|_0^1 + \int_0^1 f''(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

   y como $f(0) = f(1) = 0 = g(0) = g(1)$ entonces $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$.

   c) Si $f \in V$ y $\langle f, f\rangle = 0$ entonces

   $$0 = \int_0^1 f(x)f''(x)\,\mathrm{d}x = f(x)f'(x)|_0^1 - \int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 [f'(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

   Como f' es continua en $[0,1]$ entonces $f' = 0$ y $f \equiv Cte$, pero $f(0) = 0$, por lo tanto $f = 0$.

2. Sean a_1, a_2, a_3 vectores L.I. de $\mathbb{R}^5$. Considere que el proceso de Gram-Schmidt se aplica a las columnas de una matriz $A_{5\times 3} = [a_1|a_2|a_3]$ y el resultado es la matriz $Q_{5\times 3} = [q_1|q_2|q_3]$ de columnas ortonormales. Encuentre:

   a. Una transformación lineal T en términos de A de tal manera que T aplica $\mathbb{R}^3$ en el espacio columna de A.

   b. Una transformación lineal P en términos de Q de tal manera que P aplica $\mathbb{R}^3$ en el espacio columna de A.

c. Mediante la transformación lineal P, el vector q_4 que se forma si se añade un nuevo vector a_4.

Solución
Sea S el espacio columna de A.

a) Sea $x \in \mathbb{R}^3$ entonces $x = z + y$, donde z es ortogonal a S y $y \in S$, como a_1, a_2, a_3 son l.i entonces forman una base, $x = z + y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3$, luego

$$\begin{aligned} a_1^T x &= y_1 a_1^T a_1 + y_2 a_1^T a_2 + y_3 a_1^T a_3 \\ a_2^T x &= y_1 a_2^T a_1 + y_2 a_2^T a_2 + y_3 a_2^T a_3 \implies A^T x = A^T A[y_1, y_2, y_3]^T \\ a_3^T x &= y_1 a_3^T a_1 + y_2 a_3^T a_2 + y_3 a_3^T a_3 \end{aligned}$$

Como las columnas de A son l.i. entonces A^TA es cuadrada e inversible por lo tanto $[y_1, y_2, y_3]^T = (A^TA)^{-1}A^Tx$ Finalmente $y \in S$ se escribe como $y = y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3$ luego

$$y = A[y_1, y_2, y_3]^T = A(A^TA)^{-1}A^Tx$$

la transformación buscada es $Tx = A(A^TA)^{-1}A^Tx$.

3. Por el resultado anterior $Px = Q(Q^TQ)^{-1}Q^Tx$ es un vector del espacio columna de Q, que es el mismo espacio columna de A, por el proceso de GS. Y como Q es ortogonal $Q^TQ = I$, entonces $Px = QQ^Tx$

4. El proceso GS le quita a_4 la proyeccion del vector a_4 en el subespacio formado por los vectores a_1, a_2, a_3. Asi si $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ es l.i entonces

$$q_4 = \frac{a_4 - QQ^t a_4}{\|a_4 - QQ^t a_4\|}$$

de lo contrario

$$q_4 = 0$$

pues a_4 pertenecerá al subespacio formado por $\{a_1, a_2, a_3\}$.

5. Sean $L : V \to V$ un operador lineal y $K : W \to V$ un isomorfismo. Demuestre que L y $K^{-1} \circ L \circ K$ poseen los mismos autovalores.

Solución
Sea A la matriz asociada a la transformación L, y B la matriz asociada a la transformación K, dado que K es isomorfismo: existe B^{-1}

$$\begin{aligned} \chi_{KLK^1} &= det(BAB^{-1} - xI) \\ &= det(BAB^{-1} - xI) \\ &= det(BAB^{-1} - xBB^{-1}) \\ &= det(BAB^{-1} - B(xI)B^{-1}) \\ &= det(B(A - xI)B^{-1}) \\ &= det(B).det(A - xI).det(B^{-1}) \\ &= det(A - xI) \\ &= \chi_L \end{aligned}$$

hemos probado que ambas transformaciones tienen el mismo polinomio característico, por lo tanto tienen las mismas raices o sea los mismos autovalores.

6. Sea $T : V \to V$ un operador lineal con $dim(V) = n$. Demuestre que T es invertible si y solo si todo autovalor de T es diferente de cero.

Solución
Haremos un abuso de notación al escribir como $det(T)$ al determinante de la matriz asociada a la transformación T.

($\rightarrow$) T es invertible, entonces $det(T) \neq 0$, por contradicción, si $\lambda = 0$ tendriamos que $det(T - 0I) = 0$, o sea $det(T) = 0$ lo que es una contradicción

($\leftarrow$) Por contrarrecíproco: Si T no es isomorfismo, al ser operador lineal entonces T no es inyectiva, por ende existe un vector $v \in V \setminus \{0\}$, luego $T(v) = 0v = 0$, o sea 0 seria autovalor. Es decir, si T no es invertible, al menos un autovalor de T es cero.

Otra forma: Si todo autovalor es diferente de cero, entonces el término independiente de su polinomio característico es distinto de cero (pues si una raiz fuese cero, el polinomio característico tendria un factor x). Luego

$$\chi_T(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \text{ , con } a_0 \neq 0$$

por el teorema de Cayley-Hamilton $\chi_T(T) = 0$, luego

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \\ &= a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n \end{aligned}$$

con esto

$$a_0 I = -\left(a_1 T + \cdots + a_n T^n\right) = T\left[-\left(a_1 I + \cdots + a_n T^{n-1}\right)\right]$$

tomamos determinante

$$det(a_0 I) = det\left(T\left[-\left(a_1 I + \cdots + a_n T^{n-1}\right)\right]\right) = det(T) det\left(-\left(a_1 I + \cdots + a_n T^{n-1}\right)\right)$$

como $det(a_I) \neq 0$ (pues $a_0 \neq 0$) entonces $det(T) \neq 0$ por lo tanto T seria un isomorfismo.