Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Junio 17, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Curva paramétrica)

Una curva paramétrica $\mathscr{C}$ es la representación de un conjunto de puntos (x, y) de la forma

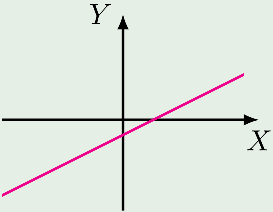
$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(h)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

La curva definida por

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}.$$



es una recta

En general, se puede parametrizar cualquier recta en $\mathbb{R}^2$, vertical o no.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

La gráfica de cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede parametrizar:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

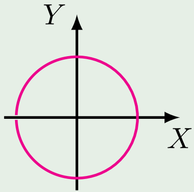
No todas las parametrizaciones provienen de funciones:

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Describimos, para $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$



Se verifica que $x^2 + y^2 = 1$,

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -1, \quad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0.$$

También $x(t) > -1$ para todo t, de modo que la curva paramétrica no cubre completamente la circunferencia.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivada de una función paramétrica

Siendo

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

De la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$$

Ejemplo

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva

$$\begin{cases} x = \sec t \\ y = \tan t \end{cases} , \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

en el punto $(\sqrt{2}, 1)$.

Resolución

La pendiente de la curva en t es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \cdot \tan t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

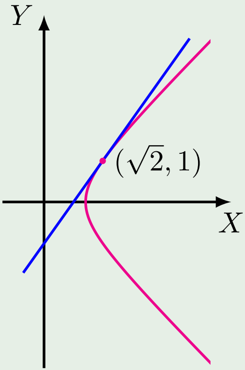
Resolución

Evaluando en $t = \dfrac{\pi}{4}$, se tiene

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\ .$$

la recta tangente es

$$y = 1 + \sqrt{2}\cdot(x - \sqrt{2})\ ,$$
$$y = \sqrt{2}x - 1\ .$$



Ejemplo

Determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ como una función de t si

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases},$$

Resolución

Primero $y' = \dfrac{dy}{dx}$, esto es

$$y' = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

$$y' = \frac{1-3t^2}{1-2t^2}$$

Luego, derivando y' con respecto de t

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} .$$

Resolución

Entonces debemos calcular $\dfrac{dt}{dx}$. Por el teorema de función inversa, esa expresión es igual $\dfrac{1}{dx/dt}$, en los puntos donde la derivada de x respecto de t no es cero. En esos puntos la inversa existe y la derivada de la inversa $t(x)$ es como se indicó arriba.
En conclusión

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{\dfrac{-6t(1-2t)-(1-3t^2)(-2)}{(1-2t)^2}}{1-2t} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}.$$

Trazado de una curva paramétrica

Para $x, y : I \to \mathbb{R}$.

- Simetría con respecto al eje X: si para cada $t_1 \in I$, existe $t_2 \in I$ tal que
$$(x(t_2), y(t_2)) = (x(t_1), -y(t_1)).$$
- Simetría con respecto al eje Y: si para cada $t_1 \in I$, existe $t_2 \in I$ tal que
$$(x(t_2), y(t_2)) = (-x(t_1), y(t_1)).$$

El primer caso ocurre por ejemplo cuando x es función par e y impar, y el segundo cuando x es impar e y es par.

Trazado de una curva paramétrica

- Puntos críticos: puntos t donde $x'(t) = 0$ o $y'(t) = 0$.
- Asíntotas: puntos t_0 para los cuales, cuando $t \to t_0^{\pm}$, ya sea $x(t) \to +\infty$, o $y(t) \to +\infty$.
  - $x(t) \to x_0, y(t) \to \pm\infty$ cuando $t \to t_0^{\pm}$: asíntota vertical.
  - $x(t) \to +\infty, y(t) \to y_0$ cuando $t \to t_0^{\pm}$: asíntota horizontal derecha.
  - $x(t) \to -\infty, y(t) \to y_0$ cuando $t \to t_0^{\pm}$: asíntota horizontal izquierda.
  - $x(t) \to +\infty, y(t) - mx(t) - b \to 0$ cuando $t \to t_0^{\pm}$: asíntota oblicua derecha $y = mx + b$.
  - $x(t) \to -\infty, y(t) - mx(t) - b \to 0$ cuando $t \to t_0^{\pm}$: asíntota oblicua izquierda $y = mx + b$.

Ejemplo

Bosquejar la gráfica de la curva

$$\begin{cases} x = 4\cos t + 3 \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t + 1, \end{cases} \qquad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

Resolución

Tenemos

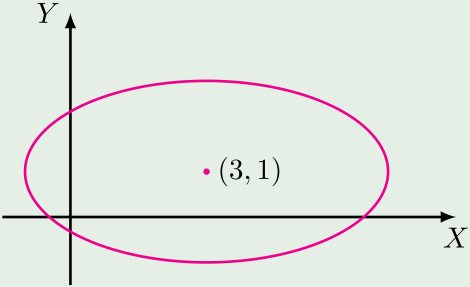
$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} = \cos t \\[2ex] \dfrac{y-1}{2} = \operatorname{sen} t, \end{cases}$$

Así,

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1.$$

Resolución

De modo que la curva es una elipse centrada en $(3, 1)$.



Ejemplo

Bosquejar la gráfica de

$$x = a\cos^3(t), \quad y = a\,\mathrm{sen}^3(t),$$

para $t \in [0, 2\pi]$, siendo $a > 0$ fijo.

Resolución

Dado que las funciones periódicas $\cos^3(t)$ y $\operatorname{sen}^3(t)$ tiene período 2π, será suficiente considerar la variación del parámetro t en $[0, 2\pi]$.
Luego, $[-a, a]$ es el dominio de definición tanto para x como para y. Por lo tanto, la curva no tiene asíntotas horizontales. Se cumple:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2(t)\operatorname{sen}(t), \quad \frac{dy}{dt} = 3a\operatorname{sen}^2(t)\cos(t)$$

Estas derivadas se reducen a cero cuando
$t = 0,\ t = \dfrac{\pi}{2},\ t = \pi,\ t = \dfrac{3\pi}{2}$ y $t = 2\pi$. Además, $\dfrac{dy}{dx} = -\tan t$.

Resolución

El análisis de los signos de $\dfrac{dy}{dx}$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo para t	Intervalo para x	Intervalo para y	Signo de $\dfrac{dy}{dx}$	Crecimiento de $y = h(x)$
$]0, \pi/2[$	$]0, a[$	$]0, a[$	$-$	decreciente
$]\pi/2, \pi[$	$]-a, 0[$	$]0, a[$	$+$	creciente
$]\pi, 3\pi/2[$	$]-a, 0[$	$]-a, 0[$	$-$	decreciente
$]3\pi/2, 2\pi[$	$]0, a[$	$]-a, 0[$	$+$	creciente

Resolución

Por otro lado, $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{dy}{dx} = \infty$ y $\lim_{t\to\frac{3\pi}{2}} \dfrac{dy}{dx} = \infty$.

Luego, en los puntos correspondientes a $t = \dfrac{\pi}{2}$ y $t = \dfrac{3\pi}{2}$, la tangente a la curva es vertical.

Además: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} = 0, \ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = 0, \ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=2\pi} = 0.$

Luego, en los puntos correspondientes a $t = 0, t = \pi$ y $t = 2\pi$, la tangente es horizontal.

La segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a\cos^4(t)\operatorname{sen}(t)}.$$

Resolución

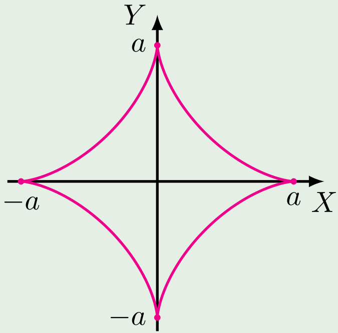
Esta segunda derivada se reduce a cero en $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$ y $t = 2\pi$ El análisis de los signos de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ se ilustra en la tabla siguiente.

Intervalo para t	Signo de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$	Concavidad para $y = h(x)$
$\langle 0, \pi/2 \rangle$	$+$	convexa
$\langle \pi/2, \pi \rangle$	$+$	convexa
$\langle \pi, 3\pi/2 \rangle$	$-$	concava
$\langle 3\pi/2, 2\pi \rangle$	$-$	concava

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

La gráfica de la curva se llama astroide y se muestra en la figura. Su ecuación cartesiana es $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

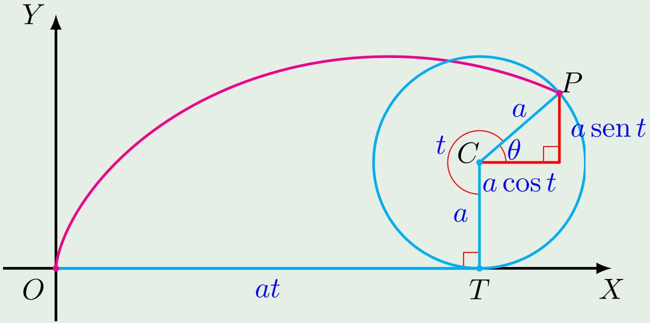
Ejemplo

Una rueda de radio a se mueve a lo largo de una recta horizontal. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que recorre un punto P localizado en la circunferencia de la rueda. La trayectoria se llama cicloide.

Resolución

Se toma el eje X como la recta horizontal, se marca un punto P en la rueda, se empieza a mover esta última, con P en el origen, hacia la derecha. Como parámetro, se utiliza el ángulo t que gira la rueda, medido en radianes. La figura muestra la rueda un poco después, cuando su base se encuentra a at unidades del origen.

Resolución



Las coordenadas de P son

$$\begin{aligned} x &= at + a\cos\theta \\ y &= a + a\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

Para expresar θ en términos de t, se observa en la figura que $t+\theta=\dfrac{3\pi}{2}$, de manera que $\theta=\dfrac{3\pi}{2}-t$.

Con esto se tiene $\cos\theta=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right)=-\operatorname{sen} t$,

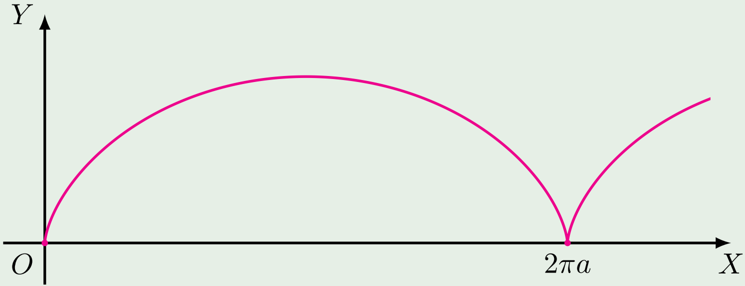
por otro lado $\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right)=-\cos t$,

las ecuaciones que buscamos son

$$\begin{cases} x=a\ (t-\operatorname{sen} t) \\ y=a\ (1-\cos t) \end{cases} \quad \text{con } t\geq 0\ .$$

Resolución

La curva que se obtiene es llamada Cicloide.



Ejercicio

Estudie analíticamente y trace la gráfica la curva

$$\begin{cases} x = \cos t + \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}.$$

Lemniscata de Gerono: $x^4 - 2x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0.$

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Ron Larson - Bruce Edwards
Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA