Grafos Eurelianos

Ronald Mas,
Angel Ramirez

8 de julio de 2020

Contenido

Introducción

Empecemos estudiando el problema más antiguo que usa dibujo de grafos:
Problema: Dibujar un grafo $G = (V, E)$ con una sola linea cerrada sin levantar el lapiz del papel y pasar por cada arista solo una vez.
En términos matemáticos se puede formalizar como: Encontrar un camino cerrado

$$(v_0, e_1, v_1, \cdots, e_m, v_0)$$

conteniendo todos lo vértices y todas las aristas exactamente una vez (los vértices pueden repetirse).

Definición

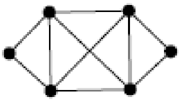
Definamos el recorrido cerrado Eureliano en G como el camino

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0).$$

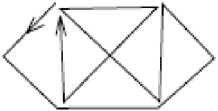
Definición

Un grafo que posee un recorrido cerrado Eureliano es llamado **Grafo Eureliano**.

Ejemplo: El dibujo muestra un grafo eureliano



:



con recorrido Eureliano:

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4, e_5, v_5, e_6, v_6, e_7, v_7, e_8, v_8, e_9, v_9, e_{10}, v_0),$$

donde $v_6 = v_3$, $v_7 = v_0$, $v_8 = v_5$ y $v_9 = v_2$.

Caracterización de grafos Eurelianos

Teorema

Un grafo $G = (V, E)$ es Eureliano si y sólo si este es conexo y cada vértice posee grado par.

Prueba:

Veamos la vuelta, definamos el recorrido en G como un camino en el que ninguna arista se repite (vértices se pueden repetir). Sea el recorrido

$$T = (v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, e_{m-1}, v_{m-1}, e_m, v_0).$$

en G de mayor longitud posible. Afirmación:

i) $v_0 = v_m$ y

ii) $\{e_i : i = 1, 2, \cdots, m\} = E$

Continua prueba:

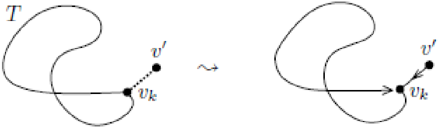
En efecto:

i) Si $v_0 \neq v_m$ entonces el vértice v_0 incidente a un número impar de aristas del recorrido T, pero como $deg_G(v_0)$ es par entonces existe una arista $e \in E(G)$ no contenido en T, por tanto T puede ser extendido con esta arista, lo que contradice la maximalidad de la longitud de T.

ii) Si $V(T) \neq V(G)$ y como G conexo entonces existe $e = \{v_k, v'\} \in E(G)$ tal que $v_k \in V(T)$ pero $v' \not V(T)$. Luego existe un recorrido:

$$T' = (v', e, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \cdots v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, e_k, v_k).$$

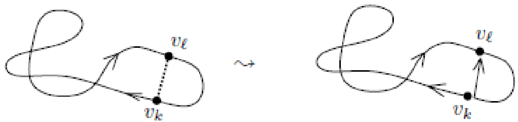
con longitud $m+1$ lo que contradice la maximalidad de m.



Si $V(T) = V(G)$ y $E(T) \neq E(G)$, sea $e \in E(G) \backslash E(T)$ con $e = \{v_k, v_l\}$. Procedamos de modo similar como el caso anterior, al considerar un nuevo recorrido:

$$T' = (v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \cdots v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, e_k, v_k, e, v_l)$$

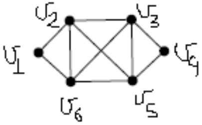
llegamos a una contradicción.



Lema

Si un grafo $G = (V, E)$ posee todos sus vértices de grado par entonces el conjunto $E(G)$ puede ser particionado en conjuntos disjuntos $E_1, E_2, \cdots, E_k$ tal que cada E_i es el conjunto de aristas de un ciclo.

Ejemplo: Dado el grafo Eureliano



se tiene la partición para $E(G)$ en:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_6\}, \{v_1, v_6\}\} \\
E_2 &= \{\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_5\}\} \\
E_3 &= \{\{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_3, v_6\}\}
\end{aligned}
$$

Definición

Un grafo dirigido G es un par (V, E), donde $E \subset V \times V$. Los pares ordenados $(x, y) \in E$ son llamados aristas dirigidas.

Observación:

- Si $e = (x, y)$ diremos que la arista viene de x a y.

Definición

Definamos el recorrido dirigido en un grafo dirigido $G = (V, E)$ como la secuencia:

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, e_m, v_m)$$

tal que $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ con $e_i \neq e_j$ si $i \neq j$.

Observación:

- Un grafo dirigido (V, E) es **Eureliano** si este posee un recorrido dirigido cerrado conteniendo todos los vértices y pasando cada arista dirigida exactamente una vez.

Consecuencias

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

Observaciones:

- Denotamos $deg_G^+(v)$ como el número de aristas dirigidas que terminan en v.
- Denotamos $deg_G^-(v)$ como el número de aristas dirigidas que se originan en v.
- Cada grafo dirigido $G = (V, E)$ puede ser asignado un grafo no dirigido $sym(G) = (V, \overline{E})$ donde

$$\overline{E} = \{\{x, y\} : \ (x, y) \in E \text{ o } (y, x) \in E\}.$$

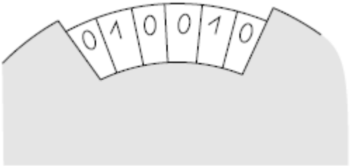
El grafo $sym(G)$ es llamado la **simetrización** del grafo G.

Proposición

Un grafo dirigido es Eureliano si y sólo si su simetrización es conexo y $deg_G^+(v) = deg_G^-(v), \forall v \in V(G)$.

Aplicación:

Una rueda tiene una secuencia de n dígitos 0 y 1 escritos a lo largo de su circunferencia. Podemos leer k dígitos consecutivos a través de un espacio:



Continua la aplicación

La secuencia de n dígitos debe ser tal que la posición de la rueda siempre se puede detectar desde los k dígitos en la ranura, no importa cómo se gire la rueda. Analicemos el siguiente problema

Problema: Encuentre una secuencia cíclica de dígitos 0 y 1 de mayor longitud tal que no coincidan dos k-uplas de dígitos consecutivos (aquí una secuencia cíclica significa colocar los dígitos en la alrededor de un círculo).

Proposición

Sea $\ell(k)$ el número máximo posible de dígitos en tal secuencia para un k dado. Para cada $k \geq 1$ se tiene que $\ell(k) = 2^k$.

Ejemplo: Para $k = 2$, se puede encontrar un recorrido $00, 01, 11, 10$ y la correspondiente secuencia cíclica es 0011 y para $k = 3$ se tiene el recorrido $000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100$ y la correspondiente secuencia cíclica es 00011101 como muestra el grafo dirigido siguiente: