Estimaciones de los Coefcientes Binomiales

Ronald Mas,
Angel Ramirez

24 de junio de 2020

Contenido

Introducción

Empecemos estudiando una estimación rápida del coeficiente binomial:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}$$

Como $\dfrac{n-i}{k-i} \leq n, \forall i \in \{0, 1, \cdots, \ddots k-1\}$ entonces:

$$\binom{n}{k} \leq n^k.$$

Por otro lado, para $n \geq k > i \geq 0$ se tiene que $\dfrac{n-i}{k-i} \geq \dfrac{n}{k}$ y por tanto:

$$\binom{n}{k} \geq (\frac{n}{k})^k.$$

Teorema

Para cada $n \geq 1$ y k entero con $1 \leq k \leq n$, se tiene que:

$$\binom{n}{k} \leq (\frac{en}{k})^k.$$

Prueba:

Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n.$$

En particular para $x \in]0,1[$ y $k \in [1,n]$ se tiene:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^k \leq (1+x)^n.$$

Continua prueba

Al dividir por x^k se tiene:

$$\frac{1}{x^k}\binom{n}{0} + \frac{1}{x^{k-1}}\binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}.$$

Entonces:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}.$$

Luego al tomar $x = \frac{k}{n}$ se tiene:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} \leq (1+\frac{k}{n})^n(\frac{n}{k})^k.$$

Por otro lado, como $1 + u \leq e^u$, $\forall u \in \mathbb{R}$, para $u = \frac{k}{n}$ se tiene:

$$(1+\frac{k}{n})^n \leq (e^{k/n})^n = e^k.$$

Por lo tanto se tiene el resultado deseado.

Proposición

Para todo $m \geq 1$ se tiene:

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}.$$

Prueba:

Definamos el número P como:

$$P = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2m)},$$

luego al reescribir P se tiene:

$$P = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2m)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2m)} = \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2},$$

Continua prueba

Entonces

$$P = \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}.$$

Como $\left(1 - \frac{1}{(2i)^2}\right) < 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ entonces:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(2m)^2}\right) < 1.$$

Luego

$$\left(\frac{1 \cdot 3}{2^2}\right)\left(\frac{3 \cdot 5}{4^2}\right)\cdots\left(\frac{(2m-1)\cdot(2m+1)}{(2m)^2}\right) = (2m+1)P^2.$$

Continua prueba

Entonces $(2m+1)P^2 < 1$, por tanto $P \leq \dfrac{1}{\sqrt{2m}}$.

Veamos la otra desigualdad, como

$\left(1 - \dfrac{1}{(2i-1)^2}\right) < 1. \forall i \in \{2, 3, \ldots, m\}$ se tiene:

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{(2m-1)^2}\right) < 1.$$

Luego

$$\left(\frac{2 \cdot 4}{3^2}\right)\left(\frac{4 \cdot 6}{5^2}\right)\cdots\left(\frac{(2m-2)\cdot(2m)}{(2m-1)^2}\right) = \frac{1}{2(2m)P^2}.$$

Por tanto:

$$P \geq \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Estimación usando una relación de equivalencia

Definamos la relación $\sim$ sobre el conjunto
$A = \{f(n) :\ f \text{ es una sucesión de números reales}\}$ como

$$f(n) \sim g(n) \text{ si y sólo si } \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

Veamos que dicha relación es de equivalencia:

1) Reflexiva: $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{f(n)} = 1.$
2) Simétrica: Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ entonces $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1.$
3) Transitiva: $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ y $\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 1$ entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \lim_{n\to+\infty} [\frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{g(n)}{h(n)}] = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{h(n)} = 1$$

Fórmula de Stirling

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}.$$

Ejemplo:

- Para $n = 10$ se tiene:

$$10! = 3628800 \text{ y } \frac{10^{10}}{e^{10}}\sqrt{20\pi} = 3598695,61\ldots$$

Luego $\dfrac{10!}{\frac{10^{10}}{e^{10}}\sqrt{20\pi}} = 1,00836536$

- Para $n = 12$ se tiene:

$$10! = 479001600 \text{ y } \frac{12^{12}}{e^{12}}\sqrt{24\pi} = 475687486,2\ldots$$

Luego $\dfrac{12!}{\frac{12^{12}}{e^{12}}\sqrt{24\pi}} = 1,006967$

Estimación del coeficiente binomial usando Stirling

Como caso particular se podría hallar una estimación del coeficiente binomial:

$$\binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m!)^2}$$

$$\binom{2m}{m} \sim \frac{(2m)^{2m}/e^{2m}\sqrt{2\pi(2m)}}{(m^m/e^m)^2(2\pi m)} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}}.$$

Teorema

Sea $\pi(n)$ el número de primos naturales que no exceden al número n. Entonces:

$$\pi(n) \sim \frac{n}{ln(n)}.$$

Ejemplo:

- Para $n = 1000$ se tiene:

$$\pi(1000) = 168 \text{ y } \frac{1000}{ln 1000} = 144,7648.$$

Luego $\dfrac{\pi(1000)}{\dfrac{1000}{ln 1000}} = 1,16050311.$

- Para $n = 10000$ se tiene:

$$\pi(10000) = 1229 \text{ y } \frac{10000}{ln 10000} = 1085,7362.$$

Luego $\dfrac{\pi(10000)}{\dfrac{10000}{ln 10000}} = 1,13195084.$

Principio del Palomar

Principio del Palomar

Si se colocan n objetos en k casillas con $n, k \in \mathbb{N}$ entonces existe una casilla que contiene $[\![\frac{n-1}{k}]\!] + 1$ o más objetos.

Prueba:

Procedamos por contradicción, supongamos que en cada casilla podemos colocar a lo más $[\![\frac{n-1}{k}]\!]$ objetos. Como:

$$[\![\frac{n-1}{k}]\!] < \frac{n}{k}$$

entonces el número total de objetos es a lo más

$$k \cdot [\![\frac{n-1}{k}]\!] < k\left(\frac{n}{k}\right) = n$$

lo que contradice que el número total de objetos sea n.

Consecuencias del Principio del Palomar

Consecuencias

- Si m objetos se distribuyen en k conjuntos y $n > mk$ entonces al menos $m+1$ objetos se encuentran en un mismo conjunto.
- Si $k+1$ ó más objetos se colocan en k casillas existe al menos una casilla que contiene dos o más objetos.

Ejemplo:

1) En un grupo de 13 personas existen al menos dos que cumplen años en el mismo mes.
2) Al seleccionar 6 números naturales cualesquiera, se puede asegurar que siempre hay al menos dos de ellos cuya diferencia es múltiplo de 5.
3) En un grupo de 6 personas siempre hay 3 que se conocen entre ellas o 3 que no se conocen entre sí.