CONTEO COMBINATORIO - PERMUTACIONES - COMBINACIONES.

Profesores del curso:

Ronald Mass [1]

Ángel Ramírez [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

10 de junio de 2020

Tabla de contenidos

Proposición 1

Sea N un conjunto de n elementos (pudiendo ser vacío, es decir, $n = 0$) y sea M un conjunto de m elementos $(m \geq 1)$. Entonces, el número de todas las posibles funciones $f : N \to M$ es m^n.

Demostración:

- Caso $n = 0$:
  En este caso $f : N \to M$ donde $N = \emptyset$. Por definición de función, f debe ser un conjunto de pares ordenados $(x, y) \in N \times M$ tal que $x \in N$ e $y \in M$. Desde que $N = \emptyset$ entonces f no puede posiblemente contener elementos y por tanto la única posibilidad es que f sea vacío.
  Por otra parte, $f = \emptyset$ satisface la definición de función, la cual dice que para cada $x \in N$ algo debe ser verdad, pero no existen $x \in N$, entonces, existe exactamente 1 función $f : \emptyset \to M$.
  Esto prueba la fórmula $m^n = 1$ para $n = 0$ y cualquier $m \geq 1$.

- Caso $n \in \mathbb{N}$:
  - Para $n = 1$: como existen m valores distintos en el conjunto de llegada, entonces exactamente hay m funciones. Así se cumple $m^n = m$ para $n = 1$ y todo $m \geq 1$.
  - Hipótesis inductiva: Dado $n_0 \in \mathbb{N}$, existen m^n funciones cuando N tiene n elementos y M tiene m elementos para todo $n \leq n_0$.
  - Veamos que se cumple para $n_0 + 1$.
    Elijamos $a \in N$ arbitrario y lo mantenemos fijo. Considere la función $f : N \to M$ tal que $f(a) \in M$ y la función $f' : N \backslash \{a\} \to M$. Dado $a \in N$ fijo, existen m formas distintas de elegir $f(a) \in M$. Para elegir f', tenemos que $N \backslash \{a\}$ tiene n_0 elementos y M tiene m elementos, entonces por la hipótesis inductiva existen m^{n_0} funciones $f' : N \backslash \{a\} \to M$. Como cada elección de $f(a)$ puede ser combinada con cualquier de f' entonces el número total de posibilidades para f es igual a $m \times m^{n_0} = m^{n_0+1}$.

Proposición 2

Cualquier conjunto de $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ elementos tiene 2^n subconjuntos.

Demostración:
Analizamos por caso:

- Para $|X| = 0$: Entonces $|X| = \emptyset$ y así existe un único subconjunto $\emptyset$ y así $2^{|X|} = 1$.
- Para $|X| \in \mathbb{N}$ procedemos por inducción sobre $|X|$.
  1. Para $|X| = 1$ entonces existen dos subconjuntos, los cuales son $\emptyset$ y el propio X, por tanto se cumple $2^{|X|} = 2^1 = 2$.
  2. Hipótesis inductiva: dado $n \in \mathbb{N}$ tal que $|X| = n$ se cumple que el número de subconjuntos es 2^n.

3. Veamos que se cumple para conjuntos X tal que $|X| = n+1$: Sea $a \in X$ un elemento fijo pero arbitrario. Ahora, dividamos los subconjuntos de X en dos familias $\mathcal{F}_1 = \{A \subset X \,/\, a \notin A\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{A \subset X \,/\, a \in A\}$.

   Todo $A \in \mathcal{F}_1$ cumple que $A \subset X \backslash \{a\}$ y donde $|X \backslash \{a\}| = n$ y por la hipótesis inductiva se tienen 2^n subconjuntos.

   Para todo $A \in \mathcal{F}_2$ considere $A' = A \backslash \{a\} \subset X \backslash \{a\}$ y así $A' \in \mathcal{F}_1$. Viceversa, cada $A' \in \mathcal{F}_1$ se obtiene exactamente de un conjunto $A \in \mathcal{F}_2$ de la forma $A = A' \cup \{a\}$.

   Es decir, existe una biyección entre los elementos de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, por tanto, el número de subconjuntos de $\mathcal{F}_2$ también es 2^n.

   Por tanto, el número total de subconjuntos es $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Proposición 3

Sea $n \in \mathbb{N}$. Cada conjunto de n elementos tiene exactamente 2^{n-1} subconjuntos de tamaño impar y 2^{n-1} de tamaño par.

Demostración:
Considere $a \in X$ fijo pero arbitrario. Defina la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} F: & X \backslash \{a\} & \rightarrow & Y = \{A' \subset X \,/\, |A'| \quad \text{es un número impar}\} \\ & A & \mapsto & F(A) := \begin{cases} A & \text{si} \quad |A| \quad \text{es impar} \\ A \cup \{a\} & \text{si} \quad |A| \quad \text{es par} \end{cases} \end{array}$$

Observe que F es un biyección y que $|X \backslash \{a\}| = n - 1$, luego, por la Proposición 2 se tiene que el número de subconjuntos de $X \backslash \{a\}$ es 2^{n-1} y debido a que F es biyectiva conluimos que $|Y| = 2^{n-1}$.
De forma análoga se procede para determinar el número de subconjuntos de cardinalidad par. O también se puede calcular como $|X| - |Y| = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

Proposición 4

Dados $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existen $m(m-1)\ldots(m-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1}(m-i)$ funciones inyectivas de un conjunto de n elementos a un conjunto de m elementos.

Demostración:

1. Para $n = 0$, la función vacía es inyectiva y así exactamente existe una función inyectiva, aceptando el hecho que el valor de un producto vacío es definido como 1.
2. Procedemos por inducción:
   a) Para $n = 1$ tenemos m funciones inyectivas.
   b) Observe que no existen funciones inyectivas cuando $n > m$ cumpliéndose la fórmula debido a que aparece el factor cero en el producto.

c) Por tanto, consideremos un conjunto N con n elementos y $n \geq 1$ y un conjunto M con m elementos tal que $m \geq n$. Fijemos $a \in N$ y elijamos $f(a) \in M$ arbitrariamente, para esto tenemos m formas distintas. Resta elegir una función inyectiva del conjunto $N \backslash \{a\}$ hacia el conjunto $M \backslash \{f(a)\}$. Por la hipótesis inductiva, existen $(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ formas distintas de elecciones siguiente. Por tanto, tenemos $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$ funciones inyectivas $f : N \rightarrow M$.

Tabla de contenidos

Definición 1

Sea X un conjunto finito. Una función **biyectiva** *$f : X \to X$ es llamada* **permutación**.

Ejemplo:

Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Un ejemplo de permutación es $P : X \to X$ donde $P(a) = b, p(b) = d, p(c) = c, p(d) = a$. P es usual denotarse por:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$$

Es frecuente trabajar con permutaciones en $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Con la convención que la primera fila esté en orden creciente, luego podemos considerar la notación:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Según la Proposición 8 el número de permutaciones de n elementos es:

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2\times 1.$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2\times 1.$$

En particular para $n = 0$ se define $0! = 1$.

De forma equivalente, una **permutación** de un conjunto de objetos distintos es un **arreglo ordenado** de estos objetos. También estamos interesados en arreglos ordenados de algunos de los elementos de un conjunto. Un arreglo ordenado de r elementos de un conjunto es llamada una **r-permutación**.

Ejemplo:

Sea $S = \{a, b, c\}$. El arreglo ordenado c, a, b es una permutación de S. El arreglo ordenado c, b es una 2-permutación de S.

Todas las 2-permutaciones de S son los arreglos ordenados $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, a\}, \{b, c\}, \{c, a\}$ y $\{c, b\}$. Es decir, existen seis 2-permutaciones de este conjunto con 3 elementos.

Teorema 1

Si n es un entero positivo y r es un entero tal que $1 \leq r \leq n$, entonces existen

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

r-permutaciones de un conjunto con n elementos distintos.

Demostración: Usaremos la regla del producto. El primer elemento de la permutación puede ser elegido en n forma distintas porque el conjunto tiene n elementos. Del mismo modo, existen $n-1$ formas distintas de elegir el segundo elemento de la permutación, porque existen $n-1$ elementos en el conjunto después de haber elegido el primero. Similarmente, existen $n-2$ formas para elegir el tercer elemento y así sucesivamente, hasta que quedan exactamente $n-(r-1) = n-r+1$ modos de elegir el $r-$ésimo elemento. Por tanto, usando la regla del producto, se concluye que existen $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ $r-$permutaciones del conjunto.

Tabla de contenidos

Coeficientes binomiales

Definición 2

Sea $n \geq k$ enteros no negativos. Definimos el **coeficiente binomial** *al siguiente valor:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 2 \times 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}$$

Es mucho más conocida la fórmula: $\binom{n}{k}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Entre las ventajas de la forma dada en la definición, se tiene:

- Computacional, realiza menos operaciones.
- Resultados intermedios más pequeños.
- Tiene sentido para todo $n \in \mathbb{R}$.
- Permite definir $\binom{n}{k}$ para $n < k$ en cuyo caso $\binom{n}{k} = 0$.

Definición 3

Sea X un conjunto y k un enterno no negativo. El símbolo $\binom{X}{k}$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de k elementos de conjunto X.

Ejemplo:
Sea $X = \{a, b, c\}$ entonces: $\binom{X}{2} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$.

Observación: El símbolo $\binom{X}{k}$ tiene dos significados, dependiendo si X es un número o un conjunto.

1. Si X es un número natural, entonces $\binom{X}{k}$ denota el número de todos los subconjuntos de k elementos de un conjunto de X elementos.
2. Si X es un conjunto, entonces $\binom{X}{k}$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de k elementos del conjunto X.

Proposición 5

Para cualquier conjunto finito X, el número de todos los subconjuntos de k elementos es igual a $\binom{|X|}{k}$.

En símbolos:

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$$

Demostración:

Sea $r = |X|$. Vamos a contar las $k-$ *tuplas* ordenadas de elementos de X(sin repeticiones de elementos) de dos formas distintas.

1. El número de las $k-$ tuplas ordenadas es $n(n-1)\dots(n-k+1)$ (usando la Proposición 8).

2. De un subconjunto M de k elementos (es decir, $M \in \binom{X}{k}$), podemos crear $k!$ $k-$tuplas ordenadas distintas y cada $k-$tupla se obtiene de exactamente un subconjunto M de k elementos.

por tanto, de **(1)** y **(2)**:

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = k! \left| \binom{X}{k} \right|$$

Propiedades:

Teorema 2

Para todo $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n$ se cumple:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema 3

Si n y k son números enteros no negativos tales que $0 \leq k \leq n$, entonces:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Demostración Teorema 3

Sea A un conjunto con n elementos y B un conjunto con un sólo elemento, por ejemplo $B = \{b\}$ tal que $b \notin A$, es decir, $A \cap B = \emptyset$. Por tanto, si $C = A \cup B$ se tiene que $|C| = n + 1$.

Sea P el conjunto formado por todos los subconjuntos de C con k elementos, es decir:

$$P = \{X \subset C \,/\, |X| = k\},$$

por tanto, se tienen dos opciones para los k elementos que forman X:

- Los k elementos de X son del conjunto A, es decir:

$$Q = \{X \subset A \,/\, |X| = k\}.$$

Demostración Teorema 3 (cont.)

- O también, $k-1$ son elementos de A y b es el elemento que falta, es decir:

$$R = \{X = D \cup B \, / \, , D \subset A, |D| = k-1\}.$$

Además $P = Q \cup R$ donde $Q \cap R = \emptyset$. Por tanto:

$$|P| = |R| + |Q|,$$

pero:

$$\begin{array}{rcl} |P| & = & \binom{n+1}{k} \\ |Q| & = & \binom{n}{k} \\ |R| & = & \binom{n}{k-1} \end{array}$$

de esta forma se obtiene:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Ejemplo clásico usando el coeficiente binomial

Sea m un entero no negativo. ¿Cuántas formas existen para expresar m como suma de r enteros no negativos? (el orden de los sumandos es importante).
Por ejemplo, para $m = 3$ y $r = 2$ se tienen las siguientes formas:

$$\begin{aligned} 3 &= 0 + 3 \\ &= 1 + 2 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 + 0 \end{aligned}$$

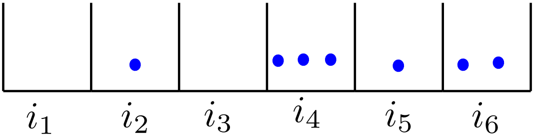
Mas explícitamente: queremos encontrar r sumandos $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ de enteros no negativos que satisfacen la ecuación:

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_r = m. \tag{1}$$

La respuesta a este problema es $\binom{m+r-1}{r-1}$.

Solución:

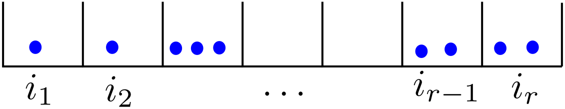
Imaginemos cada sumando i_r como una caja, es decir, tenemos r cajas.
Queremos repartir m objetos en las r cajas (asumimos que cada caja puede guardar los m objetos de ser necesario.)
Observe que cada posible distribución da una solución a la Ecuación 1.
Para quedar mas claro, considere el siguiente ejemplo para $m = 7$y $r = 6$.
Una solución es $7 = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 + 2$ y la distribución correspondiente es:



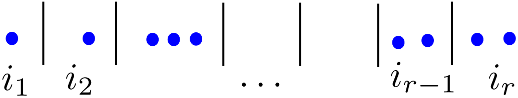
Solución (Cont.)

Por lo tanto, la solución buscada a la ecuación 1 es equivalente al número de distribuciones de los m objetos en las r cajas.

El gráfico para el caso general de una solución de la ecuación 1 es:



Para realizar el conteo de las soluciones de la ecuación 1 consideramos la siguiente figura:



Solución (Cont.)

Donde debemos tener en cuenta:

1. Cada $i_n \, (n = 1, \ldots, r)$ denota el número de posiciones a ser ocupadas por los objetos.
2. Cada barra de separación cuenta una posición más.
3. Entre las posiciones de los objetos y barras tenemos en total $m + r - 1$ posiciones.
4. Observe que cada distribución de las $r - 1$ barras separando los objetos nos da una solución para la ecuación 1.

Por tanto, elegir una distribución de los objetos significa seleccionar la posición de las barras de separación entre los objetos.
En otras palabras, tenemos en total $m + r - 1$ objetos (entre los objetos a repartir y las barras) arregladas en fila y queremos determinar cuales posiciones serán ocupadas por los objetos a repartirse y las barras. Esto corresponde a seleccionar un subconjunto de $r - 1$ posiciones de un total de $m + r - 1$

Ejemplo:

Contar el número de soluciones enteras a

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \quad x_1 \geq -2, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Ejemplo:

Contar el número de soluciones enteras a

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \quad x_1 \geq 3, x_2 \geq 0, x_3 \geq -4, x_4 \geq 0.$$

Ejemplo:

Un estudiante tiene que responder siete preguntas de cuestionario de 10. ¿de cuántas maneras puede hacer su elección si:

1. no hay restricciones?
2. debe responder a las dos primeras preguntas?
3. debe responder, como mínimo, a tres preguntas de las cinco primeras?

Solución:

Supongamos que las diez preguntas son:
$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}$ y elegimos un grupo cualquiera de siete de ellas, por ejemplo: $p_1, p_3, p_5, p_7, p_8, p_9, p_{10}$. Es claro que si cambiamos el orden entre ellas el grupo elegido es el mismo, sin embargo si cambiamos alguna o algunas preguntas, el grupo es distinto, por tanto, los grupos de siete preguntas serán combinaciones de orden siete elegidas entre las 10 del cuestionario.

1. Al no haber ningún tipo de restricciones la elección podrá hacerse de:

$$\binom{10}{7} = 120$$

formas distintas.

Solución: (cont.)

2. Si el estudiante debe responder a las dos primeras preguntas, hallamos todos los grupos distintos de cinco preguntas que pueden elegirse entre las ocho restantes y a cada uno de ellos le añadimos las dos primeras. Por tanto, la elección puede hacerse de:

$$\binom{8}{5} = 56$$

formas distintas.

Solución: (cont.)

3. El estudiante debe responder como mínimo, a tres preguntas de entre las cinco primeras.
Hallamos todos los grupos distintos de k preguntas, con $k = 3, 4$ o 5 que pueden elegirse entre las cinco primeras y para cada uno de ellos elegimos $7 - k$ preguntas entre las cinco restantes. El número total de formas distintas de hacer la elección será, por tanto:

$$\sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} \binom{5}{7-k} = 110.$$

Teorema Binomial

Teorema 4

Para cualquier entero n no negativo se cumple:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

En particular, el teorema anterior para $x = 1$ resulta:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$