Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 17, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivadas de orden superior

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. La función derivada $f' : A_1 \to \mathbb{R}$, $A_1 \subset A$ puede también tener derivada en un punto x_0, la segunda derivada de f en x_0:

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

También se utilizan las notaciones

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = y'' = f''(x) = f^{(2)}(x),$$

donde $y = f(x)$.

Derivadas de orden superior

Notamos que la función correspondiente $f'' = (f')' : A_2 \to \mathbb{R}$, definida sobre $A_2 \subset A_1$, también podría ser derivable y definir de forma análoga la tercera derivada. Siguiendo esta idea, definimos la tercera derivada $f'''(x_0)$ de f en x_0 como la derivada de f'' en x_0

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0)$$

y la función correspondiente $f''' : A_3 \to \mathbb{R}, A_3 \subset A_2$,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = y''' = f'''(x) = f^{(3)}(x).$$

Derivadas de orden superior

Habiendo definido la derivada de orden $n-1$, $\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = f^{(n-1)}(x)$ como una función $f^{(n-1)} : A_{n-1} \to \mathbb{R}$, definimos la derivada de orden n en un punto x_0 como la derivada de esta,

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0),$$

y su función correspondiente $f^{(n)} : A_n \to \mathbb{R}$, donde $A_n \subset A_{n-1}$. Como antes,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Convenimos que $f^{(0)} = f$ de modo que $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Sea f una función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

Encuentre una formula para la derivada de orden n de la función f y demuestre por inducción matemática.

Resolución

Representamos $f(x) = (x+2)^{-1}$. Para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)(x+2)^{-2} \\ f''(x) &= (-1)(-2)(x+2)^{-3} \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4} \end{aligned}$$

y deducimos entonces que en general

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)(-2)\cdots(-n)(x+2)^{-(n+1)} \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Resolución

Demostremos que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)} \qquad (1)$$

por inducción sobre $n \geq 1$.

- Para $n = 1$, derivando directamente $f(x) = (x+2)^{-1}$,

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = (-1)(x+2)^{-2} = (-1)^1 1!(x+2)^{-(1+1)}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

- Supongamos que la ecuación (1) es válida para un n (hipótesis inductiva). Derivando

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= ((-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)})' \\ f^{(n+1)} &= (-1)^n n!((x+2)^{-(n+1)})' \\ f^{(n+1)} &= (-1)^n n!(-(n+1))(x+2)^{-(n+1)-1} \\ f^{(n+1)} &= (-1)^{n+1}(n+1)!(x+2)^{-((n+1)+1)} \end{aligned}$$

La igualdad $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!(x+2)^{-((n+1)+1)}$ significa que (1) vale para $n+1$ en lugar de n.
Por el principio de inducción la ecuación (1) vale para todo $n \geq 1$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

Derivación implícita

Cada una de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5y &= -1 \\ x^2 + y^2 &= 1 \\ \cos(x+y) - 5x + y^3 + y &= 0 \end{aligned}$$

expresa una dependencia de la variable y respecto de x.
Para $3x^2 + 5y = -1$, tal dependencia puede ser expresada explícitamente mediante $y = \dfrac{-1 + 3x^2}{5}$, una ecuación de la forma $y = f(x)$.
Para $\cos(x+y) - 5x + y^3 + y = 0$ es imposible obtener una ecuación explícita de la forma $y = f(x)$.

Ecuación implícita

Una ecuación implícita entre las variables x e y es una ecuación de la forma

$$F(x,y)=0\ ,$$

de modo que $F(x,y)=0$ si y solo si $y=f(x)$.
O también, la ecuación implícita $F(x,y)=0$ define la función $y=f(x)$ si y solo si

$$F(x,f(x))=0.$$

Ejemplo

En los ejemplos anteriores:

- $F(x,y) = 3x^2 + 5y + 1.$
- $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$
- $F(x,y) = \cos(x+y) - 5x + y^3 + y.$

Son las funciones implícitas de las ecuaciones mencionadas.

Observación

Una ecuación implícita define, de modo natural, el conjunto

$$C = \{(x, y) | F(x, y) = 0\}.$$

Este conjunto es el conjunto solución de la ecuación $F(x, y) = 0$.

- En el caso de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, C es el círculo unitario.
- En el caso en que la ecuación $F(x, y) = 0$ define la función $y = f(x)$, el conjunto solución C contiene la curva gráfico de la función f.

Observación

Genéricamente se tiene que C es una curva. Así, el siguiente interés es el calcular la recta tangente a la curva.
Si la curva es parte del gráfico de $y = f(x)$ para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en (x_0, y_0) es necesario calcular

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = y'(x_0) = f'(x_0).$$

Derivación implícita

Usualmente se piensa que es necesario conocer f, o despejar y, para después derivar. Sin embargo, como ya vimos eso no siempre es posible. Sin embargo, es posible calcular $\dfrac{dy}{dx}$ mediante un proceso denominado derivación implícita. Este proceso consiste en derivar ambos miembros de una ecuación con respecto a x, usando las reglas de derivación y luego resolviendo para $\dfrac{dy}{dx}$.
En la derivación implícita lo más se usa es la regla de la cadena, porque estaremos suponiendo que una variable (usualmente y) es función de la otra (usualmente x).

Ejemplo

Si $y = y(x)$, entonces

- Derivar y^4 (respecto de x) es:
$$\frac{d}{dx}(y^4) = \frac{d}{dy}(y^4)\frac{dy}{dx} = 4y^3y'.$$
- Derivar $(x^2 + y)$ es:
$$\frac{d}{dx}(x^2 + y) = 2x + \frac{d}{dy}(y)\frac{dy}{dx} = 2x + y'.$$
- Derivar x^5y^2 es:

¿Cómo sería derivar las expresiones anteriores respecto de y?

Ejemplo

Considere la ecuación $\cos(x+y) = y\,\mathrm{sen}(x)$.
Derivando respecto de x ambos miembros se obtiene:

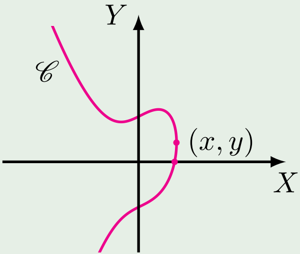
$$-\,\mathrm{sen}(x+y)(1+y') = y'\,\mathrm{sen}(x) + y\cos(x)$$

Podemos despejar y'

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\cos(x) + \mathrm{sen}(x+y)}{\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x+y)}$$

Ejercicio

La curva $\mathscr{C}$ mostrada en la figura es el conjunto formado por todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x^3 - xy + y^2 = 4$.



Determine la ecuación de la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto de intersección de $\mathscr{C}$ con el eje X.

Resolución

Comencemos por lo fácil. La intersección de la curva $\mathscr{C}$ con el eje X es el punto $(x_0, 0)$ que satisface la ecuación dada. Esto es, se debe cumplir

$$x_0^3 - x_0 \cdot 0 + 0^2 = 4$$

de donde se obtiene $x_0 = \sqrt[3]{4}$.

Veamos ahora la recta tangente

Queremos hallar al pendiente de la recta tangente. Vamos a suponer que la curva (cerca del punto $(x_0, 0)$) es la gráfica de una función $y(x)$. Derivando implícitamente $y(x)$.

$$3x^2 - y - xy' + 2yy' = 0$$

Resolución

Tenemos que $x_0 = \sqrt[3]{4}$ y $y(\sqrt[3]{4}) = 0$, de modo que la ecuación anterior queda

$$3(\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{4}y'(\sqrt[3]{4}) = 0$$

es decir $y'(\sqrt[3]{4}) = 3\sqrt[3]{4}$.
Entonces, la recta tangente a la curva en el punto $(\sqrt[3]{4}, 0)$ es

$$y = 3\sqrt[3]{4}(x - \sqrt[3]{4})$$

Ejercicio

La curva C es el conjunto formado por todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y^3 - 5x^2y = 2x^5$.

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva C en el punto $(1, -2)$.

b) Si la recta tangente a la curva C en el punto P es una recta horizontal, determine la coordenadas del punto P.

Ejercicio

La elipse $\mathscr{E}$ es el conjunto formado por los todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $\dfrac{(x+y)^2}{32} + \dfrac{(y-x)^2}{8} = 1.$

a) Calcule la razón de cambio $\dfrac{dx}{dy}$ cuando $x = 3$ y $y = 1$.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $(1, 3)$.

c) Encuentre todos los puntos de $\mathscr{E}$ donde la recta tangente es vertical.

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Derivada del logaritmo natural)

Sea $I \subset]0,+\infty[$. Si $f(x)=\ln(x),\ \forall x \in I$, entonces $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} &= \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} \\
\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} &= \ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right)^{1/x} \\
\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} &= \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

Además, $\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{x/h} = e.$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
(\ln(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}\\
(\ln(x))' &= \frac{1}{x}\ln(e)\\
(\ln(x))' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$\square$

Derivada de funciones hiperbólicas

- Si $f(x) = \text{senh}(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = \cosh(x)$
- Si $f(x) = \cosh(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = \text{senh}(x)$
- Si $f(x) = \tanh(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = \text{sech}^2(x)$
- Si $f(x) = \coth(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = -\text{csch}^2(x)$
- Si $f(x) = \text{sech}(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = -\tanh(x)\text{sech}(x)$
- Si $f(x) = \text{csch}(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = -\coth(x)\text{csch}(x)$

Demostración.

En efecto, si $x \in I$

$$\operatorname{senh}'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

del mismo modo

$$\cosh'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

□

Demostración.

Las demás derivadas de las demás funciones hiperbólicas pueden obtenerse aplicando las reglas de suma y producto de derivadas.

$$
\begin{aligned}
(\tanh x)' &= \frac{(\operatorname{senh} x)' \cosh x - (\cosh x)' \operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} \\
(\tanh x)' &= \frac{\cosh x \cosh x - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} \\
(\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2(x)}
\end{aligned}
$$

□

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(\coth x)' &= -\frac{(\tanh x)'}{\tanh^2 x} \\
(\coth x)' &= -\frac{1/\cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x/\cosh^2 x} \\
(\coth x)' &= -\frac{1}{\operatorname{senh}^2(x)}
\end{aligned}
$$

□

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivación logarítmica

La última derivada es la base de una técnica, la de **derivación logarítmica**:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(f(x)\right)\right] = \frac{f'(x)}{f(x)}\ .$$

Ejemplo

Si $y = x^\alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo (y $x \in \mathbb{R}$ o $x > 0$ según corresponda), entonces $\ln y = \alpha \ln x$, de donde, derivando

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

de donde

$$y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} \ .$$

Concluimos que

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \ .$$

Ejemplo

Si $y = a^x$, siendo $a > 0,\ a \neq 1$ fijo, tenemos,

$$\ln y = x \ln a$$

luego,

$$\frac{y'}{y} = (x \ln a)' = \ln a$$

Finalmente,

$$y' = y \ln a = a^x \ln a$$

Esto lo escribimos como

$$(a^x)' = a^x \ln a \ .$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Si queremos encontrar la recta tangente L_T, en el punto $(2, 8)$, a la curva descrita por $y = x2^x$, en primer lugar calculamos la derivada:

$$y'(x) = x(\ln 2)2^x + 2^x$$

y encontramos la pendiente de la recta tangente:

$$y'(2) = (\ln 2)8 + 4 \quad \Longrightarrow \quad m = 8\ln 2 + 4$$

Finalmente obtenemos la ecuación de L_T:

$$L_T :\ y = (8\ln 2 + 4)(x - 2) + 8\ .$$

Método de derivación logarítmica

Para obtener la derivada de $y = f(x)$ mediante el método de derivación logarítmica, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Tomamos logaritmos naturales en ambos miembros de la expresión por derivar.
2. Utilizamos las propiedades de los logaritmos para reducir los productos y potencias presentes.
3. Derivados ambos miembros respecto de la variable independiente.
4. Despejamos la derivada y'.
5. Reemplazamos la expresión de y y simplificamos la expresión resultante.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Para derivar $y = f(x) = \frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}}$.

1. $\ln y = \ln\left(\frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}}\right)$,
2. $\ln y = \ln(x^{\frac{1}{2}}(x+1)^5) - \ln(10(x^2-3)^{\frac{1}{3}})$,
   $= \frac{1}{2}\ln(x) + 5\ln(x+1) - \ln 10 - \frac{1}{3}\ln(x^2-3)$,
3. $\dfrac{y'}{y} = \frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2-3}$,
4. $y' = y\left(\frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{2x}{3(x^2-3)}\right)$,
5. $y' = \left(\frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}}\right)\left(\frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{2x}{3(x^2-3)}\right)$,

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA