MATRICES

RICHARD ACUÑA ORTEGA[1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

19/04/2022

Tabla de contenidos

Definición 1

Una matriz es un ordenamiento rectangular de números ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) dispuestos en filas y columnas.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2{,}3 & -1/7 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 12 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 15 \\ \sqrt{24} & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

Notación:

1. A las matrices se les designa mediante letras mayúsculas. Así se dirá, sea A una matriz.

   Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 15 \\ \sqrt{24} & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

2. Los elementos de la matriz A son denotados por a_{ij}, donde: a es el elemento matricial, i indica la fila y j indica la columna. Así:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad \text{ó} \quad A = [a_{ij}]_{m\times n} = A_{m\times n}\,, m, n \in \mathbb{N}$$

Definición 2

El orden de una matriz esta dado por la expresión $m \times n$, se lee "m por n ", donde m es el número de filas y n es el número de columnas de la matriz.

Observación:

El conjunto ordenado $\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}\}$ es la i-ésima fila con $1 \leq i \leq m$, y el conjunto ordenado $\{a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj}\}$ es la j-ésima columna con $1 \leq j \leq n$, de la matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}_{m \times n} \qquad \begin{bmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{mj} & \cdots \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Definición 3 (Igualdad de matrices)

Sean $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ dos matrices. Entonces

$$A = B \quad \text{si y sólo si} \quad a_{ij} = b_{ij}\ , \text{ para cada } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

Es decir:

$$\text{Elemento } (ij) \text{ de } A = \text{Elemento } (ij) \text{ de } B$$

Considere:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ \ B = [b_{ij}]_{m\times n}\ \text{ y }\ k \in \mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

Definición 4 (Suma de matrices A, B)

Es la matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Notación: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} = C = [c_{ij}]_{m\times n}$

Definición 5 (Multiplicación de una matriz A por un escalar k)

Es la matriz $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Observación:

Sea B una matriz de orden $m \times n$, entonces $-B = (-1)B$, es decir:

$$\text{Si } B = [b_{ij}]_{m\times n} \text{ , entonces } -B = [-b_{ij}]_{m\times n}$$

Definición 6 (Resta de matrices)

Es la matriz $A - B$ definida por:

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}.$$

Definición 7 (Multiplicación de matrices)

El producto de $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ es la matriz $AB = C = [c_{ij}]_{m\times p}$ donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}_{m\times n}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix}_{n\times p}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{m\times p}}_{C}$$

Ejemplo: Determine AB si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución: Tenemos $AB = C = [c_{ij}]_{2\times 3}$, donde:

$$\begin{array}{ll} c_{11} = (1)(3) + (2)(-1) = 1, & c_{12} = (1)(2) + (2)(3) = 8\ , \\ c_{13} = (1)(0) + (2)(1) = 2, & c_{21} = (-3)(3) + (6)(-1) = -15, \\ c_{22} = (-3)(2) + (6)(3) = 12, & c_{23} = (-3)(0) + (6)(1) = 6\ . \end{array}$$

entonces:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ -15 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Sean las matrices $A = [i - 2j]_{m \times n}$ y $B = [j]_{n \times p}$. Hallar la matriz AB.

Solución: Del dato $a_{ij} = i - 2j$, $b_{ij} = j$ y sea $AB = C = [c_{ij}]_{m \times p}$, entonces

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (i - 2k)(j) = j \left(\sum_{k=1}^{n} i - \sum_{k=1}^{n} 2k \right) = j(in - n(n+1))$$

finalmente $AB = [j(in - n(n+1))]_{m \times p}$.

Definición 8

Matriz nula, es la matriz donde todos sus elementos son ceros. Se denota por O.

Tabla de contenidos

Propiedad 1

Sean A, B y C matrices, k_1, k_2 escalares. Siempre que haya consistencia en sus órdenes, entonces:

1. $A + B = B + A$
2. $A + O = O + A = A$
3. $A + (-A) = O$
4. $A(BC) = (AB)C$
5. $AO = O$ y $OA = O$
6. $A(B \pm C) = AB \pm AC$
7. $k(A \pm B) = kA \pm kB$
8. $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$

Demostración:

1. Sean $A_{m\times n}$ y $B_{m\times n}$ matrices, entonces

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}=[b_{ij}+a_{ij}]_{m\times n}=B+A.$$

4. Sean $A_{m\times p}$, $B_{p\times r}$ y $C_{r\times n}$, tendremos $D = BC$ y $E = AD$,

luego el elemento

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{r} b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right)$$

también $F = AB$ y $G = FC$,

luego el elemento

$$g_{ij} = \sum_{l=1}^{r} f_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{r} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right)$$

entonces: $e_{ij} = g_{ij}$ para $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$,

finalmente por igualdad de matrices

$$A(BC) = (AB)C.$$

Observación:

1. Si $AB = AC$ y $A \neq O$, entonces no siempre se cumple $B = C$.

   Ejemplo:

   Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

   donde tenemos $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = AC$, pero $B \neq C$.

2. Si $AB = O$, entonces no siempre se cumple $A = O$ ó $B = O$.

   Ejemplo:

   Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, donde tenemos

   $AB = O$, pero $A \neq O$ y $B \neq O$.

Definición 9 (Matriz transpuesta)

Una matriz A^t es la matriz transpuesta de una matriz A de orden $m \times n$, si las filas de A^t son las columnas de A y las columnas de A^t son las filas de A, invirtiendo el orden.

Notación: $A^t = [a^t_{ij}]_{n\times m}$, donde

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \Longleftrightarrow A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{, entonces} \quad A^t = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Propiedad 2

Sean A, B matrices y k un escalar. Entonces

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$.
3. $(kA)^t = kA^t$.
4. $(AB)^t = B^t A^t$.

Demostración:

1. Sea $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ entonces $A^t = [a^t_{ij}]_{n\times m} = [a_{ji}]_{n\times m}$,

   luego
$$(A^t)^t = [a^t_{ji}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = A\ .$$

4. Sean $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{jk}]_{n\times p}$, entonces $AB = C = [c_{ik}]_{m\times p}$ y $(AB)^t = C^t = [c^t_{ik}]_{p\times m}$, luego

$$c^t_{ik} = c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji} \tag{1}$$

también de $A^t = [a^t_{ij}]_{n\times m}$ y $B^t = [b^t_{jk}]_{p\times n}$, tendremos

$B^t A^t = D = [d_{ik}]_{p\times m}$
así,

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b^t_{ij} a^t_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji} \tag{2}$$

de (1) y (2) tendremos: $c^t_{ik} = d_{ik}$ entonces por igualdad de matrices

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Definición 10 (Matriz cuadrada)

Es la matriz donde el número de sus filas es igual al de sus columnas.

Notación: $A = [a_{ij}]_{n\times n} = [a_{ij}]_n = A_n$

Definición 11 (Diagonal principal de una matriz cuadrada A_n)

La diagonal principal de una matriz A_n son los elementos a_{ij} donde $i = j$.

Ejemplo: Sea la matriz $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces los elementos

$d_{11} = 4, d_{22} = 2$ y $d_{33} = 0$ forman la diagonal principal.

Definición 12 (Traza de una matriz A_n)

La traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal principal.

Notación: $\text{Traza}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definición 13 (Matriz identidad)

Es una matriz de orden $n \times n$ donde los elementos de la diagonal principal son todos uno.

Notación: La matriz identidad se denota por I e I_n.

Ejemplo:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedad 3

Sea B una matriz de orden $m \times n$ e I la matriz identidad, entonces

$$B_{m\times n} I = B_{m\times n} \;\text{ y }\; I B_{m\times n} = B_{m\times n}.$$

Definición 14 (Potencias)

Sea $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ una matriz no nula, se define

$$A^0 = I_{n\times n}\ ;\ A^1 = A\ ;\ A^{m+1} = A^m A\ , m \in \mathbb{N}$$

Propiedad 4

1. $A^m A^k = A^{m+k}\ ;\ m, k \in \mathbb{N}$
2. $(A^t)^m = (A^m)^t\ ;\ m \in \mathbb{N}$

Se deja como ejercicio la prueba.

Tabla de contenidos

Definición 15 (Matriz diagonal)

Es una matriz cuadrada donde todos sus elementos que no pertenecen a la diagonal principal son ceros.

Notación: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Definición 16 (Matriz escalar)

Es una matriz diagonal en la que todos los elementos de su diagonal principal son iguales.

Notación: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ es una matriz escalar si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $a_{ij} = c$ para $i = j$, donde c es una constante.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definición 17 (Matriz simétrica)

Es toda matriz cuadrada A que cumple con la condición $A = A^t$.

Notación: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ es una matriz simétrica $\Longleftrightarrow$

$$A = A^t \Longleftrightarrow a_{ij} = a_{ji}\ , 1 \leq i, j \leq n.$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} & -7 \\ \sqrt{2} & -3 & 0 \\ -7 & 0 & 2{,}3 \end{bmatrix}$$

Definición 18 (Matriz antisimétrica)

Es una matriz cuadrada A que cumple con la condición $A = -A^t$.

Notación: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ es una matriz antisimétrica $\Longleftrightarrow$

$$A = -A^t \Longleftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}\ , 1 \leq i, j \leq n.$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 7 \\ \sqrt{2} & 0 & -8 \\ -7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Observación:

Si A es una matriz antisimétrica, entonces $a_{ii} = 0, 1 \leq i \leq n$.

Definición 19 (Matriz triangular inferior)

Es una matriz cuadrada cuyos elementos situados sobre la diagonal principal son ceros.

Notación: $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ es una matriz triangular inferior si y sólo si

$$a_{ij} = 0\ ,\ \ i < j$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Definición 20 (Matriz triangular superior)

Es una matriz cuadrada cuyos elementos situados debajo la diagonal principal son ceros.

Notación: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es una matriz triangular superior si y sólo si

$$a_{ij} = 0 \ , \ i > j$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Definición 21 (Matriz idempotente)

Es una matriz cuadrada A que cumple $A^2 = A$.

Ejemplo: Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

entonces A es una matriz idempotente ya que $A^2 = A$.

Propiedad 5

Si A es idempotente, entonces $A^n = A$, $n \in \mathbb{N}$.

Definición 22 (Matriz involutiva)

Es una matriz cuadrada A que cumple $A^2 = I$.

Ejemplo: Si

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces A es una matriz involutiva ya que $A^2 = I$.

Definición 23 (Matriz nilpotente)

Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = O$. Al menor número natural p que cumple $A^p = O$ se le llama índice de nilpotencia de la matriz A. Se cumple que:

$$A \text{ nilpotente de índice } p \Rightarrow A^m = O, \forall m \geq p.$$

Ejemplo: La siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

es una matriz nilpotente de índice 2, ya que $A^2 = O$.

Definición 24 (Matriz periódica)

Si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^{p+1} = A$. Además si p es el menor número natural que cumple $A^{p+1} = A$ se dice que A es periódica de periódo p.

Ejemplo: La siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, es una matriz periodica de periódo 4, ya que $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
$A^{4+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A$.

Observación: Es inmediato comprobar que si A es periódica de periodo p se cumple que:

$$A, A^2, A^3, \cdots, A^p, A^{p+1} = A, A^{p+2} = A^2, A^{p+3} = A^3, \cdots$$

Ejercicio: Si $\tan\alpha = \dfrac{a}{n}$, $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$; demuestre que:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{a}{n} \\ -\dfrac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}^m = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{m/2} \begin{bmatrix} \cos m\alpha & \operatorname{sen} m\alpha \\ -\operatorname{sen} m\alpha & \cos m\alpha \end{bmatrix}, \ m \in \mathbb{N}\,.$$

Solución: Se hará por inducción matemática:

- Para $m = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{a}{n} \\ -\dfrac{a}{n} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sec\alpha \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= (1+\tan^2\alpha)^{1/2} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

- Para $m = k$: (Hipótesis de inducción matemática)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ -\frac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}^k = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{k/2} \begin{bmatrix} \cos k\alpha & \operatorname{sen} k\alpha \\ -\operatorname{sen} k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix}$$

- Para $m = k + 1$: (Por demostrar)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ -\frac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}^{(k+1)} = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{k+1/2} \begin{bmatrix} \cos(k+1)\alpha & \operatorname{sen}(k+1)\alpha \\ -\operatorname{sen}(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{bmatrix}$$

Multiplicando la hipótesis por la matriz $\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{a}{n} \\ -\dfrac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{a}{n} \\ -\dfrac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}^{k+1} &= \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{k/2} \begin{bmatrix} \cos k\alpha & \operatorname{sen} k\alpha \\ -\operatorname{sen} k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{a}{n} \\ -\dfrac{a}{n} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{k/2} \begin{bmatrix} \cos k\alpha & \operatorname{sen} k\alpha \\ -\operatorname{sen} k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{k/2} \begin{bmatrix} \cos k\alpha - \operatorname{sen} k\alpha(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}) & \cos k\alpha(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}) + \operatorname{sen} k\alpha \\ -\operatorname{sen} k\alpha - \cos k\alpha(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}) & -\operatorname{sen} k\alpha(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}) + \cos k\alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{a}{n} \\ -\dfrac{a}{n} & 1 \end{bmatrix}^{k+1} = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{(k+1)/2} \begin{bmatrix} \cos(k+1)\alpha & \operatorname{sen}(k+1)\alpha \\ -\operatorname{sen}(k+1)\alpha & \cos(k+1)\alpha \end{bmatrix}$$

Ejercicio: If we define $e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i$, then determinate e^A when

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución:

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

observe que A es una matriz nilpotente de índice de nilpotencia igual a 3. Luego:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ ELEMENTAL Y RANGO DE UNA MATRIZ

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

21/04/2022

Tabla de contenidos

Definición 1 (Matriz por bloques)

Es cuando una matriz A se descompone en bloques:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pr} \end{array}\right)$$

- Los bloques de A son denotados por A_{ij}.
- Notación $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{p\times r}$.
- Los bloques A_{ij} se obtienen trazando rectas verticales y horizontales imaginarias entre las filas y columnas de A.

Ejemplo:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 6 & -3 & 3 \\ 8 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

Tipos de matrices por bloques

Sea $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ una matriz cuadrada.

- **Matriz diagonal por bloques**: $A_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{pp} \end{array}\right)$$

Notación: $A = diag(A_{ii})$.

- **Matriz triangular por bloques**:

Inferior: $A_{ij=0}$ para todo $j > i$.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} \end{array}\right)$$

Superior $A_{ij=0}$ para todo $j < i$.

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ \hline 0 & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & A_{pp} \end{array}\right)$$

Álgebra de matrices por bloques:

- Sea $A \in \mathbb{R}^{p\times r}$ una matriz descompuesta en bloques A_{ij} y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}.$$
- Sean A, B matrices descompuestas en bloques A_{ij} y B_{ij} cuyas dimensiones son iguales para todo i, j, entonces:
$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$
- Sean $A \in \mathbb{R}^{p\times r}, B \in \mathbb{R}^{r\times q}$ matrices descompuestas en bloques A_{ij} y B_{ij}, si los bloques tienen las dimensiones adecuadas, entonces:
$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}B_{kj}.$$

Ejemplo: Sean las matrices por bloques.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \\ \hline 8 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 7 & 2 & -3 \\ 8 & -1 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 1 & -9 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

donde:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline A_{31} & A_{32} \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline B_{31} & B_{32} \end{array}\right)$$

Sumando las matrices por bloques:

$$A + B = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ \hline A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \\ \hline A_{31} + B_{31} & A_{32} + B_{32} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 6 & 3 \\ \hline -1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & -3 \\ 11 & 2 & -2 & 4 \\ \hline 7 & 2 & -9 & 1 \\ 6 & 11 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Ejemplo: Para multiplicar matrices por bloques.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -3 & 4 \\ \hline 8 & -4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right).$$

$$B = \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right).$$

Luego:

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 14 & -6 & 10 & 15 \\ \hline 34 & 7 & 55 & 42 \\ 18 & 4 & 16 & 0 \end{array}\right)$$

Propiedad 1

- Sea $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{p\times r}$, entonces $(A^T)_{ij} = (A_{ij}^T)$.
- Sea $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{p\times p}$ triangular (superior o inferior), se cumple:

$$traza(A) = \sum_{k=1}^{p} traza(A_{kk}).$$

- Sean $A = diag(A_{ii}), B = diag(B_{ii}) \in \mathbb{R}^{p\times p}$, entonces:

$$\begin{array}{ll} A + B = diag(A_{ij} + B_{ij}), & \lambda A = diag(\lambda A_{ii}) \\ AB = diag(A_{ii}B_{ii}), & A^k = diag(A_{ii}^k), \\ P(A) = diag(P(A_{ii})) \quad \forall P \in \mathcal{P}, & traza(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} traza(A_{kk}). \end{array}$$

Las demostraciones no se incluyen debido a que se necesitan de mucho trabajo técnico y están basadas en la inducción matemática sobre $p \in \mathbb{N}$.

Tabla de contenidos

Operaciones elementales

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Las **operaciones elementales fila (OEF)** para la matriz A son las siguientes:

1. Intercambiar la fila i con la fila j, denotado por $F_{ij} \equiv \xrightarrow{f_i \times f_j}$.
2. Asignar a la fila i la misma fila i pero multiplicada por un número no nulo λ. Esto es denotado por $F_i(\lambda) \equiv \xrightarrow{\lambda f_i}$.
3. Asignar a la fila i la misma fila i y sumándole λ veces la fila j donde $\lambda \neq 0$. Esto es denotado por $F_{ij}(\lambda) \equiv \xrightarrow{f_i + \lambda f_j}$.

Se llama **inversa de una operación elemental (IOEF)** a una OEF que cancela el efecto de la primera. Es decir:

- La inversa de F_{ij} es $F_{ij} \equiv \xrightarrow{f_i \times f_j}$.
- La inversa de $F_i(\lambda)$ es $F_i(1/\lambda) \equiv \xrightarrow{\frac{1}{\lambda} f_i}$.
- La inversa de $F_{ij}(\lambda)$ es $F_{ij}(-\lambda) \equiv \xrightarrow{f_i - \lambda f_j}$.

Observación:

- De forma análoga se definen las **operaciones elementales columna (OEC)** de la matriz A denotadas por: $C_{ij}, C_i(\lambda)$ y $C_{ij}(\lambda)$.
- El término **operaciones elementales** se referirá a las OEF. Para el caso de OEC se mencionará explícitamente.

Ejemplo: Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule $F_{23}A$, $F_1(3)A$ y $F_{42}(-2)A$.

Solución: Calculando

$$F_{23}A \equiv A \xrightarrow{f_2 \times f_3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_1(3)A \equiv A \xrightarrow{3f_1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -9 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_{42}(-2)A \equiv A \xrightarrow{f_4 - 2f_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

Definición 2 (Matriz elemental $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$)

La matriz elemental E se obtiene al aplicar **una única** OEF (F), a la matriz identidad I_n, es decir ($E = FI_n$).

Ejemplo: Calcule las matrices elementales $E_1 = F_{13}I_4$ y $E_2 = F_3(2)I_4$.

Solución:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 1

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, F una OEF que se aplica a la matriz A y E la matriz elemental $E = FI_n$. Entonces, se cumple: $FA = EA$.

Ejemplo: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y la OEF,

$F = F_{23}$, entonces se calculan las matrices:

$$FA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E = FI_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule $M = EA$ y verique el Teorema 1, es decir:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz elemental:

Dada una matriz elemental E definimos la matriz elemental inversa E^{-1} como la matriz elemental correspondiente a la operación elemental inversa. Se cumple:

1. $(F_{ij}I_n)(F_{ij}I_n) = I_n$.
2. $(F_i(\lambda)I_n)(F_i(1/\lambda)I_n) = I_n$.
3. $(F_{ij}(\lambda)I_n)(F_{ij}(-\lambda)I_n) = I_n$.

Ejemplo:

$$F_1(1/3)I_3F_1(3)I_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices equivalentes:

- $A_{m\times n}$ es **equivalente por filas** a $B_{m\times n}$ si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de OEF.

  Notación: $A \sim_F B$.
- $A_{m\times n}$ es **equivalente por columnas** a $B_{m\times n}$ si partiendo de A podemos obtener B efectuando un número finito de OEC.

  Notación: $A \sim_C B$.

Ejemplo: Las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

no son equivalentes por filas ni por columnas.

Tabla de contenidos

Forma escalonada de una matriz (REF):

Una matriz $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ está en su forma escalonada si tiene las siguientes características:

1. Si hay filas nulas (llenas de ceros), son las últimas.
2. El primer elemento no nulo de una fila debe estar a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior. El primer elemento no nulo de cada fila no nula es llamado **PIVOT**.

Ejemplo: Las siguientes matrices están en su forma escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Forma escalonada reducida de una matriz (RREF)

Una matriz $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ está en su forma escalonada reducida si tiene las siguientes características:

1. Si hay filas nulas (llenas de ceros), son las últimas.
2. El primer elemento no nulo de una fila debe estar a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior.
3. Los elementos por arriba del pivote de cada fila, deben ser todos nulos.
4. El primer elemento no nulo de cada fila no nula debe ser igual a 1.
   El primer elemento no nulo es llamado **PIVOT**.

Ejemplo: Las siguientes matrices están en su forma escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2

Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una única matriz escalonada reducida $R = (r_{ij})_{m\times n}$.

Ejemplo: Determine la REF y la RREF de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Realizamos las operaciones elementales:

$$F_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{pmatrix} \Longrightarrow F_{31}(2)F_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow F_{32}(-1)F_{31}(2)F_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{REF equivalente por filas a } A.$$

Ahora procedemos a determinar la RREF equivalente a A:

$$F_{32}(-1)F_{31}(2)F_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow F_{12}(-3)F_{32}(-1)F_{31}(2)F_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -18 & -16 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tabla de contenidos

Rango de una matriz

El Teorema 2 motiva la siguiente definición:

Definición 3 (Rango de una matriz)

El rango de una matriz A es el número de filas (columnas) no nulas de cualquier matriz escalonada por filas (columnas) equivalente a A. Este valor se denota por $rg(A)$.

Ejemplo: Calcule $rg(A)$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos la forma escalonada:

$$B = F_{41}(-1)F_{31}(-2)F_{21}(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

continuamos:

$$C = F_{42}(2/3)F_{32}(1/3)B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(REF)}.$$

Resumiendo:

$$C = F_{42}(2/3)F_{32}(1/3)F_{41}(-1)F_{31}(-2)F_{21}(1)A,$$

esto es, el $rg(A) = 2$ (número de filas no nulas de su forma escalonada equivalente por filas C).

Ejemplo: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a-1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & a \end{pmatrix},$$

determine el rango de A según los valores de " a ".

Solución: Procedemos a escalonar:

$$B = F_{41}(-3)F_{21}(-a)F_{12}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 3-a & 1-a \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

$$C = F_{42}(2)F_{32}(a-1)F_{23}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Resumiendo: $C = F_{42}(2)F_{32}(a-1)F_{23}F_{41}(-3)F_{21}(-a)F_{12}A$.

Así, el $rg(A)$ es el número de filas no nulas la matriz REF equivalente C.

Analizamos según el valor de " a ".

- Si $a = 3$ entonces $rg(A) = 3$ porque

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow F_{34}C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(REF)}.$$

- Si $a = 1$ entonces $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y así $rg(A) = 3$.

- Para todo $a \in \mathbb{R} \backslash \{1, 3\}$ se tiene que $rg(A) = 4$.

Propiedad 2

1. $rg(I_n) = n$.
2. $rg(A) = rg(A^T)$.
3. $rg(AB) \leq rg(A)$ y $rg(AB) \leq rg(B)$.

INVERSA DE UNA MATRIZ

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

26/04/2022

Tabla de contenidos

Definición 1 (Inversa de una Matriz)

Sea A una matriz de orden $n \times n$. Se dice que A es **invertible** si existe una matriz B de orden $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

donde I_n es la matriz Identidad de orden $n \times n$ y B es llamada la **inversa** de A.

Ejemplo 1: Determine la inversa de las siguientes matrices, si existen.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Se puede probar facilmente,

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces su inversa es $B = (\frac{1}{ad-bc}) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ donde $ad - bc \neq 0$. Así tendremos

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \; X^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y Z no posee inversa.

Teorema 1

Sea A es una matriz $n \times n$. Si B es una inversa de A y C es otra inversa de A entonces $B = C$.

Demostración:

Como B es inversa de A, entonces $BA = I$, de esto $BAC = IC$, pero C es inversa de A, así $BI = C$, luego $B = C$.

Es decir, si la inversa de una matriz existe, esta es única.

Notación: Por el teorema anterior como a lo sumo hay una matriz inversa, se denotará $B = A^{-1}$ si B es la inversa de A.
Es decir, A^{-1} es la única matriz tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Teorema 2

Si $A_nB_n = I_n$ entonces $B_nA_n = I_n$

Observación: Del teorema anterior tenemos que A y B son invertibles, es decir cada una de ellas es la inversa de la otra.

Teorema 3

Sean $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ dos matrices donde $A_{n\times n}$ es invertible. Entonces

$$rg(AB) = rg(B)\ .$$

Demostración: Se deja como ejercicio la demostración.

Teorema 4 (Criterio de la invertibilidad de una matriz cuadrada en términos de su rango)

Sea A una matriz de orden $n \times n$. Entonces

$$A \text{ es invertible si y sólo si } rg(A) = n \,.$$

Ejemplo 2: Dadas las matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; Z = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 20 \end{pmatrix} .$$

Haciendo uso del teorema 6, diga si las siguientes matrices son invertibles.

Teorema 5

Si $A_{n\times n}$ es una matriz invertible entonces es equivalente por filas a la matriz I_n, es decir, existe $F = F_p \cdots F_2 F_1$ donde F_i es una operación elemental fila para todo $i = 1, \ldots, p$; $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$FA = (F_p \cdots F_2 F_1)A = I_n \ .$$

Corolario 1

Si $A_{n\times n}$ es una matriz invertible entonces existe una matriz $P = E_p \cdots E_2 E_1$ donde E_i es una matriz elemental fila para todo $i = 1, \ldots, p$; $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$PA = E_p \cdots E_2 E_1 A = I_n \ .$$

Ejemplo 3: Demostrar:
Si $A_{n\times n}$ es invertible entonces A se descompone como el producto de matrices elementales fila.

Solución: Por el Corolario 1, tenemos $(E_p \cdots E_2 E_1)A = I_n$, entonces $A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_p^{-1}$.

Ejemplo 4: Pruebe que:
Dos matrices $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ son equivalentes por fila si y sólo si existe una matriz invertible $P_{n\times n}$ tal que $B = PA$.

Solución: Como

$$A \backsim_f B \Longleftrightarrow B = F_p \cdots F_2 F_1 A \Longleftrightarrow B = (E_p \cdots E_2 E_1)A \Longleftrightarrow B = PA$$

Dada la matriz invertible $A_{n\times n}$, satisface

- Rango máximo (Teorema 4), es decir, $rg(A) = n$.
- Equivalente por filas a la matriz identidad (Teorema 5), es decir,

$$\begin{aligned} A_f &= FA \\ &= (F_p \cdots F_2 F_1)A \\ &= E_p \cdots E_2 E_1 A \\ &= BA \\ &= I_n \end{aligned}$$

donde cada E_i es una matriz elemental fila.

Estos dos puntos nos proporcionan el siguiente algoritmo para calcular la inversa de una matriz $A_{n\times n}$.

Algoritmo para el cálculo de la matriz inversa

1. Construir el bloque matricial $(A_n|I_n)$.
2. Aplicar operaciones elementales fila sobre la matriz $(A_n|I_n)$ hasta que ésta sea equivalente por filas a la matriz $(A_f|B)$, es decir,
$$(A_n|I_n) \sim (A_f|B).$$
3. Si $A_f = I_n$, entonces A es invertible y $A^{-1} = B$.
4. Si $A_f \neq I_n$, entonces A no es invertible.

Ejemplo 5: Dadas las matrices invertibles del Ejemplo 2. Halle la inversa de cada una de estas matrices, haciendo uso del algoritmo presentado en la diapositiva previa.

Solución:

$$(Y|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{21}(-3),F_{31}(-2)]{F_{13}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(1/2)]{F_{32}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_{23}(3/2),F_{13}(-1)]{F_3(1/5)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/10 & -1/10 & -3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 4/5 \end{array}\right) = (I|B)$$

entonces $Y^{-1} = B$.

El siguiente teorema registra algunas de las propiedades más importantes de las matrices invertibles.

Teorema 6

a) Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} es invertible y $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) Si A es una matriz invertible y c es un número real no nulo, entonces cA es una matriz invertible y $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$.

c) Si A y B son matrices invertibles del mismo orden, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

d) Si A es una matriz invertible, entonces A^T es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

e) Si A es una matriz invertible, entonces A^n es invertible para todo $n \in \mathbb{N}$ y $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Ejemplo 6: Resuelva la siguiente ecuación matricial para encontrar X (suponga que las matrices involucradas son tales que todas las operaciones indicadas están definidas): $A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^3)^2$.

Solución:

$$(BX)^{-1} = B^3(A^{-1}B^3) \implies I = B^3(A^{-1}B^3)BX \implies X = (B^3A^{-1}B^4)^{-1}$$

Ejemplo 7: Proporcione un contraejemplo para demostrar que en general

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1} \, .$$

Solución: Si $A_2 = B_2 = I_2$ entonces $(A+B)^{-1} = (1/2)I \neq 2I$

Ejemplo 8: Let $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$. Show that if B is invertible, then

$$traza(B^{-1}AB) = traza(A).$$

Ejemplo 9: Let the square matrices A, B and $A+B$ are invertible. Show that $A^{-1}+B^{-1}$ is invertible, and

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A.$$

Definición 2 (Matriz ortogonal)

Una matriz $Q_{n\times n}$ se llama **ortogonal** si Q es invertible y

$$Q^{-1} = Q^T \iff QQ^T = Q^TQ = I$$

Ejemplo 10: Let A be a skew-symmetric matrix and $I - A$ is invertible. Show that the matrix $B = (I + A)(I - A)^{-1}$ is orthogonal.

Solución: Del dato $A = -A^T$ y es facil probar que

$$(I + A)^{-1}(I - A) = (I - A)(I + A)^{-1}$$

Por lo tanto

$$B = (I + A)(I - A)^{-1} \quad \text{y} \quad B^T = (I + A)^{-1}(I - A) = (I - A)(I + A)^{-1}$$

de lo anterior $BB^T = I$, entonces B es ortogonal.

Ejemplo 11: Let A, B be real square matrices, and let the matrix P be orthogonal and $B = P^{-1}AP$. Show that $tr(A^tA) = tr(B^tB)$.

Solución: Si P es ortogonal, entonces P^{-1} es ortogonal y

$$\begin{aligned} tr(B^TB) &= tr(BB^T) = tr[(P^{-1}AP)(P^TA^TP^{-T})] \\ &= tr[A^TP^{-T}P^{-1}A] \\ &= tr(A^TA) \end{aligned}$$

Tabla de contenidos

Conceptos básicos de Criptografía.

- Criptografía: Se ocupa del diseño de algoritmos para la seguridad de mensajes.
- En criptografía clásica, El cifrado de Hill fue inventado, basándose en el álgebra lineal, por el matemático norteamericano Lester S. Hill en 1929, y aparece explicado en su artículo *Cryptography in an Algebraic Alphabet*, publicado en The American Mathematical Monthly.

- Expliquemos en qué consiste el cifrado de Hill. En primer lugar, se asocia cada letra del alfabeto con un número. La forma más sencilla de hacerlo es con la asociación natural ordenada, aunque podrían realizarse otras asociaciones diferentes. Además, en este ejemplo solamente vamos a utilizar las 27 letras del alfabeto, pero también podrían añadirse otros símbolos usuales, como el espacio en blanco "_", el punto "." o la coma ",", la interrogación "?", las 10 cifras básicas, etcétera.

A=1	B=2	C=9	D=4	E=5	F=6	G=7	H=8
I=9	J=10	K=11	L=12	M=13	N=14	Ñ=15	O=16
P=17	Q=18	R=19	S=20	T=21	U22	V=23	W=24
X=25	Y=26	Z=27					

¿Cómo funciona?

1. Supongamos que tenemos una matriz invertible $A_{n\times n}$ (la matriz de codificación) y un texto que queremos **cifrar** M.

2. **Transformamos** el texto (M) a una secuencia de números, dando a cada carácter un valor numérico único; a continuación, formamos una matriz mediante la agrupación de los números en columnas de acuerdo al orden de la matriz $A_{n\times n}$. Llamemos a esta matriz $T_{n\times k}$ (la matriz plana), es decir

El mensaje M se transfoma a la matriz numérica $T_{n\times k}$

3. Multiplicando la matriz A por la matriz T, se obtiene la **matriz cifrada** $C_{n\times k}$, es decir

$$C = AT.$$

4. Para **descifrar el mensaje**, sólo debe multiplicarse $A^{-1}C = T$.

5. El texto plano original se puede hallar nuevamente tomando la matriz resultante y uniendo sus vectores columna, de manera que formen una secuencia, para luego convertir los números en los caracteres respectivos.

Ejemplo: Dada la matriz de codificación

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & -1 \\ 2 & 3 & 4. \end{pmatrix},$$

se tiene el texto $M =$"COVIDDIECINUEVE" a cifrar. Luego,

- Transforme el mensaje M a la matriz numérica T.
- Halle la matriz cifrada C.

Solución: Del mensaje M tenemos:

C	O	V	I	D	D	I	E	C	I	N	U	E	V	E
3	16	23	9	4	4	9	5	3	9	14	22	5	23	5

La matriz T sera:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 & 9 & 5 \\ 16 & 4 & 5 & 14 & 23 \\ 23 & 4 & 3 & 22 & 5 \end{pmatrix}$$

entonces la matriz cifrada C es:

$$C = AT = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 & 9 & 5 \\ 16 & 4 & 5 & 14 & 23 \\ 23 & 4 & 3 & 22 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 156 & 55 & 52 & 165 & 86 \\ 121 & 32 & 42 & 104 & 207 \\ 146 & 46 & 45 & 22 & 99 \end{pmatrix}$$

EL DETERMINATE

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

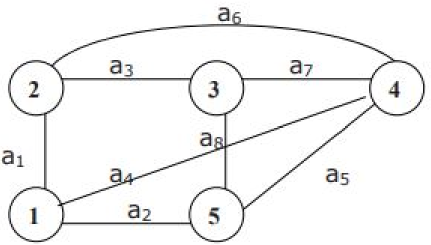
28/04/2022

Tabla de contenidos

Definición 1 (Definición de Grafo)

Un grafo (no dirigido) G es un par (V, A), en el que V es un conjunto finito de puntos llamados vértices o nodos, y A es una familia finita de pares no ordenados de vértices, que llamaremos aristas o arcos, cada una de las cuales conecta dos vértices (no necesariamente distintos).

Ejemplo: Sea el grafo G



donde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es el conjunto de vertices de G y el conjunto $A = \{(1;2), (2;1), (1;4), (4;1), (1;5), (5;1), (2;3), (3;2), (2;4), (4;2), (3;4), (4;3), (3;5), (5;3), (4;5), (5;4)\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ de sus aristas o arcos.

Definición 2 (Matriz de Adyacencia)

Si G es un grafo con n vértices, entonces su matriz de adyacencia es la matriz booleana M_a [o $A(G)$] de orden nxn definida por

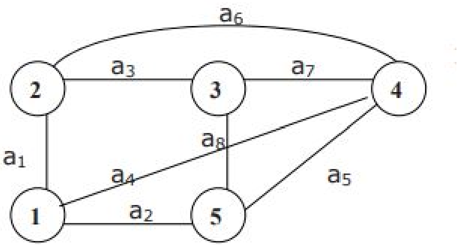
$$M_a = [m_{ij}], \quad \text{donde} \quad m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{si } (v_i, v_j) \in A \\ 0, \text{si } (v_i, v_j) \notin A \end{cases}$$

o $$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe una arista entre los vértices } i \text{ y } j. \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Nota:

El término vértice viene del verbo latino *vertere*, que significa "volver". En el contexto de los grafos (y la geometría), un vértice es una esquina, un punto donde una arista "se vuelve", una arista diferente.

Ejemplo: Del grafo G anterior,



tenemos que su matriz de adyacencia asociada es:

$$M_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

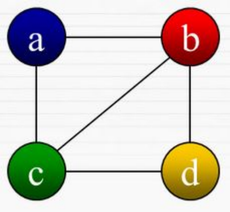
Observación:

- La matriz de adyacencia de un grafo necesariamente es una matriz simétrica.
- Note también que una entrada diagonal m_{ii} de M_a es cero a menos que haya un bucle en el vértice i.

Proposición 1

El total de caminos diferentes de longitud r en un grafo G que unen los vértices v_i y v_j de dicho grafo es el elemento a_{ij} de la Matriz Potencia $(M_a)^r$

Ejemplo: En el siguiente grafo, encuentre la cantidad de caminos de longitud 2 que unen los vértices a y d.



Veamos la matriz de adyacencia.

$$M_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

como piden caminos de longitud 2, determinamos

$$(M_a)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

finalmente, la cantidad de caminos que unen los vértices a y d es

$$M_a(1,4) = 2$$

Tabla de contenidos

Definición 3

Una permutación de n elementos es una aplicación biyectiva

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

donde a la secuencia $1, 2, \dots, n$ le hace corresponder un reordenamiento de estos. Así $\sigma(1, 2, \dots, n) = j_1 j_2 \dots j_n$ también se representa por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

donde $\sigma(i) = j_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$

Ejemplo: La permutación $\sigma(1, 2, 3, 4) = 3412$ donde

$$\sigma(1) = 3, \ \sigma(2) = 4, \ \sigma(3) = 1, \ \sigma(4) = 2.$$

Es decir, si $S = \{1, 2, 3, 4\}$ el conjunto de los enteros de 1 a 4. A un reordenamiento de los elementos de S se le llama una permutación de S. Así 3412 y 2134 son permutaciones del conjunto S.

Observación:

El conjunto de todas las permutaciones de n elementos se denota por S_n y su cardinal es $n!$. Si $\sigma \in S_n$ la aplicación inversa $\sigma^{-1} \in S_n$.

Ejemplo: Sea $S = \{1, 2, 3\}$ entonces

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

con cardinal $3! = 6$

Definición 4

Se dice que los elementos h y k de la permutación $\sigma \in S_n$ forman una Inversión cuando $h < k$ y $\sigma(h) > \sigma(k)$, es decir, cuando, tras la permutación, se pierde el orden creciente en relación a estos dos elementos. Dada una permutación $\sigma \in S_n$ se dice que σ es una permutación par o impar según genere un número par o impar de inversiones; definiendose el signo ó paridad de σ, denotado por (σ), como

$$sig(\sigma) = sig(j_1 j_2 \dots j_n) = \begin{cases} + & \text{si } \sigma \text{ es par} \\ - & \text{si } \sigma \text{ es impar} \end{cases}$$

(Al cero se le considera un número par)

Ejemplo: Muestre que a) $\sigma(1,2,3,4,5) = 32145$ es una permutación impar y b) $\sigma(1,2,3,4,5) = 21435$ es una permutación par.

Veamos

a) 32145 se puede reordenar como sigue

$$32145 \to 23145 \to 21345 \to 12345$$

Hay tres intercambios; un número impar. Por lo que 32145 es una permutación impar y el *sig*(32145) $= -$.

b) 21435 se puede reordenar como sigue

$$21435 \to 12435 \to 12345$$

Hay dos intercambios; un número par. Por lo que 21435 es una permutación par y el *sig*(21435) $= +$.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada de orden n definida sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Consideremos un producto de n elementos de A de modo que uno y solo uno de los elementos proviene de cada fila y uno y solo uno proviene de cada columna. Tal producto puede escribirse

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

donde los factores proceden de filas sucesivas de modo que los primeros subíndices (correspondientes a filas) mantienen el orden natural $1, 2, \ldots, n$ y como los factores proviene de columnas distintas, entonces los segundos subíndices constituyen una permutación $\sigma = j_1 j_2 \ldots j_n$ de S_n. Reciprocamente, cada permutación de S_n determina un producto de la forma anterior. De este modo, la matriz A origina $n!$ productos semejantes.

Definición 5 (Determinante)

Se define la función determinante $|.| : M_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ que hace corresponder a cada matriz $A \in M_{nn}(\mathbb{K})$ un único valor en $\mathbb{K}$ obtenido de sumar los $n!$ productos precedentes. Es decir

$$\begin{aligned} |A| &= \Sigma sig(\sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \\ &= \Sigma sig(j_1 j_2 \ldots j_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} \end{aligned}$$

Σ significa que los términos deben ser sumados sobre todas las permutaciones $j_1 j_2 \cdots j_n$ del conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$. Para cada término se escoge el signo $+$ o $-$ según la permutación sea par o impar.

Observación:

El determinante de una matriz A también se denota también por

$$det(A).$$

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{22}$, se tiene que

$$S = \{1, 2\} \text{ donde } S_2 = \{12, 21\}.$$

Así $\sigma(1, 2) = 12$ es una permutación par y $sig(12) = +$, también $\sigma(1, 2) = 21$ es una permutación impar y $sig(21) = -$, por lo tanto

$$|A| = sig(12)a_{11}a_{22} + sig(21)a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{33}$, se tiene que

$S = \{1, 2, 3\}$ donde

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

Así

$$|A| = sig(123)a_{11}a_{22}a_{33} + sig(132)a_{11}a_{23}a_{32} + sig(213)a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+sig(231)a_{12}a_{23}a_{31} + sig(312)a_{13}a_{21}a_{32} + sig(321)a_{13}a_{22}a_{31}$$

Entonces

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

A continuación se presentan las propiedades básicas de los determinantes.

Teorema 1

$$det(A) = det(A^T) \ , \ \forall A \in M_{nn}(\mathbb{R})$$

Teorema 2

Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$

a) Si A posee una fila (columna) de ceros, entonces $det(A) = 0$

b) Si A posee dos filas (columnas) iguales, entonces $det(A) = 0$

Teorema 3

Si $A = [a_{ij}]_n$ es una matriz triangular inferior (superior), entonces el determinante de A es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo: Como la matriz identidad I_n es triangular inferior (superior), entonces por el Teorema 3, tenemos $det(I_n) = 1$.

Teorema 4

Suponer que la matriz B_n se ha obtenido de la matriz A_n mediante una operación elemental entre filas (columnas).

a) Si se intercambio dos filas (columnas) de A, entonces $det(B) = -det(A)$.

b) Si se multiplico una fila (columna) de A por un escalar λ, entonces $det(B) = \lambda det(A)$.

c) Si se adiciono un múltiplo de una fila (columna) a otra, entonces $det(B) = det(A)$.

Recuerde que una matriz elemental resulta de realizar una operación elemental fila sobre la matriz identidad. Al hacer $A = I_n$ en el Teorema 4 se produce el siguiente teorema.

Teorema 5

Sea E una matriz elemental de $n \times n$.

a) Si E resulta de intercambiar dos filas de I_n, entonces $det(E) = -1$.
b) Si E resulta de multiplicar una fila de I_n por $\lambda \neq 0$, entonces $det(E) = \lambda$.
c) Si E resulta de sumar un múltiplo de una fila de I_n a otra fila, entonces $det(E) = 1$.

Demostración:

Dado que $det(I_n) = 1$, al aplicar $a), b)$ y $c)$ del Teorema 4, tenemos respectivamente $I_n \xrightarrow{f_i \times f_j} E_{ij}$, $I_n \xrightarrow{\lambda f_i} E_i(\lambda)$ y $I_n \xrightarrow{f_i + \lambda f_j} E_{ij}(\lambda)$, inmediatamente produce $a), b)$ y $c)$, del Teorema 5.

A continuación, recuerde que al multiplicar *por la izquierda* una matriz B por una matriz elemental realiza la correspondiente operación elemental con fila sobre B. Por tanto, es posible parafrasear el Teorema 4 como el lema siguiente, cuya prueba es directa y se deja como ejercicio.

Lema 1

Sea B una matriz de $n \times n$ y sea E una matriz elemental de $n \times n$. Entonces

$$det(EB) = det(E)det(B)$$

Teorema 6

Si A es una matriz invertible, entonces $det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$

Teorema 7

$$det(A.B) = det(A).det(B), \ \forall A, B \in M_{nn}(\mathbb{R})$$

Observación: En general $det(A + B)$ no es igual a $det(A) + det(B)$.

Teorema 8

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & (x_1 + u_1) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & (x_n + u_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & u_1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & u_n \end{vmatrix}$$

Ejercicio:

Si al intercambiar dos filas de una matriz cuadrada su determinante solo cambia de signo. Pruebe que una matriz cuadrada que tiene dos filas iguales su determinante es cero.

Solución:

Sea A una matriz que tiene dos filas iguales, si intercambiamos estas dos filas obtenemos la matriz B, entonces $|B| = -|A|$, pero $B = A$, por tanto $|A| = -|A|$, así $|A| = 0$.

Ejercicio:

Use sólo las propiedades del determinante para probar que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+acd \\ 1 & c & c^2 & c^3+abd \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

Descomponiendo el determinante en la suma de dos determinantes:

$$\Delta = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}}_{\Delta_0} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & acd \\ 1 & c & c^2 & abd \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix}}_{\Delta_1}$$

Entonces extraemos el factor *abcd* de C_4 en Δ_1 y queda

$$\Delta_1 = abcd \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \frac{1}{a} \\ 1 & b & b^2 & \frac{1}{b} \\ 1 & c & c^2 & \frac{1}{c} \\ 1 & d & d^2 & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

ahora introducimos: a a la F_1; b a la F_2; c a la F_3; d a la F_4 y se tiene:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & 1 \\ b & b^2 & b^3 & 1 \\ c & c^2 & c^3 & 1 \\ d & d^2 & d^3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = -\Delta_0$$

así

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 = \Delta_0 - \Delta_0 = 0.$$

EL DETERMINATE - LA ADJUNTA

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

03/05/2022

Tabla de contenidos

Definición 1 (Menor)

Sean $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times n$ y M_{ij} la submatriz de A de orden $n-1 \times n-1$, que se obtiene de eliminar la fila i y la columna j de A. El determinante $|M_{ij}|$ se llama menor del elemento a_{ij}.

Así tendremos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}}_{A} \text{ y } |M_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Definición 2 (Cofactor)

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de orden $n \times n$, el cofactor de a_{ij} se denota por A_{ij} y está dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Observación:

El menor y el cofactor difieren en el signo o son iguales, es decir:

$$A_{ij} = \pm|M_{ij}|$$

Ejemplo: Dada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

aplicando las definiciones anteriores, se obtiene lo siguiente.

Menor de a_{11} : $\quad |M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (3 \times 2) - (4 \times (-1)) = 10$

Menor de a_{32} : $\quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1 \times (-1)) - (1 \times (-2)) = 1$

Cofactor de a_{11} : $\quad A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (-1)^2(10) = 10$

Cofactor de a_{32} : $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1)^5(1) = -1$

Tabla de contenidos

Definición 3 (Expansión por cofactores)

El determinante de una matriz A de orden n es la suma de los productos de los elementos de la primera fila por sus cofactores.

$$\text{Si } A \text{ es de } 3 \times 3, \quad |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\text{Si } A \text{ es de } 4 \times 4, \quad |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$\vdots$$

$$\text{Si } A \text{ es de } n \times n, \quad |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Ejemplo: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

empleando la primera fila para calcular $|A|$. Tendremos

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= (3)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(4) + (0) + (-2)(4) = 4$$

Teorema 1 (Expansión de Laplace)

El determinante de cualquier matriz cuadrada A es la suma de los productos de los elementos, de cualquier fila o columna, por sus cofactores.

Expansión a lo largo de la fila i:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Expansión a lo largo de la columna j:

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

Ejemplo: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

y por el teorema anterior, empleando la tercera fila para calcular $|A|$, tendremos

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$= (0)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (4)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (0)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (0) + (4)(1) + (0) = 4$$

Observación:

1. Pensando que el signo $(-1)^{i+j}$ está localizado en la posición (i,j) de la matriz A, entonces los signos siguen la siguiente regla.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

   Si, por ejemplo, se expande en terminos de la segunda fila, los signos del cofactor serán $- + -$ etc. Los signos van alternados conforme se avanza a lo largo de la fila o columna.

2. Elegir la fila o columna que contenga la mayor cantidad de ceros.

Ejercicio: Demostrar que:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n} = 2^n - 1$$

Sugerencia: Emplee inducción matemática.

Solución: Empleando inducción matemática:

- Para $n = 1$:

$$\begin{aligned} D_1 &= |1| \\ &= 1 \\ &= 2^1 - 1 \end{aligned}$$

- Para $n = 2$:

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \\ &= 2^2 - 1 \end{aligned}$$

- Para $n = k$: Se cumple (hipotesis de inducción matemática)

$$D_k = 2^k - 1$$

- Para $n = k + 1$: Demostremos que también es válida

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} = 2^{k+1} - 1$$

Al desarrollar el determinante anterior, empleando la primera columna tendremos:

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{k\times k} + (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{k\times k}$$

$$= (2^k) + (2^k - 1)$$

$$= 2^{k+1} - 1$$

Es decir, la fórmula es cierta para $k+1$, por lo tanto es valida para todo n natural.

Propiedad

Propiedad 1

Sea A una matriz de orden $n \times n$, entonces

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A| & \text{si} \quad i = j \\ \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Demostración:

Sea A una matriz de orden $n \times n$ y la matriz B donde la fila j de A ha sido sustituido por la fila i de A, una matriz que tiene dos filas idénticas.

Así,

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ldots & \vdots \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ldots & \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{i}-\mathit{fila} \\ \\ \text{j}-\mathit{fila} \\ \\ \end{array}$$

por Laplace empleando la j ésima fila, tenemos

$$0 = |B| = b_{j1}B_{j1} + \cdots + b_{jn}B_{jn} = a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

Por lo que

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A| & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Tabla de contenidos

Definición 4 (Matriz de cofactores)

Sea A una matriz de orden $n \times n$ y A_{ij} el cofactor de a_{ij}. A la matriz cuyo elemento (i, j) es el cofactor A_{ij} se le llama la matriz de cofactores de A y se denota por $\text{cof}(A)$.

Así tendremos la matriz

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

de orden $n \times n$.

Definición 5 (Matriz adjunta)

A la transpuesta de $\operatorname{cof}(A)$ de orden $n \times n$, se le llama la adjunta de A y se denota por $\operatorname{adj}(A)$.

Así tendremos la matriz

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

de orden $n \times n$.

Ejemplo: Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Los cofactores de A son los siguientes: $A_{11} = 4, A_{12} = 0, A_{13} = 4,$

$$A_{21} = -8, A_{22} = 0, A_{23} = -12, A_{31} = 4, A_{32} = 1, A_{33} = 6$$

Así tendremos las matrices

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & -12 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Hallar $A\,\text{adj}(A)$ donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Solución:

De la matriz A tendremos sus cofactores:

$$A_{11} = d,\ A_{12} = -c,\ A_{21} = -b,\ A_{22} = a$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Así

$$A\,\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{bmatrix}$$

Teorema 2

Sea A una matriz de orden $n \times n$, entonces

$$A\,\mathrm{adj}(A) = |A|\,I_n$$

Observación:

También se cumple:

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)\,A$$

Demostración:

El elemento (i, j) del producto $A\,\mathrm{adj}(A)$ es

$$
\begin{aligned}
\text{Elemento } (i, j) &= (\text{fila } i \text{ de } A) \times (\text{columna } j \text{ de } \mathrm{adj}(A)) \\
&= \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{bmatrix} \\
&= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}
\end{aligned}
$$

Por la propiedad 1, tenemos

$$\text{Elemento } (i,j) = \begin{cases} |A| & \text{si } i = j \\ \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

De manera que el producto $A\,\mathrm{adj}(A)$ es una matriz diagonal en la que

todos los elementos diagonales son $|A|$. Así

$$A\,\mathrm{adj}(A) = |A|I. \quad \text{l.q.q.d.}$$

Definición 6

La matriz A de orden $n \times n$ es singular si y sólo si $det(A) = 0$.

Propiedad 2

Sean A y B matrices no singulares de orden $n \times n$, entonces

1. $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\,\text{adj}(A)$
2. $|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1},\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$
3. $\text{adj}\,(\text{adj}(A)) = |A|^{n-2}A,\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$

Demostración:

1. Del Teorema 2:

$$(AB)\ \text{adj}(AB) = |AB|\ I_n$$

$$\text{adj}(A)\ (AB)\ \text{adj}(AB) = |AB|\ \text{adj}(A)$$

$$(\text{adj}(A)A)\ B\ \text{adj}(AB) = |AB|\ \text{adj}(A)$$

$$|A|\ B\ \text{adj}(AB) = |AB|\ \text{adj}(A)$$

$$|A|(\text{adj}(B)B)\ \text{adj}(AB) = |AB|\ \text{adj}(B)\ \text{adj}(A)$$

$$|A||B| \operatorname{adj}(AB) = |A||B| \operatorname{adj}(B) \operatorname{adj}(A)$$

Como A y B son no singulares, entonces $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$, luego:

$$\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B) \operatorname{adj}(A).$$

Tabla de contenidos

Teorema 3

Sea A una matriz de orden $n \times n$, tal que $|A| \neq 0$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)$$

Demostración:

Sabemos

$$A\,\mathrm{adj}(A) = |A| I_n$$

Como $|A| \neq 0$, puede reescribir esta ecuación

$$A\left(\frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)\right) = I_n$$

De manera similar, se puede probar que

$$\left(\frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)\right) A = I_n$$

Por lo que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)$$

Ejemplo: Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

sabemos que $|A| = 4$ y

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -12 & 6 \end{bmatrix}$$

entonces por el teorema anterior

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \left(\frac{1}{4}\right)\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & -3 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Teorema 4

Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Se deja como ejercicio.

$(\Leftarrow)$ El Teorema 2 nos dice que si $|A| \neq 0$, entonces A es invertible.

Propiedad 3

Si $|A| \neq 0$, entonces $\operatorname{adj}(A^{-1}) = (\operatorname{adj}(A))^{-1}$

Demostración:

Se deja como ejercicio.

Ejercicio: Let A be an 3×3 matrix with $|A| > 0$ such that

$$adj(k.A) = \frac{1}{64} adj(A) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 5 & 8 & x \\ -20 & 16 & 12 \\ -2x & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

and

$$|k.adj(A)| = -\frac{9}{2}.$$

Determinate A^{-1}.

Solución:

De

$$-\frac{9}{2} = |k.adj(A)| = k^3|A|^2 \quad \text{tenemos} \quad -\frac{9}{2} = k^3|A|^2 \quad \text{con} \quad k < 0$$

también de

$$|adj(k.A)| = \left|\frac{1}{64}adj(A)\right|$$

tenemos

$$|kA|^2 = \frac{1}{(64)^3}|A|^2$$

entonces

$$k = -\frac{1}{8}$$

de lo anterior

$$|A| = 48$$

Pero de

$$\left| -\frac{1}{8}.adj(A) \right| = -\frac{9}{2}$$

tenemos

$$|adj(A)| = 2304 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & x \\ -20 & 16 & 12 \\ -2x & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{entonces} \quad x = 9.$$

Finalmente

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A) = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -20 & 16 & 12 \\ -18 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Tabla de contenidos

Teorema 5 (Determinante de matriz triangular superior por bloques)

Sean A una matriz de $m \times m$, B una matriz de $m \times n$ y C una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right] = \det(A)\det(C)$$

Ejemplo:

Calcular el determinante de

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

Sea la partición

$$D = \left[\begin{array}{cc|ccc} 3 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

y empleando el teorema anterior.

$$\det(D) = \det\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \det\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (13)(3) = 39.$$

Si consideramos lo siguiente

$$D = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

y empleando el teorema anterior.

$$\det(D) = \det \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (39)(1) = 39.$$

Corolario 1 (Determinante de matriz triangular inferior por bloques)

Sean A una matriz de $m \times m$, B una matriz de $n \times m$ y C una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array} \right] = \det(A)\det(C)$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

04/05/2022

Tabla de contenidos

Ecuación lineal (EL)

Una **ecuación lineal** en n variables es una expresión de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes reales.

Sistema de ecuaciones lineales (SEL)

Un **sistema de ecuaciones lineales** de m ecuaciones y n variables o simplemente **sistema lineal** tiene la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

donde los a_{ij} y b_i son constantes reales para todo $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$.

Un SEL puede ser escrito en forma matricial

$$A_{m\times n} \cdot X_{n\times 1} = b_{m\times 1}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

es decir; $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

La **matriz aumentada** asociada al SEL es denotada por A_a y definida por:

$$A_a = (A \,|\, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Una solución de un SEL es un vector $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que las ecuaciones del sistema son satisfechas cuando reemplazamos:

$$x_1 = s_1 \ , \ x_2 = s_2 \ , \ldots , \ x_n = s_n$$

o equivalentemente:

$$As = b.$$

El conjunto de todas las soluciones del SEL es llamado **Conjunto solución** ó **Solución general** del SEL.

Ejemplo: Considere el SEL:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & t & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & + & 2t & = & -1 \\ -4x & + & 5y & - & 11z & - & 4t & = & 11 \end{array}$$

luego tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & -11 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

y además la matriz aumentada es:

$$A_a = (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -11 & -4 & 11 \end{array}\right)$$

Considere el vector $s = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, observe que si reemplazamos $x = 4$, $y = 8, z = 3$ y $t = -5$ entonces:

$$\begin{array}{rcr} (4) + (8) - (3) + (-5) & = & 4 \\ 2(4) - (8) + 3(3) + 2(-5) & = & -1 \\ -4(4) + 5(8) - 11(3) - 4(-5) & = & 11 \end{array}$$

o equivalentemente $As = b$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & -11 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

es decir, el vector s es solución del SEL dado.

Es más, dados $z_0, t_0 \in \mathbb{R}$ valores cualesquiera, entonces el vector

$$s(z_0, t_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{3 - 2z_0 - 3t_0}{3} \\ \dfrac{9 + 5z_0}{3} \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow As(z_0, t_0) = b,$$

es decir, existen infinitas soluciones del SEL. Así, el conjunto solución del SEL es:

$$C.S. = \{s(z_0, t_0) \,/\, z_0, t_0 \in \mathbb{R}\}.$$

Tabla de contenidos

Dado el SEL siguiente:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

Las operaciones elementales entre ecuaciones de (1) se definen como las operaciones elementales sobre la fila de la matriz aumentada A_a.

Teorema 1

Si dos SEL: $Ax = b$ y $Mx = d$, son tales que la matriz aumentada $M_a = (M \,|\, d)$ se obtiene a partir de $A_a = (A \,|\, b)$ al aplicarle una operación elemental fila, entonces los dos sistemas tienen las mismas soluciones.

Demostración: Sea F la OEF tal que $(M \,|\, d) = F(A \,|\, b)$, entonces $M = FA$ y $d = Fb$. Sea s solución de $Ax = b$, entonces:

$$Ms = (FA)s = F(As) = Fb = d$$

entonces s es solución de $Mx = d$. De forma similar se prueba el recíproco.

Definición 1

Dos SEL que poseen el mismo conjunto solución son llamados **sistemas equivalentes**.

Del Teorema 1 podemos concluir que si aplicamos operaciones elementales a un SEL, se obtienen sistemas equivalentes. En particular, si $(A \mid b)$ es la matriz ampliada de un SEL y $(M \mid d)$ su REF (ó RREF), entonces esos sistemas son equivalentes.

Ejemplo: Considere el siguiente SEL:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \end{array} \iff AX = b \qquad (1)$$

Donde su matriz aumentada es

$$A_a = (A \,|\, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array} \right)$$

Hallamos la REF de $(A \,|\, b)$:

$$F_{32}(-10)F_{31}(-3)F_{21}(1)(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right) = (M|d)$$

De esta matriz aumentada, tendremos el siguiente SEL:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\ & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 9 \\ & & & - & 52x_3 & = & -104 \end{array} \iff MX = d \qquad (2)$$

por el Teorema 1, los sistemas (1) y (2) son equivalentes.

Tabla de contenidos

Definición 2

Un SEL es llamado **homogéneo** cuando $b = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$, es decir:

$$A \cdot X = \mathbf{0}$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

caso contrario, es decir, $b \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$, el SEL es llamado **no homogéneo**.

Observe que todo SEL homogéneo admite por lo menos a la solución nula $s = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ (llamada **solución trivial**).

Ejemplo: El sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 3y & - & 5z & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & 0 \end{array}$$

es un SEL homogéneo mientras que el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & 5z & = & -1 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

se trata de un SEL no homogéneo.

Clasificación del SEL: Según su número de soluciones

Dado $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. El SEL dado por $A \cdot X = b$ es llamado:

a. **Incompatible**: Cuando El SEL no tiene solución, es decir no existe $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \cdot X = b$.

b. **Compatible**: Cuando existe $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \cdot X = b$. A su vez, se subdividen en:

   b.1) **Determinado:** Existe un único $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \cdot X = b$.

   b.2) **Indeterminado:** Existen infinitos $X \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \cdot X = b$.

Ejemplo: El sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 4x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

no tiene solución, por tanto es un sistema **incompatible**.

Ejemplo: El sistema

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 5 \\ 4y & = & 8 \end{array}$$

tiene única solución igual a $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, por tanto es un sistema **compatible determinado**.

Ejemplo: El sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 8 \end{aligned}$$

tiene infinitas soluciones, las cuales son de la forma $\begin{pmatrix} r \\ 4 - r \end{pmatrix}$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

Por tanto es un sistema **compatible indeterminado**.

Tabla de contenidos

Propiedad 1

Sean $s, \hat{s} \in \mathbb{R}^n$ soluciones del SEL homogéneo $A \cdot X = \mathbf{0}$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha s + \beta \hat{s}$ también es solución del sistema homogéneo dado.

Demostración:

Por hipótesis: $As = \mathbf{0}$ y $A\hat{s} = \mathbf{0}$. Luego:

$$A(\alpha s + \beta \hat{s}) = \alpha \underbrace{As}_{=0} + \beta \underbrace{A\hat{s}}_{=0} = \mathbf{0},$$

esto es, $\alpha s + \beta \hat{s}$ es solución del sistema homogéneo $A \cdot X = \mathbf{0}$.

Propiedad 2

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Si el SEL dado por $A \cdot X = b$ tiene dos soluciones distintas $\hat{x}$ y $\hat{y}$ ($\hat{x} \neq \hat{y}$), entonces el SEL tiene infinitas soluciones.

Demostración:

Por hipótesis: $A\hat{x} = b$ y $A\hat{y} = b$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor cualquiera y considere $\hat{z}_\lambda = (1-\lambda)\hat{x} + \lambda\hat{y}$, luego:

$$A\hat{z}_\lambda = A[(1-\lambda)\hat{x} + \lambda\hat{y}] = (1-\lambda)A\hat{x} + \lambda A\hat{y} = (1-\lambda)b + \lambda b = b,$$

es decir, $\hat{z}_\lambda$ es solución del SEL dado por $A \cdot X = b$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, es decir, se tienen infinitas soluciones.

Propiedad 3

Sean $s_p \in \mathbb{R}^n$ una solución particular del SEL no homogéneo $A \cdot X = b$ y sea $s_g \in \mathbb{R}^n$ cualquier otra solución del mismo sistema. Entonces $s_g = s_h + s_p$, donde s_h es una solución del SEL homogéneo asociado, es decir: $A \cdot X = \mathbf{0}$.

Demostración:

Por hipótesis: $As_p = b$ y $As_g = b$. Luego:

$$A(s_g - s_p) = As_g - As_p = b - b \Rightarrow A(s_g - s_p) = \mathbf{0},$$

esto es, $s_g - s_p$ es solución del sistema **homogéneo** asociado $A \cdot X = \mathbf{0}$, denotemos esta solución por s_h. Entonces: $s_g = s_h + s_p$.

TEOREMA DE ROUCHÉ - FROBENIUS

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

10/05/2022

Teorema 1 (Rouché-Frobenius)

Dado el sistema de ecuaciones lineales, es decir,

$$A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1}=b_{m\times 1} \qquad (1)$$

Las soluciones de tal sistema se relacionan con el rango de su matriz correspondiente según:

a) Si $rg(A)<rg(A_a)$, entonces el sistema no tiene solución.

b) Si $rg(A)=rg(A_a)=n$, entonces el sistema tiene solución única.

c) Si $rg(A)=rg(A_a)<n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones y la solución general depende de $n-rg(A)$ variables libres.

Si el sistema de ecuaciones lineales (1) satisface *a*) se dice que es un *Sistema inconsistente*, si satisface *b*) o *c*) se dice que es un *Sistema consistente*.

Observación: También se suele usar la siguiente notación.

$$rg(A) = r(A)$$

Ejemplo: Aplique el Teorema de Rouché-Frobenius al siguiente sistema:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x & + & y & + & 2z & = & 9 \\
2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\
2x & + & 2y & + & 4z & = & 18 \\
3x & + & 6y & - & 5z & = & 0
\end{array}
$$

Solución: La matriz aumentada es

$$A_a = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 18 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{OEF} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de donde:

$$rg(A_a) = rg(A) = 3 = n$$

entonces por el Teorema 2, el sistema tendra solución única.

Métodos de solución de SEL: Eliminación Gaussiana

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales (1), es decir,

$$A_{m\times n}\cdot X_{n\times 1}=b_{m\times 1}$$

se puede seguir el algoritmo de Eliminación Gaussiana.
Consiste en transformar el sistema de ecuaciones lineales (1) en otro Sistema de ecuaciones lineales equivalente más sencillo de resolver, bajo operaciones elementales fila. Cuando se habla de un sistema equivalente se refiere a un sistema que tiene exactamente las mismas soluciones.

Observación: Este es un procedimiento sistemático (algoritmo) que a menudo se implementa en un ordenador siempre que el tamaño del sistema (1) no sea demasiado grande.

Algoritmo de Eliminación Gaussiana:

1. Se considera la matriz ampliada $A_a = (A|b)$.
2. En la matriz ampliada del sistema localizamos la primera columna de izquierda a derecha, distinta de cero, y en esta buscamos un elemento no nulo preferiblemente un uno (si es posible).
3. Si es necesario, intercambiamos la primera fila con la fila que contiene el elemento no nulo determinado anteriormente.

4. Hacemos cero todas las demás entradas de la primera columna, sumando el múltiplo apropiado de la primera fila a las otras filas.

5. Repetimos los pasos del 2 al 4, ignorando la primera fila. Continuamos de la misma manera hasta que toda la matriz esté en forma escalonada (hasta terminar el proceso de eliminación de Gauss).

6. Finalmente, se obtiene el sistema equivalente $(A_e|b_e)$ cuya solución, en caso de existir, puede obtenerse por sustitución regresiva.

Luego, de aplicar el Algoritmo de Eliminación Gaussiana debemos observar los siguientes detalles.

Observación:

1. El primer elemento no nulo de una fila no nula en la matriz escalonada se llama pivote.
2. Las variables que corresponden a las columnas donde hay pivotes se llaman variables básicas o variables principales.
3. Las variables que no son básicas se llaman variables libres o parámetros.
4. Para resolver el sistema equivalente se despejan las variables básicas en términos de las no básicas y a las no básicas se les asignan parámetros reales.

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales, aplicando el Método de Eliminación Gaussiana.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & 4z & = & 18 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

Solución: Por lo realizado anteriormente tenemos

$$A_a = (A|b) = \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 18 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{OEF}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A_e|b_e)$$

de donde:

$$rg(A_a) = rg(A) = 3 = n$$

entonces por el teorema 4, el sistema tendra solución única, esto es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

desarrollando el producto, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & & & y & = & 2 \\ & & & & z & = & 3 \end{array}$$

así tendremos que la solución del sistema planteado es

$$x = 1,\ y = 2,\ z = 3 \ .$$

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ccccccc} 6x & + & 4y & + & 2z & = & 2 \\ 5x & + & 3y & + & 3z & = & 2 \\ 7x & + & 4y & + & 5z & = & 3 \end{array}$$

Solución: Aplicando la eliminación gaussiana tenemos:

$$A_a = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \quad \underrightarrow{OEF}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A_e|b_e)$$

de donde:

$$rg(A_a) = rg(A) = 2 < 3 = n$$

En este caso hay infinitas soluciones y estos dependen de $3 - 2 = 1$ variable libre.

Así

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos z como la variable libre, sea $z = t$ entonces:

$$\begin{array}{rcl} x + y - z = 0 & \Longrightarrow & x = -y + z \\ y - 4z = -1 & \Longrightarrow & y = -1 + 4z \end{array}$$

de donde:

$$x = 1 - 3t\ ,\ y = -1 + 4t\ ,\ z = t\ ,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & & & + & 2x_3 & & & = & 2 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_5 & = & 2 \\
 & & x_2 & - & 3x_3 & - & x_5 & = & 0 \\
 & & x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 3 \\
x_1 & & + & 2x_3 & & + & x_6 & = & 0
\end{array}$$

Solución: De la matriz aumentada del sistema tenemos:

$$A_a = (A|b) = \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{OEF}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A_e|b_e)$$

de donde:

$$rg(A_a) = rg(A) = 4 < 6 = n$$

En este caso hay infinitas soluciones y estos dependen de $6-4=2$ variable libre. Así

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos $x_3 = t$ y $x_5 = r$ como las variables libres.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 2 &\implies& \quad x_1 = 2 - 2t \\ x_2 - 3x_3 - x_5 &= 0 &\implies& \quad x_2 = 3t + r \\ x_4 + 2x_5 &= 5 &\implies& \quad x_4 = 5 - 2r \\ x_6 &= -2 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2-2t \\ x_2 &= 3t+r \\ x_3 &= t \\ x_4 &= 5-2r \\ x_5 &= r \\ x_6 &= -2 \quad , \; t, \; r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

Solución: De la matriz aumentada del sistema tenemos:

$$A_a = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{OEF}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) = (A_e|b_e)$$

de donde:

$$rg(A) = 2 \quad \text{y} \quad rg(A_a) = 3\ .$$

El sistema no tiene solución, es decir, es inconsistente.

Ejemplo: Determine la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones.

a) Se consideran los sistemas de ecuaciones $AX = B_1$ (compatible), $AX = B_2$ (incompatible), entonces siendo $B = B_1 + B_2$, el sistema $AX = B$ es compatible.

(FALSO) Las operaciones elementales $E_k E_{k-1} ... E_1 = E$ se aplican sobre A, entonces

$$(EA|EB_1) : rang(A|B_1) = rang(A)$$
$$(EA|EB_2) : rang(A|B_2) > rang(A)$$

luego $(EA|E(B_1 + B_2)) = (EA|EB_1 + EB_2)$,
y se cumple que $rang(A|(B_1 + B_2)) > rang(A)$.

$$E(A|B_1) = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & x & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E(A|B_2) = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & x & w \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow E(A|B_1 + B_2) = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x & w \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

Es un sistema incompatible.

b) Sea el sistema $A \cdot X = B$ donde A es una matriz triangular con $|A| = 0$. Entonces, el sistema es compatible determinado.

(FALSO) Por ejemplo, sea el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz aumentada:

$$A_a = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

entonces $rang(A_a) = 3 \neq rang(A) = 2$. El sistema es incompatible.

c) Sea $A \cdot X = B$ un sistema incompatible de 5 ecuaciones con 4 incógnitas. Si $rang(A) = 4$ entonces $rang(A_a) = 5$. (A_a matriz aumentada).

(VERDADERO) Si A es la matriz de coeficientes, $E_k ... E_1 = E$, obtenemos:

$$A_a = (A|B) \sim (EA|EB) = \left(\begin{array}{cccc|c} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & k_1 \\ 0 & e_{12} & e_{13} & e_{14} & k_2 \\ 0 & 0 & e_{13} & e_{14} & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & e_{14} & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 \end{array}\right)$$

Ejemplo: Sea el sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & (a^2-14)z & = & a+2 \end{array}$$

Determine para que valores de a el sistema dado tiene:

a) solución única.

b) infinitas soluciones.

c) no tiene solución.

Solución: De la matriz aumentada del sistema tenemos:

$$A_a = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right) \quad \xrightarrow{OEF}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-16 & a-4 \end{array}\right) = (A_e|b_e)$$

entonces:

a) existe una única solución: $rg(A) = rg(A_a) = 3$

b) existe infinita soluciones: $rg(A) = rg(A_a) < 3$

c) no existe solución: $rg(A) \neq rg(A_a)$

entonces:

$$a^2 - 16 = (a-4)(a+4) = 0$$

a) Si $a \neq -4, 4: \quad rg(A) = 3 = rg(A_a)$, existe una única solución.

b) Si $a = 4: \quad rg(A) = 2 = rg(A_a)$, existe infinitas soluciones.

c) Si $a = -4: \quad rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A_a)$, no existe solución.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SEL - CONTINUACIÓN

RICHARD ACUÑA ORTEGA[1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

12/05/2022

Tabla de contenidos

Sistema de cuaciones lineales cuadrados

Se denomina **Sistema de ecuaciones lineales cuadrado** (SELC) cuando el número de variables (incógnitas) es igual al número de ecuaciones lineales, esto es, se tienen n ecuaciones y n variables o simplemente tiene la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

donde los a_{ij} y b_i son constantes reales para todo $i = 1, \ldots, n$.

Este sistema cuadrado puede ser escrito en forma matricial $A \cdot X = b$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

es decir; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, X \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

Donde A (matriz de los coeficientes) es una matriz cuadrada.

La **matriz aumentada** asociada al SEL es denotada por $(A \mid b)$ y definida por:

$$A_a = (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Solución de un SELC

Una solución de un SELC es un vector $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tal que las ecuaciones del sistema son satisfechas cuando reemplazamos:

$$x_1 = s_1, \; x_2 = s_2, \; \ldots \;, \; x_n = s_n$$

o equivalentemente:

$$As = b.$$

El conjunto de todas las soluciones del SELC es llamado **Conjunto solución** o **Solución general** del SELC.

Tabla de contenidos

Métodos de resolución

Para este tipo de SEL se tienen los siguientes métodos de resolución:

- Eliminación Gaussiana
- Gauss-Jordan
- Regla de Cramer

Eliminación Gaussiana

El Método de Gauss es el más simple de los métodos directos de resolución de SELC.

Método de Gauss

El método consiste en utilizar transformaciones elementales en el sistema de ecuaciones lineales (o equivalentemente sobre su matriz ampliada) hasta transformarlo en uno que sea escalonada (la matriz del sistema equivalente escalonada por filas). Este proceso convierte en casi trivial la última ecuación, con lo que se resuelve y se sustituye en las anteriores, que se van resolviendo progresivamente hasta terminar con la primera de ellas.

Ejemplo: Considere el SEL:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \end{aligned}$$

luego, aplicando eliminación gaussiana se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

De esto

$$\begin{aligned} &x_3 = 0 \ , \\ &x_2 = 1 - \frac{1}{3}(0) \Longrightarrow x_2 = 1 \ , \\ &x_1 = 3 - (1) - (0) \Longrightarrow x_1 = 2 \ . \end{aligned}$$

Método Gauss - Jordan

El método es aplicado a sistemas **compatibles**. Consiste en aplicar lo planteado para obtener la matriz inversa, conjuntamente con la Eliminación Gaussiana, a la Matriz Aumentada del sistema, esto es operaciones elementales filas

$$A \cdot X = b \quad \sim \quad I \cdot X = b' \Longrightarrow X = b'$$

esto es

$$(A|b) \quad \text{aplicando operaciones elementales} \quad (I_n|b')$$

A la matriz final $(I|b')$ se le llama la **forma escalonada reducida** de la matriz aumentada original.

La matriz de coeficientes del sistema de ecuacones final es I_n y b' es la matriz columna de términos constantes. Esto implica que los elementos de b' son la solución única. Observe que $(A|b)$ se ha transformado en $(I_n|b')$, A se ha transformado en I_n, por lo tanto

Si A es la matriz de coeficientes de un sistema de n ecuaciones con n variables que tiene una solución única, entonces A es equivalente por filas a I_n.

Si no se puede transformar $(A|b)$ en $(I_n|b')$, entonces el sistema de ecuaciones no tiene una solución única.

Ejemplo: Del ejemplo anterior tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

la matriz aumentada es:

$$A_a = (A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{OEF} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I\,|\,b')$$

Así, se obtiene

$$x_1 = 2\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0\,.$$

el conjunto solución es $\{(2;1;0)\}$.

Regla de Cramer

El método es aplicado a los SELC $A \cdot X = b$ que sean **compatibles determinados**, es decir, que la matriz A sea **invertible** ($det(A) = |A| \neq 0$), el Método o Regla de Cramer, establece que la solución

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$$

viene dada por la expresión

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

donde A_i es la matriz que se obtiene al substituir la columna i-ésima de la matriz A por la columna de términos independientes b.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, entonces

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Demostración: El método esta basado en el cálculo de la matriz inversa aplicando el método de la Adjunta.

$$X = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{|A|} Adj(A) \cdot b$$

Entonces

$$X = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Recordemos que

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Longrightarrow |A_1| = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1}$$

Sin perdida de generalidad

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} b_i A_{in} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ \vdots \\ |A_n| \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}\ ,\ i = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Ejemplo: Considere el siguiente SELC:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

como $det(A) = -1 \neq 0$, Por Cramer se tiene

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{-1}{-1} = 1; \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{-2}{-1} = 2;$$

$$x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Ejercicio: Sea $A = [a_{ij}] \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Si $|A| = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}.$$

Solución: Sabemos

$$det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11}+2a_{13} & a_{21}+2a_{23} & a_{31}+2a_{33} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_{12} & 1 & a_{11}+2a_{13} \\ a_{22} & 2 & a_{21}+2a_{23} \\ a_{32} & 7 & a_{31}+2a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= det\begin{pmatrix} a_{12} & 1 & a_{11} \\ a_{22} & 2 & a_{21} \\ a_{32} & 7 & a_{31} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{12} & 1 & 2a_{13} \\ a_{22} & 2 & 2a_{23} \\ a_{32} & 7 & 2a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 2 \\ a_{31} & a_{32} & 7 \end{pmatrix} - det\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 2a_{13} \\ 2 & a_{22} & 2a_{23} \\ 7 & a_{32} & 2a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 2 \\ a_{31} & a_{32} & 7 \end{pmatrix} - 2det\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 2 & a_{22} & a_{23} \\ 7 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= 3 - 2(3)$$

$$= -3$$

Ejercicio: Sea $A = [a_{ij}] \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Se sabe que

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 2 & e & f \\ 5 & h & i \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} a & 2 & c \\ d & 4 & f \\ g & 10 & i \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & b & -1 \\ d & e & -2 \\ g & h & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Calcule $det(A)$.

Solución: Sea $A = [a_{ij}] \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Si $|A| \neq 0$, por Cramer

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0\ ,\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0\ ,\ x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{0}{|A|} = 0$$

entonces

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

lo cual es un absurdo. Así, $|A| = 0$.

Ejercicio: Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$$

Probar que el sistema $A \cdot X = 0$ tiene solución única si y solo si a, b, c y d no son todos iguales a cero.

MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SEL - CONTINUACIÓN

RICHARD ACUÑA ORTEGA[1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

17/05/2022

Tabla de contenidos

El método de descomposición *LU*

El método de descomposición LU se utiliza para resolver ciertos sistemas de ecuaciones lineales. Es el método que más se emplea en las computadoras. Consiste en escribir la matriz de coeficientes como el producto de una **matriz triangular inferior** L y una **matriz triangular superior** U. Recuerde que una matriz triangular inferior es una matriz cuadrada con ceros en todas las posiciones sobre la diagonal principal, mientras que una matriz triangular superior es una matriz cuadrada con ceros debajo de la diagonal principal.

Ejemplo: Los siguientes son ejemplos de matrices triangulares inferiores y superior.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

El método de **descomposición** *LU* consiste en resolver primero un sistema de ecuaciones triangular inferior y después un sistema triangular superior. Los ejemplos siguientes ilustran los métodos de sustitución hacia adelante y hacia atrás. Después se unirán estos métodos en la descomposición *LU*.

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones que tiene una matriz triangular inferior de coeficientes.

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 2x_1 & = & 8 \\ & & x_1 & + & 3x_2 & = & -2 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Solución:

Expresando el SELC dado como

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & & & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & = & -2 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Se resuelve el sistema utilizando **sustitución hacia adelante**. La primera ecuación da el valor de x_1. Este valor se sustituye en la segunda ecuación para obtener x_2. Al final se sustituyen los valores de x_1 y x_2 en la tercera ecuación para obtener x_3. La solución es $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones que tiene una matriz triangular superior de coeficientes.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & & & & 3x_3 & = & -6 \end{array}$$

Solución:

Utilice el método de **sustitución hacia atrás**. La tercera ecuación da el valor de x_3. Este valor se sustituye en la segunda ecuación para obtener x_2. Después se sustituyen los valores de x_2 y x_3 en la primera ecuación para obtener x_1.

La solución es $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

Definición 1 (Descomposición LU)

Sea A una matriz que se puede factorizar de la forma $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior. A esta factorización se le llama una **descomposición LU** de A.

Observación:

1. No toda matriz tiene una descomposición LU, y cuando la tiene, ésta no es única.
2. Si U sólo tiene 1 sobre su diagonal, es llamado descomposición de Crout.
3. Si L sólo tiene 1 sobre su diagonal, es llamado descomposición de Doolittle.

Ejemplo:

Descomposición de Crout.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Descomposición de Doolittle.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Otra descomposición.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

El método que se presenta ahora puede usarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales si A tiene una descomposición LU.

Método de descomposición LU

Sea $A \cdot X = B$ un sistema de n ecuaciones lineales con n variables, donde A tiene descomposición LU. El sistema se puede escribir como

$$LUX = B \, .$$

El método consiste ahora en escribir el sistema como dos subsistemas, uno de los cuales es triangular inferior y el otro es triangular superior

$$U \cdot X = Y \, ,$$

$$L \cdot Y = B \, .$$

Observe que al sustituir la Y de la segunda ecuación por la Y obtenida en la primera ecuación, se obtiene el sistema original $LUX = B$. En la práctica, se encuentra primero Y de la ecuación $L \cdot Y = B$ y después se resuelve $U \cdot X = Y$ para obtener la solución X.

Solución de $A \cdot X = B$

1. Encontrar la descomposición LU de A.
   (Si A no tiene descomposición LU, no se puede usar este método.)
2. Resolver $L \cdot Y = B$ mediante sustitución hacia adelante.
3. Resolver $U \cdot X = Y$ mediante sustitución hacia atrás.

Es esencial en este método poder obtener una descomposición LU de la matriz A de coeficientes. Suponga que A se puede transformar en una forma triangular superior U mediante operaciones en las filas que consistan en **sumar múltiplos de una fila a otra fila**.

La operación en las filas que consiste en sumar c veces la fila j a la fila k de una matriz A de $n \times n$ sepuede realizar mediante una multiplicación de matrices EA, donde E es la matriz que se obtiene al cambiar el elemento i_{kj} de I_n por c. A E se le llama una **matriz elemental**. Sean las operaciones en las filas descritas mediante las matrices elementales $E_1, \cdots, E_k$. Entonces

$$E_k \cdots E_1 A = U$$

Se sabe que toda matriz elemental es invertible. Entonces, al multiplicar ambos lados de esta ecuación por $E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}$, se tiene

$$A = E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}U$$

Cada una de estas matrices elementales es una matriz triangular inferior. Se puede demostrar que la inversa de una matriz triangular inferior es triangular inferior, y que el producto de matrices triangulares inferiores es también triangular inferior.
Sea $L = E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}$, entonces $A = LU$.

Lo anterior conduce al siguiente método para obtener una descomposición *LU* a partir del conocimiento de las operaciones en las filas que llevan a la forma triangular superior.

Construcción de una descomposición *LU* (Doolittle) de A

1. Utilice operaciones en las filas para obtener U.
   (Las operaciones deben consistir en la adicción de múltiplos de filas a filas. En general, si se necesita intercambiar filas para obtener U, no existe una forma LU)
2. Los elementos de la diagonal de L son 1.
   Los elementos distintos de cero de L corresponden a operaciones en las filas.
   La operación en las filas $f_i + cf_j$ implica que $l_{ij} = c$.

Ejemplo: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando la descomposición *LU* de Doolittle.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & 5 \\ -6x_1 & - & 2x_2 & - & 12x_3 & = & -2 \end{array}$$

Solución: Transforme la matriz A de coeficientes a la forma triangular superior U creando ceros debajo de la diagonal principal como sigue

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 1 & 7\\ -6 & -2 & -12\end{bmatrix} \xrightarrow[E_1]{f_2-2f_1} \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ -6 & -2 & -12\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_2]{f_3+3f_1} \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow[E_3]{f_3+f_2} \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}=U$$

Así tendremos $E_3E_2E_1A=U$, donde las matrices elementales filas son

$$E_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad E_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Entonces $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} U$, donde

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora resuelva el sistema dado $LUX = B$ resolviendo los subsistemas $L \cdot Y = B$ y $U \cdot X = Y$. Se tiene

$$L \cdot Y = B \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

El sistema triangular inferior tiene la solución

$$y_1 = -1 \, , \; y_2 = 7 \, , \; y_3 = 2 \, .$$

Ahora resuelva el sistema

$$U \cdot X = Y \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El sistema triangular superior tiene la solución

$$x_1 = 5\ ,\ x_2 = -8\ ,\ x_3 = -1\ .$$

Observación: Si no se puede aplicar el método LU para resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$, se debe obtener una ecuación equivalente $A' \cdot X = B'$ y aplicar el método en esta última.
Es decir:

$$(A|B) \sim (A'|B') \Longrightarrow A' = LU$$

Ejercicio: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando la descomposición LU de Doolittle.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & x_1 & = & -1 \\ 3x_1 & + & x_3 & = & -2 \end{array}$$

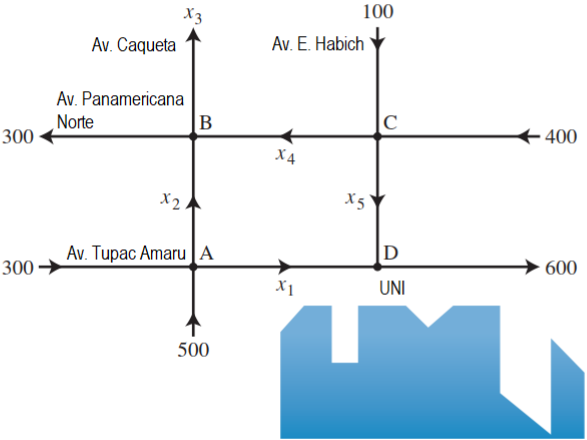
Tabla de contenidos

Flujo de transporte

En los últimos años se ha encontrado que los conceptos y herramientas del análisis de redes son útiles en muchos otros campos, como en la teoría de la comunicación y en el estudio de los sistemas de transporte. El siguiente análisis de flujo de tráfico a través de una red de avenidas durante las horas pico, ilustra cómo, en la práctica, surgen sistemas de ecuaciones lineales que tienen muchas soluciones.

Considérese la red de avenidas típicas que se muestra en la figura 1. Esta figura representa un área del Rimac y San Martín de Porres. Todas las calles de un solo sentido, las flechas son de un solo sentido, las flechas indican la dirección del flujo de tráfico. El flujo de tráfico que entra y que sale de la red se mide en vehículos por hora (vph). Los números dados aquí se basan en una tipica tarde a media semana. Construyendo un modelo matemático para analizar la red. Determine el patrón de flujo general de esta.

Figura 1.


x_3
100
Av. Caqueta
Av. E. Habich
Av. Panamericana Norte
B
C
300
400
x_4
x_2
x_5
Av. Tupac Amaru
A
D
300
600
x_1
UNI
500

Denotando el flujo de tráfico a través de los distintos ramales por $x_1, \ldots, x_5$ como se muestra en la figura 1. Suponiendo que el trafico obedece a la siguiente ley.

Todo el tráfico que llega a una unión, debe salir de esa unión.

Obteniendo el sistema de ecuaciones siguiente:

Intersección	Flujo de entrada		Flujo de salida
A	$300 + 500$	$=$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_4$	$=$	$300 + x_3$
C	$100 + 400$	$=$	$x_4 + x_5$
D	$x_1 + x_5$	$=$	600

Además, el flujo total de vehículos que ingresan a la red es $(500 + 300 + 100 + 400)$ debe ser igual al flujo total de vehículos que salen de la red, el cual es $(300 + x_3 + 600)$, es decir,

$$500 + 300 + 100 + 400 = 300 + x_3 + 600 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 400$$

Luego, combinando este resultado con las ecuaciones obtenidas de las intersecciones de las avenidas se tiene , el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 800 \\
 & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 300 \\
 & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 500 \\
x_1 & & & & & & & + & x_5 & = & 600 \\
 & & & & x_3 & & & & & = & 400
\end{array}$$

El cual equivale a la siguiente representación matricial aumentada

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Luego, el patrón de flujo general para la red se describe por

$$\left\{\begin{array}{ccl} x_1 & = & 600 - x_5 \\ x_2 & = & 200 + x_5 \\ x_3 & = & 400 \\ x_4 & = & 500 - x_5 \\ x_5 & \in & \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

El modelo de entradas y salidas de Leontief

Una economía es un sistema muy complejo con muchas interrelaciones entre sus diversos sectores y los bienes y servicios que se producen y consumen. El álgebra lineal resulta ser una poderosa herramienta en el desarrollo y análisis de tales modelos económicos.
En esta sección se muestra el modelo basado en el trabajo del economista Wassily Leontief, en la década de 1930. Sus métodos, a los con frecuencia se les refiere como **análisis input-output**, ahora son herramientas estándar en la economía matemática y los usan ciudades, corporaciones y países completos para planificación y pronósticos económicos.

Se muestra un ejemplo simple, que ilustra lo que comúnmente se conoce como **modelo cerrado de Leontief**.

La economía de una región consiste de tres industrias o sectores: servicios, electricidad y producción de petróleo. Por simplicidad, se supone que cada industria produce un solo artículo (bienes o servicios) en un año dado y que el **ingreso (output)** se genera a partir de la venta de este artículo.

Cada industria compra artículos de las otras industrias, incluida ella misma, para generar su output. Ningún artículo se compra fuera de la región y ninguna salida (output) se vende fuera de la región. Más aún, para cada industria se supone que la producción iguala exactamente al consumo (output igual a input, ingreso igual a gasto). En este sentido, esta es una **economía cerrada** que está en **equilibrio**.

La tabla 1 resume cuánta output de cada industria consume cada industria.

Tabla 1.

		Producido por (output)		
		Servicio	**Electricidad**	**Petróleo**
	Servicios	$1/4$	$1/3$	$1/2$
$*$	**Electricidad**	$1/4$	$1/3$	$1/4$
	Petróleo	$1/2$	$1/3$	$1/4$

$*$: **Consumido por (input)**

De la primera columna de la tabla se ve que la industria de servicios consume 1/4 de su propia output, la electricidad consume otro 1/4 y la industria petrolera usa 1/2 de la output de la industria de servicios. Las otras dos columnas tienen interpretaciones similares. Note que la suma de cada columna es 1, lo que indica que se consumen todas las output de cada industria.

Sean x_1, x_2 y x_3 que denotan el output (ingreso) anual de las industrias de servicios, electricidad y petróleo, respectivamente, en millones de dólares. Dado que el consumo corresponde al gasto, la industria de servicios gasta $\frac{1}{4}x_1$ en su propio artículo, $\frac{1}{3}x_2$ en electricidad y $\frac{1}{2}x_3$ en petróleo. Esto significa que el gasto total anual de la industria de servicios es $\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3$.

Dado que la economía está en equilibrio, el gasto de la industria de servicios debe ser igual a su ingreso anual x_1. Esto genera la primera de las siguientes ecuaciones; las otras dos ecuaciones se obtienen al analizar los gastos de las industrias de electricidad y petróleo.

$$\begin{array}{lcccccccc}
\text{Servicios:} & \frac{1}{4}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & x_1 \\
\text{Electridad:} & \frac{1}{4}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{4}x_3 & = & x_2 \\
\text{Petróleo:} & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{4}x_3 & = & x_3
\end{array}$$

Al reordenar cada ecuación, se obtiene un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, que entonces se resuelven.

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{4}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{4}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 - \tfrac{3}{4}x_3 &= 0 \end{aligned} \sim \left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Al hacer $x_3 = t$, se encuentra que $x_1 = t$ y $x_2 = \frac{3}{4}t$. Por tanto, se ve que las outputs *relativas* de las industrias de servicios, electricidad y petrolera deben estar en las proporciones $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 3 : 4$ para que la economía esté en equilibrio.

Nota: Dado que las output corresponden a ingreso, también puede considerar a x_1, x_2 y x_3 como los *precios* de los artículos.

ESPACIOS VECTORIALES

RICHARD ACUÑA ORTEGA[1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

19/05/2022

Tabla de contenidos

Se asumira que $\mathbb{K}$ representa a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con sus propiedades usuales. El **uno** o **elemento unidad** de $\mathbb{K}$ es denotado por el símbolo 1 y llamado **elemento neutro multiplicativo** de $\mathbb{K}$.

Espacio vectorial

Un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ es un conjunto $V \neq \emptyset$ con dos operaciones llamadas **suma o adición** (denotada por $+$) y **producto por un escalar** (denotada por $\circ$), las cuales cumplen los siguientes axiomas:

Axiomas de la suma

La operación **suma** está definida como sigue:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$(u, v) \mapsto u + v$$

que satisface:

1. **Cerradura:** $u + v \in V$ para todo $u, v \in V$.
2. **Conmutativa:** $u + v = v + u$ para todo $u, v \in V$.
3. **Asociativa:** $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$.
4. **Elemento neutro:** Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$ para todo $u \in V$.
5. **Elemento opuesto:** Para todo $u \in V$ existe $-u \in V$ tal que
$$u + (-u) = (-u) + u = \mathbf{0}.$$

Axiomas del producto por un escalar

El producto por un escalar está definida como sigue:

$$\circ : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda \circ v$$

que satisface:

6. **Cerradura:** $\lambda \circ u \in V$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $u \in V$.
7. **Producto con el elemento unidad:** $1 \circ u = u$ para todo $u \in V$ y $1 \in \mathbb{K}$.
8. **Asociativa:** $\lambda \circ (\mu \circ u) = (\lambda\mu) \circ u$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $u \in V$.
9. **Distributiva 1:** $(\lambda + \mu) \circ u = \lambda \circ u + \mu \circ u$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y todo $u \in V$.
10. **Distributiva 2:** $\lambda \circ (u + v) = \lambda \circ u + \lambda \circ v$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $u, v \in V$.

Observaciones:

1. El producto por un escalar $\lambda \circ u$ se denota simplemente por λu para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $u \in V$ siempre que no haya confusiones.
2. La expresión $\lambda + \mu$ es distinta de $u + v$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y todo $u, v \in V$. La primera expresión denota la suma usual de elementos de $\mathbb{K}$, la segunda expresión denota la suma definida sobre los elementos de V.
3. Los elementos de V son llamados **vectores**.
4. El símbolo "$\mathbf{0}$" denota el vector nulo $\mathbf{0} \in V$ y a la vez el elemento neutro aditivo $\mathbf{0} \in \mathbb{K}$.
5. $(V, +, \circ, \mathbb{K})$ denota al espacio vectorial V con las operaciones $+$ y $\circ$ sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo 1: Para todo $n \in \mathbb{N}$, el símbolo $\mathbb{R}^n$ denota el **espacio vectorial euclidiano $n-$dimensional**. Se define por:

$$\mathbb{R}^n = \{(u_1, \ldots, u_n) \,/\, u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}\}.$$

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ y $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, se definen:

1. **Igualdad**: $u = v \Longleftrightarrow u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$.
2. **Suma sobre V**: $u + v := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$.
3. **Producto por un escalar**: $\lambda u := (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n)$.

Solución:

Para la suma:

1. Por definición, la suma $u + v \in \mathbb{R}^n$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$.
2. $u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n) = v + u$.
3. $$\begin{aligned} (u+v)+w &= (u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n)+(w_1,\ldots,w_n) \\ &= ((u_1+v_1)+w_1,\ldots,(u_n+v_n)+w_n) \\ &= (u_1+(v_1+w_1),\ldots,u_n+(v_n+w_n)) \\ &= (u_1,\ldots,u_n)+(v_1+w_1,\ldots,v_n+w_n) \\ &= u+(v+w). \end{aligned}$$
4. Elemento neutro: $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ y así $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.
5. Inverso aditivo: $-u = (-u_1, \ldots, -u_n) \in \mathbb{R}^n$ y así $u + (-u) = \mathbf{0}$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$.

Para el producto por un escalar

6. Por definición, $\lambda u \in \mathbb{R}^n$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $u \in \mathbb{R}^n$.
7. $1 \in \mathbb{R}$ cumple que $1u = (u_1, \ldots, u_n) = u$.
8. $$\begin{aligned} \lambda(\mu u) &= \lambda(\mu u_1, \ldots, \mu u_n) \\ &= (\lambda(\mu u_1), \ldots, \lambda(\mu u_n)) \\ &= ((\lambda\mu)u_1, \ldots, (\lambda\mu)u_n) \\ &= (\lambda\mu)(u_1, \ldots, u_n) \\ &= (\lambda\mu)u \end{aligned}$$
9. $$\begin{aligned} (\lambda + \mu)u &= ((\lambda + \mu)u_1, \ldots, (\lambda + \mu)u_n) \\ &= (\lambda u_1 + \mu u_1, \ldots, \lambda u_n + \mu u_n) \\ &= (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n) + (\mu u_1, \ldots, \mu \alpha_n) \\ &= \lambda(u_1, \ldots, u_n) + \mu(u_1, \ldots, u_n) \\ &= \lambda u + \mu u \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
\lambda(u+v) &= \lambda(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n) \\
&= (\lambda(u_1+v_1),\ldots,\lambda(u_n+v_n)) \\
&= (\lambda u_1+\lambda v_1,\ldots,\lambda u_n+\lambda v_n) \\
&= (\lambda u_1,\ldots,\lambda u_n)+(\lambda v_1,\ldots,\lambda v_n) \\
&= \lambda(u_1,\ldots,u_n)+\lambda(v_1,\ldots,v_n) \\
&= \lambda u+\lambda v
\end{aligned}$$

Se observa que $\mathbb{R}^n$ con las operaciones de suma y producto por un escalar definidas cumple todos los axiomas. Por tanto, concluimos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ denota todas las matrices de orden $m \times n$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
Dados $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos las operaciones usuales sobre matrices:

1. **Suma sobre** $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: $A + B := [a_{ij} + b_{ij}]$.
2. **Producto por un escalar**: $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$.

Solución:

Para la suma

1. Por definición, la suma $A+B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
2. $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]=[b_{ij}+a_{ij}]=B+A$.
3. $$\begin{aligned}(A+B)+C &= [a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}]\\ &= [(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]\\ &= [a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]\\ &= [a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}]\\ &= A+(B+C)\end{aligned}$$
4. Elemento neutro: $\mathbf{0}=[a_{ij}]\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ donde $a_{ij}=0$ para todo $i,j=1,\ldots,n$. Luego $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$.
5. Inverso aditivo: dado $A=[a_{ij}]$, su inverso aditivo se define por $-A=[-a_{ij}]\in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y así $A+(-A)=\mathbf{0}$.

Para el producto por un escalar

6. Por definición, $\lambda A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.
7. $1 \in \mathbb{R}$ cumple que $1A = (1[a_{ij}]) = [a_{ij}] = A$.
8. $$\begin{aligned} \lambda(\mu A) &= \lambda(\mu[a_{ij}]) = \lambda[\mu a_{ij}] \\ &= [(\lambda\mu)a_{ij}] = (\lambda\mu)[a_{ij}] \\ &= (\lambda\mu)A \end{aligned}$$
9. $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
10. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

Se observa que $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con las operaciones de suma y producto por un escalar definidas cumple todos los axiomas. Por tanto, concluimos que $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Otros ejemplos usuales

1. El conjunto de todos los polinomios, con coeficientes reales en la variable x, de grado menor o igual que n:

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \; / \; a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones usuales de suma de polinomios y producto por números reales, es decir: sean

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{y} \quad q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \text{ en } \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \; ,$$

entonces $p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$ y $\alpha p(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k) x^k \; , \; \alpha \in \mathbb{R}$.

2. El conjunto de todas las funciones reales:

$$\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f \quad \text{es una función continua}\}$$

con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por números reales, es decir: sean f y g en $\mathbb{F}(\mathbb{R})$, entonces $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ es una función continua sobre $\mathbb{R}$ y $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ es una función continua sobre $\mathbb{R}$ donde α es un escalar.

3. El conjunto de números complejos $\mathbb{C} = \{a + bi \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones: $(a+bi) + (c+di) := (a+c) + (d+d)i$ y el producto por un escalar $\lambda(a+bi) := (\lambda a) + (\lambda b)i$.

Un ejemplo diferente

Considere el conjunto $V = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0\}$. Sobre los elementos de V definimos las operaciones de suma $\oplus$ y producto por un escalar $\circ$ como sigue:

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & V \times V & \to & V \\ & (x, y) & \mapsto & x \oplus y := xy \end{array} \qquad \Bigg| \qquad \begin{array}{rccc} \circ : & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \circ x := x^{\lambda} \end{array}$$

donde xy y x^{λ} denotan las operaciones de producto y potencia usuales en $\mathbb{R}$.

Veamos que $(V, \oplus, \circ)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Solución:

Dados $x, y, z \in V$ entonces $x > 0, y > 0$ y $z > 0$.

Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Para la suma:

1. Por definición, la suma $x \oplus y = xy > 0$ entonces $x \oplus y \in V$.
2. $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$.
3. $$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus z &= (xy) \oplus z = [(xy)z] \\ &= [x(yz)] \\ &= x \oplus (yz) \\ &= x \oplus (y \oplus z) \end{aligned}$$
4. Elemento neutro: $1 \in V$ porque $$1 \oplus x = (1)(x) = (x)(1) = x \oplus 1 = x$$

5. Inverso aditivo: Sea $x \in V$ y su inverso $(-x)$, entoces $x \oplus (-x) = 1$, así $x(-x) = 1$, de esto $(-x) = \dfrac{1}{x} > 0$ ya que $x > 0$.

   Finalmente el inverso aditivo de x es $-x := \dfrac{1}{x} \in V$

Para el producto por un escalar:

6. Por definición, $\lambda x \in V$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in V$.
7. $1 \in \mathbb{R}$ cumple que $1 \circ x = x^1 = x$ para todo $x \in V$.
8. $$\begin{aligned} \lambda \circ [\mu \circ x] &= \lambda \circ [x^{\mu}] = (x^{\mu})^{\lambda} \\ &= x^{\mu\lambda} \\ &= (\lambda\mu) \circ x \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\circ x &= x^{\lambda+\mu}\\
&= x^{\lambda}x^{\mu}\\
&= (x^{\lambda})\oplus(x^{\mu})\\
&= (\lambda\circ x)\oplus(\mu\circ x)\\
\lambda\circ(x\oplus y) &= \lambda\circ(xy)\\
&= (xy)^{\lambda}\\
&= x^{\lambda}y^{\lambda}\\
&= (x^{\lambda})\oplus(y^{\lambda})\\
&= (\lambda\circ x)\oplus(\lambda\circ y)
\end{aligned}$$

Se observa que V con las operaciones de suma $\oplus$ y producto por un escalar $\circ$ definidas cumple todos los axiomas. Por tanto, concluimos que $(V,\oplus,\circ)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Propiedades:

Considere $(V, \oplus, \circ)$ un espacio vectorial con la suma $\oplus$ y producto por un escalar $\circ$. Sean $u, v, w \in V$.

1. Dados $0 \in \mathbb{R}$ y $v \in V$, entonces $0 \circ v = 0$.

   Demostración:

   Observe que

$$\begin{aligned} 0 \circ v &= (0+0) \circ v \\ &= (0 \circ v) \oplus (0 \circ v) \\ (0 \circ v) \oplus -(0 \circ v) &= (0 \circ v) \oplus (0 \circ v) \oplus -(0 \circ v) \\ 0 &= (0 \circ v) \oplus 0 \\ 0 &= 0 \circ v \end{aligned}$$

2. Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ y $0 \in V$, entonces $\lambda \circ 0 = 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \lambda \circ 0 &= \lambda \circ (0 \oplus 0) \\ &= (\lambda \circ 0) \oplus (\lambda \circ 0) \\ (\lambda \circ 0) \oplus -(\lambda \circ 0) &= (\lambda \circ 0) \oplus (\lambda \circ 0) \oplus -(\lambda \circ 0) \\ 0 &= (\lambda \circ 0) \oplus 0 \\ 0 &= \lambda \circ 0 \end{aligned}$$

3. Si $w \oplus u = w \oplus v$ entonces $u = v$.

   En particular:

   - $w \oplus u = w$ implica que $u = 0$.
   - $w \oplus u = 0$ implica que $u = -w$.

Demostración:

$$\begin{aligned} u &= 0 \oplus u \\ &= [(-w) \oplus w] \oplus u \\ &= (-w) \oplus [w \oplus u] \\ &= (-w) \oplus [w \oplus v] \\ &= [(-w) \oplus w] \oplus v \\ &= 0 \oplus v \\ &= v \end{aligned}$$

En particular, si $w \oplus u = w$ entonces $w \oplus u = w \oplus 0$ y por lo demostrado se concluye que $u = 0$.

También, si $w \oplus u = 0$ entonces $w \oplus u = w \oplus (-w)$ y por lo demostrado se concluye que $u = -w$.

4. $(-1) \circ v = -v$

Demostración:

$$\begin{aligned}
(-1) \circ v \oplus v &= [(-1) \circ v] \oplus [1 \circ v] \\
&= [(-1) + 1] \circ v \\
&= 0 \circ v \\
&= 0 \quad \text{(propiedad 1)} \\
(-1) \circ v &= -v
\end{aligned}$$

5. Dado $\alpha \in \mathbb{K}$ y $\alpha \neq 0$. Sea $v \in V$ y $v \neq 0$. Entonces $\alpha \circ v \neq 0$.

Demostración: Por contradicción.
Como $\alpha \neq 0$ entonces existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha^{-1}\alpha = 1$.
Supongamos que se cumple $\alpha \circ v = 0$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} v &= 1 \circ v \\ &= (\alpha^{-1}\alpha) \circ v \\ &= \alpha^{-1} \circ (\alpha \circ v) \\ &= \alpha^{-1} \circ 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

contradiciendo la hipótesis inicial de v distinto del vector nulo.

SUBESPACIOS VECTORIALES

RICHARD ACUÑA ORTEGA[1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

24/05/2022

Tabla de contenidos

Dado $(V, \oplus, \circ)$ un espacio vectorial, **por simplicidad de notación** consideraremos lo siguiente:

$$u \oplus v := u + v \quad \forall\, u, v \in V \quad \text{y} \quad \alpha \circ v := \alpha v \quad \text{donde } v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Definición 1 (Combinación lineal)

Sean V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. Sea $v \in V$, decimos que v es **combinación lineal** de los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$, para averiguar que el vector $v = (1, 2, 3)$ es combinación lineal de $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 4, 0)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, se debe plantear el siguiente sistema:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

$$\Longrightarrow (1, 2, 3) = \alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(2, 4, 0) + \alpha_3(0, 0, 1)$$

y ver si es posible calcular los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Esto equivale a resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 + 2\alpha_2 & = & 1 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 & = & 2 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & = & 3 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Procedemos a escalonar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Por el Teorema de Frobenius el sistema tiene solución única. Así podemos concluir que v es combinación lineal de $\{v_1, v_2, v_3\}$. Es más, podemos calcular la solución:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = 3$$

entonces

$$v = (0)v_1 + \left(\frac{1}{2}\right) v_2 + (3)v_3$$

Ejemplo: En $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, para averiguar si la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, de modo análogo al caso anterior, se plantea:

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$$

entonces

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

de esto resulta el sistema:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 + 3\alpha_2 & = & -1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = & 2 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 & = & 4 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Procedemos a escalonar:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

por el Teorema de Frobenius concluimos que el sistema no tiene solución, es decir, no se puede calcular α_1 y α_2.

Por tanto, A no es combinación lineal de A_1 y A_2.

Definición 2 (Independencia lineal)

Sea V un espacio vectorial. Decimos que el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ es **linealmente independiente** si y sólo si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

implica que $\quad \alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Definición 3 (Dependencia lineal)

Cuando $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ no son linealmente independientes, decimos que son **linealmente dependientes**.

Observación:

- Linealmente independiente es denotado por **l.i.**
- Linealmente dependiente es denotado por **l.d.**

Ejemplo: En $\mathbb{R}^4$ verifique si los vectores

$$v_1 = (1, 0, -1, 2)\ ,\ v_2 = (1, 1, 0, 1)\ \text{ y }\ v_3 = (2, 1, -1, 1)$$

son l.i.

Solución:

Para esto planteamos:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0, 0, 0, 0)$$

es decir:

$$\alpha_1(1, 0, -1, 2) + \alpha_2(1, 1, 0, 1) + \alpha_3(2, 1, -1, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

lo que conduce al sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \implies \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

procedemos a escalonar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

el Teorema de Frobenius garantiza la unicidad de solución y además es fácil observar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por tanto, podemos concluir que $\{v_1, v_2, v_3\}$ son l.i.

Ejemplo: Considere los vectores v_1, v_2, v_3 del ejemplo anterior y sea $v_4 = (1, 0, -1, 4)$. Verifique si son l.i.

Solución:

Para esto planteamos: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$. Es decir:

$$\alpha_1(1, 0, -1, 2) + \alpha_2(1, 1, 0, 1) + \alpha_3(2, 1, -1, 1) + \alpha_4(1, 0, -1, 4) = 0$$

lo que conduce al sistema:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 & = & 0 \end{array}$$

expresando de forma matricial:

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

procedemos a escalonar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & -2t, \\ \alpha_2 & = & -t, \\ \alpha_3 & = & t, \\ \alpha_4 & = & t \end{array} \right. \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

el Teorema de Frobenius garantiza que se trata de un sistema compatible indeterminado, es decir, existen infinitas soluciones, una de ellas es para $t = -1 : \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = -1$. Por tanto, podemos concluir que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es l.d.

Propiedades:

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $S \subset V$ un subconjunto. Se cumplen:

1. Sea $v \in V$ entonces $\{v\}$ es l.d. $\Longleftrightarrow v = 0$.

   Demostración:

   $(\Longrightarrow)$ Existe $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha \cdot v = 0$, entonces $\alpha^{-1} \neq 0$ y $\alpha^{-1}\alpha \cdot v = \alpha^{-1} \cdot 0$, así, $v = 0$.

   $(\Longleftarrow)$ Como $v = 0$ se cumple la combinación lineal nula

   $$1 \cdot v = 0$$

   y por lo tanto se concluye que $\{v\}$ es l.d.

2. Si $0 \in S$ entonces S es l.d.

Demostración: Sea $S = \{0, v_1, \ldots, v_k\}$ y su combinación lineal nula

$$1 \cdot 0 + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_k = 0$$

por lo que S es l.d.

3. Si $u, v \in V$ entonces $\{u, v\}$ es l.d. si y sólo si $u = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$.

   Demostración:

   $(\Longrightarrow)$ Como $\{u, v\}$ es l.d. entonces existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ donde al menos uno de ellos es no nulo tal que $\alpha_1 u + \alpha_2 v = 0$. Por simplicidad, podemos suponer que $\alpha_1 \neq 0$, luego podemos despejar u como sigue:

   $u = \left(-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) v$. Definiendo $\lambda = \left(-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ concluimos que $u = \lambda v$.

   $(\Longleftarrow)$ Como $u = \lambda v$ entonces

   $$1 \cdot u + (-\lambda) \cdot v = 0 \quad \text{(combinación lineal nula)}$$

   luego $\{u, v\}$ es l.d.

4. Si S es l.i. y $T \subset S$ entonces T es l.i.

Demostración: Por contradicción.

Sean los conjuntos $T = \{v_1, \ldots, v_k\}$ y $S = T \cup \{v_{k+1}\}$ donde T es l.d. entonces la combinación lineal nula de T

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k = 0$$

implica que algún $\alpha_i \neq 0$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Luego de la combinación lineal nula de S tenemos

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_k \cdot v_k + 0 \cdot v_{k+1} = 0$$

Por lo tanto, concluimos que S es l.d. lo cual es una contradicción. Así, T es l.i.

5. Si S es l.d. y $S \subset T$ entonces T es l.d.

   Demostración:
   Sea $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ y $T = S \cup \{v_{r+1}\}$. Como S es l.d. entonces existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ donde al menos un $\alpha_i \neq 0$ tal que:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_r \cdot v_r = 0$$

   luego

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_r \cdot v_r + 0 \cdot v_{r+1} = 0,$$

   implicando que T es l.d.

6. S es l.d. si y sólo si existe $v \in S$ que es combinación lineal de $S \backslash \{v\}$.

   Demostración: Ejercicio.

7. S es l.i. si y sólo si no existe $v \in S$ que sea combinación lineal de $S \setminus \{v\}$.

   Demostración:

   Suponga que existe $v \in S$ que sea combinación lineal de $S \setminus \{v\}$, usando la **propiedad 6** se tendría que S es l.d. contradiciendo la hipótesis inicial de S de ser l.i.

8. Si $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$ y los vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ son l.i. entonces $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

   Demostración: Ejercicio.

Ejemplo: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y sean $x, y, z \in V$. Demuestre que:

$$\{x, y, z\} \text{ es l.i. si y sólo si } \{x + y, y + z, z + x\} \text{ es l.i.}$$

Demostración:

$(\Longrightarrow)$ Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha_1(x + y) + \alpha_2(y + z) + \alpha_3(z + x) = 0$$

$$\Longrightarrow (\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_1 + \alpha_2)y + (\alpha_2 + \alpha_3)z = 0$$

como $\{x, y, z\}$ son l.i. entonces:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

observe que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por tanto, $\{x + y, y + z, z + x\}$ es l.i.

($\Longleftarrow$) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que: $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$
Sumando a ambos miembros los siguientes términos:

$$[+(\alpha_2 + \alpha_3)x], \qquad [+(\alpha_1 + \alpha_3)y], \qquad [+(\alpha_1 + \alpha_2)z]$$

resulta:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \alpha_2(y + x) + \alpha_3(z + x) &= (\alpha_2 + \alpha_3)x \\ \alpha_1(x + y) + \alpha_2 y + \alpha_3(z + y) &= (\alpha_1 + \alpha_3)y \\ \alpha_1(x + z) + \alpha_2(y + z) + \alpha_3 z &= (\alpha_1 + \alpha_2)z \end{aligned}$$

sumando las tres ecuaciones:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)(x + y) + (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)(y + z)$$

$$+(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2)(x + z) = 0$$

por hipótesis, $\{x+y, y+z, z+x\}$ es l.i., esto implica que:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2+\alpha_3-\alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_1+\alpha_3-\alpha_2 & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

observe que el determinante de la matriz asociada al sistema es no nulo $(=4)$ y por tanto, la solución es única y además:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0,$$

concluyendo así que $\{x, y, z\}$ es l.i.

Tabla de contenidos

Definición 4 (Subespacio vectorial)

Sea $(V, \oplus, \circ)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sea S un subconjunto de V. S es llamado un **subespacio vectorial** de V si y solamente si $(S, \oplus, \circ)$ sigue siendo un espacio vectorial.

Observación:

El conjunto $\{0\}$ que tiene como único elemento al cero y todo el espacio V son ejemplos de subespacios de V, denominados **subespacios triviales**.

La definición nos indica que debemos verificar los 10 axiomas para todos los elementos de $S \subset V$ para poder concluir que S es un subespacio vectorial. En la práctica esto es poco usual, para ello tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1

Sea $(V, \oplus, \circ)$ un espacio vectorial y $S \subset V$. S es un **subespacio vectorial** de V si y sólo si cumple las siguientes tres condiciones:

1. $0 \in S$.
2. Si $u, v \in S$ entonces $u \oplus v \in S$.
3. Si $v \in S$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces $\alpha \circ v \in S$.

La demostración de este teorema queda como ejercicio.

Ejemplo: Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales. Pruebe que el conjunto:

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$$

es un subespacio vectorial con las operaciones usuales en $\mathbb{R}^n$.

Solución:

Como $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial y $H \subset \mathbb{R}^n$, por el Teorema 1 bastará que H satisfaga las 3 propiedades mencionadas.

1. $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ satisface $a_1(0) + \ldots a_n(0) = 0$ entonces $0 \in H$.
2. Sean $x, y \in H$ entonces $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ cumplen:

$$a_1x_1 + \ldots a_nx_n = 0, \quad \text{y} \quad a_1y_1 + \ldots + a_ny_n = 0\ .$$

Veamos que $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ también es un elemento de H.

$$a_1(x_1 + y_1) + \ldots + a_n(x_n + y_n) = \underbrace{(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)}_{=0} + \underbrace{(a_1y_1 + \ldots + a_ny_n)}_{=0}$$

$$a_1(x_1 + y_1) + \ldots + a_n(x_n + y_n) = 0 \Longrightarrow x + y \in H.$$

3. Sea $x \in H$ entonces $x = (x_1, \ldots, x_n)$ cumple: $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$

   Veamos que $\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$ también es un elemento de H.

$$a_1(\alpha x_1) + \ldots + a_n(\alpha x_n) = \alpha \underbrace{(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)}_{=0}$$

$$\Rightarrow a_1(\alpha x_1) + \ldots + a_n(\alpha x_n) = 0 \Rightarrow \alpha x \in H.$$

Por el Teorema 1 podemos concluir que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Observe que el caso menos interesante es cuando todos

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

en cuyo caso $H = \mathbb{R}^n$. Si por el contrario, al menos un a_i es distinto de cero, entonces H es llamado **hiperplano** en $\mathbb{R}^n$ que pasa por el origen.

SUBESPACIOS, GENERADOR Y BASE

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

26/05/2022

Tabla de contenidos

Teorema fundamental

La definición nos indica que debemos verificar los 10 axiomas para todos los elementos de $S \subset V$ para poder concluir que S es un subespacio vectorial. En la práctica esto es poco usual, para ello tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1

Sea $(V, \oplus, \circ)$ un espacio vectorial y $S \subset V$. S es un **subespacio vectorial** de V si y solo si se cumple lo siguiente:

1. $\mathbf{0} \in S$.
2. Si $u, v \in S$ entonces $u \oplus v \in S$.
3. Si $v \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha \circ v \in S$.

Demostración:

($\Longrightarrow$) Si S es un subespacio de V, entonces S es propiamente un espacio vectorial, por lo que es cerrado para la suma y el producto por un escalar.

($\Longleftarrow$) Debemos hacer notar que se cumplen los 10 axiomas del espacio vectorial. Si $S \subseteq V$, naturalmente se cumplen los axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10. Si $S \neq \emptyset$, existe $u \in S$ y como S es cerrado respecto al producto por un escalar $0u = \mathbf{0}$, lo que asegura el axioma 4, en forma análoga $(-1)u = -u \in S$, luego se cumple el axioma 5.

Ejemplos: Usando el teorema previo, mostrar que

- $A = \{f(x) \in \mathbb{R}_{[x]} : \text{ grado } f(x) \leq 5\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}_{[x]}$.
- $B = \{f(x) \in \mathbb{R}_{[x]} : -f(x) = f(-x)\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}_{[x]}$.
- $C = \{F \in M(n \times n) : F$ triangular superior$\}$ es un subespacio de $M(n \times n)$.
- $D = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f$ se anula en $X \subset \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 3x_1 - x_3 = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Solución:

Probemos B**:**

1. Como $f(x) = 0 \in \mathbb{R}_{[x]}$ (función nula) y $-f(x) = 0 = f(-x)$, entonces $B \neq \emptyset$.
2. Sean f y $g \in B$, entonces $-f(x) = f(-x)$ y $-g(x) = g(-x)$, de esto $-(f+g)(x) = -f(x) - g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)$, así $f + g \in B$.
3. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in B$, entonces

$$-(\lambda f)(x) = -(\lambda f(x)) = \lambda(-f(x)) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x)$$

así $\lambda f \in B$.

Finalmente, B es un subespacio.

Probemos E:

1. Como $\mathbf{0} = (0,0,0) \in E$, entonces $E \neq \emptyset$.
2. Sean (x_1, x_2, x_3) y $(y_1, y_2, y_3) \in E$, entonces

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ 3x_1 - x_3 = 0 \ \text{ y } \ 2y_1 + y_2 - y_3 = 0,\ 3y_1 - y_3 = 0,$$

de esto

$$2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) - (x_3 + y_3) = 0,\ 3(x_1 + y_1) - (x_3 + y_3) = 0,$$

así

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in E$$

es decir

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \in E$$

3. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x_1, x_2, x_3) \in E$, entonces

$$2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) - (\lambda x_3) = 0,\ 3(\lambda x_1) - (\lambda x_3) = 0$$

así

$$(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in E$$

es decir

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) \in E$$

Finalmente, E es un subespacio.

Ejemplos:

- El conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ no es un subespacio. Este conjunto es la circunferencia de radio 1 y no es subespacio porque no contiene al vector 0 (entre otras muchas razones).
- El conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ no es un subespacio. Este conjunto es el círculo de radio 1 y no es subespacio porque aunque ahora sí contiene al vector 0, sin embargo la suma de vectores no está bien definida porque no es interna: Dados dos vectores del circulo de radio 1, por ejemplo el $(1, 0)$ y el $(0, 1)$, su suma $(1, 1)$ está fuera del círculo.

Tabla de contenidos

Subespacio generado

Definición 1

Dado un subconjunto A del espacio vectorial V. Se define el subespacio generado por A, denotado por $\mathcal{L}(A)$ o $lin(A)$ o $span(A)$ o $gen(A)$, como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de A.

$$\mathcal{L}(A) = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n : u_i \in A,\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n\}$$

Proposición 1

Sea $A \subset V$. Entonces el subespacio generado por A, $\mathcal{L}(A)$ es un subespacio vectorial de V.

Demostración:

a) Como $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot u_i : u_i \in A$, entonces $\mathbf{0} \in \mathcal{L}(A)$.

b) Veamos que $\mathcal{L}(A)$ es cerrada para la suma.

Sean $u, v \in \mathcal{L}(A)$, entonces existen los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{K}$ tal que $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i : u_i \in A \quad y \quad v = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i : v_i \in A$. Así,

$$u + v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i \in \mathcal{L}(A) .$$

c) Veamos que $\mathcal{L}(A)$ es cerrada para la multiplicación por un escalar.
Sean $u \in \mathcal{L}(A)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces existen los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Así,

$$\begin{aligned}\lambda u &= \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i) u_i \in \mathcal{L}(A) \,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}(A)$ es un subespacio vectorial de V.

Conjunto de generadores

Definición 2 (Sistema Generador)

El conjunto A, contenido en un espacio vectorial V, es un sistema generador si existe un conjunto S al cual genera, es decir, si todo vector de S puede expresarse como combinación lineal de los elementos de A. En ese caso, se dice que A es el generador de S, o bien que engendra a S.

Ejemplo: El conjunto $A = \{(1;1;2),(0;-1;2)\} \subset \mathbb{R}^3$ es el generador del conjunto $S = \{(\lambda;\lambda-\beta;2\lambda+2\beta)/\lambda,\beta \in \mathbb{R}\}$.
Sea $u \in S$ cualquiera, esto es, $u = (\lambda;\lambda-\beta;2\lambda+2\beta)$ con $\lambda,\beta \in \mathbb{R}$, así

$$\begin{aligned} u &= (\lambda;\lambda;2\lambda) + (0;-\beta;2\beta) \\ &= \lambda(1;1;2) + \beta(0;-1;2) \end{aligned}$$

Se tiene que u es una combinación lineal de los vectores $(1;1;2)$ y $(0;-1;2)$, esto es, S es generado por A. Luego, A es un Sistema generador.

Observación:

Dado un subconjunto A del espacio vectorial V, el conjunto $\mathcal{L}(A) = \cap_{W\in\mathcal{F}} W$, donde $\mathcal{F}$ es la familia de subespacios de V que contienen a A, es un subespacio de V.

De la definición, $\mathcal{L}(A)$ contiene a A. De hecho, este subespacio es el menor subespacio de V que contiene a A, en el sentido que si W es cualquier subespacio que contiene a A, necesariamente $\mathcal{L}(A) \subset W$.

Demostración: (Por contradicción)
Supongamos que se cumple $A \subset W \not\subset \mathcal{L}(A)$, es decir, existe $u \in \mathcal{L}(A)$ tal que $u \notin W$, entonces $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ donde $v_i \in A$ y $\lambda_i \in \mathbb{K}$, pero como $A \subset W$, se cumple $v_i \in W$, asi $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in W$ (W es un subespacio), por lo tanto $u \in W$ lo que es una contradicción.

Definición 3

Si $\mathcal{L}(A) = V$, se dice que A es un conjunto de generadores o sistema generador del espacio vectorial V.

Ejemplos:

1. $A = \{(1;0), (0;1)\}$ genera $\mathbb{R}^2$.
   Esto se puede notar tomando un vector cualesquiera $v = (x;y) \in \mathbb{R}^2$. Luego,

$$\begin{aligned}(x;y) &= (x;0) + (0;y) \\ &= x(1;0) + y(0;1)\end{aligned}$$

de esto $(x;y) \in span(A)$, es decir A genera $\mathbb{R}^2$.

2. $A = \{(1;3),(2;1)\}$ genera $\mathbb{R}^2$.
   Esto se puede notar tomando un vector cualesquiera $v = (x;y) \in \mathbb{R}^2$.
   Luego

$$\begin{aligned}(x;y) &= \alpha(1;3) + \beta(2;1);\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\\ &= (\alpha + 2\beta; 3\alpha + \beta)\end{aligned}$$

   Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta &= x\\ 3\alpha + \beta &= y\end{aligned}$$

   en variables α y β.
   Es un sistema compatible determinado, esto es, presenta soluciones únicas para α y β, donde: $\alpha = \frac{2}{5}y - x; \quad \beta = x - \frac{1}{5}y$.

3. $A = \{(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)\}$ genera $\mathbb{R}^3$.
4. P_n, el espacio vectorial formado por los polinomios en una variable con coeficientes reales y de grado menor o igual que n, es generado por $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
5. Sea $A = \{(1;0;2),(0;0;3)\}$, el subespacio generado

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A) &= \{u \in \mathbb{R}^3 / u = \alpha(1;0;2) + \beta(0;0;3); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\\ &= \{u \in \mathbb{R}^3 / u = (\alpha; 0; 2\alpha + 3\beta); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL FINITO

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

31/05/2022

Tabla de contenidos

Base de un espacio vectorial

Definición 1

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Una base de V es un conjunto S de vectores de V linealmente independiente y generador de V.

Definición 2

Un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial V si se verifican las dos condiciones siguientes:

1. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ son linealmente independientes.
2. $gen(S) = V$.

Ejemplo: El conjunto $S = \{(1;2), (-2;1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
Veamos:

1. A partir de la resolución lineal trivial

$$\alpha(1;2) + \beta(-2;1) = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

tenemos

$$\alpha - 2\beta = 0$$
$$2\alpha + \beta = 0$$

resolviendolo: $\alpha = \beta = 0$.
Entonces $(1;2)$ y $(-2;1)$ son linealmente independientes.

2. Sea $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ cualesquiera, Se debe mostrar que $(x; y)$ se puede obtener como una combinación lineal de $(1; 2)$ y $(-2; 1)$, esto es, existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$(x; y) = \lambda_1(1; 2) + \lambda_2(-2; 1)$$

Resolviendo se obtiene,

$$\lambda_1 = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \ , \ \lambda_2 = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y$$

En consecuencia, $gen(S) = \mathbb{R}^2$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^n$ se tiene siempre la base estándar $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$, donde el vector e_i es la n-upla que tiene un 1 en la posición i, y cero en las restantes, para $i = 1, \ldots, n$. S es un conjunto linealmente independiente, pues si consideramos la relación lineal trivial

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$$

Se observa que se forma un sistema de ecuaciones lineales homogénea. De donde se tiene que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Además, $\mathbb{R}^n = span(S)$.
Para esto, bastaría probar que $\mathbb{R}^n \subset span(S)$.
Sea $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera. Se observa que $u = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$, esto es, $u \in span(S)$. Esto muestra que S es el sistema generador de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo:

El conjunto $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base del espacio de matrices $M^{2x2}(\mathbb{R})$.

A es un conjunto de vectores linealmente independiente.

Asimismo, toda matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se expresa como una combinación lineal de los elementos de A. En consecuencia A es una base de $M^{2x2}(\mathbb{R})$.

Ejemplo: El conjunto $A = \{1, x, x^2, \ldots\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ (espacio de todos los polinomios). Se observa que A tiene un número infinito de elementos. Además, $\mathbb{R}[x]$ no puede ser finitamente generado, suponga que existe un conjunto finito de polinomios $\{g_1(x), g_2(x), \ldots, g_r(x)\}$ que sean linealmente independientes y generadores de $\mathbb{R}[x]$. Existe un exponente k de x, que es el mayor que aparece en estos polinomios. Entonces el polinomio x^{k+1} no se puede expresar como combinación lineal de $g_1(x), \ldots, g_r(x)$.

Ejemplo: El conjunto $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ con

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

es un sistema generador de $\mathbb{R}^3$, pero no es una base, debido a que el vector u_4 se puede expresar como una combinación lineal de los otros tres

$$u_4 = \frac{8}{7}u_1 + \frac{13}{7}u_2 - \frac{5}{7}u_3$$

Sin embargo, el conjunto $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ porque A es un conjunto de vectores linealmente independientes y $\mathbb{R}^3 = span(A)$.

Existencia de una base

Sea $V \neq \{0\}$ un espacio vectorial finitamente generado. Dado cualquier conjunto finito de generadores $G \subset V$, existe una base B de V formada por vectores de G.

Obtención de una base en $\mathbb{K}^n$

Sea $G = \{v_1, \ldots, v_p\}$ un sistema de generadores del espacio vectorial $\mathbb{K}^n$.

- Se forma la matriz $A_G = (v_1, \ldots, v_p)$
- A_G se lleva a su forma escalonada E.
- Las columnas básicas de A_G , que se corresponden con las columnas pivotes de E, forman una base de $\mathbb{K}^n$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}^3$ consideremos el sistema generador

$$G = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

se forma la matriz donde sus columnas son los vectores de G

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix}$$

se lleva a su forma escalonada aplicando operaciones elementales filas. Asi se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

los pivotes se encuentran en las columnas 1, 2 y 4. De este modo $\{v_1, v_2, v_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Base de un Espacio Vectorial

Teorema 1

Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial V y $u \in V$, entonces existe un conjunto único de escalares $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ de modo que $u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$.

Demostración: Como B es una base de V existen al menos un conjunto de escalares $\{c_1, \ldots, c_n\}$ de modo que

$$u = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$$

Supongamos que existe otro conjunto de escalares $\{d_1, \ldots, d_n\}$ de modo que $u = d_1 v_1 + \ldots + d_n v_n$ igualando y operando se obtiene

$$(c_1 - d_1)v_1 + \cdots + (c_n - d_n)v_n = 0\ .$$

Es una relación trivial de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ los cuales son linealmente independientes porque forman una base de V, entonces todos los escalares cumplen que $(c_i - d_i) = 0$, en consecuencia $c_i = d_i$ para cualquier $i = 1, \ldots, n$. Con lo cual queda demostrado el teorema.

Teorema 2

Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial V, entonces todo conjunto con más de n vectores es linealmente dependiente.

Teorema 3

Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$ son bases en un espacio vectorial V, entonces $m = n$, es decir, cualesquiera dos bases en un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.

Demostración Sean $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $W = \{v_1, \ldots, v_m\}$ dos bases del espacio vectorial de dimensión finita V. Dado que S es una base y W es un conjunto de vectores linealmente independientes, por el teorema anterior, $m \leq n$. De modo análogo, como W es una base y S es un conjunto de vectores linealmente independientes, por el teorema anterior $n \leq m$. Por tanto $m = n$.

Definición 3

Se llama dimensión de un espacio vectorial V al número de elementos de una base de V. Este número se denota por $dim(V)$.

Observación 1

1. Si V tiene una base con un número finito de elementos, entonces V se denomina espacio vectorial de dimensión finita. En caso contrario, V se denomina espacio vectorial de dimensión infinita.
2. Si $V = \{0\}$, entonces se dice que V tiene dimensión cero.

Dimensión de un espacio vectorial

Ejemplos:

1. Como n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base, entonces $dim(V) = n$.

2. En $M^{mxn}(\mathbb{R})$, sea A_{ij} la matriz de orden mxn con un uno en la entrada $(i; j)$ y ceros todos los otros elementos. Es sencillo demostrar que las matrices A_{ij} forman una base para $(\mathbb{R})$. Asi $dim(M^{mxn}(\mathbb{R}))$=m.n

3. El conjunto de polinomios $\mathbb{R}[x]$, es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión infinita y una base es $\{x^i / i = 0, 1, 2, \ldots\}$

Dimensión de una base

Acotación de Conjuntos generadores e independientes

Sea V un $\mathbb{R}-$espacio vectorial de dimensión finita y $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \in V$.

1. Si S es un conjunto generador, entonces $m \geq dim(V)$.
2. Si S es linealmente independiente, entonces $m \leq dim(V)$.
3. Si S es un conjunto generador y $m = dim(V)$, entonces S es base de V.
4. Si S es linealmente independiente y $m = dim(V)$, entonces S es base de V.

Ejercicio: Determine una base y dimensión del subespacio

$$W = \{(a, b, c)/c = 3a\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

Solución:

De $W = \{(a, b, 3a)/\ a, b \in \mathbb{R}\}$, se tiene que

$$W = \{(a, b, 3a) = a(1, 0, 3) + b(0, 1, 0)\}$$

donde los vectores $(1, 0, 3)$ y $(0, 1, 0)$ generan W y son linealmente independientes. En consecuencia es una base para W y $dim(W) = 2$.

Tabla de contenidos

Representación de susbespacios en $\mathbb{R}^n$

- Existen dos formas fundamentales para representar los subespacios vectoriales: la paramétrica y la implícita.
- Es importante que tengamos presente que incluso dentro de las formas implícita y paramétrica, hay múltiples formas de elegir las ecuaciones o vectores que representan al subespacio.
- Por lo tanto, debemos ser capaces de pasar de unas formas a otras.
- En la resolución de problemas, una elección correcta de la representación suele ser un aspecto fundamental.

Representación paramétrica

- Un subespacio vectorial U diremos que está en forma paramétrica cuando nos lo den en términos de un conjunto de generadores.
- Es decir, nos den unos vectores u_1, u_2, ..., u_k tales que

$$U = span(\{u_1, u_2, \ldots, u_k\})$$

- Esto es equivalente a decir que los vectores de U son aquellos que se pueden escribir como $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$ para unos parámetros indeterminados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

- A veces, se pueden poner los parámetros dentro de las coordenadas del vector, por ejemplo,

$$U = \{(2\lambda + \mu, -\lambda - \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

es equivalente a decir

$$\begin{aligned} U &= \{\lambda(2, -1) + \mu(1, -1) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= span(\{(2, -1), (1, -1)\}) \end{aligned}$$

Representación implícita

- Diremos que un subespacio vectorial U nos lo dan de forma implícita, cuando nos den las ecuaciones que tienen que satisfacer los vectores para pertenecer a U.
- Un típico ejemplo sería:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2z = 0\}$$

O con múltiples ecuaciones

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - t = 0,\ y + 3z + t = 0,\ x + 3y = 0\}$$

- Es decir, el subespacio es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.
- Todas las ecuaciones deben estar igualadas a 0, puesto que el $\mathbf{0}$ siempre tiene que pertenecer al espacio. Es un sistema de ecuaciones homogéneo.

Paso de paramétrica a implícta

Dado un subespacio U en ecuaciones paramétricas, veamos como encontrar "unas" (no decimos "las" pues no son únicas) ecuaciones implicítas que describan al subespacio U.

Dado $U = span(\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}) \subset \mathbb{R}^n$. Un vector $(x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$ está en U si y solo si $(x_1, x_2, \cdots x_n) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$ para unos parámetros indeterminados $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$.

La igualdad $(x_1, x_2, \cdots x_n) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$, una vez sustituidos los vectores u_i por sus correspondientes coordenadas se traduce en un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son los parámetros λ_i y los términos independientes de dicho sistema son las componentes x_i.

Un vector $(x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$ está en U si y solo si el sistema de ecuaciones obtenido es compatible. Se trata por tanto de imponer que dicho sistema sea compatible.

Ejemplo: Dado el subespacio $U = span(\{(2,1,5),(3,-1,2)\})$ de $\mathbb{R}^3$ hallemos la ecuación implícita de U.

Solución: Sea $(x,y,z) \in U$, entonces existen α y β tal que

$$(x,y,z) = \lambda_1(2,1,5) + \lambda_2(3,-1,2)$$

de esto

$$\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 & = & x \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = & y \\ 5\lambda_1 + 2\lambda_2 & = & z \end{array}$$

eliminando λ_1 y λ_2, tenemos

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 7x + 11y - 5z = 0\}$$

Paso de implícita a paramétrica

Dado un subespacio U en ecuaciones implícitas, veamos como encontrar ecuaciones paramétricas que describan al subespacio U.

Dadas las ecuaciones implicítas de un subespacio $U \subset \mathbb{R}^n$. Dichas ecuaciones son un sistema de ecuaciones lineal homogéneo y compatible. Para obtener las ecuaciones paramétricas basta con resolver dicho sistema compatible.

Ejemplos:

- Hallar las ecuaciones paramétricas del subespacio

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z - t = 0,\ 2x - y + 2z = 0\}$$

- Dado el subespacio en implícitas

$$U = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d : p(0) = 0,\ p'(2) = 0\}$$

del espacio de los polinomios $\mathbb{R}_3[x]$, hallar sus ecuaciones paramétricas.

Veamos el primer ejemplo.

Solución: De $(x, y, z, t) \in W$ tenemos:

$$x + y + z - t = 0 \Longrightarrow t = x + y + z$$

$$2x - y + 2z = 0 \Longrightarrow y = 2x + 2z$$

entonces

$$t = 3x + 3z \quad \text{y} \quad y = 2x + 2z$$

así

$$(x, y, z, t) = (x, 2x + 2z, z, 3x + 3z) = x(1, 2, 0, 3) + z(0, 2, 1, 3)$$

finalmente

$$W = \{\lambda_1(1, 2, 0, 3) + \lambda_2(0, 2, 1, 3) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Teorema

Si V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$n = \text{número de parámetros de la forma paramétrica de } V$$

$$+ \text{ número de ecuaciones de la forma implícita de } V$$

Ejemplo: Como W es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, donde

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z - t = 0,\ 2x - y + 2z = 0\}$$

$$= \{\lambda_1(1, 2, 0, 3) + \lambda_2(0, 2, 1, 3) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

tenemos

$$4 = 2 + 2$$

lo cual verifica el teorema.

MATRIZ DE CAMBIO DE BASES

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

02/06/2022

Tabla de contenidos

Subespacios de un espacio de dimensión finita

El siguiente teorema es una contraparte natural del teorema del conjunto generador.

Teorema 1 (Teorema de la extensión de la base)

Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Cualquier conjunto linealmente independiente en H se puede expandir, si es necesario, a una base de H. Además, H tiene dimensión finita y

$$dim\ H \leq dim\ V$$

Ejemplo: Extienda el siguiente conjunto de vectores a una base para $\mathbb{R}^3$;

$$\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución:

En este caso tenemos la libertad de escoger una base de donde tomar vectores para completar la base. Elijamos entonces la **base canónica**:

$$\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Para determinar adecuadamente la selección de vectores formamos y reducimos la matriz:

$$[v_1 \ \ v_2 | e_1 \ \ e_2 \ \ e_3] \to \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & | & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & \underline{1} & | & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & | & 0 & \underline{1} & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente una base que extiende a $\mathcal{B}$ es $\{v_1, v_2, e_2\}$.

El siguiente teorema es de importancia fundamental en muchos problemas de aplicación (por ejemplo, los que implican ecuaciones diferenciales o ecuaciones en diferencias), donde la independencia lineal es mucho más fácil de comprobar que la generación.

Teorema 2 (El teorema base)

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$.

- Cualquier conjunto linealmente independiente de exactamente n elementos en V es, de forma automática, una base para V.
- Cualquier conjunto de exactamente n elementos que genera a V es, de manera automática, una base para V.

Demostración:

- De acuerdo con el teorema 1, un conjunto linealmente independiente S de n elementos se puede ampliar a una base para V. Sin embargo, esa base debe contener exactamente n elementos, ya que $dim\ V = n$. Así que S debe ser ya una base para V.
- Ahora suponga que S tiene n elementos y genera a V. Puesto que V es diferente de cero, el teorema del conjunto generador implica que un subconjunto S' de S es una base de V. Como $dim\ V = n$, S' debe contener n vectores. Por lo tanto, $S = S'$.

El siguiente resultado indica cómo deben ser las dimensiones de los subespacios respecto a la dimensión del espacio que los contiene.

Teorema 3

Sea W un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión n. Entonces

1. $dim\ W \leq n$. Es decir, la dimensión de un subespacio **no** puede exceder la dimensión del espacio que lo contiene.
2. $dim\ W = n$ si y sólo si $W = V$. Es decir, el subespacio es el total del espacio cuando su dimensión alcanza la dimensión del espacio que lo contiene.

Ejemplo: Determine la dimensión del subespacio:

$$gen\left\{\begin{bmatrix}-6\\5\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\5\\-2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-42\\40\\-1\\11\end{bmatrix},\begin{bmatrix}16\\-10\\-8\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Solución:

Formando la matriz aumentada y aplicando Gauss-Jordan tenemos:

$$\begin{bmatrix}-6 & -4 & -42 & 16\\5 & 5 & 40 & -10\\1 & -2 & -1 & -8\\1 & 2 & 11 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 5 & -4\\0 & 1 & 3 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Lo cual diría que los vectores 3 y 4 son combinación lineal de los vectores 1 y 2. Por tanto,

$$gen\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = gen\{v_1, v_2\}$$

El mismo cálculo indica que el conjunto formado por los vectores 1 y 2 son linealmente independientes. Por lo tanto, los vectores 1 y 2 son una base para el espacio. Así, la dimensión es 2.

Ejemplo: Determine la dimensión del subespacio que generan los polinomios:

$$\{-2 - x - 2x^2, 1 + 5x + x^2 - 2x^3, 2 + x - x^3, 3 - 3x - 3x^2 - x^3\}$$

Solución:

Formando la matriz aumentada de los polinomios vectorizados y aplicando Gauss-Jordan tenemos:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por la nota anterior, la dimensión es el número de pivotes de la matriz reducida. Por tanto, la dimensión es 3.

Definición 1

Una **base ordenada** es una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vectores junto con un ordenamiento de los vectores en la base.

Ejemplo: Sea la base canónica **ordenada**

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$, entonces los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$, son también bases de $\mathbb{R}^3$, pero ordenadas de otra manera.

$$\mathcal{B}_1 = \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}\ , \quad \mathcal{B}_2 = \{(0,0,1)(0,1,0),(1,0,0)\}$$

Definición 2 (Coordenadas)

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ordenada para un espacio vectorial V, y sea $v \in V$. Si escribimos

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \tag{1}$$

entonces los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se llaman **coordenadas de v con respecto a $\mathcal{B}$**. La matriz

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

se llama **matriz de coordenadas (vector coordenado) de v con respecto a $\mathcal{B}$**.

Observación

- Una matriz de coordenadas de V para una base ordenada es única, ya que la combinación lineal en la ecuación (1) es única.
- Si la base $\mathcal{B}$ de V tiene n vectores, entonces $[v]_{\mathcal{B}}$ es un vector (columna) en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: Sea $v = (2, 3)$ en $\mathbb{R}^2$. Hállese la matriz de coordenadas para v con respecto a

a) $\mathcal{B} =$base canónica.

b) $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

c) $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1), (1, 0)\}$.

Solución:

a) Como $(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$,

$$[(2,3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) Se resuelve $(2,3) = c_1(1,0) + c_2(1,1)$ para obtener $c_1 = -1$ y $c_2 = 3$, de tal menera que

$$[(2,3)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c) En este caso $(2,3) = c_1(1,1) + c_2(1,0)$. Resolviendo, se obtiene $c_1 = 3$ y $c_2 = -1$, por lo tanto

$$[(2,3)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Encuentre el vector coordenado $[p(x)]_{\mathcal{B}}$ de $p(x) = 2 - 3x + 5x^2$ con respecto a la base a) estándar $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$, b) $\mathcal{B}_1 = \{x^2, x, 1\}$.

Solución:

a) El polinomio $p(x)$ ya es una combinación lineal de $1, x$ y x^2, de modo que

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b) El vector coordenado de $p(x)$ con respecto a $\mathcal{B}_1$ es

$$[p(x)]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Encuentre el vector coordenado $[p(x)]_{\mathcal{C}}$ de $p(x) = 1 + 2x - x^2$ con respecto a la base $\mathcal{C} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

Solución:

Necesita encontrar c_1, c_2 y c_3 tales que

$$c_1(1 + x) + c_2(x + x^2) + c_3(1 + x^2) = 1 + 2x - x^2$$

o, de manera equivalente,

$$(c_1 + c_3) + (c_1 + c_2)x + (c_2 + c_3)x^2 = 1 + 2x - x^2$$

esto significa que es necesario resolver el sistema

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & + & & & c_3 & = & 1 \\ c_1 & + & c_2 & & & = & 2 \\ & & c_2 & + & c_3 & = & -1 \end{array}$$

cuya solución se encontró era $c_1 = 2,\ c_2 = 0,\ c_3 = -1$. Por tanto

$$[p(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El siguiente teorema muestra que el proceso de formar vectores coordenados es compatible con las operaciones de espacio vectorial de suma y multiplicación por un escalar.

Teorema 4

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para un espacio vectorial V, Sean u y v vectores en V y sea c un escalar. Entonces

1. $[u + v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$
2. $[cu]_{\mathcal{B}} = c[u]_{\mathcal{B}}$

Corolario

Sea $\mathcal{B}$ una base para un espacio vectorial V, Sean $u_1, u_2, \ldots, u_k$ vectores en V y sea $c_1, c_2, \ldots, c_n$ escalares. Entonces

$$[c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k]_{\mathcal{B}} = c_1[u_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + c_k[u_k]_{\mathcal{B}}$$

Teorema 5

Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para un espacio vectorial V y sean $u_1, \ldots, u_k$ vectores en V. Entonces $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es linealmente independiente en V si y sólo si $\{[u_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [u_k]_{\mathcal{B}}\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

$(\Longrightarrow)$ Suponga que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es l.i. en V y sea

$$c_1[u_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + c_k[u_k]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$$

en $\mathbb{R}^n$. Pero al usar el corolario anterior, se tiene

$$[c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$$

de modo que las coordenadas del vector $c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k$ con respecto a $\mathcal{B}$ son todas cero. Esto es,

$$c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k = 0 v_1 + \cdots + 0 v_n = \mathbf{0}$$

La independencia lineal de $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ahora fuerza que $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, de modo que $\{[u_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [u_k]_{\mathcal{B}}\}$ es linealmente independiente.

$(\Longleftarrow)$ Se usa ideas similares, se deja como ejercicio.

Matriz de cambio de base

Definición 3

Sean $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases para un espacio vectorial V. La matriz de $n \times n$ cuyas columnas son las matrices de coordenadas (sus elementos) $[u_1]_\mathcal{C}, \ldots, [u_n]_\mathcal{C}$ de los vectores en $\mathcal{B}$ con respecto a $\mathcal{C}$ se denota $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ y se llama **matriz de cambio de base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$**. Esto es,

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = [[u_1]_\mathcal{C}[u_2]_\mathcal{C} \cdots [u_n]_\mathcal{C}]$$

Piense en $\mathcal{B}$ como la base **antigua** y en $\mathcal{C}$ como la base **nueva**. Entonces las columnas de $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ son justo los vectores coordenados obtenidos al escribir los vectores de la base antigua en términos de los nuevos.

Ejemplo: Encuentre la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ para las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(0,1),(1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solución: Tenemos

$$
\begin{aligned}
(1,0) &= 0(0,1) + 1(1,0)\\
(0,1) &= 1(0,1) + 0(1,0)
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
[(1,0)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [(0,1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Así

$$
P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Teorema 6

Sean $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases para un espacio vectorial V y sea $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ la matriz de cambio de base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Entonces

1. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$ para todo v en V.
2. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ es la única matriz P con la propiedad de que $P[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{C}}$ para todo v en V.
3. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ es invertible y $(P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}})^{-1} = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$.

Ejemplo: Encuentre las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ y $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ para las bases $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ y $\mathcal{C} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.
Luego encuentre el vector coordenado de $p(x) = 1 + 2x - x^2$ con respecto a $\mathcal{C}$.

Solución: Cambiar una base estándar es sencillo, de modo que primero se encuentra $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$. Observe que los vectores coordenados para $\mathcal{C}$ en términos de $\mathcal{B}$ son

$$[1 + x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ [x + x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ [1 + x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se tiene

$$P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$, podría expresar cada vector en $\mathcal{B}$ como una combinación lineal de los vectores en $\mathcal{C}$ (hágalo), pero es mucho más facil usar el hecho de que $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = (P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}})^{-1}$, por el teorema 6(c). Se encuentra que

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = (P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ahora se tiene que

$$[p(x)]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

OPERACIONES CON SUBESPACIOS

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

14/06/2022

Tabla de contenidos

Operaciones con subespacios

Sean S y T subespacios vectoriales de un mismo espacio vectorial V.

Definición 1

La **suma** de S y T es definida por:

$$S + T = \{u + v \,/\, u \in S \ \wedge \ v \in T\}.$$

Definición 2

La **intersección** de S y T es definida por:

$$S \cap T = \{v \,/\, v \in S \ \wedge \ v \in T\}.$$

Teorema 1

Los conjuntos $S + T$ y $S \cap T$ son subespacios vectoriales de V.

Demostración:

1. Veamos para $S + T$:

Como S y T son s.e.v. entonces $0 \in S$ y $0 \in T$ por tanto

$$0 = 0 + 0 \in S + T \; .$$

Sean $u, v \in S + T$ entonces $u = u_1 + u_2$ y $v = v_1 + v_2$ con $(u_1 \in S \wedge u_2 \in T)$ y $(v_1 \in S \wedge v_2 \in T)$, como S y T son s.e.v. entonces $u_1 + v_1 \in S$ y $u_2 + v_2 \in T$, por lo tanto

$$u + v = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in S + T\ .$$

Análogamente, dado $\alpha \in \mathbb{K}$ y sea $u \in S + T$ entonces $u = u_1 + u_2$

con $(u_1 \in S \wedge u_2 \in T)$, como S y T son s.e.v. entonces $\alpha u_1 \in S$ y $\alpha u_2 \in T$, por lo tanto

$$\alpha u = \alpha u_1 + \alpha u_2 \in S + T\ .$$

Por lo tanto, $S + T$ es un subespacio vectorial de V.

2. Veamos para $S \cap T$:

Como S y T son s.e.v. entonces $0 \in S$ y $0 \in T$ por lo tanto $0 \in S \cap T$.

Sean $u, v \in S \cap T$ entonces $(u \in S \wedge u \in T)$ y $(v \in S \wedge v \in T)$, como S y T son s.e.v. entonces $u + v \in S$ y $u + v \in T$, por lo tanto $u + v \in S \cap T$.

Análogamente, dado $\alpha \in \mathbb{K}$ y sea $u \in S \cap T$ entonces $(u \in S \wedge u \in T)$, como S y T son s.e.v. entonces $\alpha u \in S$ y $\alpha u \in T$, por lo tanto $\alpha u \in S \cap T$.

Por lo tanto, $S \cap T$ es un subespacio vectorial de V.

Ejemplo: Calcule una base del s.e.v. que resulta de la intersección de:

$$S = span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad T = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Solución:

Primero determinamos las ecuaciones implícitas de S y T.

Para S:

$$S = \left\{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \,/\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Sea $(x, y, z) \in S$ entonces:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc} x & = & (1)\alpha_1 + (0)\alpha_2 \\ y & = & (2)\alpha_1 + (1)\alpha_2 \\ z & = & (2)\alpha_1 + (1)\alpha_2 \end{array}$$

es decir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y - 2x \\ 0 & 1 & z - 2x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - y \end{array}\right)$$

por tanto: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z - y = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$.

De forma análoga se obtienen las ecuaciones implícitas de T:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z - x = 0,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Luego:

$$S \cap T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{rcl} z - y & = & 0 \\ z - x & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Ahora determinamos una base $S \cap T$: sea $(x, y, z) \in S \cap T$ entonces:

$$\begin{array}{rcl} z - y & = & 0 \\ z - x & = & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} y = z \\ x = z \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$S \cap T = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

como $S \cap T$ es generado por un único vector no nulo, concluimos que

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base de $S \cap T$.

Ejemplo: Calcule $S_1 \cap S_2$ donde S_1 y S_2 son los siguientes subespacios del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

$$S_1 = span\{5 + 3x + 2x^2, 3 + 2x + x^2\}, \; S_2 = \{f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,/\, f(-2) = 0\}.$$

Solución:

Sea $f \in S_1 \cap S_2$ entonces:

$$\begin{array}{lcl} f \in S_1 & \Longrightarrow & f(x) = \alpha_1(5 + 3x + 2x^2) + \alpha_2(3 + 2x + x^2) \\ f \in S_2 & \Longrightarrow & f(-2) = 0 \Rightarrow \alpha_1(7) + \alpha_2(3) = 0 \end{array}$$

por tanto: $f(x) = \alpha_1(5+3x+2x^2) + \left(-\frac{7}{3}\alpha_1\right)(3+2x+x^2)$,

luego:

$$f(x) = -\frac{\alpha_1}{3}(6+5x+x^2) \Rightarrow S_1 \cap S_2 = span\left\{6+5x+x^2\right\}$$

así $\mathbb{B} = \{6+5x+x^2\}$ es una base de $S_1 \cap S_2$.

Ejemplo:

Sean $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - z = 0\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^3$. Un sistema de generadores de $S + T$ es la unión de una base de S con otra de T. Puesto que:
$B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ y $B_2 = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ son bases de S y T respectivamente, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde concluimos que $B_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de $S + T$. Observe además que $S + T = \mathbb{R}^3$.

Observación:

Del ejemplo anterior, dado un vector $u \in S + T$, su representación como suma de un elemento de S y un elemento de T puede no ser única, por ejemplo:

$$u = (1,1,1) = \underbrace{(1,0,1)}_{\in S} + \underbrace{(0,1,0)}_{\in T} = \underbrace{(3,0,3)}_{\in S} + \underbrace{(-2,1,-2)}_{\in T}.$$

Ejercicio: Sean F_1, F_2 $\mathbb{K}$-subespacios vectoriales de V. Si existe algún $v \in V$ tal que $v + F_1 \subset F_2$, pruebe que $F_1 \subset F_2$.

Solución: Como F_1 es $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de V, entonces

$$0 \in F_1 \Longrightarrow (v+0) \in v + F_1 \subset F_2 \Longrightarrow v + 0 \in F_2 \Longrightarrow v \in F_2$$

de esto $-v \in F_2$ pues F_2 es $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de V.
Sea

$$x \in F_1 \Longrightarrow v + x \in v + F_1 \subset F_2 \Longrightarrow v + x \in F_2$$
$$\Longrightarrow (v+x) + (-v) \in F_2 \Longrightarrow x \in F_2$$

por lo tanto $F_1 \subset F_2$.

Tabla de contenidos

Definición 3

Sean S y T dos s.e.v. de V. Decimos que la suma $S + T$ es **directa** si y sólo si $S \cap T = \{0\}$.

Observación:
Cuando la suma $S + T$ es directa, es denotada por $S \oplus T$.

Teorema 2

Sean S, T y U s.e.v. de V tal que $S \subset U$ y $T \subset U$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $U = S \oplus T$.
2. Todo elemento $w \in U = S + T$ se escribe de **forma única** como la suma $w = v_1 + v_2$ donde $v_1 \in S$ y $v_2 \in T$.

Demostración

- **(1)** $\Longrightarrow$ **(2)**:

  Es decir, la suma es directa y por tanto $S \cap T = \{0\}$. Dado $w \in S + T$, suponga que:

  $$w = u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \quad \text{donde} \quad u_1, v_1 \in S \quad \text{y} \quad u_2, v_2 \in T,$$

  entonces $u_1 - v_1 = v_2 - u_2$. Como S es un s.e.v., entonces $u_1 - v_1 \in S$ y también T es un s.e.v entonces $v_2 - u_2 \in T$.
  Por lo tanto:

  $$u_1 - v_1 = v_2 - u_2 \in S \cap T = \{0\} \Rightarrow u_1 = v_1 \quad \text{y} \quad u_2 = v_2.$$

- **(2) $\Longrightarrow$ (1)**:

  Sea $v \in S \cap T$, y v puede escribirse como:

$$v = \underbrace{0}_{\in S} + \underbrace{v}_{\in T} = \underbrace{v}_{\in S} + \underbrace{0}_{T} \in S + T,$$

  y de la hipótesis (2) de representación única se concluye que $v = 0$, por lo tanto $S \cap T = \{0\}$.

Ejemplo:

Sea $U = \mathbb{R}^4$, S el s.e.v generado por los vectores $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ y T el s.e.v. generado por los vectores $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Entonces S es el conjunto de los vectores de la forma $(\alpha_1, 0, \alpha_3, 0)$ y T es el conjunto de los de la forma $(0, \alpha_2, 0, \alpha_4)$. Es claro que $U = \mathbb{R}^4 = S \oplus T$.

Definición 4

Sea V un espacio vectorial y W_1, W_2 subespacios vectoriales de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$. Entonces decimos que W_1 es el **complemento** de W_2 y viceversa.

Ejemplo:

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y $M_n(\mathbb{R})$ denota las matrices cuadradas de orden $n \times n$ con entradas reales. S_n es el subespacio de $M_n(\mathbb{R})$ de las matrices simétricas y A_n el subespacio de M_n de las matrices antisimétricas. Demuestre que:

$$M_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$$

Solución:

Sea la matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$, ésta puede expresarse de la forma siguiente:

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^T)}_{\in S_n} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^T)}_{\in A_n}.$$

esto muestra que $M_n(\mathbb{R}) = S_n + A_n$. Veamos que también es una suma directa.

Si $M \in S_n \cap A_n$ entonces $M = M^T$ y $M = -M^T$, sumando se tiene: $2M = 0$ y luego $M = 0$, por tanto resulta que $S_n \cap A_n = \{0\}$.

Así concluimos que $M_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$.

Teorema 3

Si W_1 y W_2 son subespacios de V, entonces

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

Demostración: Sea $\{x_1, \ldots, x_p\}$ una base de $W_1 \cap W_2$.
Podemos completar esta base hasta formar una base

$$S_1 = \{x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_m\} \quad \text{de} \quad W_1 \ .$$

Análogamente podemos formar una base

$$S_2 = \{x_1, \ldots, x_p, z_1, \ldots, z_r\} \quad \text{de} \quad W_2 \ .$$

Notemos que

$$S_3 = \{x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_r\}$$

es un conjunto generador de $W_1 + W_2$, pues si $w \in (W_1 + W_2)$, entonces

$$w = w_1 + w_2 \quad \text{con} \quad w_1 \in W_1 \quad \text{y} \quad w_2 \in W_2$$

luego

$$w_1 = a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p + b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m \ ,$$

$$w_2 = a'_1 x_1 + \cdots + a'_p x_p + c_1 z_1 + \cdots + c_m z_r \ ,$$

y

$$w = \sum_{i=1}^{p}(a_i + a_i')x_i + \sum_{j=1}^{m} b_j y_j + \sum_{k=1}^{r} c_k z_k$$

entonces

$$w \in gen(S_3) = W_1 + W_2\ .$$

Ahora vamos que S_3 es linealmente independiente, así

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p + b_1y_1 + \cdots + b_my_m + c_1z_1 + \cdots + c_mz_r = \mathbf{0}$$

de esto

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p + b_1y_1 + \cdots + b_my_m = -c_1z_1 - \cdots - c_mz_r \quad (*)$$

en esta expresión la parte izquierda está en W_1 y la parte de la derecha en W_2, ambos estarán en $W_1 \cap W_2$. De aquí que:

$$-c_1 z_1 - \cdots - c_m z_r = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p \Longleftrightarrow$$

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + c_1 z_1 + \cdots + c_m z_r = \mathbf{0}$$

pero S_2 es linealmente independientes, entonces $c_k = 0, \; k = 1, 2, \ldots, r$ de aquí $(*)$ queda:

$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p + b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m = \mathbf{0}$$

pero S_1 es linealmente independientes, entonces
$a_i = 0$ y $b_j = 0,\ i = 1, 2, \ldots, p\ ;\ j = 1, \ldots, m$.
Como S_3 es base de $W_1 + W_2$, entonces

$$\begin{aligned} dim(W_1 + W_2) &= p + m + r \\ &= (p + m) + (p + r) - p \\ &= dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2) \end{aligned}$$

Vectores en $\mathbb{R}^2$

RICHARD ACUÑA ORTEGA[1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

16/06/2022

Tabla de contenidos

Geometría vectorial en $\mathbb{R}^2$

Definición 1

El conjunto $\mathbb{R}^2$ se define como:

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Donde, los elementos de $\mathbb{R}^2$ son llamados vectores y poseen propiedades geométricas muy importantes que generalizan la geometría del plano.

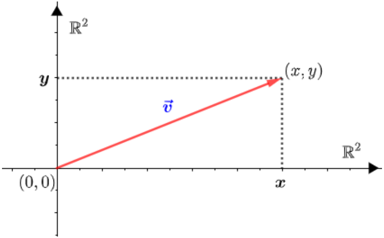
En adelante denotaremos a un vector como $\vec{v}$ (o v), lo cual enfatizará el sentido

geométrico que poseen los vectores.

Tabla de contenidos

Vectores en el plano

Suponga que $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, es decir, $\vec{v} = (x, y)$ donde x y y son números reales. Su representación en el plano se muestra en la siguiente figura:

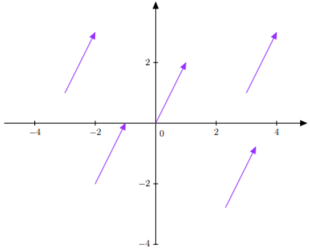


Del gráfico, el vector $\vec{v}$ sale del origen y termina en el punto (x, y). **Más aún, lo único importante es la flecha en sí, es decir, la dirección que esta tiene y la longitud que esta posee.**

Definición geométrica de un vector

Definición 2

Geométricamente un vector es una flecha dirigida, es decir, un objeto con dirección y longitud (magnitud).



Como puede verse en la figura y siguiendo la definición dada, **los vectores en el plano serán considerados iguales si poseen la misma longitud y dirección**.

Definición 3 (Multiplicación de un vector por un número real)

En $\mathbb{R}^2$ se define la multiplicación de un vector por un número real de la forma siguiente:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, \vec{v}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{v} \end{array}$$

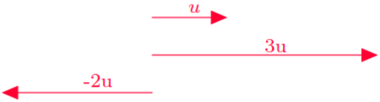
es decir, para todo $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Geométricamente, esta operación significa:

- $\lambda \in (1, +\infty)$: $\lambda \cdot \vec{v}$ representa un vector con la misma dirección que $\vec{v}$ pero que se ha expandido.
- $\lambda \in (0, 1)$: $\lambda \cdot \vec{v}$ representa un vector con la misma dirección que $\vec{v}$ pero que se ha contraído.
- $\lambda = 0$: $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}$ es el vector nulo que no tiene tamaño.
- $\lambda \in (-1, 0)$: $\lambda \cdot \vec{v}$ representa un vector con dirección opuesta a $\vec{v}$ y que se ha contraído.
- $\lambda \in (-\infty, -1)$: $\lambda \cdot \vec{v}$ representa un vector con dirección opuesta a $\vec{v}$ pero que se ha expandido.

Los casos anteriores se ilustran en la siguiente figura



Definición 4 (Suma de Vectores)

En $\mathbb{R}^2$ se define la suma de vectores como sigue:

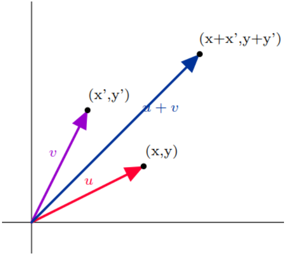
$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \vec{v} + \vec{w} \end{aligned}$$

de manera similar es decir, para todo $\vec{v} = (x, y), \vec{w} = (m, n) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

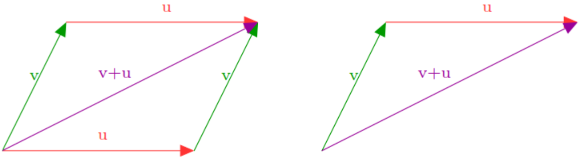
$$\vec{v} + \vec{w} = (x, y) + (m, n) = (x + m, y + n)$$

Geométricamente, esta operación significa

Si $\vec{v} = (x', y')$, $\vec{u} = (x, y)$ la siguiente figura representa $\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} + \vec{u}$.



Dados $\vec{v}, \vec{u}$ se tiene 2 formas geométricas para hallar $\vec{v} + \vec{u}$.



Propiedades de vectores

Se cumplen:

1. Es conmutativa, es decir: $u + v = v + u$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$.
2. Es asociativa, es decir: $u + (v + w) = (u + v) + w$ para todo $u, v, w \in \mathbb{R}^2$.
3. Existe un elemento $\theta \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + \theta = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.
4. Para todo $v \in \mathbb{R}^2$, existe un único $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $v + w = \theta$.
5. La suma y el producto producto por un escalar son distributivos, es decir:
$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$
para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
6. El producto por un escalar y producto de escalares son asociativos, es decir, $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^2$.
7. $1 \in \mathbb{R}$ es neutro multiplicativo del producto escalar, es decir, $1 \cdot v = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

Definición 5 (Resta de vectores)

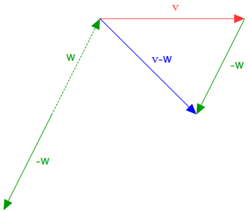
Para restar vectores en $\mathbb{R}^2$, primero definimos el inverso aditivo de $\vec{w} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ del modo siguiente:

$$-\vec{w} := (-x, -y)$$

Luego, la resta de los vectores v, w:

$$\vec{v} - \vec{w} := \vec{v} + (-\vec{w})$$

Luego, la siguiente figura muestra geométricamente el cálculo de $\vec{v} - \vec{w}$



Relación entre flechas y puntos

Aunque la interpretación de flechas dada a los vectores se ha establecido de manera independiente a la idea de **punto**, estas dos interpretaciones geométricas se relacionan de manera muy conveniente, a través del concepto de **flecha localizada**.

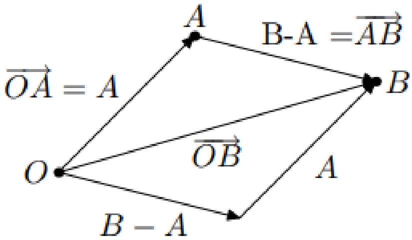
Definición 6 (Flechas localizadas $\overrightarrow{AB}$)

Dados A y B en $\mathbb{R}^2$, a los que se les atribuye una interpretación geométrica de punto, se llama flecha localizada de A a B al vector $\overrightarrow{AB} = B - A \in \mathbb{R}^2$ y que, geométricamente, se asocia con la única flecha que se origina en el punto A y termina en B.

Observe que como $B - A \in \mathbb{R}^2$, $B - A$, al igual que cualquier vector en $\mathbb{R}^2$, puede ser interpretado como un punto o como una flecha sin ubicación. Sin embargo, a $\overrightarrow{AB}$ sólo la damos una interpretación geométrica: la de la flecha que comienza en A y termina en B.

Naturalmente, esta única flecha que se asocia con $\overrightarrow{AB}$ una de las infinitas que se le pueden asociar a $B - A$ (o que refleja el desplazamiento descrito por las coordenadas de $B - A$).

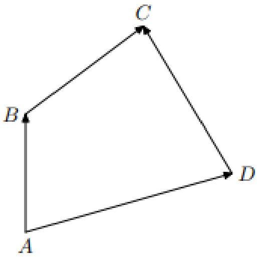
En el siguiente gráfico, observe la representación geométrica de vector $B - A$, cuando se le representa como una flecha que se inicia en el origen y cuando se identifica como el vector localizado $\overrightarrow{AB}$.



Definición 7 (Vectores paralelos)

Decimos que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son **vectores paralelos** si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$ o $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$.

Ejemplo: Suponga que A, B, C y D son los vértices de un cuadrilátero de manera que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son lados adyacentes y por lo tanto $\overrightarrow{AB}$ no es paralelo a $\overrightarrow{AD}$ como se muestra en la figura.



Demuestre que si $\overrightarrow{BC}$ es paralelo a $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{DC}$ es paralelo a $\overrightarrow{AB}$ entonces:

a) el cuadrilátero $ABCD$ tiene sus lados opuestos iguales.

b) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Demostración:

a) Como $\overrightarrow{BC}$ es paralelo a $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{DC}$ paralelo a $\overrightarrow{AB}$ entonces existen t y s en $\mathbb{R}$ no nulos tales que:

$$\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{AD} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{DC} = s\overrightarrow{AB} \qquad (2)$$

Además, de la interpretación geométrica de la suma de vectores se tiene que:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

Luego, si se sustituye $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{DC}$ según (1) y (2) se obtiene que

$$\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + s\overrightarrow{AB}$$

y finalmente

$$\overrightarrow{AB} - s\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - t\overrightarrow{AD}$$
$$\Longrightarrow (1-s)\overrightarrow{AB} = (1-t)\overrightarrow{AD}$$

Ahora, si $s \neq 1$ entonces $\overrightarrow{AB} = (\frac{1-t}{1-s})\overrightarrow{AD}$ y contradice la hipótesis de que $\overrightarrow{AB}$ no es paralelo a $\overrightarrow{AD}$.

De igual manera, si $t \neq 1$ entonces $\overrightarrow{AD} = (\frac{1-s}{1-t})\overrightarrow{AB}$ y se contradice también que $\overrightarrow{AD}$ no es paralelo a $\overrightarrow{AB}$. Luego necesariamente debe ocurrir que $s = 1$ y $t = 1$ y de (1) y (2) se tiene que los lados no consecutivos de un paralelogramo son iguales.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$$

b) Observe que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ de donde $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ y $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, entonces

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})
\end{aligned}$$

Pero $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, dado que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ como se demostró en la parte a), entonces:

$$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Definición 8

Una **combinación lineal** de vectores $\{v_1, \ldots, v_r\} \in \mathbb{R}^2$ es una expresión de la forma: $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r$ donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.

Definición 9

Decimos que un vector $v \in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los vectores $\{v_1, \ldots, v_r\} \in \mathbb{R}^2$ cuando existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tal que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r$$

En este caso decimos que $\{v_1, \ldots, v_r\} \in \mathbb{R}^2$ generan v o que v es generado por $\{v_1, \ldots, v_r\} \in \mathbb{R}^2$.

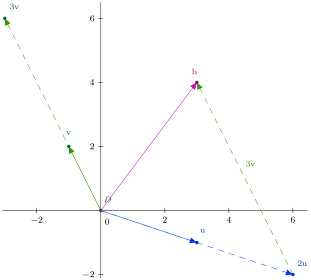
Si todo $v \in \mathbb{R}^2$ es generado por $\{v_1, \ldots, v_r\} \in \mathbb{R}^2$, decimos que $\{v_1, \ldots, v_r\} \in \mathbb{R}^2$ generan $\mathbb{R}^2$.

Interpretación Geométrica

Para los escalares $2, 3 \in \mathbb{R}$, se tiene la siguiente combinación lineal de los vectores $u = (3, -1)^T$ y $v = (-1, 2)^T$:

$$2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = b$$

Entonces, la interpretación geométrica, de lo anterior, es la siguiente



Definición 10 (Linealmente independientes y linealmente dependientes)

Decimos que los vectores $\{v_1, \ldots, v_r\} \in \mathbb{R}^2$ son **linealmente independientes** si, escribiendo:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ se tiene que la única solución es:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$$

Caso contrario, es decir, al menos un α_i es **distinto de cero**, entonces diremos que $\{v_1, \ldots, v_r\} \in \mathbb{R}^2$ son **linealmente dependientes**.

Proposición 1

Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. v_1, v_2 son paralelos.
2. v_1, v_2 son linealmente dependientes.
3. Si $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ entonces $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$.

Demostración:

1. Supongamos que v_1, v_2 son paralelos, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $v_1 = tv_2$. Entonces:

$$0 = v_1 - tv_2 = (1)v_1 + (-t)v_2$$

es decir, existen escalares $\alpha_1 = 1 \neq 0$ y $\alpha_2 = -t$ tal que la combinación lineal de v_1, v_2 es nula. Así concluimos que v_1, v_2 son linealmente dependientes.

2. Supongamos que v_1, v_2 son linealmente dependientes, entonces existen escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ no ambos nulos, tales que:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$$

es decir:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_2 &= 0 \quad (1) \\ \alpha y_1 + \beta y_2 &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

De esta última ecuación tenemos los siguientes casos:

a. Si $x_1 = 0$ y $\beta \neq 0$, entonces: $x_2 = 0$ y así $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.
b. Si $x_1 = 0$ y $\beta = 0$, entonces: $\alpha \neq 0$ y $y_1 = 0$ y así $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.
c. Si $x_1 \neq 0$ y $\beta \neq 0$ entonces de (1) y (2) se obtienen respectivamente:

$$-\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{y} \quad y_2 = -\frac{\alpha}{\beta} y_1$$

es decir:

$$y_2 = \left(\frac{x_2}{x_1}\right) y_1 \Rightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0.$$

- d) Si $x_1 \neq 0$ y $\beta = 0$, entonces (1) implica que $\alpha = 0$, lo cual es una contradicción y así este caso no puede darse.

3. Por último, supongamos que $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$. Si $v_1 = 0$ entonces no hay nada que probar. Supongamos que $v_1 \neq 0$, entonces $x_1 \neq 0$ o $y_1 \neq 0$.

   - a) Si $x_1 \neq 0$, entonces: $y_2 = y_1 \dfrac{x_2}{x_1}$, luego:

   $$v_2 = (x_2, y_2) = \left(x_2, y_1 \frac{x_2}{x_1} \right) = \frac{x_2}{x_1}(x_1, y_1) = \frac{x_2}{x_1} v_1$$

   - b) Si $y_1 \neq 0$, entonces: $x_2 = x_1 \dfrac{y_2}{y_1}$, luego:

   $$v_2 = (x_2, y_2) = \left(x_1 \frac{y_2}{y_1}, y_2 \right) = \frac{y_2}{y_1}(x_1, y_1) = \frac{y_2}{y_1} v_1$$

   resultando en ambos casos que v_1, v_2 son paralelos.

Lema 1

Sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^2$ tales que $v_1, \ldots, v_k$ es linealmente dependiente con $k \leq n$. Entonces $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente dependiente.

Demostración:

Como $v_1, \ldots, v_k$ es linealmente dependiente, entonces existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ no todos nulos tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0.$$

Definiendo $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ se obtiene:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \alpha_n v_n = 0.$$

donde nuevamente $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ no son todos nulos. Por tanto, $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes.

Teorema 1

Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ linealmente independientes. Entonces v_1, v_2 generan $\mathbb{R}^2$.

Demostración:

Consideremos $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$. De la Proposición 1 resulta que $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$. Luego, dado cualquier $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ considere los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definidos por:

$$\alpha = \frac{xy_2 - x_2 y}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \quad \text{y} \quad \beta = \frac{x_1 y - x y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

que un cálculo simple muestra que:

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2$$

es decir, v es generado por v_1, v_2.

Proposición 2

Si $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ generan todo $\mathbb{R}^2$ entonces son linealmente independientes.

Demostración:

Supongamos que v_1 y v_2 no son linealmente independientes. Entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $v_2 = tv_1$. Luego, como todo $v \in \mathbb{R}^2$ es generado por v_1, v_2, entonces existen escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha + t\beta)v_1$$

es decir, todo $v \in \mathbb{R}^2$ es paralelo a v_1, lo cual es una contradicción.

Tabla de contenidos

Producto interno de vectores

1. El producto interno o producto punto entre dos vectores es uno de los conceptos más importantes del álgebra lineal puesto que permite definir la longitud de cualquier vector de cualquier tamaño así como el ángulo entre dos vectores del mismo tamaño.
2. Implícitamente se utiliza a la hora de realizar la multiplicación entre matrices pero la motivación principal para el producto punto es el teorema de Pitágoras y la ley de cosenos.

Definición 11 (Producto interno de vectores)

Se define el producto interno usual de dos vectores $\vec{v} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, y $\vec{u} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ como la función

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{u}) & \mapsto & \langle\vec{v}, \vec{u}\rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{array}$$

para el cual es fácil demostrar que satisface las siguientes propiedades:

- $\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
- $\langle\vec{v}, \vec{v}\rangle \geq 0, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$
- $\langle\vec{v}, \vec{u}\rangle = \langle\vec{u}, \vec{v}\rangle, \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$
- $\langle\vec{v} + \vec{w}, \vec{u}\rangle = \langle\vec{v}, \vec{u}\rangle + \langle\vec{w}, \vec{u}\rangle, \forall \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$
- $\langle\lambda\vec{v}, \vec{u}\rangle = \lambda\langle\vec{v}, \vec{u}\rangle, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Observación:

Cualquier función que satisface las propiedades dadas en la Definición 11 es llamado **producto interno**. Algunos ejemplos se muestran a continuación:

Para todo $\vec{v} = (x_1, x_2), \vec{u} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,se tienen los siguientes productos internos en $\mathbb{R}^2$:

1. $$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 3x_1y_1 + 5x_2y_2$$

2. $$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2$$

Probar que los ejemplos anteriores verifican las propiedades dadas en la Definición 11.

Definición 12 (Vector ortogonales)

Decimos que dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ son **ortogonales** cuando $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Nota: Si $\vec{u}, \vec{v}$ son **ortogonales** se denota por $\vec{u} \perp \vec{v}$

Ejemplo: Sean $\vec{v} = (1, 3)$; $\vec{u} = (-3, 1)$ y considerando el producto interno usual en $\mathbb{R}^2$:

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{u} = (1)(-3) + (3)(1) = 0$$

Entonces $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Vector Ortogonal Particular

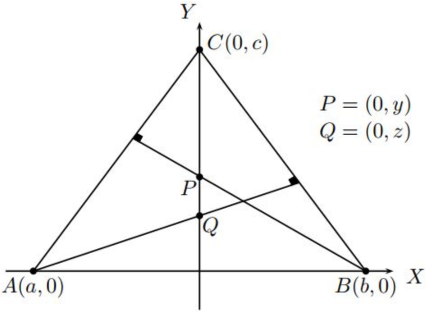
Sea el vector $\vec{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ no nulo. Se asocia un vector ortogonal a $\vec{v}$ no nulo, denotado por $\vec{v}^{\perp}$, de la siguiente manera:

$$\vec{v}^{\perp} = (-b, a)$$

el cual geométricamente es una rotación de 90° en sentido antihorario.

Ejercicio: Pruebe que las alturas de cualquier triángulo se cortan en un único punto.

Solución: Considere un sistema de coordenadas tal que



Se puede observar que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{PB}$

Luego:

$$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PB} \rangle = \langle (-a; c), (b; -y) \rangle = -ab - yc = 0$$

de esto

$$y = -\frac{ab}{c} \qquad (1)$$

Además, se tiene:

$$\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ} \rangle = \langle (-b; c), (-a; z) \rangle = -ab + cz = 0$$

de esto

$$z = -\frac{ab}{c} \qquad (2)$$

De (1) y (2) tendremos:

$$P = Q$$

Norma de un vector y la recta en $\mathbb{R}^2$

RICHARD ACUÑA ORTEGA[1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

21/06/2022

Tabla de contenidos

Definición 1 (Norma de vectores)

Se define la norma (o longitud) de un vector $v = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ como la función:

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \vec{v} & \mapsto & \|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \end{array}$$

donde es fácil demostrar que satisface las siguientes propiedades:

- $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- $\|\vec{v}\| \geq 0, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$
- $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|\vec{v} + \vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|, \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$

Ejemplo: El vector $\vec{v} = (3;4)$ tiene como longitud o módulo:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Definición 2 (Vector unitario)

Se dice que el vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ no nulo es unitario si $\|\vec{u}\| = 1$.

Ejemplos:

1. Los vectores canónicos $\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)$ en $\mathbb{R}^2$ son unitarios. Asi, se tiene que cualquier vector $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se representa por $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
2. El vector $\vec{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ es unitario.

Nota: Para cualquier vector no nulo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, se asocia un vector unitario $\vec{u}$ paralelo a $\vec{v}$ definiendolo por $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, también se denota por $\vec{u}_v$

Observación: Cualquier función que satisface las propiedades de la Definición 1 es llamada **norma** en $\mathbb{R}^2$. A continuación se muestran algunos ejemplos:

1. $$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{3x_1^2 + 5x_2^2}$$
2. $$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{2x_1^2 + 2x_2x_1 + 3x_2^2}$$

Probar por definición que los ejemplos anteriores son normas.

Teorema 1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$, se cumple que:

$$|\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \tag{1}$$

La igualdad en (1) se cumple cuando $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores paralelos.

Demostración:

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\|\lambda \vec{u} + \vec{v}\| \geq 0 \Rightarrow \langle \lambda \vec{u} + \vec{v}, \lambda \vec{u} + \vec{v} \rangle \geq 0$$

aplicando las propiedades del producto interno, resulta un polinomio cuadrático en la variable λ tal que:

$$P(\lambda) = \|\vec{u}\|^2 \lambda^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \lambda + \|\vec{v}\|^2 \geq 0 \ , \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Tenemos los siguientes casos:

1. Si $\vec{u} = \mathbf{0}$ entonces se cumple trivialmente la relación (1).
2. Si $\vec{v} = \mathbf{0}$ también se cumple trivialmente la relación (1).
3. Supongamos ahora que $\vec{u} \neq \mathbf{0}$ y $\vec{v} \neq \mathbf{0}$.Por tanto, $\|\vec{u}\| > 0$ y además el discriminante del polinomio P es:

$$\triangle = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - 4\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

Dado que $P(\lambda) \geq 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y además $\|\vec{u}\| > 0$ entonces debe cumplirse $\triangle \leq 0$. Esto implica que se cumple la relación (1).

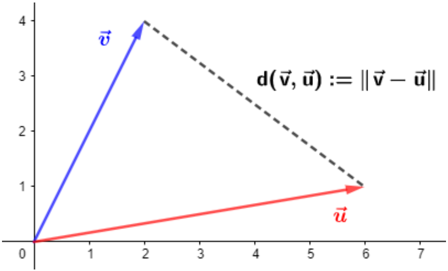
Se deja como ejercicio probar la afirmaciones respecto a los casos en que se cumple la igualdad.

Tabla de contenidos

Definición 3 (Distancia entre vectores)

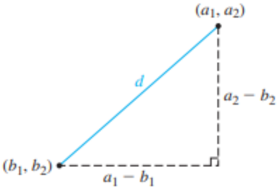
Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$. La distancia entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ es

$$d(\vec{v}, \vec{u}) := \|\vec{v} - \vec{u}\|$$



En términos de vectores, si $\vec{u} = (a_1, a_2)$ y $\vec{v} = (b_1, b_2)$, entonces d es justo la longitud de $\vec{u} - \vec{v}$, como muestra la figura, donde

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = ||\vec{u} - \vec{v}||$$



Ejemplo: Encuentre la distancia entre $\vec{u} = (\sqrt{2}, 1)$ y $\vec{v} = (0, 2)$.

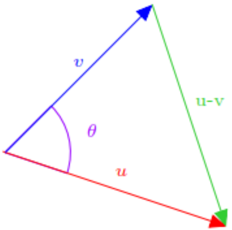
Solución: Calcule $\vec{u} - \vec{v} = (\sqrt{2}, -1)$, de modo que

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u} - \vec{v}|| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}\ .$$

Definición 4 (Ángulo entre vectores)

Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ no nulos. El ángulo formado entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ es

$$\theta := \arccos\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}\right)$$



De lo cual se tiene que: $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{u}\rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}\ ,\ 0 \leq \theta \leq \pi\ .$

Ejemplo: Determine el ángulo entre los vectores $\vec{u} = (1,0)$ y $\vec{v} = (1,1)$ en $\mathbb{R}^2$.

Solución: Se tiene $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (1,0),(1,1) \rangle = 1$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ y $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Así

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de 45°.

Consecuencias

Dado θ el ángulo formado por $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Se tiene que

1. Si $\theta = 0$:

   $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son vectores paralelos, es decir, $\vec{v} = t\vec{u}$ para algún $t \geq 0$.

2. Si $\theta = \pi$:

   $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son vectores antiparalelos, es decir, $\vec{v} = t\vec{u}$ para algún $t < 0$.

3. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son vectores ortogonales, es decir, $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$.

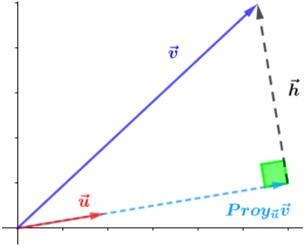
   Observación: Dado que $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0}$ para todo vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, el vector cero es ortogonal a todo vector.

Definición 5 (Proyecciones ortogonales)

Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ no nulos. La **proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$** es

$$Proy_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u}$$

Interpretación geomérica:



Además, del gráfico se observa $\vec{h} = \vec{v} - Proy_{\vec{u}}\vec{v}$.

Definición 6 (Componente Ortogonal)

El componente Ortogonal de $\vec{v}$ en la dirección de $\vec{u}$, denotado por $Comp_{\vec{u}}\vec{v}$, es el escalar $Comp_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|}$.

Propiedades

1. $Proy_{\vec{u}}\vec{v} = (Comp_{\vec{u}}\vec{v})\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$
2. $Proy_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = Proy_{\vec{u}}\vec{v} + Proy_{\vec{u}}\vec{w}$
3. $Proy_{\vec{u}}\vec{\lambda v} = \lambda Proy_{\vec{u}}\vec{v}$, λ escalar

Propiedades

Se cumplen:

1. $\|\vec{v}^{\perp}\| = \|\vec{v}\|$
2. $\langle \vec{v}^{\perp}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v}^{\perp} \rangle = 0$
3. Sea el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ cualesquiera y el vector unitario $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Se cumple

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \langle \vec{v}, \vec{u}^{\perp} \rangle \vec{u}^{\perp}$$

en la propiedad (3) se puede observar:

$$Comp_{\vec{u}} \vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \quad ; \quad Comp_{\vec{u}^{\perp}} \vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u}^{\perp} \rangle$$

Así, (3) se puede reescribir de la siguiente manera.

Propiedad

Sea el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ cualesquiera y el vector unitario $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Se cumple

$$\vec{v} = (Comp_{\vec{u}}\vec{v})\vec{u} + (Comp_{\vec{u}^{\perp}}\vec{v})\vec{u}^{\perp}$$

Ejemplo: Sea el vector $\vec{v} = (5;5)$ y el vector unitario $\vec{u} = (\frac{3}{5}; \frac{4}{5})$. Así, se tiene $\vec{u}^{\perp} = (\frac{-4}{5}; \frac{3}{5})$.
Luego, se obtiene

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 7 \quad \wedge \quad \vec{v} \cdot \vec{u}^{\perp} = -1$$

De este modo

$$\vec{v} = 7\vec{u} + (-1)\vec{u}^{\perp}$$

Propiedad

Para cualesquiera vectores $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ no nulos, se cumple

$$\vec{v} = Proy_{\vec{u}}\vec{v} + Proy_{\vec{u}^\perp}\vec{v}$$

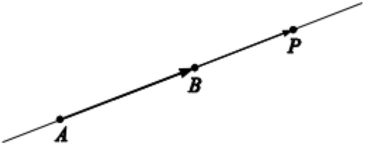
Ejercicio: Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ no nulos.

1. Si $\vec{v} = (2, 1)$ y $\vec{u} = (1, 1)$. Calcule $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$, $Proy_{\vec{u}^\perp}\vec{v}$ y el componente de $\vec{v}$ en $\vec{u}$.
2. Si $\vec{v} = (3, -4)$ y $\vec{u} = (1, 2)$. Calcule $Proy_{\vec{u}}\vec{v}$, $Proy_{\vec{u}^\perp}\vec{v}$ y el componente de $\vec{v}$ en $\vec{u}^\perp$.

Tabla de contenidos

Introducción

Dados los puntos A y B en el plano, el vector $\overrightarrow{AB}$, fija una dirección, de manera que el vector $t\overrightarrow{AB}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$, (tendrá el mismo sentido que $\overrightarrow{AB}$ si $t > 0$ y sentido contrario si $t < 0$).



En la figura se observa que el punto $P = A + t\overrightarrow{AB}$ es **un punto colonial** con A y B; y en general, haciendo variar t encontramos una infinidad de **puntos colineales** entre sí y colineales con A y B.
Este razonamiento nos lleva a la siguiente definición.

Ecuación vectorial de la recta

Definición 7 (Rectas en $\mathbb{R}^2$)

Se llama recta L que contiene al punto P_0 en la dirección del vector $\vec{a}$ no nulo, y se denota $L(P_0, \vec{a})$, al conjunto de puntos

$$L(P_0, \vec{a}) = \{P \in \mathbb{R}^2 : \; P = P_0 + t\vec{a}\,, \text{ para algún } \; t \in \mathbb{R}\}$$

Al coeficiente t (que puede ser r, s, etc.) se le llama **parámetro**, y también se dice que

$$P = P_0 + t\vec{a}$$

es una **ecuación vectorial de la recta** $L(P_0, \vec{a})$. Vea la figura 1.

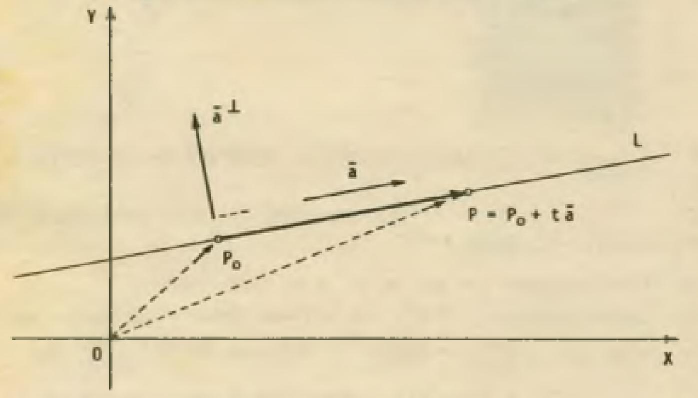


Figura 1: Recta $L(P_0, \vec{a})$, que contiene a P_0 en la dirección de $\vec{a}$.

Ejemplo: Determine una ecuación vectorial para la recta que contiene los puntos $A = (-1, 2)$ y $B = (3, -1)$.

Solución: Como A y B son puntos de la recta, el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene la dirección de esta, demanera que:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (3, -1) - (-1, 2) \\ &= (4, -3) \end{aligned}$$

Así, una ecuación vectorial para la recta es:

$$(x, y) = (-1, 2) + t(4, -3)\ ,\ \ t \in \mathbb{R}$$

Observación 1

- Naturalmente, la descripción de la recta $L(P_0, \vec{a})$ mediante una ecuación vectorial **no es única**, puesto que el punto P_0 y el vector $\vec{a}$ se pueden elegir de infinidad de maneras.
- Al vector $\vec{a}$ se le denomina **vector director o direccional** de la recta L.
- Sea $\vec{a} = (a_1, a_2)$ un vector direccional de una recta L, entonces:
  a) si $a_1 = 0$, entonces L es una recta vertical.
  b) si $a_2 = 0$, entonces L es una recta horizontal.

Teorema 2

Un punto P pertenecerá a la recta $L(P_0, \vec{a}) \iff$ el vector $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$ es paralelo al vector $\vec{a} \iff \langle P - P_0, \vec{a}^{\perp} \rangle = 0$

Demostración: Del hecho

$$P \in L(P_0, \vec{a}) \iff \overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}\,,\ t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\langle P - P_0, \vec{a}^{\perp} \rangle = t\langle \vec{a}, \vec{a}^{\perp} \rangle \iff \langle P - P_0, \vec{a}^{\perp} \rangle = 0$$

Ejercicio: Dados los conjuntos:

$$L_1 = \{P = (2t+1, -3t+3)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}\ ,$$

$$L_2 = \{P = (3-4r, 6r)\ ,\ r \in \mathbb{R}\}\ ,$$

probar que L_1 y L_2 representan rectas y que $L_1 = L_2$.

Solución: Vemos que los conjuntos dados se pueden expresar como

$$L_1 = \{P = (1,3) + t(2,-3)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$
$$L_2 = \{P = (3,0) + r(-4,6)\ ,\ r \in \mathbb{R}\}$$

entonces L_1 y L_2 son rectas por definición.

Ahora probaremos que $L_1 = L_2$:

Sea $P_1 \in L_1$: $P_1 = (1,3) + t_1(2,-3)$ para algún $t_1 \in \mathbb{R}$, entonces

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (1,3) + t_1(2,-3) + (3,0) - (3,0) \\
&= (3,0) + t_1(2,-3) - (2,-3) \\
&= (3,0) + (t_1 - 1)(2,-3) \\
&= (3,0) - \frac{(t_1 - 1)}{2}(-4,6)
\end{aligned}
$$

así $P_1 = (3,0) + r_1(-4,6)$ para algún $r_1 = -\frac{(t_1-1)}{2} \in \mathbb{R}$, entonces

$$P_1 \in L_2 \quad \Longrightarrow \quad L_1 \subset L_2 \, .$$

En forma similar podemos probar que $L_2 \subset L_1$. Finalmente $L_1 = L_2$.

Definición 8 (Ecuaciones parámetricas de la recta)

Dada la ecuación vectorial para una recta $L(P_0, \vec{a})$ en $\mathbb{R}^2$,

$$P = P_0 + t\vec{a}$$
$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a_1, a_2)$$

si se efectúan las operaciones vectoriales indicadas, se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + ta_1 \\ y & = & y_0 + ta_2 \end{array}$$

que son denominadas **las ecuaciones parámetricas** de la recta L.

Ejemplo: Halle las ecuaciones parámetricas de la recta que pasa por $A = (1, -2)$ y $B = (5, 7)$.

Solución: La recta L que pasa por $A = (1, -2)$ y $B = (5, 7)$ tiene ecuación vectorial

$$P = A + t\overrightarrow{AB}\ , t \in \mathbb{R}$$

donde $P = (x, y)$ es un punto en la recta L. Si escribimos lo anterior usando coordenadas:

$$(x, y) = (1, -2) + t(4, 9)$$

y las ecuaciones parámetricas para L quedan:

$$x = 1 + 4t$$
$$y = -2 + 9t$$

Definición 9 (Ecuaciones simétricas de la recta)

Sea la recta $L(P_0, \vec{a})$ donde $P_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{a} = (a_1, a_2)$ con $a_1 \neq 0$ y $a_2 \neq 0$ (es decir que, L no es vertical ni horizontal) y $P = (x, y) \in L$, entonces al par de ecuaciones simultáneas:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

se les llama **ecuaciones simétricas** de la recta L .

Ejemplo: Halle las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por $A = (1, -2)$ y $B = (5, 7)$.

Solución: Del ejemplo anterior, la recta L que pasa por $A = (1, -2)$ y $B = (5, 7)$ tiene las ecuaciones parámetricas siguientes:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= -2 + 9t \end{aligned}$$

así las ecuaciones simétricas de la recta L es:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{9}$$

Se dice que la recta $L(P_0, \vec{a})$ y un vector $\vec{n}$ no nulo, **son ortogonales** si es que $\vec{a}$ y $\vec{n}$ son ortogonales. Vea la figura 2.

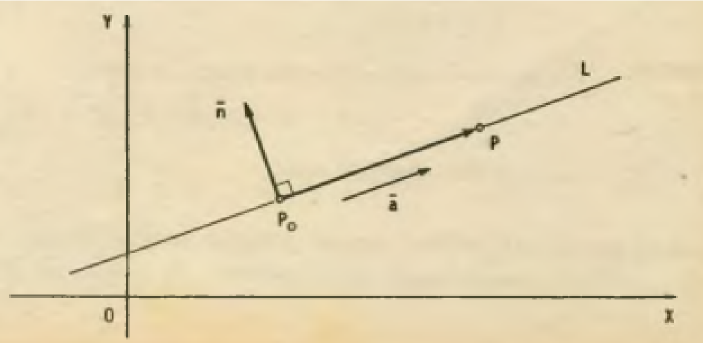


Figura 2:

A cualquier vector $\vec{n}$ no nulo, ortogonal a L se le llama **vector normal** a L, y puede ser elegido como vector

$$\vec{n} = \vec{a}^{\perp} \quad \text{ó cualquier vector múltiplo de } \vec{a}^{\perp} .$$

Teorema 3 (Ecuación normal)

Un punto P pertenecerá a la recta L que tiene como punto de paso P_0 y vector normal $\vec{n} \iff$ el vector $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$ es **ortogonal** al vector $\vec{n}$.
Es decir

$$P \in L \quad \iff \quad \langle P - P_0, \vec{n} \rangle = 0 \qquad\qquad (*)$$

A esta última ecuación $(*)$ se le conoce como **la ecuación normal** de la recta L que pasa por P_0 y (es ortogonal) tiene vector normal $\vec{n}$.

Tabla de contenidos

Ecuación general de la recta

Si consideramos $P = (x, y)$, $\vec{n} = (a, b)$, y $\langle P_0, \vec{n} \rangle = -c$, entonces $(*)$ se convierte en:

$$\begin{aligned} \langle P, \vec{n} \rangle &= \langle P_0, \vec{n} \rangle \\ ax + by &= -c \end{aligned}$$

entonces

$$ax + by + c = 0$$

que es llamada la **ecuación general** de la recta L normal al vector $\vec{n} = (a, b)$.

Ejemplo: Hallar la **ecuación normal** y la **ecuación general** de la recta L que pasa por los puntos $P_1 = (1,3)$ y $P_2 = (4,1)$.

Solución: Consideraremos como vector direccional al vector $\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (3,-2)$ y como vector normal al vector $\vec{n} = \vec{a}^{\perp} = (2,3)$, vea la figura 3, y puesto que un punto de paso puede ser cualquier punto de la recta (P_1 ó P_2), entonces elegimos como P_0 al vector: $P_0 = P_2 = (4,1)$. De esta manera se tiene que, para un punto genérico $P = (x,y) \in L$, se tiene

$$\langle P - P_0, \vec{n} \rangle = 0 \qquad (1)$$

entonces la **ecuación general** de L es

$$\langle P - (4,1), (2,3) \rangle = 0$$

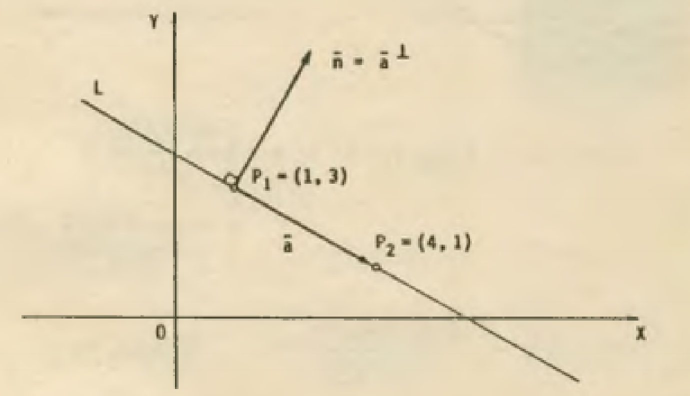


Figura 3:

De la ecuación (1) tenemos

$$\langle P, \vec{n} \rangle \;=\; \langle P_0, \vec{n} \rangle$$

$$\Longrightarrow \langle (x, y), (2, 3) \rangle \;=\; \langle (4, 1), (2, 3) \rangle$$

entonces

$$2x + 3y \;=\; 11\ , \quad \text{ó sino} \quad 2x + 3y - 11 \;= 0\ ,$$

que viene a ser las **ecuaciones generales** de la recta L .

RECTAS EN EL PLANO EUCLIDIANO

RICHARD ACUÑA ORTEGA[1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

23/06/2022

Tabla de contenidos

Definición 1 (Ángulo de inclinación de la recta)

Para la recta $L(P_0, \vec{a})$, se tiene

a) Si $\vec{a}$ tiene ángulo de inclinación $\theta \in [0, \pi\rangle$, entonces se dice que θ es el **ángulo de inclinación** de L .

b) Si $\vec{a}$ tiene ángulo de inclinación $\theta \in [\pi, 2\pi\rangle$, se dice que $\theta - \pi$ es el **ángulo de inclinación** de L . Es decir, que $\theta - \pi$ es el ángulo de inclinación de $-\vec{a}$.

De esta definición se sigue que el **ángulo de inclinación** de una recta L solo varía entre 0 y π radianes. Vea la figura 1.

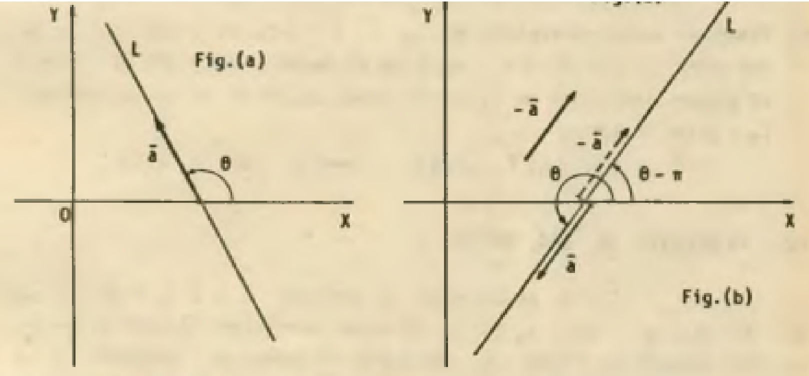


Figura 1:

Teorema 1

Dada la recta $L(P_0, \vec{a})$, entonces el vector $\vec{a} = (a_1, a_2)$ tiene el mismo ángulo de inclinación que la recta $L \iff a_2 \geq 0$.

Demostración: Sea $\vec{u} = (u_1, u_2)$ el vector unitario en la misma dirección de $\vec{a}$, es decir, $\vec{a} = |\vec{a}|.\vec{u} = (a_1, a_2)$, entonces $\vec{u}$ tiene el mismo ángulo de inclinación de L si y solo si $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, con $\theta \in [0, \pi\rangle$ si y solo si $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ si y solo si $\dfrac{a_2}{\|\vec{a}\|} \geq 0$.

Ejemplo: Hallar el coseno del ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas:

a) $L_1 : (1,1) + t(-2,1)$

b) $L_2 : s(1,-3)$

c) $L_3 : (1,0) + r(-2,-4)$

Solución:

a) Consideramos el vector direccional de $L_1 : \vec{a} = (-2,1) = (a_1, a_2)$ que por tener $a_2 > 0$, entonces $\vec{a}$ tiene el mismo ángulo de inclinación que L_1, y $\vec{a} = |\vec{a}|.(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, entonces $\cos\theta = -2/\sqrt{5}$.

b) Consideremos el vector direccional de L_2 , $\vec{b} = (1, -3) = (b_1, b_2)$ que por tener $b_2 = -3 < 0$, se elige a $(-\vec{b}) = (-1, 3)$ como el vector que tiene el mismo ángulo θ de inclinación de L , entonces $-\vec{b} = |\vec{b}|(-1/\sqrt{10}), 3/\sqrt{10})$, así $\cos\theta = -1/\sqrt{10}$.

c) Siendo el vector direccional de L_3 , $\vec{c} = (-2, -4) = (c_1, c_2)$ y por tener $c_2 = -4 < 0$, se elige el vector $-\vec{c} = (2, 4)$ como el vector direccional de L con el mismo ángulo θ de inclinación que L y por lo tanto $-\vec{c} = |\vec{c}|.(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, entonces $\cos\theta = 1/\sqrt{5}$.

Definición 2 (Pendiente de la recta)

Si L es una recta no vertical $L(P_0, \vec{a})$, y θ su ángulo de inclinación, la **pendiente** de la recta L, denotada por m, se define como el valor de la tangente de su ángulo de inclinación. Es decir,

$$m = \tan\theta \,, \qquad (1)$$

siendo $0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

El número m se conoce también con el nombre de **coeficiente angular** de la recta L .

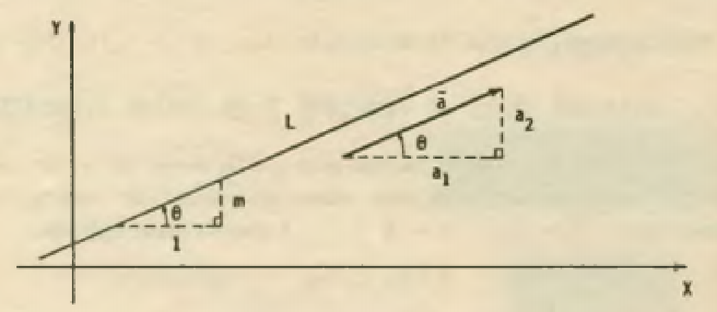
De modo que si se expresa $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, a_2/a_1)$ entonces:

$$m = \tan\theta = a_2/a_1 \,, \text{ para la figura siguiente y la figura 1.a}$$

$$m = \tan\theta = (-a_2)/(-a_1) = a_2/a_1 \,, \text{ como en la figura 1.b}$$

Así, resulta que si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ es cualquier vector direccional de una recta L no vertical, entonces

$$m \text{ es la } \textbf{pendiente} \text{ de } L \iff m = a_2/a_1$$



Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos sobre una recta no vertical L (figura 2), entonces, de acuerdo a la definición de pendiente, se tiene que

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ ,\ x_2 \neq x_1\ . \qquad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) son equivalentes y en lo sucesivo se hará uso indistinto de ellas.

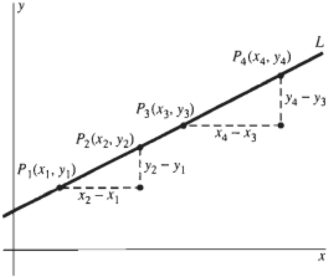


Figura 2: El resultado del cálculo no depende de los puntos de L que se usen.

Recordemos que los lados correspondientes de triángulos semejantes (es decir, con ángulos iguales) tienen razones iguales.
Por tanto, si $P_3 = (x_3, y_3)$ y $P_4 = (x_4, y_4)$ son dos puntos distintos en L, entonces la semejanza de los triángulos de la figura 2 implica que

$$m = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En consecuencia, la pendiente m definida en la ecuación (2) no depende de una elección particular de P_1 y P_2.

Si la recta L es horizontal, entonces $y_2 - y_1 = 0$. En este caso la ecuación (2) da $m = 0$. Si L es vertical, entonces $x_2 - x_1 = 0$ y la pendiente de L no está definida. Por lo que tenemos las siguientes proposiciones:

Las rectas horizontales tienen pendiente nula.

Las rectas verticales no tienen pendiente definida.

Tabla de contenidos

Definición 3 (La ecuación punto-pendiente)

El punto $P = (x, y)$ está en la recta L con pendiente m y pasa por el punto fijo $P_0 = (x_0, y_0)$ si y solo si satisface la ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (3)$$

La ecuación (3) es la ecuación **punto-pendiente** de L, debido en parte a que las coordenadas del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ y la pendiente m de L se pueden leer directamente de la ecuación.

Ejemplo: Escriba la ecuación general de la recta L que pasa por los puntos $P_1 = (1, -1)$ y $P_2 = (3, 5)$.

Solución: La pendiente m de L se puede obtener de los puntos dados:

$$m = \frac{5 - (-1)}{3 - 1} = 3 \; .$$

Cualquiera de los puntos P_1 o P_2 puede servir como punto fijo. Usaremos $P_1 = (1, -1)$. Entonces, con la ayuda de la ecuación (3), la ecuación punto-pendiente de L es

$$y + 1 = 3(x - 1)$$

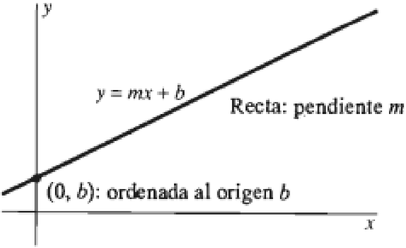
Si es adecuada la simplificación, escribimos $3x - y - 4 = 0$.

La ecuación punto-ordenada al origen

La ecuación (3) se puede escribir de la forma

$$y = mx + b \qquad (4)$$

donde $b = y_0 - mx_0$ es una constante. Como $y = b$ cuando $x = 0$, la **ordenada al origen** de L es el punto $(0, b)$ que se muestra en la figura siguiente.



Las ecuaciones (3) y (4) son formas diferentes de la ecuación de una linea recta. Tendremos la siguiente definición:

Definición 4 (La ecuación punto-ordenada al origen)

El punto $P = (x, y)$ está en la recta con pendiente m y ordenada al origen b si y solo si las coordenadas de P satisfacen la ecuación

$$y = mx + b$$

Ejemplo: Determine la ordenada al origen de la recta L que pasa por los puntos $P_1 = (1, -1)$ y $P_2 = (3, 5)$.

Solución: Del ejemplo 2, tenemos

$$L: \ 3x - y = 4$$

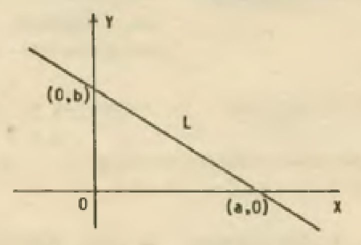
entonces

$$L: \ y = 3x - 4 \Rightarrow b = -4$$

por tanto, la ordenada al origen es $(0, b) = (0, -4)$.

La ecuación simétrica de una recta no vertical

Una recta L no vertical que corta a los ejes X, Y en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ respectivamente, tiene como ecuación



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

que es llamada la **ecuación simétrica de L.**

Ejemplo: Hallar la ecuación general de las rectas que pasan por $(4,-1)$ y que determinan con los ejes coordenados segmentos cuya suma algebraica es de 3 unidades.

Solución: Si $(a,0)$ y $(0,b)$ son los puntos de intersección con los ejes, entonces $a+b=3$, y su ecuación es $L: \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, como $(4,-1)\in L$, entonces

$$\frac{4}{a}-\frac{1}{b}=1 \Longrightarrow 4b-a=ab \Longrightarrow 4(3-a)-a=a(3-a)$$

$$\Longrightarrow a^2-8a+12=0 \Longrightarrow (a-6)(a-2)=0$$

$$\Longrightarrow a=6 \ \text{ y } \ b=-3 \quad \text{o} \quad a=2 \ \text{ y } \ b=1$$

Existen dos rectas con las condiciones del ejercicio:

$$L_1: \frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1, \quad L_2: \frac{x}{2}+y=1\ .$$

Definición 5 (Segmento cerrado)

Dados los puntos $P_0,\ P_1 \in L \subset \mathbb{R}^2$, se llama **segmento cerrado** $[P_0, P_1]$ al conjunto

$$[P_0, P_1] = \{P = P_0 + t\overrightarrow{P_0P_1}\ /\ t \in [0,1]\} \subset L$$

Al segmento cerrado $[P_0, P_1]$ también se le denota por $\overline{P_0P_1}$ simplemente y es el segmento de la recta L, comprendido entre P_0 y P_1.

Ejemplo: Encontrar los puntos que dividen al segmento $\overline{AB}$ de extremos $A = (-1, 1)$ y $B = (49, 31)$ en cinco partes iguales.

Solución:

Sabemos que

$$P \in [A, B] = \overline{AB} \iff P = A + t\overrightarrow{AB}\ ,\ \ t \in [0, 1]$$

entonces

$$P_k = A + \left(\frac{k}{5}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = A + \left(\frac{k}{5}\right) \cdot (B - A)\ ;\ \ k = 1, 2, 3, 4$$

así

$$P_1 = A + \left(\frac{1}{5}\right) \cdot (B - A) = (-1, 1) + \left(\frac{1}{5}\right) \cdot (50, 30) = (9, 7)$$

$$P_2 = A + \left(\frac{2}{5}\right) \cdot (B - A) = (-1, 1) + \left(\frac{2}{5}\right) \cdot (50, 30) = (19, 13)$$

$$P_3 = A + \left(\frac{3}{5}\right) \cdot (B - A) = (-1, 1) + \left(\frac{3}{5}\right) \cdot (50, 30) = (29, 19)$$

$$P_4 = A + \left(\frac{4}{5}\right) \cdot (B - A) = (-1, 1) + \left(\frac{4}{5}\right) \cdot (50, 30) = (39, 25)$$

División de un segmento en una razón dada

Definición 6

Considere los puntos $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$. Considere el segmento $\overline{PQ}$. Decimos que el punto R divide al segmento $\overline{PQ}$ en una razón $r \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$ cuando:

$$\overrightarrow{PR} = r \cdot \overrightarrow{RQ}$$

Observación:

- Cuando $r > 0$, el punto R está en el interior del segmento $\overline{PQ}$, es decir, los vectores $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ tienen el mismo sentido.(Figura 3)
- Cuando $r < 0$, el punto R está en la prolongación del segmento $\overline{PQ}$, es decir, los vectores $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ tienen el sentido contrario.(Figura 4)

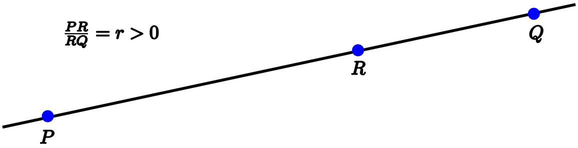


Figura 3: R está en el interior del $\overline{PQ}$.

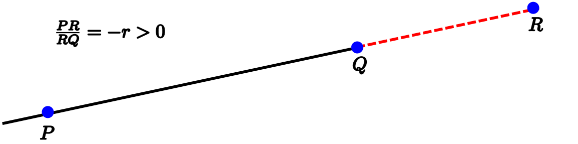


Figura 4: R está en la prolongación del $\overline{PQ}$.

Observe

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$$

entonces

$$\overrightarrow{PQ} = r\,\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RQ} = (r+1)\overrightarrow{RQ}$$

$$\Longrightarrow Q - P = (r+1)(Q-R)$$

despejando R se obtiene

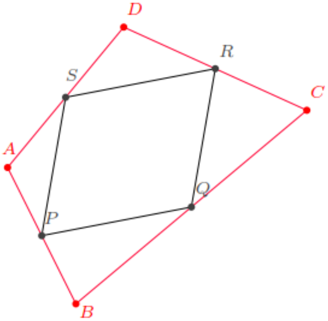
$$R = \left(\frac{1}{r+1}\right)P + \left(\frac{r}{r+1}\right)Q \qquad (1)$$

Observación:

Si $r = \dfrac{m}{n}$ donde $m,\ n \in \mathbb{R}$; con $\dfrac{m}{n} \neq -1$ y $n \neq 0$ en (1) tendremos

$$R = \left(\frac{n}{n+m}\right)P + \left(\frac{m}{n+m}\right)Q$$

Ejemplo: Considere el cuadrilátero con vértices A, B, C y D que se muestra a continuación



Si P, Q, R, S son los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente. Muestre que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$.

Solución:

Como P es el punto medio de $\overline{AB}$ se tiene que

$$\overrightarrow{AP} = P - A = \overrightarrow{PB} = B - P = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(B - A)$$

De manera similar se procede para Q, R y S, es decir,

$$\overrightarrow{BQ} = Q - B = \overrightarrow{QC} = C - Q = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(C - B)$$

$$\overrightarrow{CR} = R - C = \overrightarrow{RD} = D - R = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(D - C)$$

$$\overrightarrow{DS} = S - D = \overrightarrow{SA} = A - S = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(A - D)$$

Ahora bien, de la interpretación de suma de vectores se tiene que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$$

y diviendo la ecuación anterior por 2 se tiene

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2} + \frac{\overrightarrow{DA}}{2} = 0$$

por las ecuaciones de arriba esto puede escribirse como

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} + \overrightarrow{SA} = 0$$

pero de la interpretación geométrica también se tiene que A

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{SP} \quad ; \quad \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{QR}$$

sustituyendo arriba se llega a

$$\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{QR} = 0$$

es decir,

$$-\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{QR} \Longleftrightarrow \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}.$$

Finalmente,

$$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{SR} = Q - P - (S - R) = -(R - Q) + S - P = -\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{PS} = 0$$

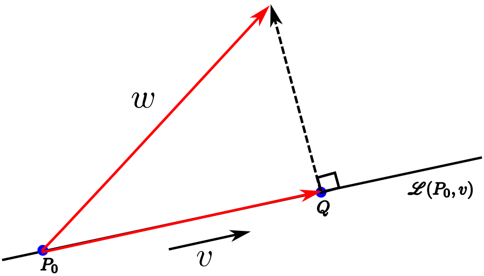
donde la última igualdad se da por ($\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$). Así, se tiene que

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}\,.$$

Tabla de contenidos

Proyección ortogonal de un vector sobre una recta

Sea la recta $\mathcal{L}(P_0, v)$ y un vector $w \in \mathbb{R}^2$. Se obtiene la figura:



De la figura se observa que:

$$\overrightarrow{P_0Q} \parallel v$$

Luego:

$$\overrightarrow{P_0Q} = Proy_{\overrightarrow{PQ}}(w) = Proy_v(w) = \frac{\langle w, v\rangle}{\|v\|^2}v$$

por tanto:

$$P_0Q = |Comp_v(w)| = \left|\frac{\langle w, v\rangle}{\|v\|}\right|$$

Observación:

- Si $Comp_v(w) > 0$ entonces $\overrightarrow{P_0Q}$ y $Proy_{\overrightarrow{P_0Q}}(w)$ tienen el mismo sentido.
- Si $Comp_v(w) < 0$ entonces $\overrightarrow{P_0Q}$ y $Proy_{\overrightarrow{P_0Q}}(w)$ tienen sentido contrario.

DISTANCIA, PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD Y ANGULO ENTRE RECTAS EN EL PLANO EUCLIDIANO

RICHARD ACUÑA ORTEGA[1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

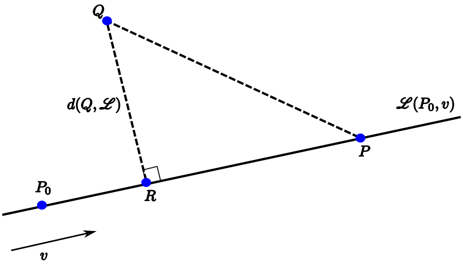
28/06/2022

Tabla de contenidos

Sea $P_0 \in \mathbb{R}^2$ un punto y $v \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo. Tenemos la recta:

$$\mathcal{L} : \mathcal{L}(P_0, v) = \{P \in \mathbb{R}^2 \,/\, P = P_0 + tv,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Sea $Q \in \mathbb{R}^2$ un punto cualquiera. Deseamos calcular $d(Q, \mathcal{L})$ que denota la distancia del punto Q hacia la recta $\mathcal{L}$.



De la figura observe que: $R = P_0 + tv$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

Además:

$$\langle \overrightarrow{QR}, v\rangle = \langle R - Q, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle P_0 + tv - Q, v\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle P_0 - Q, v\rangle + t\langle v, v\rangle = 0$$

de donde se obtiene:

$$t = \frac{\langle Q - P_0, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

Por tanto:

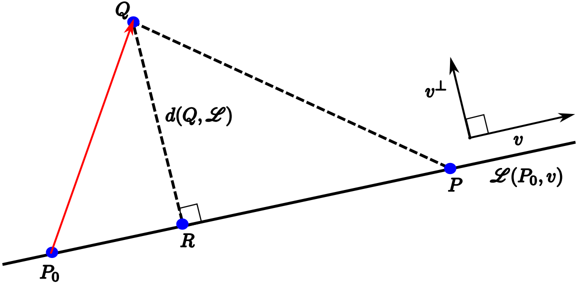
$$R = P_0 + \frac{\langle Q - P_0, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v$$

El punto R es llamado **proyección** del punto Q sobre la recta $\mathcal{L}$.

Fórmula de la distancia usando la ecuación general

Sea la recta $\mathcal{L} : ax + by + c = 0$. En su forma vectorial, su vector dirección viene dado por $v = (-b, a)$. Considere $Q = (\hat{x}, \hat{y})$ un punto de $\mathbb{R}^2$ y $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{L} = \mathcal{L}(P_0, v)$.

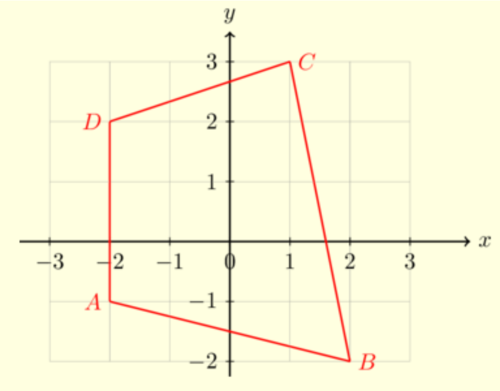
Del gráfico siguiente:



Observe: $v^{\perp} = (-a, -b)$ y también:

$$
\begin{aligned}
d(Q,\mathcal{L}) &= \left\| Proy_{v^{\perp}}(\overrightarrow{P_0Q}) \right\| = \left| Comp_{v^{\perp}}(\overrightarrow{P_0Q}) \right| \\
&= \left| \frac{\langle Q - P_0, v^{\perp} \rangle}{\| v^{\perp} \|} \right| = \left| \frac{\langle (\hat{x},\hat{y}) - (x_0,y_0), v \rangle}{\| v \|} \right| \\
&= \left| \frac{\langle (\hat{x} - x_0, \hat{y} - y_0), (-a,-b) \rangle}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| \\
&= \left| \frac{a\hat{x} + b\hat{y} - (ax_0 + by_0)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \left| \frac{a\hat{x} + b\hat{y} - (-c)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| \\
d(Q,\mathcal{L}) &= \left| \frac{a\hat{x} + b\hat{y} + c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Calcula el área del cuadrilátero que tiene sus vértices en los puntos $A(-2,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$ y $D(-2,2)$.



Solución:

Vamos a calcular la longitud de la diagonal $\overrightarrow{AC}$ usando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos:

$$\|\overrightarrow{AC}\| = 5$$

Ya tenemos la longitud de la base de los triángulos. Calculemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y C. Es decir,

$$\mathcal{L}_{AC} : 4x - 3y + 5 = 0.$$

Ahora calculamos la altura del triángulo ACD, hallando la distancia de un punto a una recta:

$$d(D, \mathcal{L}_{AC}) = \frac{9}{5}$$

Así, el área de este triángulo es

$$A_{ACD} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\| d(D, \mathcal{L}_{AC})}{2} = \frac{9}{2}$$

De manera, similar calculamos el área del triangulo ABC, obteniendo

$$A_{ABC} = \frac{\|\overrightarrow{AC}\| d(B, \mathcal{L}_{AC})}{2} = \frac{19}{2}$$

Finalmente, como ya sabemos que el área del cuadrilátero es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos, sumamos esas áreas:

$$A_{ABCD} = \frac{19}{2} + \frac{9}{2} = 14 \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejemplo: Dadas dos rectas paralelas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ cuyas ecuaciones son

$$\mathcal{L}_1 : a_1x_1 + a_2x_2 + b_1 = 0$$

$$\mathcal{L}_2 : a_1x_1 + a_2x_2 + b_2 = 0$$

pruebe que la distancia de un punto cualquiera de $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ es constante. A esta distancia se la llama distancia de $\mathcal{L}_1$ a $\mathcal{L}_2$ y es

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \frac{|b_1 - b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

Solución:

Sea $P = (p_1, p_2)$ un punto cualquiera de $\mathcal{L}_1$, tal que $a_1 p_1 + a_2 p_2 + b_1 = 0$. Luego, la distancia de P a $\mathcal{L}_2$ es

$$d(P, \mathcal{L}_2) = \frac{|a_1 p_1 + a_2 p_2 + b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{|-b_1 + b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

que es constante (no depende quien sea $P \in \mathcal{L}_1$).

Tabla de contenidos

Explorando Rectas Paralelas y Perpendiculares

Podemos usar álgebra vectorial para deducir algunas propiedades de rectas en dos dimensiones:

- Si $P, Q \in \mathbb{R}^2$ puntos distintos.
- La recta $\mathcal{L}$ que pasa por estos puntos es

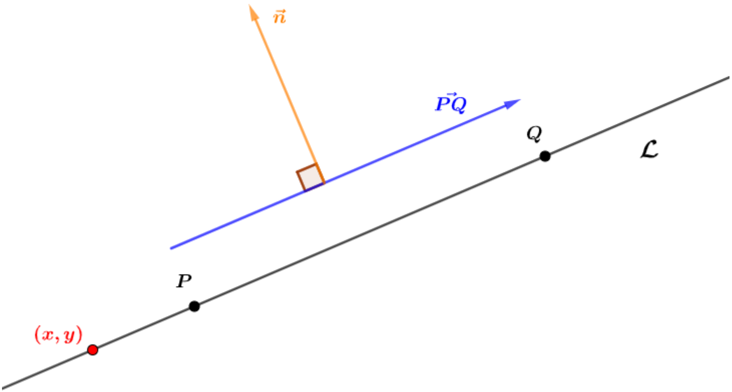
$$\mathcal{L} : (x, y) = P + t\overrightarrow{PQ} = P + t(Q - P)\ ,\ \ t \in \mathbb{R}$$

- Un vector $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ es perpendicular a $\mathcal{L}$ si y solo si

$$\langle \vec{n}, Q - P \rangle = 0$$

Observación:

En $\mathbb{R}^2$, todas las rectas perpendiculares a $\mathcal{L}$ son paralelas entre sí.



$\vec{n}$
$\vec{PQ}$
Q
$\mathcal{L}$
P
(x, y)

- Si $\vec{n} = (a, b)$ es normal a la recta $\mathcal{L}$, entonces

$$(x, y) \in \mathcal{L} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle n, (x, y) - P \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ax + by = \langle n, P \rangle$$

- Si $\vec{n} = (a, b)$ es normal a la recta $\mathcal{L}$, la ecuación cartesiana de $\mathcal{L}$ es

$$ax + by + c = 0 \ , \ \text{con } c = -\langle n, P \rangle$$

Explorando Rectas Paralelas y Perpendiculares

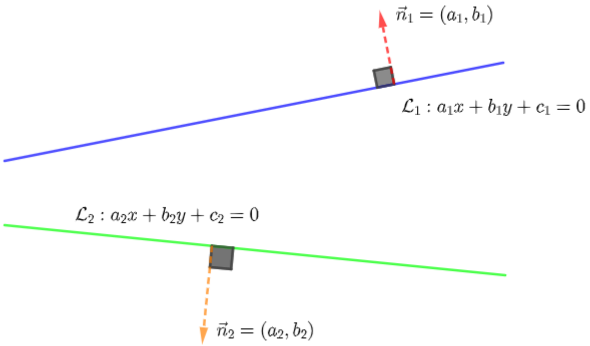
- Sean $b_1,\ b_2 \neq 0$. Consideremos las rectas:

$$\mathcal{L}_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0\ .$$

- Luego, $\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$ es normal a $\mathcal{L}_1$ y $\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$ es normal a $\mathcal{L}_2$.
- Dividiendo por b_1 y b_2 en las ecuaciones respectivas, las ecuaciones se pueden escribir como:

$$\mathcal{L}_1 : \frac{a_1}{b_1} x + y + \frac{c_1}{b_1} = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2 : \frac{a_2}{b_2} x + y + \frac{c_2}{b_2} = 0.$$

- Luego, $\overrightarrow{N_1} = \left(\frac{a_1}{b_1}, 1\right)$ es normal a $\mathcal{L}_1$ y $\overrightarrow{N_2} = \left(\frac{a_2}{b_2}, 1\right)$ es normal a $\mathcal{L}_2$.


$\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$
$\mathcal{L}_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$
$\mathcal{L}_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$
$\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$

Por lo tanto,

- $$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \iff \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = 0 \quad \iff \quad \langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 0 \iff \left(\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$$

  Observación:

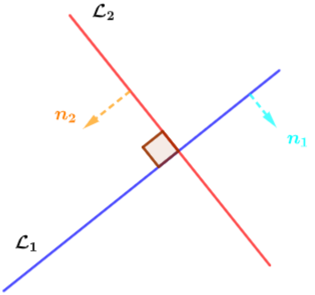
  En particular, las rectas $y = m_1 x + d_1$ y $y = m_2 x + d_2$ son perpendiculares si y solo sí $m_1 m_2 = -1$.

- $$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \quad \iff \quad \overrightarrow{N_1} = \lambda \overrightarrow{N_2} \quad \iff \quad \frac{a_1}{b_1} = \lambda \frac{a_2}{b_2}$$

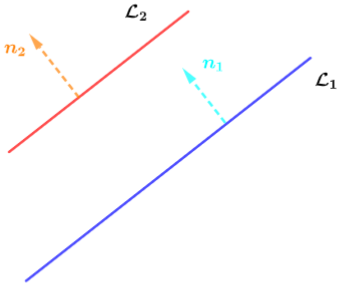
  Observación:

  En particular, las rectas $y = m_1 x + d_1$ y $y = m_2 x + d_2$ son paralelas si y solo sí existe un $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $m_1 = \lambda m_2$.

Explorando Rectas Paralelas y Perpendiculares



$$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2$$



$$\mathcal{L}_1 || \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow n_1 || n_2$$

Ejemplo:

a) Encontrar la pendiente de una recta que es paralela a la recta $y = -3x + 4$.

b) Determina si las rectas $y = 6x + 5$ y $y = 6x - 1$ son paralelas.

c) Encontrar la pendiente de la recta perpendicular a la recta $y = 2x - 6$.

d) Determinar si las rectas $y = -8x + 5$ y $y = \frac{1}{8}x + -9$ son paralelas, perpendiculares, o ninguna.

e) Escribir la ecuación de una recta que sea paralela a la recta $x - y = 5$ y pase por el punto $(-2, 1)$.

f) Escribir la ecuación de una recta que contenga el punto $(1, 5)$ y sea perpendicular a la recta $y = 2x - 6$.

g) Escribir la ecuación de una recta que sea paralela a $y = 4$.

Explorando la intersección y el ángulo entre rectas

- Sean $b_1,\ b_2 \neq 0$. Consideremos las rectas

$$\mathcal{L}_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

  donde $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$.

- Sabemos que $\vec{n}_1 = (a_1, b_1)$ y $\vec{n}_2 = (a_2, b_2)$ son los vectores normales de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente.
- $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ si y solo si $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$
- Entonces, tenemos que

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset \iff \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$$

- Lo cual equivale a

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset \iff \vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$$

Explorando la intersección y el ángulo entre rectas

- Si $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, entonces

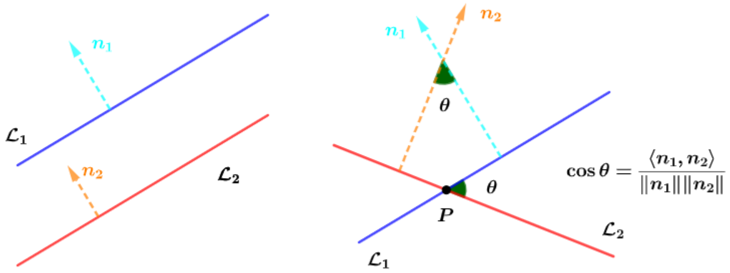
$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{(x, y) : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0\}$$

- El ángulo θ formado por $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|} \Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}\right)$$

Explorando la intersección y el ángulo entre rectas

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset \Leftrightarrow \theta = 0^\circ$$



$$\mathcal{L}_1 \nparallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow n_1 \nparallel n_2 \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$$

Explorando la intersección y el ángulo entre rectas

- Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$ no nulos. Para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, sean las rectas

$$\mathcal{L}_1 : (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda\vec{v} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2 : (x, y) = (x_1, y_1) + \beta\vec{u} \, .$$

- $\vec{v} \parallel \vec{u}$ si y solo si $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$
- Entonces, tenemos que

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{u}$$

- Lo cual equivale a

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \vec{v} \nparallel \vec{u}$$

Explorando la intersección y el ángulo entre rectas

- Si $\vec{v} \nparallel \vec{u}$, entonces

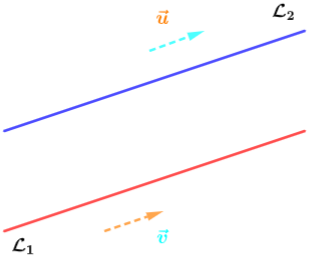
$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{(x,y) : (x,y) = (x_0, y_0) + \lambda\vec{v}\ ,\ (x,y) = (x_1, y_1) + \beta\vec{u}\}$$

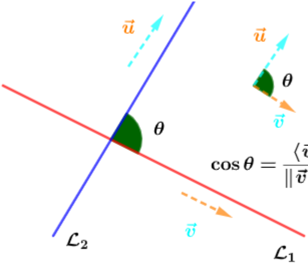
- El ángulo θ formado por $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es

$$\cos\theta = \frac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\langle\vec{v},\vec{u}\rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}\right)$$

Explorando Rectas Paralelas y Perpendiculares

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset \Leftrightarrow \theta = 0^\circ$$





$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}$$

$$\mathcal{L}_1 \nparallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow \vec{v} \nparallel \vec{u} \Leftrightarrow \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$$

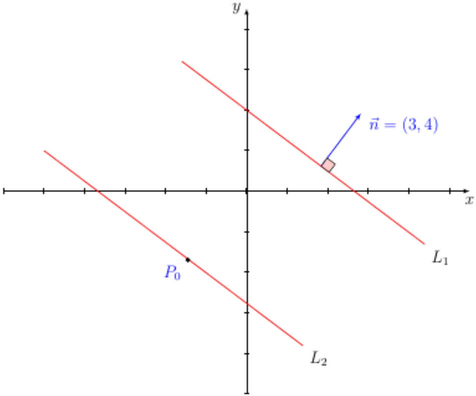
Ejemplo: Dadas las rectas:

- $\mathcal{L}_1 : 5x + 4y - 3 = 0$
- $\mathcal{L}_2 : \frac{x-8}{7} = \frac{y-1}{2}$
- $\mathcal{L}_3 : (x, y) = (2 + 3t, -8 + t), \forall t \in \mathbb{R}$
- $\mathcal{L}_4 : 4x - 5y + 3 = 0$

Analizar las intersecciones de las rectas y en cada caso determinar los ángulos formado entre las rectas mencionadas.

Ejercicio: Hallar la ecuación general de la recta que corta al tercer cuadrante, que es paralela a la recta $L_1 : 3x + 4y = 8$ y cuya distancia al origen es de 10 unidades.

Solución:



De la figura, solo falta el punto de paso P_0 pues $\vec{n} = (3,4)$ es también un vector normal a L_2 y

$$P_0 = 0 - 10 \cdot \left(\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right) = 10 \cdot \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) = (-6,-8)$$

entonces

$$L_2 : \langle (x,y), \vec{n} \rangle = \langle P_0, \vec{n} \rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle (x,y),(3,4) \rangle = \langle (-6,-8),(3,4) \rangle$$

finalmente

$$L_2 : 3x + 4y = -50$$

Ejercicio: Sean $L_1 : kx + (k-1)y - 18 = 0$; $L_2 : 4x + 3y + 7 = 0$ rectas no vertícales. Si k_1 es el valor de k para el cual $L_1 \| L_2$ y k_2 el valor de k para el cual $L_1 \perp L_2$, calcule el valor de $k_2 - k_1$.

Solución: En primer lugar, encontraremos el valor de k_1 para el cual las rectas son paralelas:

$$(k_1, k_1 - 1) = \alpha(4, 3) \Longrightarrow \alpha = 1 \;\wedge\; k_1 = 4$$

En segundo lugar, encontraremos el valor de k_2 para el cual las rectas son ortogonales:

$$\langle (k_2, k_2 - 1), (4, 3) \rangle = 0 \Longrightarrow 4k_2 + 3(k_2 - 1) = 0 \Longrightarrow k_2 = \frac{3}{7}$$

Finalmente:

$$k_2 - k_1 = \frac{3}{7} - 4 = -\frac{25}{7}$$

Ejercicio: La distancia que separa a una recta L que pasa por la intersección de $L_1 : x - 2y + 3 = 0$ y $L_2 : x - y - 5 = 0$, del punto $Q = (1, 4)$ es de 4 unidades. Halle la(s) ecuación(es) paramétrica(s) de esta(s) recta(s).

Solución: La recta pedida L pasa por la intersección de L_1 y L_2, es decir pasa por el punto $P = (13, 8)$. Sea la recta $L : y = mx + b$ y como $P \in L$ entonces

$$8 = 13m + b \Longrightarrow b = 8 - 13m$$

Así,

$$L : y = mx + 8 - 13m \Longleftrightarrow L : mx - y + 8 - 13m = 0$$

De $d(Q, L) = d((1, 4), L) = 4$ tenemos

$$\frac{|m - 4 + 8 - 13m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 4$$

resolviendo la ecuación anterior:

$$m = 0 \ \vee \ m = \frac{3}{4}$$

Finalmente:

- $m = 0$: $\quad L : y = 8 \Longrightarrow L : \begin{cases} x = t \\ y = 8 \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$
- $m = \frac{3}{4}$: $\quad L : y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \Longrightarrow L : \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t \end{cases}$ donde $t \in \mathbb{R}$

VECTORES EN $\mathbb{R}^3$

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

30/06/2022

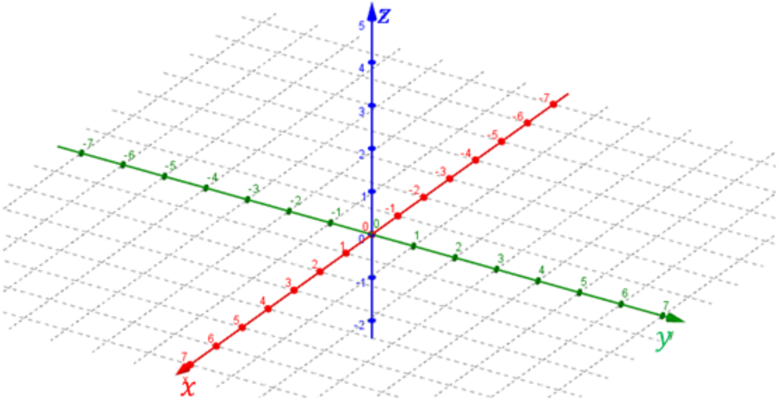
Tabla de contenidos

Para ubicar un punto en $\mathbb{R}^3$ usaremos como sistema de referencia una terna de ejes perpendiculares entre sí:

- eje X (eje de abscisas, en rojo)
- eje Y (eje de ordenadas, en verde)
- eje Z (eje de cotas, en azul)

los cuales se cortan en el punto O (origen de coordenadas).

Puntos en $\mathbb{R}^3$



Geometría vectorial en $\mathbb{R}^3$

El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, se denota como

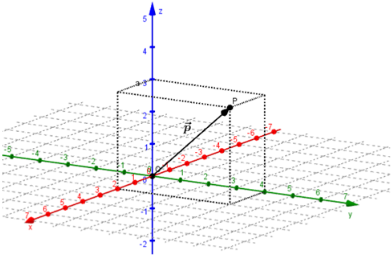
$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Donde, los elementos de $\mathbb{R}^3$ son llamados vectores. Estos poseen propiedades geométricas muy importantes que generalizan la geometría del plano y del espacio.

- Las definiciones y propiedades de vectores son las mismas, sólo que los vectores ahora presentan tres componentes.
- Se hace notar, que la construcción de un vector ortogonal a partir de un vector dado, en $\mathbb{R}^3$ no es posible.

Vectores en $\mathbb{R}^3$

- Queda establecido un sistema de coordenadas donde todo punto de $\mathbb{R}^3$ se define mediante una terna ordenada de números reales: $P(x, y, z)$, y tiene asociado un vector posición $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.
- Por ejemplo, en el siguiente esquema graficamos el vector $\vec{p} = (2, 4, 3)$ sale del origen y termina en el punto $(2, 4, 3)$.



Más aún, lo único importante es la flecha en sí, es decir, la dirección que esta tiene y la longitud que esta posee.

Definición 1 (Multiplicación de un vector por un número real)

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, se tiene que la multiplicación de un vector por un número real es:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (\lambda, \vec{u}) &\mapsto \lambda \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

es decir, para todo $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lambda \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Geométricamente, esta operación significa:

- $\lambda \in (1, +\infty)$: $\lambda \cdot \vec{u}$ representa un vector con la misma dirección que $\vec{u}$ pero que se ha expandido.
- $\lambda \in (0, 1)$: $\lambda \cdot \vec{u}$ representa un vector con la misma dirección que $\vec{u}$ pero que se ha contraído.
- $\lambda = 0$: $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}$ es el vector nulo que no tiene tamaño.
- $\lambda \in (-1, 0)$: $\lambda \cdot \vec{u}$ representa un vector con dirección opuesta a $\vec{u}$ y que se ha contraído.
- $\lambda \in (-\infty, -1)$: $\lambda \cdot \vec{u}$ representa un vector con dirección opuesta a $\vec{u}$ pero que se ha expandido.

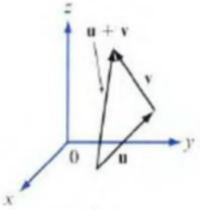
Definición 2 (Suma de Vectores)

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, se tiene que la suma de vectores es:

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

de manera similar es decir, para todo $\vec{u} = (x, y, z), \vec{v} = (m, n, p) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\vec{u} + \vec{v} = (x, y, z) + (m, n, p) = (x + m, y + n, z + p)$$



Definición 3 (Vectores paralelos)

Se dice que los vectores $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ son **vectores paralelos** si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{a} = t \cdot \vec{b}$ o $\vec{b} = t \cdot \vec{a}$.

Ejemplo: El vector $\vec{a} = (2, 4, 6)$ es paralelo a $\vec{b} = (1, 2, 3)$ porque $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$ se puede interpretar el vector $\vec{a}$ como el vector que tiene la misma dirección que $\vec{b}$.

Ejemplo: El vector $\vec{a} = (1, 2, 3)$ no es paralelo a $\vec{b} = (2, 4, 5)$ porque no existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

Definición 4

Dados r vectores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \in \mathbb{R}^3$, se llama **combinación lineal** de estos vectores a cualquier expresión de la forma:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_r \vec{v}_r \;\text{ donde }\; \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$$

Definición 5

Decimos que un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \in \mathbb{R}^3$ cuando existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_r \vec{v}_r$$

En este caso decimos que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \in \mathbb{R}^3$ generan $\vec{v}$ o que $\vec{v}$ es generado por $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \in \mathbb{R}^2$.

Si todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ es generado por $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \in \mathbb{R}^3$, decimos que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \in \mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo: Dados $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $\vec{v} = (2, 0, 2)$ y $\vec{w} = (-1, 3, -1)$, ¿existen $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$?

Solución: De

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad (-1, 3, -1) = \alpha \cdot (1, -1, 1) + \beta \cdot (2, 0, 2)$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha + 2\beta = -1 \quad \wedge \quad -\alpha = 3$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = -3 \quad \wedge \quad \beta = 1$$

Así,

$$\vec{w} = (-3) \cdot \vec{u} + (1) \cdot \vec{v}$$

por tanto, se dice que le vector w es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Definición 6 (Linealmente independientes y linealmente dependientes)

Decimos que los vectores $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \in \mathbb{R}^3$ son **linealmente independientes** si, escribiendo:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_r \vec{v}_r = 0$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ se tiene que la única solución es:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$$

Caso contrario, es decir, al menos un α_i es **distinto de cero**, entonces diremos que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\} \in \mathbb{R}^3$ son **linealmente dependientes**.

Ejemplo: Determine si los siguientes vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes:

1. $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 4, 1)$
2. $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-4, -8, -12)$
3. $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 1, 1)$

Tabla de contenidos

Definición 7 (Producto interno de vectores)

Se define el producto interno usual de dos vectores $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, y $\vec{u} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ como la función

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{u}) &\mapsto \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \Longleftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$
- $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$
- $\langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle, \forall \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$
- $\langle \lambda \vec{v}, \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Observación:

Cualquier función que satisface las propiedades dadas en la Definición 7 es llamado **producto interno**. Algunos ejemplos se muestran a continuación: Para todo $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3), \vec{u} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, se tienen los siguientes productos internos en $\mathbb{R}^2$:

1. $$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 3x_1y_1 + 5x_2y_2 + x_3y_3$$

2. $$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2 + x_3y_3$$

Probar que los ejemplos anteriores verifican las propiedades dadas en la Definición 7.

Definición 8 (Norma de vectores)

Se define la norma (o longitud) de un vector $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ como la función:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \vec{v} &\mapsto \|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,, \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$
- $\|\vec{v}\| \geq 0, \forall\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3$
- $\|\lambda \vec{v}\| = |\lambda| \|\vec{v}\|, \forall\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|\vec{v} + \vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|, \forall\ \vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$

Ejemplo: El vector $\vec{v} = (3, 4, 0)$ tiene como longitud o módulo:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5$$

Definición 9 (Vector unitario)

Se dice que el vector $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ no nulo es unitario si $\|\vec{u}\| = 1$

Ejemplo:

1. Los vectores canónicos $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ en $\mathbb{R}^3$ son unitarios. Asi, se tiene que cualquier vector $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se representa por $\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
2. El vector $\vec{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ es unitario.

Nota: Para cualquier vector no nulo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, se asocia un vector unitario $\vec{u}$ paralelo a $\vec{v}$ definiendolo por $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$, también se denota por $\vec{u}_v$

Observación: Cualquier función que satisface las propiedades de la Definición 8 es llamada **norma** en $\mathbb{R}^3$. A continuación se muestran algunos ejemplos:

1. $$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2}$$
2. $$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{2x_1^2 + 2x_2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2}$$

Probar por definición que los ejemplos anteriores son normas.

Teorema 1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, se cumple que:

$$|\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \tag{1}$$

La igualdad en (1) se cumple cuando $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores paralelos.

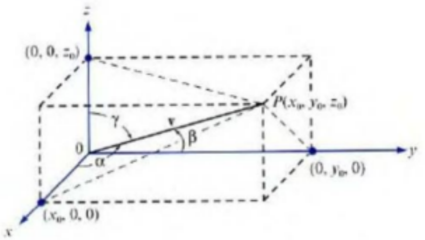
Se deja como ejercicio la prueba del teorema 1.

Tabla de contenidos

Definición 10

La dirección de un vector no nulo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, se define como el vector unitario $\vec{u}$ paralelo a $\vec{v}$ definido por $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$, también se denota por $\vec{u}_v$

Resultaría satisfactorio definir la dirección de un vector $\vec{v}$ en términos de algunos ángulos. Sea $\vec{v}$ el vector $\overrightarrow{OP}$ descrito en la figura.



Definimos α como el ángulo entre $\vec{v}$ y el eje X positivo, β como el ángulo entre $\vec{v}$ y el eje Y positivo, y γ como el ángulo entre $\vec{v}$ y el eje Z positivo. Los ángulos α, β y γ se denominan ángulos directores del vector $\vec{v}$.

Entonces de la figura

$$\cos\alpha = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot x_0, \ \ \cos\beta = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot y_0, \ \ \cos\gamma = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot z_0.$$

Si $\vec{v}$ es un vector unitario, se obtiene

$$\cos\alpha = x_0, \ \ \cos\beta = y_o, \ \ \cos\gamma = z_0.$$

Por definición, cada uno de estos tres ángulos cae en el intervalo $[0, \pi]$. Los cosenos de estos ángulos se denominan cosenos directores del vector $\vec{v}$. Finalmente, se obtiene

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Si α, β y γ son tres ángulos cualesquiera entre 0 y π, que satisfacen la ecuación anterior, entonces determinan de manera única un vector unitario $\vec{u}$ dado por $\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Observación: Si $\vec{v} = (a, b, c)$ y $\|\vec{v}\| \neq 1$, entonces los números a, b y c son llamados númerados directores de $\vec{v}$.

Ejemplo: Determine los cosenos directores de los vectores:

1. $\vec{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
2. $\vec{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Definición 11 (Distancia entre vectores)

Sean $\vec{v}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. La distancia entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ es

$$d(\vec{v}, \vec{u}) := \|\vec{v} - \vec{u}\|$$

En términos de vectores, si $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces d es justo la longitud de $\vec{u} - \vec{v}$, como muestra la figura, donde

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Ejemplo: Encuentre la distancia entre $\vec{u} = (\sqrt{2}, 1, 1)$ y $\vec{v} = (0, 2, -1)$.

Solución: Como $\vec{u} - \vec{v} = (\sqrt{2}, -1, 2)$, entonces

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{7}\,.$$

Definición 12 (Ángulo entre vectores)

Sean $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ no nulos. El ángulo formado entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ es

$$\theta := \arccos\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}\right)$$

De lo cual se tiene que $\quad \cos\theta = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}\ ,\ 0 \leq \theta \leq \pi\ .$

Ejemplo: Determine el ángulo entre los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1, 0)$.

Solución: Se tiene
$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle = 1$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y
$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. Así

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{1}{2}$$

El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es de 60°.

Consecuencias

Dado θ el ángulo formado por $\vec{v}, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$. Se tiene que

1. Si $\theta = 0$:

   $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son vectores paralelos, es decir, $\vec{v} = t\vec{u}$ para algún $t \geq 0$.

2. Si $\theta = \pi$:

   $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son vectores antiparalelos, es decir, $\vec{v} = t\vec{u}$ para algún $t < 0$.

3. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\vec{v}$ y $\vec{u}$ son vectores **ortogonales**, es decir, $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$.

   Observación: Dado que $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0$ para todo vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, el vector cero es **ortogonal** a todo vector.

PROYECCIÓN DE UN VECTOR Y EL PRODUCTO CRUZ EN $\mathbb{R}^3$

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

05/07/2022

Tabla de contenidos

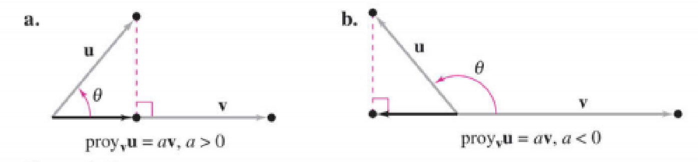
Definición 1 (Proyección ortogonal)

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, tal que $\vec{v} \neq \mathbf{0}$. Entonces, la **proyección ortogonal** de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ está dada por

$$Proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

De la definición y teniendo presente que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$, obtenemos las siguientes consecuencias:

a) Dado que $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$ es un múltiplo escalar de $\vec{v}$, podemos escribir $Proy_{\vec{v}}\vec{u} = a\vec{v}$, es decir el vector $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$ y el vector $\vec{v}$ son paralelos.



b) El vector $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$ y el vector $\vec{v}$ tienen el mismo sentido si el ángulo θ es agudo.

c) El vector $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$ y el vector $\vec{v}$ tienen sentidos opuestos si el ángulo θ es obtuso.

d) El vector $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$ y el vector $\vec{v}$ son ortogonales si $\theta = \pi/2$, en cuyo caso $Proy_{\vec{v}}\vec{u} = \mathbf{0}$.

e) $Proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{<\vec{u},\vec{v}>}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$

Propiedades del vector proyección ortogonal

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, tal que $\vec{w} \neq \mathbf{0}$, y a un escalar.

Entonces

1. $Proy_{\vec{w}}(\vec{u} + \vec{v}) = Proy_{\vec{w}}\vec{u} + Proy_{\vec{w}}\vec{v}$
2. $Proy_{\vec{w}}(a\vec{u}) = a\, Proy_{\vec{w}}\vec{u}$

Se deja como ejercicio la demostración de estas propiedades.

Definición 2 (Componente)

Se llama componente de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ donde $\vec{v} \neq \mathbf{0}$, y se denota por $Comp_{\vec{v}}\vec{u}$ al número real

$$Comp_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|}$$

Propiedades de las componentes

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, tal que $\vec{w} \neq \mathbf{0}$, y $a,\ b$ escalares. Entonces

1. $Comp_{\vec{w}}(\vec{u}+\vec{v}) = Comp_{\vec{w}}\vec{u} + Comp_{\vec{w}}\vec{v}$
2. $Comp_{\vec{w}}(a\vec{u}) = a\,Comp_{\vec{w}}\vec{u}$
3. a) $Comp_{b\vec{w}}\vec{u} = Comp_{\vec{w}}\vec{u}$, si $b > 0$
   b) $Comp_{b\vec{w}}\vec{u} = -Comp_{\vec{w}}\vec{u}$, si $b < 0$

Se deja como ejercicio la demostración de estas propiedades.

Ejemplo: Calcule la proyección ortogonal y la componente de $\vec{u} = (6, 4, 2)$ sobre $\vec{v} = (1, 2, 0)$.

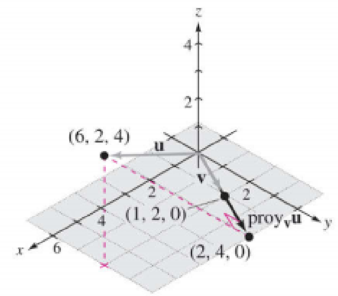


Figura 1:

Solución: Como $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 10$ y $\|\vec{v}\|^2 = 5$, la proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ es

$$Proy_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \cdot \vec{v} = \left(\frac{10}{5} \right) \cdot (1, 2, 0) = (2, 4, 0)$$

y

$$Comp_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

como se muestra en la figura 1.

Teorema 1

Sean $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ no nulo, entonces para cualquier otro vector $\vec{u}$, el vector

$$\vec{w} = \vec{u} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

es ortogonal a $\vec{v}$.

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{v} = (1, 0, 1)$ y $\vec{u} = (2, 1, 0)$, determine un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente.

Tabla de contenidos

Aquí se considerará un producto vectorial con el que se puede obtener un vector en $\mathbb{R}^3$ ortogonal a otros dos vectores dados. Este vector se denomina **producto cruz**, sin embargo, se debe enfatizar que es un concepto definido sólo para vectores en $\mathbb{R}^3$.

Definición 3 (Producto cruz)

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces el producto cruz de $\vec{u}$ con $\vec{v}$ es un nuevo vector de $\mathbb{R}^3$, denotado por $\vec{u} \times \vec{v}$, que se define como:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}$$

Una forma simple de recordar la definición del producto cruz de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es mediante la siguiente forma de determinante.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Técnicamente, lo anterior no es un determinante por que no todos los elementos son números reales. A pesar de ello, es de utilidad porque proporciona una manera fácil para recordar la fórmula del producto cruz.

Al desarrollar por cofactores la primera fila se obtiene

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\mathbf{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\mathbf{k}$$

que produce la fórmula dada en la definición. Asegúrese de observar que la componente **j** esté precedida por un signo menos.

Ejemplo: Dados $\vec{u} = (1, -2, 1)$ y $\vec{v} = (3, 1, -2)$. Encuentre

$$a)\ \vec{u} \times \vec{v}\ ,\ b)\ \vec{v} \times \vec{u}\ \text{ y }\ c)\ \vec{v} \times \vec{v}$$

Solución:

a)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = (3, 5, 7)$$

b)

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{k} = (-3, -5, -7)$$

c)

$$\vec{v} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} = (0, 0, 0)$$

Teorema 2 (Propiedades algebraicas del producto cruz)

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ y c es un escalar. El producto cruz verifica las siguientes propiedades:

1. $\vec{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \vec{u} = \mathbf{0}$
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
3. $c\vec{u} \times \vec{v} = c(\vec{u} \times \vec{v})$
4. $\vec{u} \times \vec{u} = \mathbf{0}$
5. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
6. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}$

Demostración: Cada una de estas propiedades se demuestra en forma directa a partir de la definición de producto cruz. A continuación se presentan la correspondiente a 2 y 6, dejando la demostración de las otras como ejercicio para usted.

2. Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

finalmente

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

6. Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, aplicando la definición del producto cruz, tenemos:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

Desarrollando por partes, el primer determinante de $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ resulta:

$$\begin{vmatrix} -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} = -(u_1 v_3 - u_3 v_1) w_3 - (u_1 v_2 - u_2 v_1) w_2$$

Teorema 3 (Propiedades geométricas del producto cruz)

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$, entonces cumplen las siguientes propiedades:

1. El vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$
2. $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2$
3. El ángulo θ entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ está dado por $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta$
4. $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos si y sólo si $\vec{u} \times \vec{v} = \mathbf{0}$
5. El paralelogramo que tiene a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como lados adyacentes tiene un área igual a $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$

Demostración:

1. Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces veamos el primero:

$$\langle \vec{u}, (\vec{u} \times \vec{v}) \rangle = u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & u_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

entonces $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

En forma similar para el segundo. La siguiente figura 2 muestra este resultado.

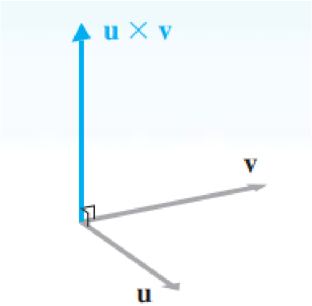


Figura 2: Producto cruz de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Demostración:

3. Como consecuencia del inciso 2 del teorema 2 y $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta)^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta)^2 \end{aligned}$$

finalmente

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta \,, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Demostración:

5.

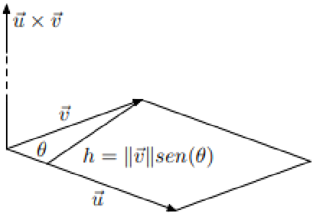


Figura 3: $\|\vec{u} \times \vec{u}\|$: área del paralelogramo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Observe en el gráfico anterior (figura 3), que si θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, la altura h del paralelogramo que determinan estos vectores, se puede expresar como

$$h = \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta$$

y utilizando que $\operatorname{sen} \theta = h/\|\vec{v}\|$ se tiene:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta$$

$$= \|\vec{u}\| h$$

lo que corresponde al área del paralelogramo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

La propiedad 1 del teorema 2 establece que el vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$. Esto implica que $\vec{u} \times \vec{v}$ (y $\vec{v} \times \vec{u}$) es un ortogonal al plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Una forma de recordar la orientación de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ es comparándolos con los vectores **i**, **j** y **k**, como se muestra en la figura 4. Los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ forman un **sistema dextrógiro** (de mano derecha), mientras que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{v} \times \vec{u}$ forman un **sistema levógiro** (de mano izquierda).

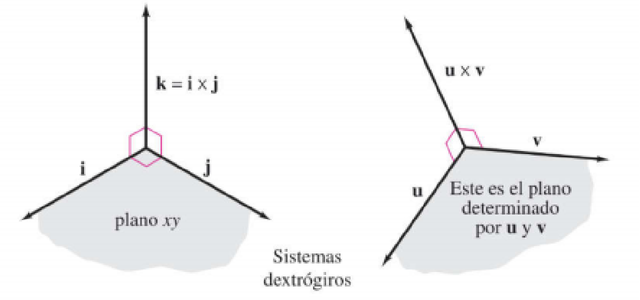


Figura 4:

según lo anterior, tenemos:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}\ ,\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}\ ,\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

Ejemplo: Encuentre un vector unitario que sea ortogonal tanto a $\vec{u} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + k$ y $\vec{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

Solución: Por la propiedad 1 del teorema 2 sabemos que el producto cruz

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

es ortogonal tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$, como se observa en la figura 5.

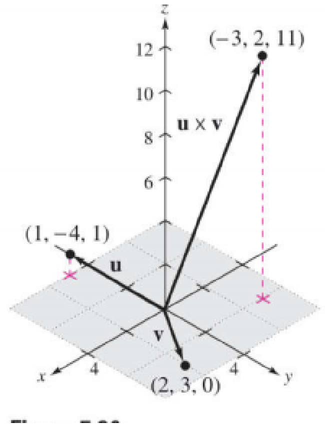


Figura 5:

Luego al dividir entre la longitud de $\vec{u} \times \vec{v}$,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 11^2} = \sqrt{134}$$

y obtenemos el vector unitario

$$\frac{1}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = -\frac{3}{\sqrt{134}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{134}}\mathbf{j} + \frac{11}{\sqrt{134}}\mathbf{k}$$

que es ortogonal tanto a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplo: Encuentre el área del paralelogramo que tiene $\vec{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\vec{v} = -2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ como lados adyacentes, tal como se observa en la figura 6.

Solución: Por la propiedad 5 del teorema 2 sabemos que el área de este paralelogramo es $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$. Ya que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 26\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

el área del paralelogramo es

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{26^2 + 18^2 + 6^2} = \sqrt{1036} \approx 32{,}19 \text{ unidades cuadradas.}$$

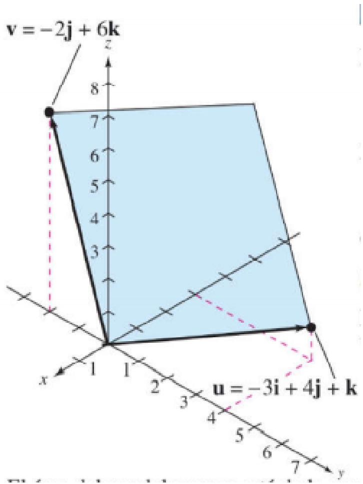


Figura 6:

Ejercicios:

1. Averiguar si los siguientes puntos: $A = (1, 3, 2)$, $B = (2, 3, 1)$ y $C = (3, 4, 5)$, son colineales o no.

Solución: Empleando el inciso 4 del teorema 2 tenemos:

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1)\ ,\ \overrightarrow{AC} = (2, 1, 3)$$

entonces

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -5, 1)$$

así, los puntos A, B y C no son colineales.

2. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores no nulos y $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \neq 0$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \neq 0$, ¿qué implica $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$, acerca de $\vec{u}$ y $\vec{w}$?

Solución: Como $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}$ y

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = -(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} = -\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{w} + \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{v}$$

entonces

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \Longleftrightarrow \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{w} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}$$

por tanto $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son paralelos.

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR EN $\mathbb{R}^3$

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

07/07/2022

Definición 1 (Triple producto escalar)

Sean los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, se define el triple producto escalar o producto mixto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, y se representa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, al producto interno (producto escalar) de $\vec{u}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$. Es decir

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Teorema 1

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces se cumple las siguientes propiedades

1. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$
   Como regla práctica, observe que las combinaciones han salidos de la primera, siguiendo un sentido horario
2. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} \times \vec{u}, \vec{v} \rangle$
3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = ||\vec{v} \times \vec{w}||\text{Comp}_{\vec{v} \times \vec{w}}\vec{u}$

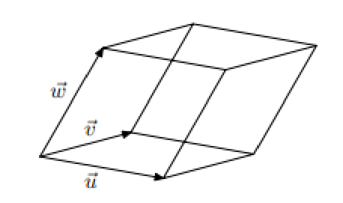
Demostración: 3.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = ||\vec{v} \times \vec{w}||\left(\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle}{||\vec{v} \times \vec{w}||}\right) = ||\vec{v} \times \vec{w}||\text{Comp}_{\vec{v} \times \vec{w}}\vec{u}$$

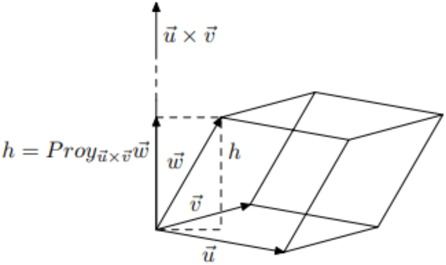
Teorema 2 (Volumen de un paralelepípelo)

El volumen V del paralelepípelo que determinan $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, es dado por

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$



Demostración: Si se considera como base del paralelepípedo, el paralelogramo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector ortogonal a la base, la altura h del paralelepípedo corresponde a la magnitud de la proyección ortogonal de $\vec{w}$ sobre $\vec{u} \times \vec{v}$:



Entonces h se calcula en la siguiente forma:

$$h = \|Proy_{\vec{u}\times\vec{v}}\vec{w}\|$$

$$= \left\| \frac{\langle \vec{u}\times\vec{v}, \vec{w}\rangle}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2} \cdot (\vec{u}\times\vec{v}) \right\|$$

$$= \frac{|\langle \vec{u}\times\vec{v}, \vec{w}\rangle|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2} \|(\vec{u}\times\vec{v})\|$$

$$= \frac{|\langle \vec{u}\times\vec{v}, \vec{w}\rangle|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} V &= (\text{área de la base}) \cdot h \\ &= \|\vec{u} \times \vec{v}\| \frac{|\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \\ &= |\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle| \\ &= |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \end{aligned}$$

Recordar que:

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \pm \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

donde el signo $\pm$ significa que se debe tomar el valor absoluto del determinante. De esta manera se obtiene también una interpretación geométrica para los determinantes de matrices de orden 3×3.

Observación: El volumen V_T del tetraedro que determinan $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$, vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, es dado por

$$V_T = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Ejercicio: Sea el vector $\vec{v} = 10\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$ tal que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ donde $\vec{v}_1$ es paralelo al vector $\vec{w} = -4\vec{i} + \vec{j}$ y $\vec{v}_2$ es perpendicular al vector $\vec{v}_1$. Halle los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Solución: De $\vec{v}_1 \parallel \vec{w}$, entonces $\vec{v}_1 = \alpha\vec{w} = \alpha(-4,1,0) = (-4\alpha,\alpha,0)$, $\alpha \neq 0$. Sea $\vec{v}_2 = (a,b,c)$ y como $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$, entonces

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle (-4\alpha,\alpha,0),(a,b,c) \rangle = -4a\alpha + b\alpha = 0 \Longrightarrow b = 4a \qquad (1)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ (10,-6,5) &= (-4\alpha,\alpha,0) + (a,b,c) \\ &= (-4\alpha + a, \alpha + b, c) \qquad (2) \end{aligned}$$

de (1) y (2)

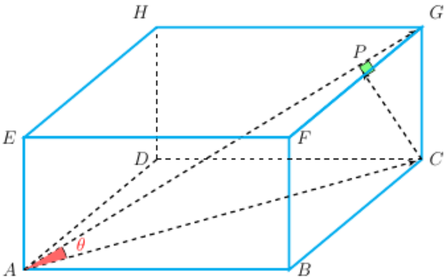
$$\begin{aligned} 10 &= -4\alpha + a \\ -6 &= \alpha + 4a \\ 5 &= c \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tenemos: $\alpha = -\frac{46}{17}$, $a = -\frac{14}{17}$, $c = 5$.

Finalmente: $\vec{v}_1 = (\frac{184}{17}, -\frac{46}{17}, 0)$, $\vec{v}_2 = (-\frac{14}{17}, -\frac{56}{17}, 5)$.

Ejercicio: Dado el paralelepípedo *ABCDEFGH*, encontrar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AG}$ y $\overrightarrow{AC}$, sabiendo que: $A(4,0,-1)$, $G(g_1,g_2,0)$, $\overrightarrow{PG} = \text{Proy}_{\overrightarrow{AG}}\overrightarrow{CG} = (3,-6,3)$ y $\overrightarrow{CP} = (-1,3,7)$.

Solución:



Vemos que:

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PG} = (-1, 3, 7) + (3, -6, 3) \Longrightarrow \overrightarrow{CG} = (2, -3, 10)$$

Como

$$\text{Proy}_{\overrightarrow{AG}}\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{PG} \Longrightarrow \overrightarrow{AG} \parallel \overrightarrow{PG} \Longrightarrow \overrightarrow{AG} = t\overrightarrow{PG}$$
$$\Longrightarrow (g_1 - 4, g_2, 1) = t(3, -6, 3)$$

Igualando componentes:

$$g_1 - 4 = 3t \ , \ g_2 = -6t \ , \ 1 = 3t$$

De donde: $t = 1/3 \Longrightarrow g_1 = 5$ y $g_2 = -2 \Longrightarrow G = (5, -2, 0)$.

Así,

$$\overrightarrow{CG} = G - C \Longrightarrow C = G - \overrightarrow{CG} \Longrightarrow C = (5, -2, 0) - (2, -3, 10)$$

$$\Longrightarrow C = (3, 1, -10) \, .$$

Por lo tanto

$$\overrightarrow{AC} = C - A \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -9) \, .$$

Finalmente

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{PG}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|\overrightarrow{PG}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\langle (3, -6, 3), (-1, 1, -9) \rangle}{\|(3, -6, 3)\| \|(-1, 1, -9)\|} = -\frac{12}{\sqrt{6}\sqrt{83}}$$

$$\Longrightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{83}} \right)$$

Ejercicio: El módulo de la suma de dos vectores es $\sqrt{34}$, su producto escalar es 4 y su producto vectorial tiene módulo 3. Hallar:

a) El ángulo que forman dichos vectores.

b) El módulo de cada uno de los vectores, si se sabe que son enteros.

Solución: Sean u, v los vectores de los cuales se conocen:

$$\|u+v\| = \sqrt{34} \quad , \quad \langle u, v\rangle = 4 \quad , \quad \|u \times v\| = 3$$

a) Si θ es el ángulo entre los vectores u y v se cumple:

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta \ ,$$

entonces

$$\tan\theta = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 37^\circ \ .$$

b) Como: $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle \Longrightarrow \|u\|^2 + \|v\|^2 = 26 \quad (1)$

Además: $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2 \Longrightarrow \|u\|\|v\| = 5 \qquad (2)$

Por lo tanto de (1) y (2): $\|u\| = 5,\ \|v\| = 1$ o $\|u\| = 1,\ \|v\| = 5$.

Ejercicio: Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

a) $\vec{w}.(\vec{u} \times [\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})]) = -\|\vec{u}\|^2 \vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})$

b) $(\vec{u} \times \vec{v}).[(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{w} \times \vec{u})] = [\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})]^3$

Solución: Sabemos que: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$

a) **VERDADERO.**

Desarrollando por partes:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times [\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})] &= \vec{u} \times [(\vec{u}.\vec{v})\vec{u} - (\vec{u}.\vec{u})\vec{v}] \\ &= (\vec{u}.\vec{v})(\vec{u} \times \vec{u}) - (\vec{u}.\vec{u})(\vec{u} \times \vec{v}) \\ &= -\|\vec{u}\|^2(\vec{u} \times \vec{v}) \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \vec{w}.(\vec{u} \times [\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})]) &= -\|\vec{u}\|^2\vec{w}.(\vec{u} \times \vec{v}) \\ &= -\|\vec{u}\|^2[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] \\ &= -\|\vec{u}\|^2[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \\ &= -\|\vec{u}\|^2\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) \end{aligned}$$

b) **FALSO**.

Haciendo: $\vec{d} = \vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{e} = \vec{v} \times \vec{w}$, y $\vec{f} = \vec{w} \times \vec{u}$; calcularemos

$(\vec{u} \times \vec{v}).[(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{w} \times \vec{u})] = \vec{d}.(\vec{e} \times \vec{f})$

Donde:

$$\begin{aligned}
\vec{e} \times \vec{f} &= \vec{e} \times (\vec{w} \times \vec{u}) \\
&= \langle \vec{e}, \vec{u} \rangle \vec{w} - \langle \vec{e}, \vec{w} \rangle \vec{u} \\
&= [(\vec{v} \times \vec{w}).\vec{u}]\vec{w} - [(\vec{v} \times \vec{w}).\vec{w}]\vec{u} \\
&= [\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})]\vec{w} \\
&= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{w}
\end{aligned}$$

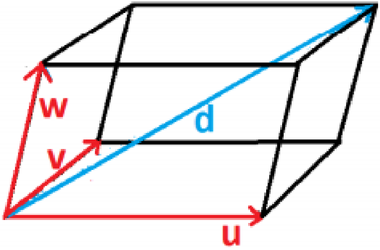
Luego:

$$\begin{aligned}
\vec{d}.(\vec{e} \times \vec{f}) &= (\vec{u} \times \vec{v}).[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{w} \\
&= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]((\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}) \\
&= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}][\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] \\
&= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]^2 \\
&= (\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}))^2
\end{aligned}$$

Ejercicio: Las aristas de un paralelepípedo son paralelos a los vectores $(1, 0, 0), (2, 3, 0)$ y $(-4, -5, -6)$. Si una de sus diagonales es el vector $(0, -4, -12)$, calcule el volumen del paralelepípedo.

Solución: Sean u, v y w los vectores paralelos a $(1,0,0), (2,3,0)$ y $(-4,-5,-6)$ respectivamente, y que forman el paralelepípedo de modo que la diagonal $d = (0,-4,-12)$ es tal que:

$$(0,-4,-12) = u + v + w \qquad (1)$$



Como u, v y w son vectores paralelos a $(1,0,0)$, $(2,3,0)$ y $(-4,-5,-6)$ respectivamente, existen a, b y c son reales tales que:

$$u = a(1,0,0)\ ,\ \ v = b(2,3,0)\ ,\ \ w = c(-4,-5,-6)$$

Entonces de (1):

$$(0,-4,-12) = a(1,0,0) + b(2,3,0) + c(-4,-5,-6)$$

$$\Longrightarrow a = 4\ ,\ \ b = 2\ ,\ \ c = 2\ .$$

Luego:

$$u = (4,0,0)\ ,\ \ v = (4,6,0)\ ,\ \ w = (-8,-10,-12)\ .$$

Finalmente

$$\text{Volumen} = |[u, v, w]| = 80\ u^3.$$

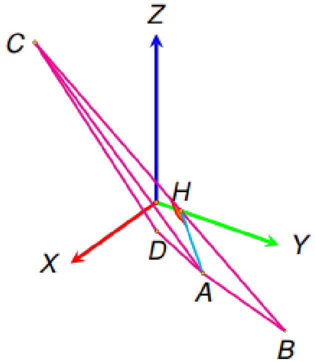
Ejercicio: Dado el triángulo de vértices $A(6, 8, 0)$, $B(-5, 7, -10)$ y $C(7, -5, 14)$. Determinar:

a) El pie de la altura que cae sobre el lado $\overline{BC}$.

b) Las coordenadas de un punto D de tal manera que $ABCD$ sea un trapecio isósceles.

c) El área de dicho trapecio determinado en el item anterior.

Solución:



a) Tenemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} &= Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}\\ &= \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\rangle}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}\cdot \overrightarrow{BC}\\ &= \frac{\langle (11,1,10),(12,-12,24)\rangle}{\|(12,-12,24)\|^2}\cdot (12,-12,24)\\ &= (5,-5,10)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $H = B + \overrightarrow{BH} = (0,2,0)$.

b) Por ser un trapecio isósceles:

$$\overrightarrow{BC} = Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}$$

entonces

$$\begin{aligned} D &= A + \overrightarrow{BC} - 2Proy_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} \\ &= (6,8,0) + (12,-12,24) - 2(5,-5,10) \end{aligned}$$

Así, $D = (8,6,4)$.

c) También, $\overrightarrow{BD} = (8,6,4) - (-5,7,-10) = (13,-1,14)$.

$$
\begin{aligned}
\text{Área del trapecio} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BD}\| + \|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}\|) \\
&= \frac{1}{2}(\|(11,1,10) \times (13,-1,14)\| \\
&+ \|(13,-1,14) \times (12,-12,24)\|) \\
&= \frac{1}{2}(\|(24,-24,-24)\| + \|(264,-24,-144)\|) \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{158})
\end{aligned}
$$

Ejercicio: Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ vectores no nulos. Demuestre que:
Si $\{Proy_v u \ , \ Proy_u v^{\perp}\}$ son linealmente independiente, entonces $\{u, v\}$ son linealmente independientes.

Solución: Se deja al lector la demostración.

LA RECTA EN $\mathbb{R}^3$

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

12/07/2022

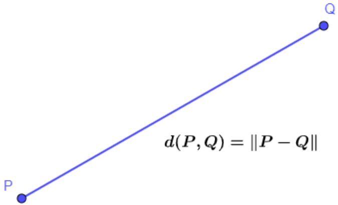
Tabla de contenidos

Distancia entre dos puntos

Definición 1

Si P y Q son dos puntos en $\mathbb{R}^3$, entonces la distancia entre ellos es

$$d(P, Q) := \|P - Q\| = \|\overrightarrow{QP}\|$$



División de un segmento según una razón dada

Definición 1

Si P es un punto que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$, según la razón $r \in \mathbb{R}$ donde $r \neq -1, 0$; entonces

$$\overrightarrow{P_1P} = r \cdot \overrightarrow{PP_2}$$

Sean $P(x, y, z), P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ y según la razón dada $r \in \mathbb{R}$ tendremos

$$r = \frac{\|\overrightarrow{P_1P}\|}{\|\overrightarrow{PP_2}\|}\ ,\ r \neq -1, 0$$

entonces

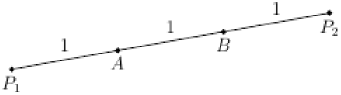
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}\ , \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}\ , \quad z = \frac{z_1 + rz_2}{1 + r} \qquad (\alpha)$$

Observación: Si $M(x, y, z)$ es el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Ejemplo: Dados los puntos $P_1(5, 7, 9)$ y $P_2(3, -5, -7)$ hallar los puntos de trisección de $\overline{P_1P_2}$.

Solución: Tenemos la siguiente figura.



1. Para encontrar las coordenadas de $A(x, y, z)$, la razón es:

$$r = \frac{\|\overrightarrow{P_1A}\|}{\|\overrightarrow{AP_2}\|} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow x = \frac{5 + \frac{1}{2}(3)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{13}{3},\ y = \frac{7 + \frac{1}{2}(-5)}{1 + \frac{1}{2}} = 3,\ z = \frac{9 + \frac{1}{2}(-7)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{11}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad A\left(\frac{13}{3}, 3, \frac{11}{3}\right)$$

2. Para encontrar las coordenadas de $B(x, y, z)$, la razón es:

$r = \dfrac{\|\overrightarrow{P_1B}\|}{\|\overrightarrow{BP_2}\|} = 2$. Usando la fórmula (α) se obtiene $B(\frac{11}{3}, -1, -\frac{5}{3})$.

Tabla de contenidos

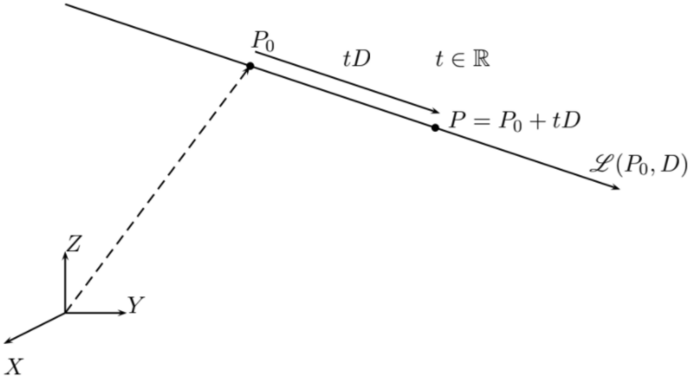
Forma vectorial de una recta

Definición 2

Sean $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y $D \in \mathbb{R}^3$ no nulo. Luego, el conjunto

$$\mathcal{L}(P_0, D) = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + tD \; ; \; t \in \mathbb{R}\}$$

es llamada la **ecuación vectorial** de recta que pasa por P_0 y es paralelo o está generado por D. (vea la siguiente figura)


P_0
tD
$t \in \mathbb{R}$
$P = P_0 + tD$
$\mathscr{L}(P_0, D)$
Z
Y
X

Forma Paramétrica de una recta

- Suponga que $\mathcal{L}(P_0, D)$ es una recta en $\mathbb{R}^3$. Entonces $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $D = (d_1, d_2, d_3)$.
- Si escribimos $P = (x, y, z)$ de la ecuación vectorial de $\mathcal{L}(P_0, D)$ tenemos que

$$P = P_0 + tD\ ,\ \ t \in \mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(d_1, d_2, d_3)$$

- Como es una ecuación vectorial se iguala entrada por entrada y se llega a las **ecuaciones paramétricas** de la recta $\mathcal{L}(P_0, D)$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + td_1 \\ y &= y_0 + td_2 \\ z &= z_0 + td_3 \end{aligned}$$

Forma Simétrica de una recta

- Para poder escribir esta forma, hay que asumir, $d_1, d_2, d_3 \neq 0$.
  Luego de la forma paramétrica de $\mathcal{L}(P_0, D)$ se resuelve la ecuación para t y se obtiene la **forma simétrica** de la recta

$$t = \frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3}$$

Ejemplo: Halle la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}_1$ que contiene a los punto $P = (4, 6, 7)$ y $Q = (3, 6, 9)$.

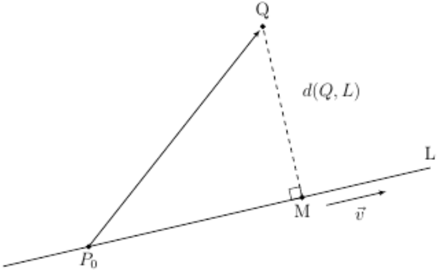
Tabla de contenidos

Distancia de un punto a una recta

Problema general. Dado un punto Q y una recta $L = \{P_0 + t\vec{v}\}$, encontrar la distancia del punto Q a la recta L es decir $d(Q, L)$.

Solución: Existen varios métodos para resolver el problema. Veamos dos de ellos.

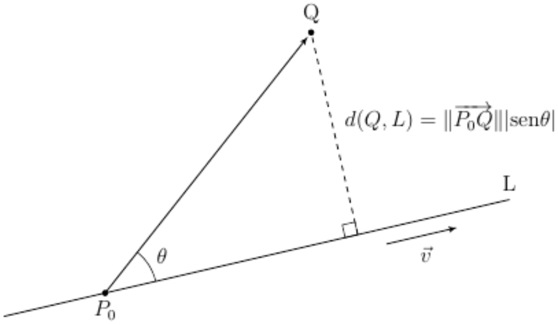
Primer método: Tomamos un punto P cualquiera de L, en particular $P = P_0$.
Sea $\overrightarrow{P_0M} = Proy_L \overrightarrow{P_0Q} = Proy_{\vec{v}} \overrightarrow{P_0Q}$.



Luego: $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = \overrightarrow{P_0Q} - \overrightarrow{P_0M} = \overrightarrow{P_0Q} - Proy_{\vec{v}} \overrightarrow{P_0Q}$.
Pero, $\|\overrightarrow{MQ}\| = d(Q, L)$; entonces

$$d(Q, L) = |\overrightarrow{P_0M} - Proy_{\vec{v}} \overrightarrow{P_0Q}|$$

Segundo método: Otra forma de calcular la distancia de un punto Q a una recta $L = \{P_0 + r\vec{v}\}$ se obtiene al considerarla como la altura del paralelogramo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v}$, donde P es un punto cualquiera de L.



En particular, si escogemos $P = P_0$, se tiene que el área de dicho paralelogramo está dado por:

$$\text{Área} = |(\overrightarrow{P_0Q}) \times \vec{v}| = |\|\overrightarrow{P_0Q}\|\|\vec{v}\| \operatorname{sen}\theta|$$

Así,

$$\|\vec{v}\| d(Q, L) = \|\vec{v}\| |\|\overrightarrow{P_0Q}\|| \operatorname{sen}\theta|$$

De donde:

$$d(Q, L) = \frac{\|(\overrightarrow{P_0Q}) \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Ejemplo: Considere las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ de ecuaciones

$$\mathcal{L}_1 : (x, y, z) = (1 - t, 2 + t, 3 - 2t)\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}_2 : (x, y, z) = (2 + 2r, 3 - r, 10 + r)\ ,\ r \in \mathbb{R}$$

determine la distancia de $P = (1, 2, 3)$ a $\mathcal{L}_1$ y $Q = (-3, -2, -1)$ a $\mathcal{L}_2$.

Ejemplo: Considere los puntos $A = (1, -1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (3, 2, 1)$ y $D = (5, 5, 5)$.

1. Determine la ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por los puntos A y B.
2. Determine la distancia de $P = (1, 1, 1)$ a $\mathcal{L}_1$.
3. Determine la proyección de $\vec{s} = (4, 6, 9)$ sobre $\mathcal{L}_1$.

Solución:

1. $$\mathcal{L}_1 : A + t\overrightarrow{AB} \ , \ t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathcal{L}_1 : (1, -1, 1) + t(0, 3, 2) \ , \ t \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \mathcal{L}_1 : (1, -1 + 3t, 1 + 2t) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

2. $$\begin{aligned} d(P, \mathcal{L}_1(A, \overrightarrow{AB})) &= \|\overrightarrow{AP} - Proy_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AP}\| \\ &= \|(0, 2, 0) - Proy_{(0,3,2)}(0, 2, 0)\| \\ &= \|(0, 2, 0) - \frac{6}{13}(0, 3, 2)\| \\ &= \frac{4\sqrt{13}}{13} \end{aligned}$$

Tabla de contenidos

Proposición 1

Sean $\mathcal{L}_1(P_0, D_1)$ y $\mathcal{L}_2(Q_0, D_2)$ dos rectas tales que $D_1 \parallel D_2$. Luego, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Demostración:

($\Longleftarrow$) Si $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$, entonces $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \neq \emptyset$.

($\Longrightarrow$) De $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$, existe P tal que $P \in \mathcal{L}_1$ y $P \in \mathcal{L}_2$, por lo que existen t y r reales, tal que

$$P_0 + tD_1 = P = Q_0 + rD_2 \tag{1}$$

Veamos: $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$.

Sea $Q \in \mathcal{L}_1$ arbitrario, esto es, $Q = P_0 + sD_1$; luego,

$$Q = Q_0 + (rD_2 - tD_1) + sD_1,$$

en virtud de la ecuación (1). Por hipótesis se tiene $D_1 \parallel D_2$, luego la igualdad anterior queda

$$Q = Q_0 + rD_2 + (s - t)\lambda D_2,$$
$$Q = Q_0 + \alpha D_2,$$

esto es, $Q \in \mathcal{L}_2$, lo que implica $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$.
De modo similar, se tiene $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$; por lo tanto $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. ■

Definición 3

Se dice que $\mathcal{L}_1(P_0, D_1)$ y $\mathcal{L}_2(Q_0, D_2)$ son **paralelas** si y sólo si,

(I) $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$.

(II) $D_1 \parallel D_2$.

Ejemplo: Pruebe que las siguientes rectas

$$L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+3}{3} \quad \text{y} \quad L_2 : \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-8}{9}$$

son paralelas.

Solución: Como $\vec{v}_1 = (1,2,3)$ es el vector director de la recta L_1 y $\vec{v}_2 = (3,6,9)$ es el vector director de la recta L_2, también $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores paralelos y $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, entonces las rectas son paralelas.

Definición 4

Se dice que $\mathcal{L}_1(P_0, D_1)$ y $\mathcal{L}_2(Q_0, D_2)$ se **cortan** si y sólo si,

(I) $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$.

(II) $D_1 \nparallel D_2$.

Definición 5

Se dice que $\mathcal{L}_1(P_0, D_1)$ y $\mathcal{L}_2(Q_0, D_2)$ son **alabeadas** (o se cruzan en el espacio) si y sólo si,

(I) $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$.

(II) $D_1 \nparallel D_2$.

Observación: Si las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son alabeadas, entonces se cortan.

Teorema 1

Las rectas $\mathcal{L}_1(P_0, D_1)$ y $\mathcal{L}_2(Q_0, D_2)$ son **alabeadas** si y sólo si, $[D_1, D_2, P_0 - Q_0] \neq 0$.

Se deja como ejercicio la prueba del teorema.

Ejemplo: Determinar la posición relativa entre las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x = -5\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$L_2 : \begin{cases} x = 2 - 3\beta \\ y = 3 - 5\beta \\ z = \beta \end{cases} \quad \text{con } \beta \in \mathbb{R}.$$

Solución: Tenemos que las ecuaciones vectoriales de las rectas dadas son

$$L_1 : (x, y, z) = (0, 2, 5) + \lambda(-5, 1, -1)$$

$$L_2 : (x, y, z) = (2, 3, 0) + \beta(-3, -5, 1)$$

Así, tendremos $P_0(0, 2, 5), D_1 = (-5, 1, -1), Q_0(2, 3, 0)$ y $D_2 = (-3, -5, 1)$.
Como los vectores directores no son paralelos, entonces las rectas son alabeadas o se cortan.
Empleando el teorema 3 tendremos

$$[D_1, D_2, P_0 - Q_0] = [(-5, 1, -1), (-3, -5, 1), (-2, -1, 5)] = 140 \neq 0$$

entonces las rectas dadas son alabeadas.

Ejemplo: Determinar la posición relativa entre las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x = 3 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$L_2 : \begin{cases} x = 1 + 10\beta \\ y = 4 - 2\beta \\ z = 2\beta \end{cases} \quad \text{con } \beta \in \mathbb{R}.$$

Solución: Tenemos que las ecuaciones vectoriales de las rectas dadas son

$$L_1 : (x, y, z) = (3, 2, 5) + \lambda(-5, 1, -1)$$

$$L_2 : (x, y, z) = (1, 4, 0) + \beta(10, -2, 2)$$

Así, tendremos $P_0(3, 2, 5)$, $D_1 = (-5, 1, -1)$, $Q_0(1, 4, 0)$ y $D_2 = (10, -2, 2)$.
Como los vectores directores son paralelos, entonces las rectas L_1 y L_2 pueden ser coincidentes o paralelas.
Si tomamos el punto $(3, 2, 5) \in L_1$ se observa que este punto no pertenece a L_2. En consecuencia L_1 y L_2 son paralelas.

Ejemplo: Determinar la posición relativa entre las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x &= 2 - 3\lambda \\ y &= 3 + 5\lambda \\ z &= \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$L_2 : \begin{cases} x &= 1 - \beta \\ y &= 2\beta \\ z &= 5 \end{cases} \quad \text{con } \beta \in \mathbb{R}.$$

Solución: Tenemos que las ecuaciones vectoriales de las rectas dadas son

$$L_1 : (x, y, z) = (2, 3, 0) + \lambda(-3, 5, 1)$$

$$L_2 : (x, y, z) = (1, 0, 5) + \beta(-1, 2, 0)$$

Así, tendremos $P_0(2, 3, 0), D_1 = (-3, 5, 1), Q_0(1, 0, 5)$ y $D_2 = (-1, 2, 0)$.
Como los vectores directores no son paralelos, entonces las rectas L_1 y L_2 pueden ser alabeadas o se cortan.
Empleando el teorema 3 tendremos

$$[D_1, D_2, P_0 - Q_0] = [(-3, 5, 1), (-1, 2, 0), (1, 3, -5)] = 0$$

entonces las rectas se cortan.

ÁNGULO Y DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

14/07/2022

Tabla de contenidos

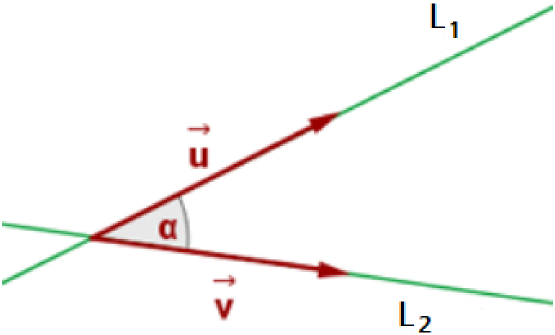
Ángulo entre dos rectas

Definición 1

El **ángulo que forman dos rectas** $L_1(P_1, \vec{u})$ y $L_2(P_2, \vec{v})$ es igual al menor ángulo que se puede formar con los vectores directores de las rectas.

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

$$\alpha(L_1, L_2) = \alpha\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \arccos\left(\frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}\right)$$

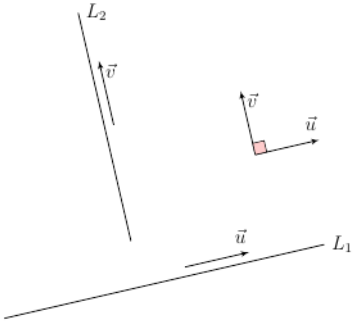

L1
u
α
v
L2

Dos rectas perpendiculares

Definición 2 (Dos rectas perpendiculares)

Dos rectas $L_1(P_1, \vec{u})$ y $L_2(P_2, \vec{v})$ son **perpendiculares** si y sólo si sus **vectores directores** son **ortogonales** .

$$L_1 \text{ es perpendicular a } L_2 \ (L_1 \perp L_2) \iff \vec{u} \perp \vec{v}\rangle \iff \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$$



Ejemplo: Demuestre que las rectas

$$L_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1} \;\; \text{y} \;\; L_2 : \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

son perpendiculares.

Solución: Como $\vec{v}_1 = (2, 4, -1)$ es el vector director de la recta L_1 y $\vec{v}_2 = (5, -2, 2)$ es el vector director de la recta L_2, entonces $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$, por lo tanto $L_1 \perp L_2$.

Teorema 1

Sean L_1 y L_2 dos rectas en $\mathbb{R}^3$ que no se interceptan, entonces existe $E \in L_1$ y $F \in L_2$ tales que $\overrightarrow{EF}$ sea ortogonal a L_1 y L_2 .

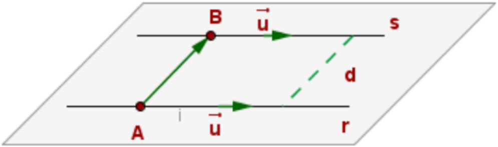
Se deja como ejercicio la prueba del teorema.

Tabla de contenidos

Distancia entre dos rectas paralelas

Distancia entre dos rectas paralelas

La **distancia de una recta** r a **otra paralela** s, es la distancia de un punto cualquiera de r a s.



$$d(r,s) = d(A,s) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Distancia entre dos rectas alabeadas

Distancia entre dos rectas alabeadas

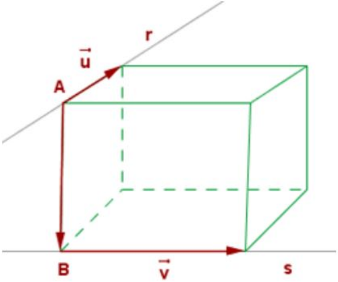
La **distancia entre dos rectas alabeadas (cruzan)** se mide sobre la **perpendicular común**.

Para esto se aplica un método basado en la construcción de un paralelepípedo de modo que los vectores directores de las rectas forman la base del paralelepípedo. Sean las rectas alabeadas

$$r(A, \vec{u}) = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = A + \lambda \vec{u} \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$s(B, \vec{v}) = \{Q \in \mathbb{R}^3 / Q = B + \beta \vec{v} \ ; \ \beta \in \mathbb{R}\}$$

con puntos de paso A , B y, vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente.



Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ determinan un paralelepípedo cuya altura es la distancia entre las dos rectas r y s. El volumen (V) de un paralelepípedo es

$$V = A_b.h$$

donde A_b es el área de la base y h su altura. Justamente h es la distancia entre las dos rectas denotada por $d(r,s)$. Como se sabe $V = |[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|$ y $A_b = ||\vec{u} \times \vec{v}||$, despejando se obtiene que

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]|}{||\vec{u} \times \vec{v}||}$$

Ejemplo: Determine la distancia entre las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$L_2 : \begin{cases} x = -5\beta \\ y = 2 + \beta \\ z = 5 - \beta \end{cases} \quad \text{con } \beta \in \mathbb{R}.$$

Solución: Se vio anteriormente que ambas rectas son alabeadas.

Se tienen los puntos de paso de las rectas

$$A = (2, 3, 0); \quad B = (0, 2, 5)\ .$$

los vectores directores son

$$\vec{u} = (-3, -5, 1) \quad ; \quad \vec{v} = (-5, 1, -1)\ .$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 5) \Longrightarrow |[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]| = 140 \quad \text{y}$$

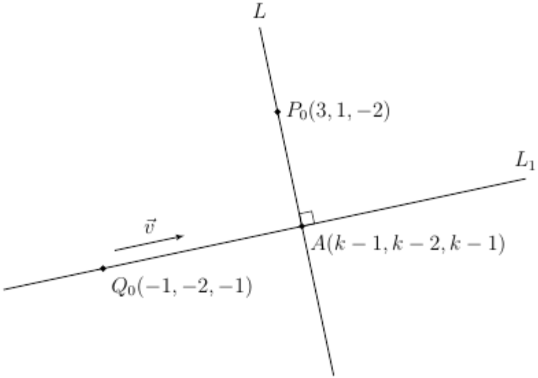
$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|(4, -8, -28)\| = 4\sqrt{54}$$

$$\Longrightarrow d(L_1, L_2) = \frac{35\sqrt{54}}{54}$$

Ejercicio: Hallar la ecuación vectorial de la recta L que pasa por $P_0(3, 1, -2)$ e interseca y es perpendicular a la recta

$$L_1 : x + 1 = y + 2 = z + 1$$

Solución: Tenemos $L_1 : Q = (-1, -2, -1) + t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Sea A el punto de intersección de las rectas L y L_1. Como $A \in L_1$, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $A(-1 + k, -2 + k, -1 + k)$.



Por la condición de perpendicularidad

$$\overrightarrow{P_0A} = (k-4, k-3, k+1) \perp \vec{v} = (1,1,1)$$

$$\implies \langle \overrightarrow{P_0A}, \vec{v} \rangle = k-4+k-3+k+1 = 0$$

$$\implies k = 2$$

Así,

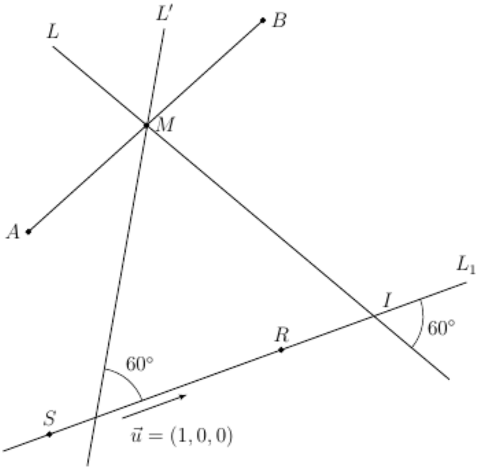
$$A(1,0,1) \ .$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_0(3,1,-2)$ y $A(1,0,1)$ es:

$$L : P = (3,1,-2) + r(2,1,-3) \ , \ r \in \mathbb{R} \ .$$

Ejercicio: Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y corta bajo un ángulo de $60°$ a la recta que pasa por los puntos R y S, donde $A(2,4,0)$, $B(0,0,-2)$, $R(3,3,3)$ y $S(-1,3,3)$.

Solución: Este problema tiene dos soluciones (vea la figura).



El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $M(1, 2, -1)$. La ecuación de la recta L_1 que pasa por R y S es

$$L_1 : P = S + t\overrightarrow{SR}\ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

$$\Longrightarrow\ P = (-1, 3, 3) + t(1, 0, 0)\ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Sea I el punto de intersección de L con L_1, entonces

$$I \in L_1 \Longrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / I(-1 + t, 3, 3)\ .$$

De la condición $\cos 60^\circ = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$, donde $\vec{u} = (1, 0, 0)$,

$\vec{v} = \overrightarrow{MI} = (t - 2, 1, 4)$ se obtiene:

$$\frac{1}{2} = \frac{t-2}{\sqrt{(t-2)^2+1+16}} \implies t = 2 \pm \sqrt{\frac{17}{3}}$$

$$\implies I\left(1 \pm \sqrt{\frac{17}{3}}, 3, 3\right)$$

Luego las rectas buscadas son:

$$L : Q = (1,2,-1) + r(\sqrt{\frac{17}{3}}, 1, 4)\ ,\ r \in \mathbb{R}\ .$$

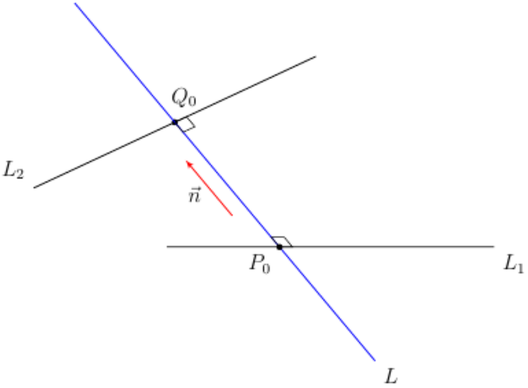
$$L' : Q' = (1,2,-1) + s(-\sqrt{\frac{17}{3}}, 1, 4)\ ,\ s \in \mathbb{R}\ .$$

Ejercicio: Dadas las rectas $L_1 : x - 1 = (y/2) = z$ y $L_2 : x = y = z$, determinar un punto P_0 en L_1 y otro $Q_0 \in L_2$, tales que la distancia de P_0 a Q_0 sea mínima, así como la recta L que los contiene.

Solución: Sean $L_1 : \{(1,0,0) + t(1,2,1)\}$ y $L_2 = \{(0,0,0) + s(1,1,1)\}$. Se verifican que $L_1 \nparallel L_2$ y $[(1,2,1),(1,1,1),(1,0,0)-(0,0,0)] \neq 0$.
Así, las rectas son alabeadas.

Para obtener la distancia mínima entre L_1 y L_2 ; trazamos una recta L que sea perpendicular a ambas, de modo que:

$$L = \{P_0 + r\vec{n}\} \ , \ \text{donde} \quad \vec{n} = (1,2,1) \times (1,1,1) = (1,0,-1) \ .$$



Como $Q_0 \in L \cap L_2$ y $P_0 \in L \cap L_1$, entonces:

$$Q_0 \in L \implies Q_0 = P_0 + r\vec{n} = P_0 + r(1,0,-1) \qquad (1)$$

$$Q_0 \in L_2 \implies Q_0 = (0,0,0) + s(1,1,1) \qquad (2)$$

y

$$P_0 \in L_1 \implies P_0 = (1,0,0) + t(1,2,1) \qquad (3)$$

De (2) y (3) en (1):

$$(0,0,0) + s(1,1,1) = (1,0,0) + t(1,2,1) + r(1,0,-1)$$

Resolviendo obtenemos: $s = 1$, $t = 1/2$ y $r = -1/2$.
Luego:

$$Q_0 = (0,0,0) + s(1,1,1) = (1,1,1)$$

y

$$P_0 = (1,0,0) + t(1,2,1) = (3/2,1,1/2)$$

Entonces: $L = \{(3/2,1,1/2) + r(1,0,-1)\}$.

Ejercicio: Los puntos A, B, C, D forman un tetraedro donde $C(-5, 14, -3)$ y $D(32, 36, -6)$. En el triángulo ABC, las rectas

$$\mathcal{L}_1 : \{P = (-7, 17, -9) + t(-5, 9, -4) \,/\, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{L}_2 : \frac{x+3}{-4} = \frac{y-11}{9} = \frac{z-3}{10}$$

son medianas trazadas desde diferentes vértices. Determine el volumen del tetraedro.

Solución: Primero veamos a que recta pertenece el vértice C .

- ¿$C \in \mathcal{L}_1$? esto es, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(-5, 14, -3) = (-7, 17, -9) + t(-5, 9, -4)$$

$$\implies (2, -3, 6) = t(-5, 9, -3)$$

por tanto, no existe $t \in \mathbb{R}$, por tanto, $C \notin \mathcal{L}_1$.

- ¿$C \in \mathcal{L}_2$? esto es, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

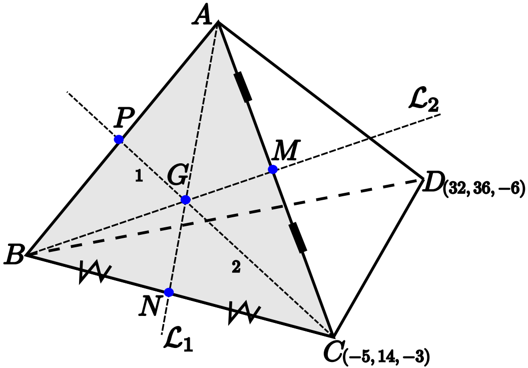
$$(-5, 14, -3) = (-3, 11, 3) + r(-4, 9, 10)$$

$$\implies (-2, 3, -6) = r(-4, 9, 10)$$

por tanto, no existe $r \in \mathbb{R}$, por tanto, $C \notin \mathcal{L}_2$.

De lo anterior, las rectas no pasan por C. Podemos suponer que $A \in \mathcal{L}_1$ y $B \in \mathcal{L}_2$.

De los datos se obtiene la siguiente gráfica:



Sea $G = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, entonces:

$$(-7, 17, -9) + t(-5, 9, -4) = (-3, 11, 3) + r(-4, 9, 10)$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -4 - 5t & = & -4r \\ 6 + 9t & = & 9r \\ -12 - 4t & = & 10r \end{array} \right. \Longrightarrow t = -\frac{4}{3} \quad \text{y} \quad r = -\frac{2}{3},$$

por tanto $G = (-3, 11, 3) + \left(-\dfrac{2}{3}\right)(-4, 9, 10) \Longrightarrow G = \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{15}{3}, -\dfrac{11}{3}\right)$.

En el $\triangle BCA$ se tiene que $\overline{CP}$ es mediana y G es baricentro, por tanto:

$$G = \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}C \Longrightarrow 3G = 2P + C \Longrightarrow P = \left(2, \frac{1}{2}, -4\right).$$

Pero P es punto medio de $\overline{AB}$, entonces $P = \dfrac{1}{2}(A+B)$, es decir: $A + B = 2P$ y

sabiendo que:

$$\begin{array}{lcll} A \in \mathcal{L}_1 & \Longrightarrow & A = (-7, 17, -9) + t(-5, 9, -4) \quad \text{para algún} & t \in \mathbb{R} \\ B \in \mathcal{L}_2 & \Longrightarrow & B = (-3, 11, 3) + r(-4, 9, 10) \quad \text{para algún} & r \in \mathbb{R} \end{array}$$

reemplazando se obtiene:

$$(-10, 28, -6) + t(-5, 9, -4) + r(-4, 9, 10) = (4, 1, 8)\ ,$$

entonces

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -5t - 4r & = & 14 \\ 9t + 9r & = & -27 \\ -4t + 10r & = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{l} t = -2 \\ r = -1 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{l} A = (-7, 17, -9) + (-2)(-5, 9, -4) = (3, -1, -1) \\ B = (-3, 11, 3) + (-1)(-4, 9, 10) = (1, 2, -7). \end{array}$$

Luego, consideramos los vectores:

$u = \overrightarrow{CB} = (6, -12, -4), \quad v = \overrightarrow{CA} = (8, -15, 2) \quad \text{y} \quad w = \overrightarrow{CD} = (37, 22, -3),$

por tanto, el volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{6}|[u, v \times w]| = \frac{1}{6}|[w, u, v]| = \frac{1}{6}|\langle w, u \times v\rangle| \ ,$$

reemplazando y operando:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left\langle w, \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -12 & -4 \\ 8 & -15 & 2 \end{vmatrix} \right\rangle\right| = \frac{1}{6}|\langle(37, 22, -3), (-84, -44, 6)\rangle| \ .$$

entonces:

$$V = \frac{1}{6}|-4094| \approx 682{,}3$$

EL PLANO

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

19/07/2022

Tabla de contenidos

El Plano

Definición 1

Dado un punto P y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no paralelos en $\mathbb{R}^3$, se llama plano $\mathcal{P}$ que contiene a P en la dirección de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al conjunto:

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{R}^3 /\ X = P + t\vec{u} + s\vec{v}\ ;\ t,\ s \in \mathbb{R}\}$$

y se denota $\mathcal{P}(P, \vec{u}, \vec{v})$.

Al punto P se le denomina punto de paso, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son llamados **vectores directores** del plano $\mathcal{P}$. (Figura 1)

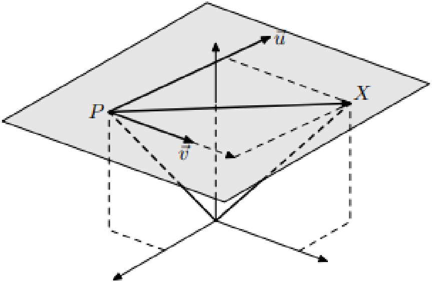
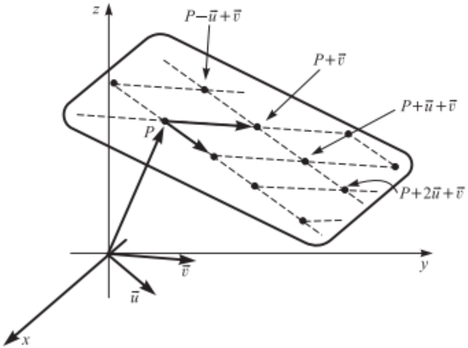


Figura 1: Plano $\mathcal{P}(P, \vec{u}, \vec{v})$, que contiene a P en la dirección de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ecuación vectorial del plano

Definición 2

La ecuación $X = P + t\vec{u} + s\vec{v}$ se denomina **ecuación vectorial** del plano $\mathcal{P}(P, \vec{u}, \vec{v})$. (Figura adjunta)



Ecuación paramétrica del plano

Definición 3

Sean $P(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ del plano $\mathcal{P}(P, \vec{u}, \vec{v})$, y $X(x, y, z) \in \mathcal{P}$, entonces

$$X = P + t\vec{u} + s\vec{v} \; ; \; t, \; s \in \mathbb{R}$$

y por igualdad de vectores se obtiene

$$\begin{aligned} x &= p_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= p_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &= p_3 + tu_3 + sv_3 \; , \; t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Esta expresión es llamado **ecuación paramétrica** del plano $\mathcal{P}$, donde t y s se denominan **paramétros**.

Ejemplo: Halle las ecuaciones vectorial y paramétrica del plano que pasa por los puntos $P_1(2,-1,-2)$, $P_2(3,-1,2)$ y $P_3(5,0,3)$.

Solución: Los vectores paralelos al plano $\mathcal{P}$ que pasa por P_1, P_2 y P_3, son $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,4)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = (3,1,5)$.

Luego, la ecuación vectorial del plano $\mathcal{P}$ es

$$\mathcal{P}: \; X = (2,-1,-2) + t(1,0,4) + s(3,1,5)$$

y su ecuación paramétrica es

$$\mathcal{P}: \begin{array}{ll} x & = 2 + t + 3s \\ y & = -1 + s \\ z & = -2 + 4t + 5s \; ; \; t, s \in \mathbb{R} \end{array}$$

Observación:

a) Se suele denotar a los planos con: π .

b) Dado un plano $\mathcal{P}(P, \vec{u}, \vec{v})$, el cual es paralelo a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, vemos que existen una infinidad de vectores ortogonales a dicho plano y en consecuencia ortogonales a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Dichos vectores son paralelos al vector $\vec{u} \times \vec{v}$.

c) Cualquier vector no nulo ortogonal al plano $\mathcal{P}$ y en consecuencia ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se le llama vector ortogonal al plano $\mathcal{P}$. Luego, un vector normal al plano $\mathcal{P}$ sera $\vec{u} \times \vec{v}$ y cualquier otro vector normal será paralelo al vector $\vec{u} \times \vec{v}$.

Teorema 1

Si $\vec{n}$ es un vector normal del plano $\mathcal{P}(P,\vec{u},\vec{v})$ y, P_1 y P_2 son dos puntos del plano, entonces $\vec{n}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$.

Demostración: Como P_1 y P_2 estan sobre el plano $\mathcal{P}$, entonces

$$P_1 = P + t_1\vec{u} + s_1\vec{v} \quad \wedge \quad P_2 = P + t_2\vec{u} + s_2\vec{v}$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (t_2 - t_1)\vec{u} + (s_2 - s_1)\vec{v}$$

$$\Longrightarrow \quad \langle\overrightarrow{P_1P_2},\vec{n}\rangle = (t_2 - t_1)\langle\vec{u},\vec{n}\rangle + (s_2 - s_1)\langle\vec{v},\vec{n}\rangle \tag{1}$$

Pero $\vec{n}$ es un vector normal del plano $\mathcal{P}(P, \vec{u}, \vec{v})$, entonces

$$\vec{n} \perp \vec{u} \quad \wedge \quad \vec{n} \perp \vec{v} \qquad\qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos

$$\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{n} \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{n} \perp \overrightarrow{P_1P_2}$$

Teorema 2

Si $\vec{n}$ es un vector normal del plano $\mathcal{P}(P, \vec{u}, \vec{v})$ y $\vec{n} \perp \overrightarrow{PP_1}$, entonces $P_1 \in \mathcal{P}$.

Demostración: Se deja como ejercicio.

Teorema 3

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son coplanares, si y sólo si, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$

Demostración: Se deja como ejercicio.

Observación: El Teorema 3 se puede expresar de la siguiente manera:

Los puntos P_0, P_1, P_2 y P_3 de $\mathbb{R}^3$ son coplanares, si y sólo si, $P_1 - P_0, P_2 - P_0$ y $P_3 - P_0$ son linealmente dependientes.

Ecuación normal del plano

Sea P un punto fijo (conocido) del plano $\mathcal{P}$ y $\vec{n}$ un vector perpendicular al plano $\mathcal{P}$.

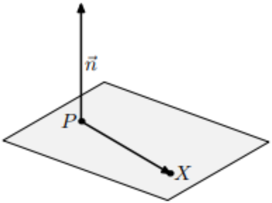


Figura 2: Plano que contiene a P, perpendicular a $\vec{n}$

Todo punto $X \in \mathbb{R}^3$ del plano satisface que $\overrightarrow{PX}$ es un vector en la dirección del plano. Y como $\vec{n}$ es perpendicular al plano (Figura 2), entonces

$$\langle \overrightarrow{PX}, \vec{n} \rangle = 0$$

De esta manera: $\langle X - P, \vec{n} \rangle = 0$

Definición 4

La ecuación

$$\langle X - P, \vec{n} \rangle = 0$$

es conocida, como **ecuación normal** o **ecuación punto-normal** del plano $\mathcal{P}$.

Además, si se conviene en que $X(x, y, z)$, $P(p_1, p_2, p_3)$ y $\vec{n} = (a, b, c)$, la ecuación anterior adquiere la forma:

$$\langle X, \vec{n} \rangle = \langle P, \vec{n} \rangle$$

entonces

$$\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = \langle (p_1, p_2, p_3), (a, b, c) \rangle$$

$$ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3$$

donde P y $\vec{n}$ son datos conocidos, entonces el lado derecho de la última ecuación se reduce a una constante $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$, y la ecuación adquiere la muy conocida forma:

$$ax + by + cz = d \ .$$

Ecuación general del plano

Definición 5

Todos los puntos (x,y,z) de un plano $\mathcal{P}$ que contenga al punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y sea perpendicular al vector $\vec{n} = (a, b, c)$, y sólo estos, satisfacen que:

$$\mathcal{P}: \; ax + by + cz + d = 0$$

donde $d = -(ap_1 + bp_2 + cp_3)$, que es llamada **ecuación general** ó **ecuación cartesiana** del plano. Además se dice que el vector $\vec{n}$ es normal al plano, ó que el plano contiene a P y es normal a $\vec{n}$.

Ejemplo: Determine la ecuación general del plano que contiene los puntos $P(1, 1, -4)$, $Q(2, -2, 3)$ y $R(-3, 1, 4)$.

Solución:

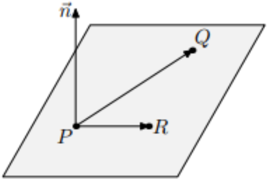


Figura 3:

De la figura 3 se tiene: $\overrightarrow{PR} = (-4, 0, 8)$ y $\overrightarrow{PQ} = (1, -3, 7)$.

Entonces $\vec{n} \parallel \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = (24, 36, 12) = 12(2, 3, 1)$.

Tomando $\vec{n} = (2, 3, 1)$, la ecuación del plano $\mathcal{P}$ es:

$$\langle (X - P), \vec{n} \rangle = 0$$

Entonces

$$\mathcal{P}: \; 2(x-1) + 3(y-1) + (z+4) = 0, \qquad \text{ó}$$

$$\mathcal{P}: \; 2x + 3y + z - 1 = 0$$

Observación: Sea $\mathcal{Q}$ un plano cuya normal es $\vec{N}$ y L una recta cuyo vector dirección es $\vec{a}$, entonces se tiene

a) $L \parallel \mathcal{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{N}$ (Figura 4:a)

b) $L \perp \mathcal{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{N}$ (Figura 4:b)

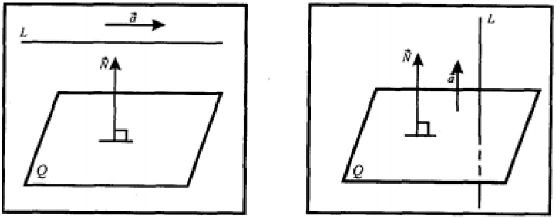


Figura 4: (a) (b)

c) Si $L \parallel \mathcal{Q} \implies L \cap \mathcal{Q} = \emptyset \quad \vee \quad L \subset \mathcal{Q}$

d) $L \subset \mathcal{Q} \implies \vec{a} \perp \vec{N}$ y $P_0 \in L \implies P_0 \in \mathcal{Q}$ (Figura 5:a)

e) Si $L \nparallel \mathcal{Q} \implies L \cap \mathcal{Q} = I$ es un punto. (Figura 5:b)

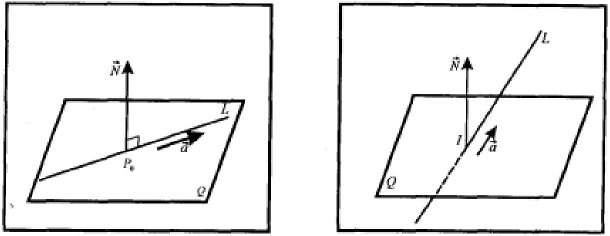
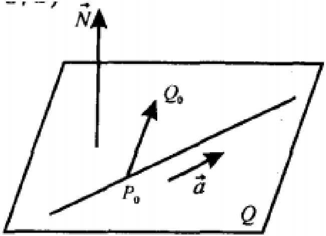


Figura 5: (a) (b)

Ejemplo: Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $L: \ P = (1,2,2) + t(0,3,1), \ t \in \mathbb{R}$ y al punto $Q_0(2,-3,8)$.

Solución: Graficando de acuerdo al enunciado. Sea $\vec{N}$ el vector normal del plano $\mathcal{Q}$ que contiene a la recta L y al punto Q_0 .



Entonces

$$\vec{N} \perp \vec{a} = (0,3,1) \;\wedge\; \vec{N} \perp \overrightarrow{P_0Q_0} = (1,-5,6)$$

donde $P_0(1,2,2)$.

Luego, $\vec{N} \parallel \vec{a} \times \overrightarrow{P_0Q_0} = (23,1,3)$.

Por lo tanto, al tomar $\vec{N} = (23,1,3)$ como vector normal del plano $\mathcal{Q}$ que pasa por el punto Q_0, su ecuación es

$$\mathcal{Q}: \; 23(x-2) + (y+3) + 3(z-8) = 0, \quad \text{ó}$$

$$\mathcal{Q}: \; 23x + y + 3z - 97 = 0$$

Tabla de contenidos

Planos paralelos

En el espacio los planos

$$\mathcal{P}_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

pueden tener las siguientes posiciones relativas, donde $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ son, respectivamente, las normales de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$.

Definición 6 (Planos paralelos)

Los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son **paralelos** $\iff \quad \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \quad \iff \quad \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$

En la figura 6 se dibujaron dos planos paralelos.

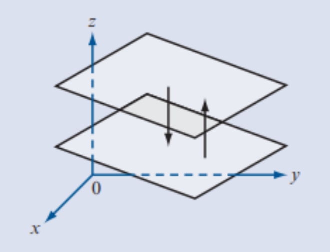


Figura 6:

Observación: Si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son dos planos paralelos, entonces

1. $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ (planos coincidentes)
2. $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ (planos paralelos no coincidentes)

Planos secantes

Definición 7 (Planos secantes)

Los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son **secantes** $\iff$ $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ $\iff$ $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = L$, donde L es la recta de intersección de los planos.

La ecuación de la recta de intersección de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ se escribe como

$$L: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

ó $\quad L: \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \wedge \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Observación:

1. Los planos secantes $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son perpendiculares si y sólo si sus vectores normales son perpendiculares, esto es

$$\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = 0$$

2. Si $\mathcal{P}_1 : \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $\mathcal{P}_2 : \; a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ son planos secantes, entonces la ecuación de la familia de planos $\mathcal{P}_F$ que pasan por la intersección de estos planos es

$$\mathcal{P}_F : \; a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

donde k es el paramétro de la familia.

Ejemplo: Halle la ecuación general del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x - y + 2z + 4 = 0$, $2x + y + 3z - 9 = 0$ y es paralelo a la recta cuyos números directores son $[1; 3; -1]$.

Solución: La ecuación de la familia de planos que pasan por la intersección de los planos dados es

$$x - y + 2z + 4 + k(2x + y + 3z - 9) = 0$$

$$\iff \quad (1 + 2k)x + (k - 1)y + (2 + 3k)z + 4 - 9k = 0$$

Luego $\vec{n} = (1 + 2k, k - 1, 2 + 3k)$ es el vector normal de la familia.

Como el plano es paralelo al vector $\vec{a} = (1, 3, -1)$, entonces $\vec{n} \perp \vec{a}$, por lo tanto

$$\langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = 0 \Longrightarrow (1)(1 + 2k) + (3)(k - 1) + (-1)(2 + 3k) = 0$$

$$\Longrightarrow k = 2$$

por tanto, el plano buscado es:

$$5x + y + 8z - 14 = 0 \ .$$

Tabla de contenidos

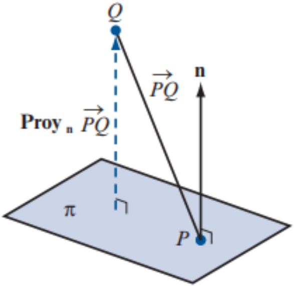
Distancia de un punto a un plano

Teorema 4

Sea $\mathcal{P}$ un plano, P un punto sobre el plano, $\vec{n}$ un vector normal al plano y Q un punto fuera del plano, entonces la distancia perpendicular $d(Q,\mathcal{P})$ de Q al plano está dada por

$$d(Q,\mathcal{P}) = \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|}$$

Demostración: Graficando de acuerdo al enunciado:



Vemos que: $$d(Q,\mathcal{P}) = \|Proy_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}\| = |Comp_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}| = \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|}$$

Sabemos que la ecuación general del plano $\mathcal{P}$ que contiene a $P(p_1, p_2, p_3)$ y es normal a $\vec{n} = (a, b, c)$ se representa como

$$ax + by + cz + d = 0$$

donde $d = -(ap_1 + bp_2 + cp_3)$. Además

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{n} \rangle = \langle (Q - P), \vec{n} \rangle = \langle Q, \vec{n} \rangle - \langle P, \vec{n} \rangle$$

Si $Q = (x_1, y_1, z_1)$ y empleando el teorema 5, tenemos:

Distancia del punto $Q = (x_1, y_1, z_1)$ al plano $\mathcal{P}$: $ax + by + cz + d = 0$

$$d(Q, \mathcal{P}) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Observación: De la ecuación anterior tenemos, la distancia $d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ entre los planos paralelos $\mathcal{P}_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ y $\mathcal{P}_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$ está dada por la fórmula

Distancia entre dos planos

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ejemplo: La distancia del punto $P(1, 0, 2)$ al plano $\mathcal{P}$ es 1. Si el plano $\mathcal{P}$ pasa por la intersección de los planos $4x - 2y - z + 3 = 0$ y $2x - y + z - 2 = 0$, halle la ecuación general del plano.

Solución: La ecuación de la familia de planos que pasan por la intersección de los planos dados es

$$\mathcal{P}_F:\ 4x-2y-z+3+k(2x-y+z-2)=0$$

$$\Longrightarrow \quad P_F:\ (4+2k)x-(2+k)y+(k-1)z+3-2k=0$$

Por la condición descrita, la distancia del punto P al plano $\mathcal{P}_F$ resulta

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{|(4+2k)+2(k-1)+3-2k|}{\sqrt{(4+2k)^2+(2+k)^2+(k-1)^2}} \\ &= \frac{|2k+5|}{\sqrt{6k^2+18k+21}} \end{aligned}$$

$$\iff \quad 6k^2 + 18k + 21 = 4k^2 + 20k + 25$$

$$\iff \quad 2k^2 - 2k - 4 = 0 \Longrightarrow k = -1 \ \vee \ k = 2$$

Luego, las condiciones del plano $\mathcal{P}$ (hay dos soluciones) son

$$\mathcal{P}_1 : \ 2x - y - 2z + 5 = 0$$

$$\mathcal{P}_2 : \ 8x - 4y + z - 1 = 0$$

Tabla de contenidos

Ángulo entre dos planos

Definición 8

El **ángulo entre dos planos secantes** está definido como el ángulo agudo entre sus vectores normales.

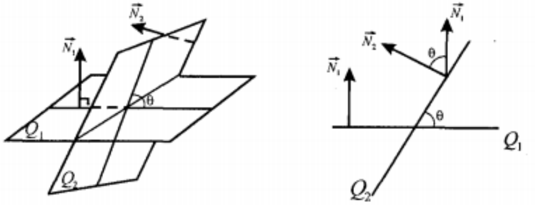


Figura 7:

De la figura 7, si θ es este ángulo, entonces:

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_2\|}$$

donde $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ son, respectivamente, las normales de $\mathcal{Q}_1$ y $\mathcal{Q}_2$.

Ejemplo: Halle la ecuación general del plano perpendicular al plano yz, que forma un ángulo $\theta = \arccos(2/3)$ radianes con el plano $\mathcal{Q}_2 :\ 2x - y + 2z - 3 = 0$ y pasa por el punto $P(0, 1, 1)$.

Solución: Sean $\vec{n} = (a, b, c)$ el vector normal del plano buscado,
$\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$ el vector normal del plano yz $(x = 0)$ y $\vec{n}_2 = (2, -1, 2)$ el vector normal del plano $\mathcal{Q}_2$.
Como el plano es perpendicular al plano yz $(\vec{n} \perp \vec{n}_1)$ y forma un ángulo θ con el plano $\mathcal{Q}_2$, entonces se tiene

$$\langle \vec{n}, \vec{n}_1 \rangle = 0 \Longrightarrow a = 0 \tag{1}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{n}, \vec{n}_2 \rangle}{\|\vec{n}\| \|\vec{n}_2\|} = \frac{2a - b + 2c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{9}} \tag{2}$$

Reemplazando (1) en (2) se obtiene

$$\frac{2}{3} = \frac{2c - b}{3\sqrt{b^2 + c^2}}$$

De donde

$$4(b^2 + c^2) = 4c^2 - 4bc + b^2 \iff 3b^2 + 4bc = b(3b + 4c) = 0$$

$$\iff b = 0 \quad \text{ó} \quad b = -4c/3 \quad \text{(hay dos soluciones)}$$

Si $b = 0$ entonces $\vec{n} = (0, 0, c) = c(0, 0, 1)$. Luego, la ecuación buscada del plano que pasa por el punto $P = (0, 1, 1)$ es

$$\mathcal{Q}_1 : \ 0(x - 0) + 0(y - 1) + 1(z - 1) = 0 \quad \text{ó} \quad \mathcal{Q}_1 : \ z - 1 = 0$$

Si $b = -4c/3$, entonces $\vec{n} = (0, -4c/3, c) = -(c/3)(0, 4, -3)$. Luego, la ecuación buscada del plano que pasa por el punto $P = (0, 1, 1)$ es

$$\mathcal{Q}_3 : \ 0(x - 0) + 4(y - 1) - 3(z - 1) = 0 \quad \text{ó} \quad \mathcal{Q}_3 : \ 4y - 3z - 1 = 0$$

Ejemplo: Por la recta $L: \; P = (4, 2, -3) + t(1, 0, 1)$ pasa un plano cuyas intersecciones con los planos coordenados XY e YZ forman un ángulo de 60° . Hallar la ecuación del plano.

Solución: Sea $\vec{N} = (A, B, C)$ la normal del plano buscado $\mathcal{P}$.
Se tiene: $P_0(4, 2, -3) \in \mathcal{P}$ y

$$\langle (A, B, C), (1, 0, 1) \rangle = 0 \Longleftrightarrow A = -C \qquad (\alpha)$$

Sean

$$L_1 : Ax + By + Cz + D = 0 \; , \; z = 0 \; y \; L_2 : Ax + By + Cz + D = 0 \; , \; x = 0$$

donde $Ax + By + Cz + D = 0$ es la ecuación del plano $\mathcal{P}$.

Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores dirección de L_1 y L_2 , respectivamente, entonces

$$\vec{a} = (A, B, C) \times (0, 0, 1) = (B, -A, 0)$$

y

$$\vec{b} = (A, B, C) \times (1, 0, 0) = (0, C, -B)$$

luego, $\cos 60^\circ = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$, de donde

$$\frac{1}{2} = \frac{-AC}{\sqrt{B^2 + A^2}\sqrt{C^2 + B^2}} \qquad (\beta)$$

Reemplazamos (α) en (β) se obtiene

$$\frac{1}{2} = \frac{A^2}{B^2 + A^2} \quad \Longrightarrow \quad B^2 = A^2 \quad \Longrightarrow \quad B = \pm A$$

(El problema tiene dos soluciones)

Si $B = A \implies \vec{N}_1 = (A, A, -A)$. Para $A = 1$, $\vec{N}_1 = (1, 1, -1)$.

Si $B = -A \implies \vec{N}_2 = (A, -A, -A)$. Para $A = 1$, $\vec{N}_2 = (1, -1, -1)$.

Luego, los planos que satisfacen las condiciones del problema son:

$$\mathcal{P}_1 : 1(x-4) + 1(y-2) - 1(z+3) = 0 \quad \text{ó} \quad x + y - z - 9 = 0 \ .$$

$$\mathcal{P}_2 : 1(x-4) - 1(y-2) - 1(z+3) = 0 \quad \text{ó} \quad x - y - z - 5 = 0 \ .$$

LUGARES GEOMÉTRICOS. ENFOQUE VECTORIAL DE LA CIRCUNFERENCIA Y PARÁBOLA.

RICHARD ACUÑA ORTEGA [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

21/07/2022

Tabla de contenidos

Lugar geométrico

Se llama **lugar geométrico** a un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad.
La propiedad geométrica que define el lugar geométrico, tiene que traducirse al lenguaje algebraico de ecuaciones.

Ejemplo: La **mediatriz de un segmento** $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos P, que equidistan de sus extremos.

Se cumple $d(A,P) = d(B,P)$ entonces $\|\overrightarrow{AP}\|^2 = \|\overrightarrow{BP}\|^2$, luego:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$$

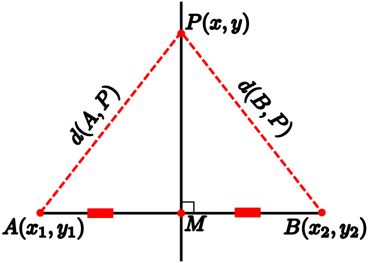
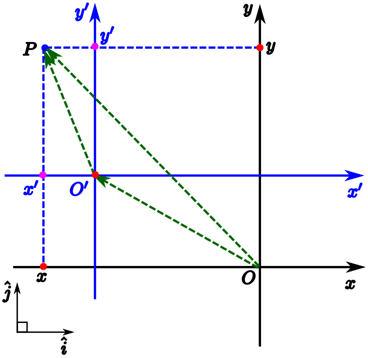


Figura 1: Mediatriz de $\overline{AB}$: $d(A,P) = d(B,P)$

Tabla de contenidos

Traslación

El origen O del sistema XY se traslada al punto $O' = (h, k)$, luego $\overrightarrow{OO'} = h\hat{i} + k\hat{j}$. En O' se traza un nuevo sistema $X'Y'$.



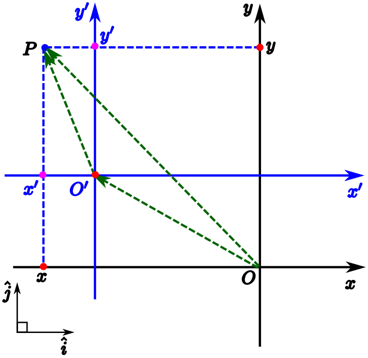
Recuerde que $\{i, j\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, luego:

$$\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Definimos las coordenadas de P en el sistema $X'Y'$ como las componentes del vector $\overrightarrow{O'P}$.

Traslación

Denotamos P en el sistema $X'Y'$ como $P' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ donde x', y' son sus coordenadas en el sistema $X'O'Y'$.



Se cumple:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O'P} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} \\ &= (x-h)\hat{i} + (y-k)\hat{j} \end{aligned}$$

luego:

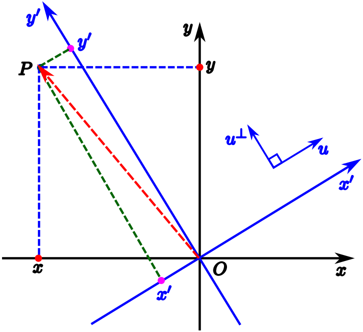
$$P' = (x', y') \;=\; (x-h, y-k),$$

entonces:

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \\ P' &= P - O' \\ P &= O' + P' \end{aligned}$$

Rotación

Dado un vector $u \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ se cumple que $\{u, u^\perp\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Rotamos el sistema XOY según el **vector unitario** u obteniéndose el sistema $X'OY'$.



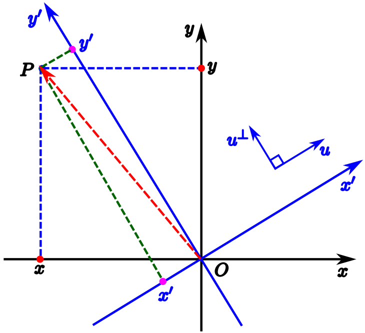
Como $\{u, u^\perp\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ entonces existen únicas constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha u + \beta u^\perp$$

Definimos las coordenadas de P en el sistema $X'OY'$ como las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base $\{u, u^\perp\}$.

Rotación

Denotamos P en el sistema $X'OY'$ como $P' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ donde x', y' son sus coordenadas en el sistema $X'OY'$.



A partir de:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha u + \beta u^{\perp}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{OP}, u \rangle &= \langle \alpha u + \beta u^{\perp}, u \rangle \\ \langle \overrightarrow{OP}, u^{\perp} \rangle &= \langle \alpha u + \beta u^{\perp}, u^{\perp} \rangle \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} x' = \alpha &= \langle \overrightarrow{OP}, u \rangle \\ y' = \beta &= \langle \overrightarrow{OP}, u^{\perp} \rangle \end{aligned}$$

Rotación

Hasta ahora tenemos:

$$x'u + y'u^{\perp} = \overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Luego, si $u = (u_1, u_2)$ unitario, entonces:

$$\begin{array}{rcl} \langle x'u + y'u^{\perp}, \hat{i}\rangle & = & \langle x\hat{i} + y\hat{j}, \hat{i}\rangle \implies x = x'u_1 - y'u_2 \\ \langle x'u + y'u^{\perp}, \hat{j}\rangle & = & \langle x\hat{i} + y\hat{j}, \hat{j}\rangle \implies y = x'u_2 + y'u_1 \end{array}$$

ordenando:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'u_1 - y'u_2 \\ x'u_2 + y'u_1 \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x'u + y'u^{\perp}.$$

Rotación

La expresión:

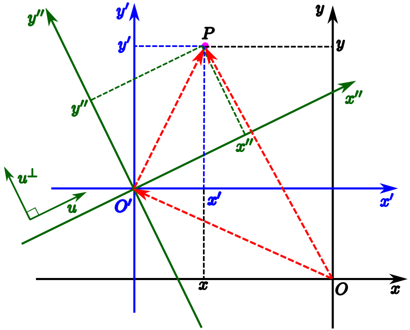
$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x'u + y'u^{\perp} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

son llamadas **ecuaciones de rotación** y la matriz $R = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal llamada **matriz de rotación**.

El sentido del vector unitario de rotación u da el sentido del eje de abscisas **positivo**.

Rotación-traslación

El origen O del sistema XY se traslada al punto $O' = (h, k)$ y se traza el sistema $X'O'Y'$. Luego, dado un vector unitario u de rotación, rotamos el sistema $X'O'Y'$ y se obtiene el sistema $X''O'Y''$.



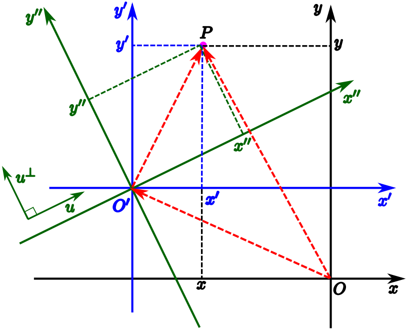
Sea $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ en el sistema XOY. La representación de P en el sistema $X'O'Y'$ viene dado por

$$P' = (x', y')$$

La representación de P en el sistema $X''O'Y''$ viene dado por

$$P'' = (x'', y'')$$

Rotación-traslación



El sistema $X'O'Y'$ es una traslación del sistema XOY, luego, de las ecuaciones de traslación se cumple:

$$P' = P - O'$$

El sistema $X''O'Y''$ es una rotación del sistema $X'O'Y'$, luego, de las ecuaciones de rotación se cumple:

$$P' = x''u + y''u^{\perp}$$

Rotación-Traslación

De las dos expresiones de P' se obtiene la relación entre las coordenadas de $P = (x, y)$ en el sistema original XOY y las coordenadas de $P'' = (x'', y'')$ en el sistema final $X''O'Y''$, la cual resulta:

$$P - O' = x''u + y''u^{\perp}$$

es decir:

$$P = O' + x''u + y''u^{\perp}$$

llamada **ecuación de rotación-traslación**.

Observe además que:

$$x'' = \langle \overrightarrow{O'P}, u \rangle \quad \text{y} \quad y'' = \langle \overrightarrow{O'P}, u^{\perp} \rangle$$

Ejemplo: Demuestre que la distancia entre dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ no cambia después de una traslación-rotación de ejes.

Demostración:

Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ luego:

$$\begin{aligned} d^2(P, Q) &= \|Q - P\| = \left\|O' + x_2'' u + y_2'' u^{\perp} - (O' + x_1'' u + y_1'' u^{\perp})\right\|^2 \\ &= \|(x_2'' - x_1'')u + (y_2'' - y_1'')u^{\perp}\|^2 \\ &= (x_2'' - x_1'')^2 + (y_2'' - y_1'')^2 \end{aligned}$$

entonces:

$$d(P, Q) = d(P'', Q'')$$

Tabla de contenidos

Definición 1

Dado un punto fijo $C \in \mathbb{R}^2$. **La circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos P que equidistan del punto fijo C llamado **centro**.
La distancia común es llamada **radio**. Es decir:

$$\mathscr{C}(C, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 \, / \, d(P, C) = r\}$$

es decir:

$$\mathscr{C}(C, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 \, / \, \|P - C\| = r\} = \{P \in \mathbb{R}^2 \, / \, \|\overrightarrow{CP}\| = r\}$$

Ecuación cartesiana

Si consideramos $C = (h, k)$, $P = (x, y) \in \mathscr{C}$, entonces:

$$d^2(P, C) = \|\overrightarrow{CP}\|^2 = \|P - C\|^2 = \|(x - h, y - k)\|^2$$

de lo que resulta:

$$P = (x, y) \in \mathscr{C} \iff (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (1)$$

La expresión (1) es llamada **Ecuación cartesiana de la circunferencia** ó **Ecuación ordinaria de la circunferencia**.

Ecuación vectorial

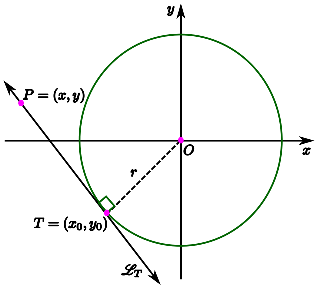
Si el origen O del sistema XOY es trasladado al centro de la circunferencia $C = (h, k)$ y luego es rotado según un vector unitario u obteniéndose el sistema $X'CY'$, entonces la ecuación de $\mathscr{C} = \mathscr{C}(C, r)$ en el sistema $X'CY'$ viene dada por:

$$\mathscr{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 \,/\, P = C + x'u + y'u^{\perp} \quad \text{y} \quad (x')^2 + (y')^2 = r^2\} \tag{2}$$

La expresión (2) es llamada ecuación vectorial de la circunferencia.

Ecuación recta tangente

Sin pérdida de generalidad, considere la circunferencia $\mathscr{C}(C, r)$ de centro $C = O = (0,0)$ y radio r. Sea $\mathscr{L}_T$ la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto $T = (x_0, y_0)$.



Sea $P = (x, y)$ cualquier punto de $\mathscr{L}_T$. Luego se cumple:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{TP}, \overrightarrow{TO} \rangle &= 0 \\ \langle (x - x_0, y - y_0), (-x_0, -y_0) \rangle &= 0 \\ x_0 x + y_0 y &= r^2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\mathscr{L}_T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_0 x + y_0 y = r^2\}$$

Recta normal

Sea $\mathscr{C} = \mathscr{C}(O, r)$ y un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathscr{C}$. La recta normal $\mathscr{L}(P_0)$ es aquella recta perpendicular a $\mathscr{L}_T$ en el punto P_0.
Sabemos que en $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ la recta tangente $\mathscr{L}_T$ tiene por ecuación:

$$x_0 x + y_0 y = r^2$$

luego, la ecuación de la recta normal $\mathscr{L}_N$ en P_0 tiene por ecuación:

$$-y_0 x + x_0 y = 0.$$

Intersección Recta-Circunferencia

Sean: la circunferencia $\mathscr{C}(O, r)$ y la recta $\mathscr{L} : ax + by + c = 0$.
De la ecuación de la recta, si $b \neq 0$ podemos despejar " y ", que al ser reemplazado en la ecuación de $\mathscr{C}$ resulta una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

para ciertas constantes $A, B, C \in \mathbb{R}$. Luego, si $\Delta = B^2 - 4AC$, tenemos los siguientes casos:

1. $\Delta > 0$ entonces existen dos puntos de intersección, es decir, $\mathscr{L}$ es una recta secante a la circunferencia.
2. $\Delta < 0$ entonces no existen puntos de intersección, es decir, $\mathscr{L}$ no intersecta a la circunferencia.
3. $\Delta = 0$ entonces existen un único punto de intersección, es decir, $\mathscr{L}$ es una recta tangente a la circunferencia.

Cuerda de contacto

Se denomina cuerda de contacto al segmento que une los puntos de contacto de las rectas tangentes trazadas desde un punto exterior $P_0(x_0, y_0)$ a una circunferencia.

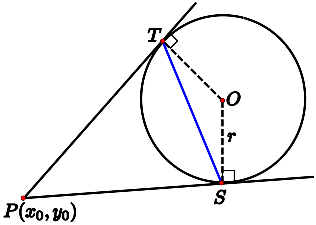
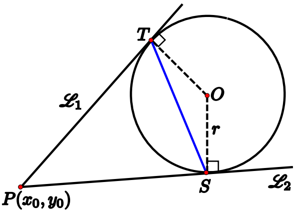


Figura 2: $\overline{TS}$ es la cuerda de contacto.

Cuerda de contacto

Considere las rectas tangentes $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tangentes a la circunferencia $\mathscr{C}(O, r)$ en los puntos $T = (x_1, y_1)$ y $S = (x_2, y_2)$ respectivamente y sea $P_0(x_0, y_0) = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$.



Luego:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_1 &: \quad x_1x + y_1y = r^2 \\ \mathscr{L}_2 &: \quad x_2x + y_2y = r^2 \end{aligned}$$

Como $P_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$, entonces:

$$x_1x_0 + y_1y_0 = r^2, x_2x_0 + y_2y_0 = r^2$$

$$\Longrightarrow (x_1 - x_2)x_0 + (y_1 - y_2)y_0 = 0$$

La ecuación de la recta $\mathscr{L}$ que contiene a la cuerda de contacto $\overline{TS}$ tiene pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = -\frac{x_0}{y_0}$$

Cuerda de contacto

Luego:

$$\mathscr{L} : y - y_1 = m(x - x_1) \Longrightarrow y - y_1 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_1)$$

$$\Longrightarrow x_0 x + y_0 y = x_0 x_1 + y_0 y_1 = r^2$$

por tanto, se obtiene la ecuación de $\mathscr{L}$:

$$\mathscr{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x_0 x + y_0 y = r^2\}.$$

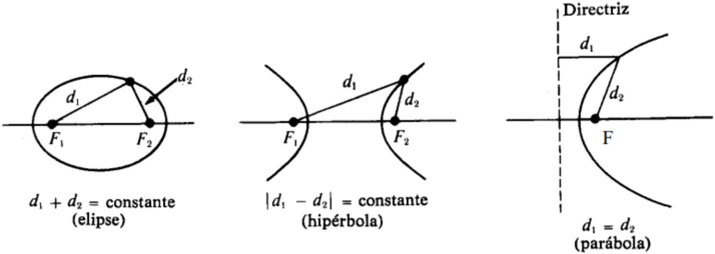
Ejercicio: Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro se encuentra sobre la recta $y = 4x$, si las longitudes de los segmentos que determina sobre los ejes X y Y son $\frac{7}{2}$ y 4 respectivamente.

Ejercicio: La recta L es tangente a la circunferencia $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 1$ en el punto $A(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. La recta L_1 biseca al ángulo que forma L con la cuerda que va del punto A al punto $B(1, 0)$. Hallar la recta tangente en el punto que L_1 interseca a $\mathscr{C}$.

Ejercicio: Hallar la ecuación de una circunferencia tangente a la recta $7x - 24y - 55 = 0$ y cuyo centro es el de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$.

Tabla de contenidos

Generación de las secciones cónicas



- Una sección cónica puede definirse como una curva descrita por un punto que se mueve en un plano de manera que la razón de sus distancias a un punto fijo y a una recta fija es constante.
- Esta razón constante se llama excentricidad de la curva y se designa por e.

Definición 2

Dados una recta $\mathscr{L}$, un punto F no perteneciente a $\mathscr{L}$, y un número positivo e.

El conjunto de todos los puntos X que satisfacen la relación

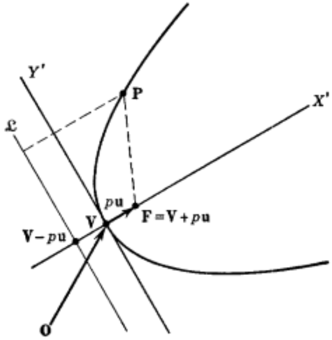
$$\|X - F\| = e \cdot d(X, \mathscr{L}) \tag{3}$$

es una cónica con excentricidad e. Donde, la cónica es una elipse si $e < 1$, una parábola si $e = 1$ y una hipérbola si $e > 1$.

Tabla de contenidos

Definición 3 (La Parábola)

Una parábola $\mathscr{P}$ es el conjunto de todos los puntos que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no esta sobre la recta.



Observación:

- La recta fija se llama directriz $\mathscr{L}$ de la parábola $\mathscr{P}$ y el punto fijo se llama foco (F).
- La recta que pasa por F ortogonal a $\mathscr{L}$ se llama eje de la parábola $\mathscr{P}$.
- El punto donde la parábola $\mathscr{P}$ interseca al eje se llama vértice (V).
- Sea $F - V = pu$ donde $u = (u_1, u_2)$ un vector unitario paralelo a $F - V$. Entonces, $F = V + pu$.
- El eje y la directriz se intersecan en $V - pu$.

- La directriz es la recta

$$\mathscr{L} = \{Q : Q = (V - pu) + y'u^{\perp}, y' \in \mathbb{R}\}$$

- Correspondiendo a cada punto P de $\mathbb{R}^2 = X'Y'$, existen unos únicos x' y y' tales que

$$P = V + x'u + y'u^{\perp}$$

- El punto P está sobre la parábola $\mathscr{P}$ si y solo si

$$\|P - F\| = d(P, \mathscr{L})$$

donde $d(P, \mathscr{L}) = \|p + x'\|$ y $\|P - F\| = \|(x' - p)u + y'u^{\perp}\|$.

- Obteniendo

$$\|p + x'\| = \|(x' - p)u + y'u^{\perp}\| \equiv \|p + x'\| = \sqrt{(x' - p)^2 + y'2}$$

- Elevando al cuadrado y simplificando, se obtiene

$$y'^2 = 4px' \equiv x' = \frac{y'^2}{4p}$$

- De donde P es un punto sobre la parábola $\mathscr{P}$, entonces P satisface la ecuación vectorial

$$P = V + \frac{y'^2}{4p}u + y'u^{\perp} \tag{4}$$

- Reciprocamente, si P satisface la ecuación (4) se tiene

$$d(P,\mathscr{L}) = \|p + x'\| = \left\| p + \frac{y'^2}{4p} \right\|$$

y

$$\begin{aligned}
\|P - F\| &= \left\| V + \frac{y'^2}{4p} u + y' u^{\perp} - V - pu \right\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{y'^2 - 4p^2}{4p} \right)^2 + y'^2} \\
&= \left| p + \frac{y'^2}{4p} \right| .
\end{aligned}$$

- Para $P=(x,y)$, $V=(h,k)$ y $u=(u_1,u_2)$, en la ecuación (4) se tiene

$$P-V=(x-h,y-k)=\frac{y'^2}{4p}(u_1,u_2)+y'(-u_2,u_1)$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{y'^2}{4p}u_1 - y'u_2 + h \\ y &= \frac{y'^2}{4p}u_2 + y'u_1 + k \end{aligned}$$

son ecuaciones paramétricas de la parábola $\mathscr{P}$.

Caso particular:

- Si $u = (1,0)$, entonces el eje de la parábola $\mathscr{P}$ es paralelo al eje X.
- Para $P = (x,y)$ y $V = (h,k)$, se tiene

$$P - V = (x-h, y-k) = \frac{y'^2}{4p}(1,0) + y'(0,1) = (\frac{y'^2}{4p}, y')$$

de donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{y'^2}{4p} + h \\ y &= y' + k \end{aligned}$$

son ecuaciones paramétricas de la parábola.

- Asimismo

$$x' = x - h = \frac{y'^2}{4p} = \frac{(y-k)^2}{4p}$$

ó

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

es una ecuación implícita de la parábola con el eje paralelo al eje X, vértice $V = (h, k)$, foco $F = V + pu = (h+p, k)$ y directriz $\mathscr{L} : x - h = -p$.

Por otro lado, el vector $F - V = pu = (p, 0)$ satisface

- Si $p > 0$, se dice que el foco esta a la derecha del vértice y la parábola se abre a la derecha.
- Si $p < 0$, se dice que el foco esta a la izquierda del vértice y la parábola se abre a la izquierda.

Observación:

De manera similar, el análisis previo se puede hacer con $u = (0, 1)$ (el eje paralelo al eje Y). Entonces

$$P - V = (x - h, y - k) = \frac{y'^2}{4p}(0, 1) + y'(1, 0) = \left(-y', \frac{y'^2}{4p}\right)$$

las ecuaciones paramétricas son

$$x = -y' + h \quad \text{y} \qquad y = \frac{y'^2}{4p} + k$$

y la ecuación implícita es

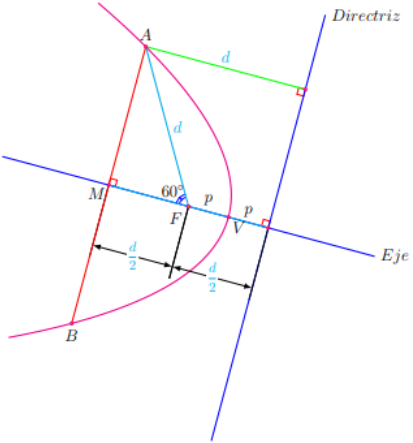
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Donde, el vector $F - V = pu = (0, p)$ satisface

- Si $p > 0$, se dice que el foco esta encima del vértice y la parábola se abre hacia arriba.
- Si $p < 0$, se dice que el foco esta debajo del vértice y la parábola se abre hacia abajo.

Ejemplo: Un cometa se mueve en una órbita parabólica, con el sol en el foco. Cuando el cometa está a 4×10^7 millas del sol y se aleja, la recta desde el sol, hace un ángulo de 60° con el eje de la órbita (dibujada en la dirección en la cual la órbita se abre). Hallar la distancia mínima al sol.

Solución: En el gráfico adjunto se observa que $\dfrac{d}{2} = 2p$.



En el gráfico adjunto se observa que $\dfrac{d}{2} = 2p$. Luego, si $d = 4 \times 10^7$ millas, entonces $p = 10^7$ millas. Por tanto la distancia mínima es 10^7 millas.

ENFOQUE VECTORIAL DE LA ELIPSE Y LA HIPÉRBOLA

RICHARD ACUÑA ORTEGA[1]

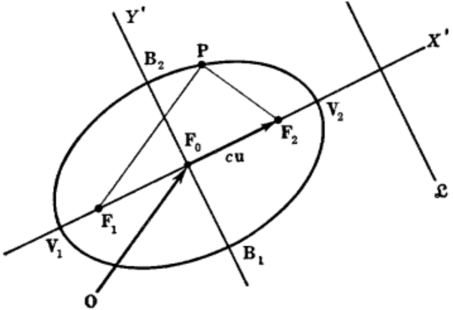
[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

26/07/2022

Tabla de contenidos

Definición 1

Una elipse $\mathcal{E}$ es el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que la suma de las distancias de los puntos del conjunto a dos puntos fijos dados es una constante.



- $F_0 = (h, k)$ centro de la elipse $\mathcal{E}$.
- X' eje focal.
- Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman focos.
- Las intersecciones V_1 y V_2 de la recta que pasa por los focos y es ortogonal a $\mathcal{L}$, se llaman vértices.
- Se tiene $F_0 = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$ es el centro de la elipse $\mathcal{E}$.
- $[V_1, V_2]$ eje mayor ; $[B_1, B_2]$ eje menor (de longitud $2b$)

En el sistema $X'Y'$ se definen:

- $B_1 = (0, -b)$; $B_2 = (0, b)$
- $F_1 = (-c, 0)$; $F_2 = (c, 0)$; $F_0 = (0, 0)$

Definición 2 (Rectas Directrices)

Dos rectas L_1 y L_2 se llaman **Rectas directrices** de la eleipse $\mathcal{E}$ correspondientes a los focos F_1 y F_2 respectivamente si es que son perpendiculares al eje focal de $\mathcal{E}$ y no cortan al segmento $\overline{F_1F_2}$ y si es que existe una constante e llamada **excentrecidad** de la elipse tal que para todo punto $P \in \mathcal{E}$ se tiene que

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, L_1)} = e = \frac{d(P, F_2)}{d(P, L_2)}$$

Propiedades: Probar que en una elipse $\mathcal{E}$:

1. $d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2) = a \quad \text{y} \quad d(B_2, F_1) = d(B_2, F_2) = a$
2. $d(V_1, F_0) = d(V_2, F_0) = a$
3. $d(F_0, L_1) = d(F_0, L_2) = \dfrac{a}{e}$
4. Si $c = d(F_0, F_1) = d(F_0, F_2)$ entonces $c = ae$
5. $a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{y} \quad a > b$.
6. La excentrecidad e satisface $0 < e < 1$, utilizando las definiciones de la gráfica anterior.

Ecuación vectorial

- Sea $F_2 - F_0 = \frac{1}{2}(F_2 - F_1) = cu$, donde u es un vector unitario en la dirección $\overrightarrow{F_1F_2}$.
- Para cada punto $P \in \mathbb{R}^2$ existen unos únicos x' y y' tales que

$$P = F_0 + x'u + y'u^{\perp}$$

- El punto P esta sobre la elipse $\mathcal{E}$ si y sólo si

$$\|P - F_1\| + \|P - F_2\| = 2a \qquad (a > c)$$

- Luego,

$$\begin{aligned} P - F_1 &= (F_0 + x'u + y'u^{\perp}) - (F_0 - cu) = (x' + c)u + y'u^{\perp} \\ P - F_2 &= (F_0 + x'u + y'u^{\perp}) - (F_0 + cu) = (x' - c)u + y'u^{\perp} \end{aligned}$$

Reemplazando éstos en la expresión previa se tiene que

$$(a^2 - c^2)x'^2 + a^2y'^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c$ y $a^2 - c^2 > 0$, se tiene

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2 - c^2} = 1$$

haciendo $a^2 - c^2 = b^2 > 0$, se tiene

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Obteniendo entonces

Definición 3 (Ecuación vectorial de la elipse)

$$\mathcal{E} : P = F_0 + x' u + y' u^{\perp} \quad \text{donde} \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

con F_0 el centro de la elipse $\mathcal{E}$ y eje paralelo al vector unitario u.

Así,

$$\begin{aligned} V &= F_0 \pm a\, u && \text{(vértices)} \\ F &= F_0 \pm c\, u && \text{(focos)} \end{aligned}$$

$$B = F_0 \pm b\, u^{\perp} \qquad \text{(extremos del eje menor)}$$

$$L : x' = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c} \qquad \text{(directrices)}$$

$$\text{donde} \quad x' = (P - F_0).u$$

Observación:

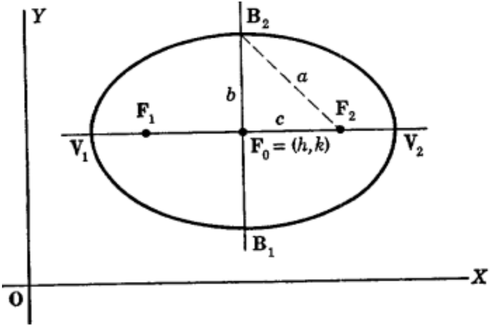
Si $c = 0$ entonces la elipse es una circunferencia de radio a.

Casos particulares:

Partiendo de (1) se pueden establecer algunas propiedades.

- Los números x' y y' son coordenadas de puntos respecto a los ejes X' y Y', con origen (F_0) en el centro de la elipse y u como dirección positiva del eje X'. Entonces de la ecuación (1) se deduce que la gráfica es simétrica con respecto al eje X' como al eje Y' y por tanto, también respecto al centro.
- Si $u = (1, 0)$, entonces los focos están en una recta paralela al eje X. Para $P = (x, y)$ y $F_0 = (h, k)$, se obtiene

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{2}$$


Y
B2
a
b
F1
F2
c
V1
F0 = (h, k)
V2
B1
X
O

La ecuación (2) es una ecuación implícita de la elipse con centro $F_0 = (h, k)$ y con focos sobre la recta X.

- Si F_0 es el origen, (2) tomará la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_0 - cu = (h - c, k) \\
F_2 &= F_0 - cu = (h + c, k) \\
V_1 &= F_0 - au = (h - a, k) \\
V_2 &= F_0 + au = (h + a, k) \\
B_1 &= F_0 - bu^{\perp} = (h, k - b) \quad \text{(extremo del eje menor)} \\
B_2 &= F_0 + bu^{\perp} = (h, k + b) \quad \text{(extremo del eje menor)}
\end{aligned}$$

De manera similar; dada la ecuación (1) y $u = (0, 1)$. Se tiene que los focos están en una recta paralela al eje Y. Para $P = (x, y)$ y $F_0 = (h, k)$, se obtiene

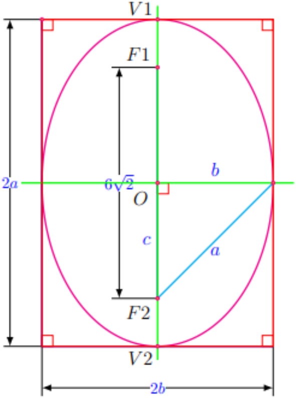
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

donde

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_0 - cu = (h, k-c) \\
F_2 &= F_0 - cu = (h, k+c) \\
V_1 &= F_0 - au = (h, k-a) \\
V_2 &= F_0 + au = (h, k+a) \\
B_1 &= F_0 - bu^{\perp} = (h+b, k) \quad \text{(extremo del eje menor)} \\
B_2 &= F_0 + bu^{\perp} = (h-b, k) \quad \text{(extremo del eje menor)}
\end{aligned}$$

Ejercicio: Un arquitecto debe construir una piscina de forma elíptica inscrita en un terreno rectangular de área $72\sqrt{2}\ m^2$. La piscina tendra dos bocas de desagua ubicadas en los focos de la elipse los cuales son paralelas al largo del terreno. Si la distancia entre las bocas es $6\sqrt{2}\ m$, calcule la excentridad de la elipse.

Solución:



- Largo del terreno: $2a$.
- Ancho del terreno: $2b$.
- Área del terreno: $(2a)(2b) = 72\sqrt{2}$ entonces $b = \frac{18\sqrt{2}}{a}$.
- Distancia entre las bocas de desagua: $2c = 6\sqrt{2}$ entonces $c = 3\sqrt{2}$.
- Además sabemos que: $b^2 + c^2 = a^2$ entonces

$$\left(\frac{18\sqrt{2}}{a}\right)^2 + (3\sqrt{2})^2 = a^2 \implies a = 6 .$$

- La excentricidad e cumple: $e = \frac{c}{a}$ entonces $e = \frac{3\sqrt{2}}{6}$, así $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tabla de contenidos

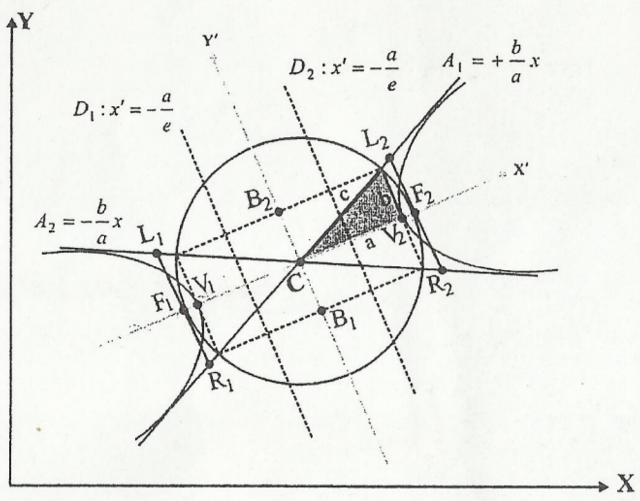
Definición 4

Una hipérbola H está conformada por el conjunto de puntos $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, tal que:

$$\left|\|\overline{PF_1}\|-\|\overline{PF_2}\|\right|=2a$$

Donde F_1 y F_2 son diferentes puntos fijos llamados focos y además: $\|\overline{F_1F_2}\|=2c$.

Veamos el siguiente gráfico:


Y
Y'
$D_2 : x' = -\frac{a}{e}$
$A_1 = +\frac{b}{a}x$
$D_1 : x' = -\frac{a}{e}$
L_2
X'
B_2
c
b
F_2
$A_2 = -\frac{b}{a}x$
L_1
V_2
a
C
R_2
V_1
F_1
B_1
R_1
X

Los elementos de la hipérbola son:

- $C = (h, k)$: Centro de la hipérbola
- V_1, V_2: Vértices del eje transverso $(\|\overline{V_1V_2}\| = 2a)$
- B_1, B_2: Vértices del eje conjugado $(\|\overline{B_1B_2}\| = 2b)$
- F_1, F_2: Focos de la hipérbola $(\|\overline{F_1F_2}\| = 2c)$
- $\overline{L_1R_1}$, $\overline{L_2R_2}$: Lados rectos de la hipérbola $\left(\|\overline{L_1R_1}\| = \|\overline{L_2R_2}\| = \dfrac{2b^2}{a}\right)$
- D_1, D_2: Directrices de la hipérbola $(d(C, D_1) = d(C, D_2) = \frac{a}{e})$
- A_1, A_2: Asíntotas de la hipérbola

$$\left(A_1 : y' = \frac{b}{a}x' \quad \text{y} \quad A_2 : y' = -\frac{b}{a}x'\right)$$

- X': Eje focal de la hipérbola
- $e = \dfrac{c}{a}$: Excentricidad de la hipérbola ($e > 1$)

Relación: Del gráfico observamos que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Si la relación $a = b$, la hipérbola se denomina hipérbola equilátera.
En este caso: $c = a\sqrt{2}$
La excentricidad de la hipérbola equilátera es $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

Ecuación vectorial de la Hipérbola

La ecuación vectorial de la hipérbola tiene la forma:

$$\mathcal{H} : P = C + x'\vec{u} + y'\vec{u}^{\perp} \quad \Bigg| \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Donde:

$$x' = \langle (P - C), \vec{u} \rangle$$
$$y' = \langle (P - C), \vec{u}^{\perp} \rangle$$

Asíntotas de la Hipérbola

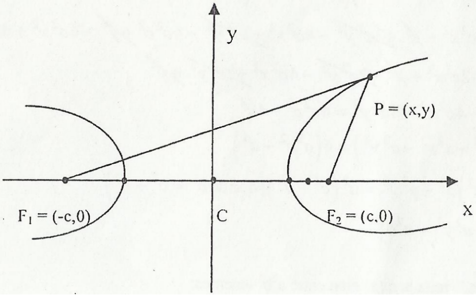
Las asíntotas de la hipérbola pueden hallarse fácilmente igualando la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H} : \dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ a cero, es decir: $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$ entonces: $y' = \pm\dfrac{b}{a}x'$, de donde:

$$A_1 : y' = \frac{b}{a}x' \ , \quad A_2 : y' = -\frac{b}{a}x' \ .$$

Ecuación cartesiana de la Hipérbola

La ecuación de una hipérbola toma su forma más simple cuando su centro está en el origen de coordenadas y su eje focal coincide con uno de los ejes coordenados.

Primer caso: Consideremos que el centro de la hipérbola es $C = (0, 0)$ y que su eje focal sea el eje X.



Por definición de la hipérbola:

$$\left| \|\overline{PF_1}\| - \|\overline{PF_2}\| \right| = 2a$$

luego:

$$\left| \sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} \right| = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} \right)^2 = 4a^2$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2} \right)^2 - 2\sqrt{(x^2-c^2)^4 + y^2(x-c)^2 + y^2(x+c)^2 + y^4}$$

$$+ \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2} \right)^2 = 4a^2$$

$$2\left(x^2+c^2+y^2-2a^2\right)=2\sqrt{(x^2-c^2)+y^2(2x^2+2c^2)+y^4}$$

$$\left(x^2+c^2+y^2-2a^2\right)^2=\left(\sqrt{(x^2-c^2)^2+y^2(2x^2+2c^2)+y^4}\right)^2$$

$$\begin{aligned}(x^2+c^2)^2+2(x^2+c^2)(y^2-2a^2)+(y^2-2a^2)^2 &= x^4-2c^2x^2\\ &\quad +c^4+2x^2y^2+2c^2y^2+y^4\end{aligned}$$

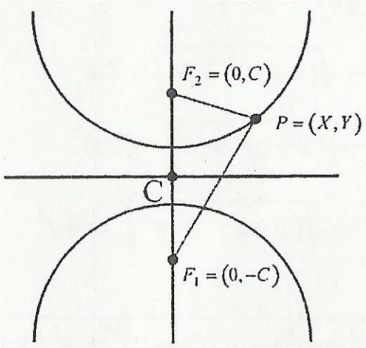
$$\left(c^2-a^2\right)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)\quad (\text{donde } b^2=c^2-a^2)$$

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

Dividiendo toda la expresión entre a^2b^2 tenemos:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad (\text{Ecuación de la hipérbola})$$

Segundo caso: Consideremos que el centro de la hipérbola es $C = (0, 0)$ y que su eje focal es el eje Y.

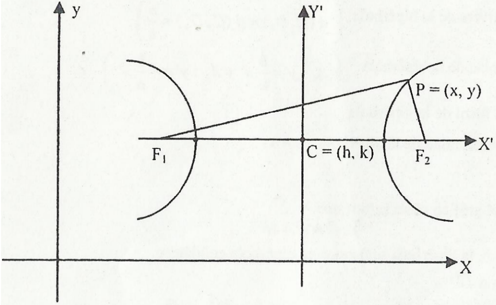


La ecuación de esta hipérbola es: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

La demostración queda como ejercicio.

Casos particulares

Caso I: Ecuación de la hipérbola con centro $C = (h, k)$ y eje focal paralelo al eje X.



La ecuación de la hipérbola en el sistema $X'Y'$ es:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

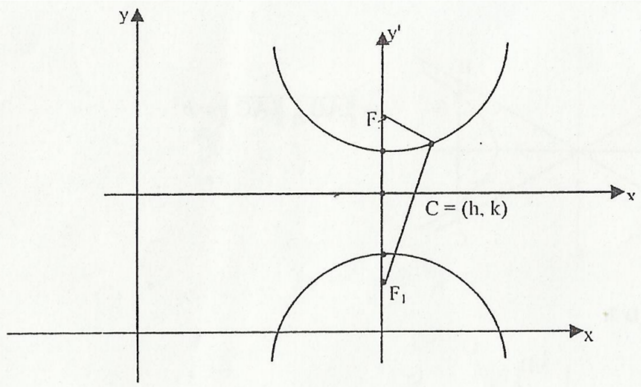
Pero por traslación de ejes:

$$\left.\begin{array}{l} x = x' + h \longrightarrow x' = x - h \\ y = y' + k \longrightarrow y' = y - k \end{array}\right\} \quad (5)$$

Reemplazando (5) en (4):

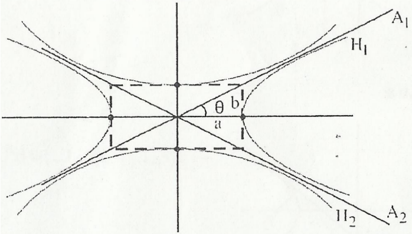
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Caso II: Ecuación de la hipérbola con centro $C = (h, k)$ y eje focal paralelo al eje Y.



La ecuación de la hipérbola es: $$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Hipérbolas conjugadas



Cuando las hipérbolas $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ tienen las mismas asíntotas (A_1, A_2) y tienen intercambiados el eje transverso y el eje conjugado, entonces las hipérbolas se llaman hipérbolas conjugadas. Las ecuaciones:

$$\mathcal{H}_1 : \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_2 : \frac{y'^2}{b^2} - \frac{x'^2}{a^2} = 1$$

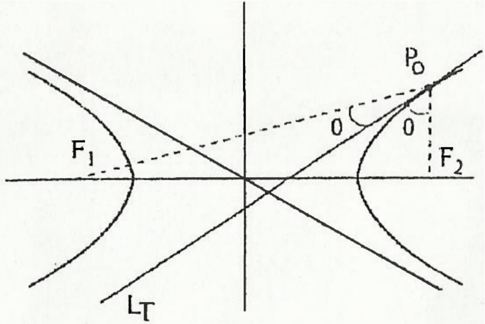
Corresponden a un par de hipérbolas conjugadas.

Ecuación de la recta tangente a una Hipérbola en el punto $P_0 = (X_0, Y_0)$

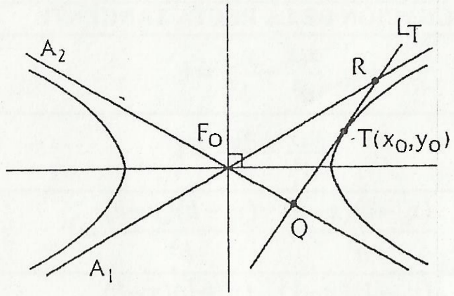
ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA	ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$
$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{y_0 y}{a^2} - \dfrac{x_0 x}{b^2} = 1$
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(x_0-h)(x-h)}{a^2} - \dfrac{(y_0-k)(y-k)}{b^2} = 1$
$\dfrac{(y-h)^2}{a^2} - \dfrac{(x-k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(y_0-k)(y-k)}{a^2} - \dfrac{(x_0-h)(x-h)}{b^2} = 1$

Propiedad 1

La recta tangente L_T en cualquier punto $P_0 = (x_0, y_0)$ es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores (o vectores focales) de dicho punto de la hipérbola.



Propiedad 2

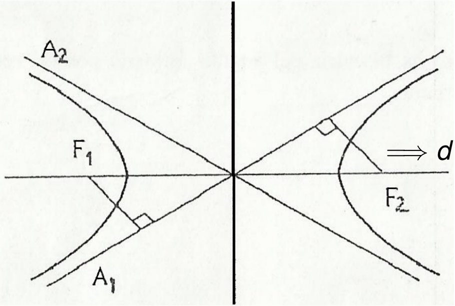


$\Rightarrow$ T punto medio de $\overline{QR}$

$\Rightarrow$ área $\triangle F_0RQ = ab$

$$L_T : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Propiedad 3



$$\Longrightarrow d(F_1, A_1) = d(F_2, A_1) = b$$

Ejercicio: La hipérbola H tiene un vértice en $V_1(9,3)$, y el foco correspondiente al otro vértice en $F_2 = (-9,-6)$. Si la excentricidad es $e = 5/4$, encontrar el centro C, el vértice V_2, el foco F_1, y las ecuaciones vectoriales de las directrices D_1, D_2 y de las asíntotas L_1 y L_2.

Solución:

Se toma a $\vec{u}$ el vector unitario en la dirección de

$$\overrightarrow{F_2V_1} = V_1 - F_2 = (9,3) - (-9,-6) = (18,9)$$

así, $\vec{u} = (2,1)/\sqrt{5}$,

$$a + c = d[V_1; F_2] = |V_1 - F_2|$$

$$= |(18,9)| = 9\sqrt{5}\ ,$$

y como $(c/a) = e = 5/4$, entonces $a + (5/4)a = 9\sqrt{5} \Longrightarrow$

$$a = 4\sqrt{5}, \quad c = 5\sqrt{5}, \quad b = 3\sqrt{5}, \qquad C = V_1 - a\vec{u} = (1, -1)$$

$$V_2 = C - a\vec{u} = (-7, -5), \qquad F_1 = C + c\vec{u} = (11, 4)$$

Un punto de paso Q, para cada una de las **DIRECTRICES** [cuyo vector normal es $(2, 1)$], lo obtenemos como sigue:

$$\begin{aligned} Q &= C \pm (a/e)\vec{u} = C \pm (a^2/c)\vec{u} \\ &= (37/5, 11/5) \ \ldots \ (+) \qquad \text{ó} \qquad (-27/5, -21/5) \ \ldots \ (-) \\ &\Longrightarrow \quad D_1: \quad 2x + y = 17 \qquad , \qquad D_2: \quad 2x + y = -15 \end{aligned}$$

ASÍNTOTAS: $P = C + t[a\vec{u} \pm b\vec{u}^{\perp}]$, donde $P = (x, y)$,

$$L_1: \quad (x, y) = (1, -1) + t(5, 10)$$

$$L_2: \quad (x, y) = (1, -1) + t(11, -2).$$