Grafos 2-conexo

Ronald Mas,
Angel Ramirez

10 de julio de 2020

Contenido

2-Conectividad

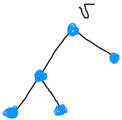
Definición

Un grafo G se llama k-vértice conexo si tiene como mínimo $k + 1$ vértices y permanece conexo después de suprimir cualquier conjunto de $k - 1$ vértices.

Observaciones:

- Diremos que un grafo G es 2-conexo en vez de decir que un grafo G es 2-vértice conexo.
- Es decir, un grafo G se llama 2-conexo si tiene como mínimo 3 vértices y al suprimir cualquier vértice se tiene un grafo conexo.
- Un grafo 2- conexo es también conexo.

Ejemplo: El siguiente grafo no es 2-conexo ya que el suprimir el vértice v se genera un grafo no conexo.



Operaciones en grafos

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Definamos algunas operaciones en grafos:

1) Eliminación de una arista:

$$G - e = (V, E \setminus \{e\}),$$

donde $e \in E(G)$.

2) Adición de una nueva arista:

$$G + \overline{e} = (V, E \cup \{\overline{e}\}),$$

donde $\overline{e} \in \binom{V}{2} \setminus E$.

Continua las Operaciones en grafos

Definición

3) Eliminación de un vértice:

$$G - v = (V \setminus \{v\}, \{e \in E :\ v \notin e\}),$$

donde $v \in V(G)$ (al eliminar el vértice se eliminan también todas las aristas que lo contienen).

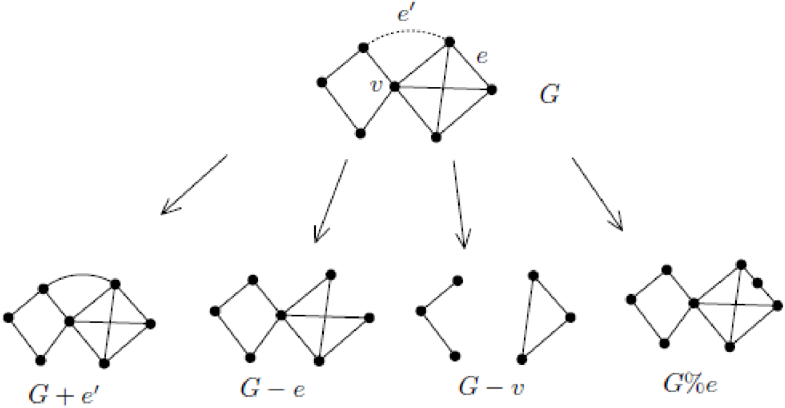
4) Subdivisión de una arista:

$$G \,\%e = (V \cup \{z\}, (E \setminus \{\{x, y\}\}) \cup \{\{x, z\}, \{z, y\}\})$$

donde $e = \{x, y\} \in E(G)$ y $z \notin V(G)$ es un nuevo vértice (se coloca un nuevo vértice z en la arista $\{x, y\}$).

Ejemplos:

Dado un grafo $G = (V, E)$ veamos algunas operaciones:



Teorema

Un grafo G es 2-conexo si y sólo si para cualquier par de vértices de G existe un ciclo en G conteniendo estos dos vértices.

Prueba:

$\Leftarrow$) Como cualquier par de vértices $v, v' \in V(G)$ pertenecen a un ciclo en común entonces existen dos caminos que no contienen vértices comunes excepto los vértices finales y así v y v' no caen en distintos componentes al eliminar un solo vértice.

$\Rightarrow$) Ejercicio.

Proposición

Un grafo G es 2-conexo si y sólo si cualquier subdivisión de G es 2-conexo.

Prueba:

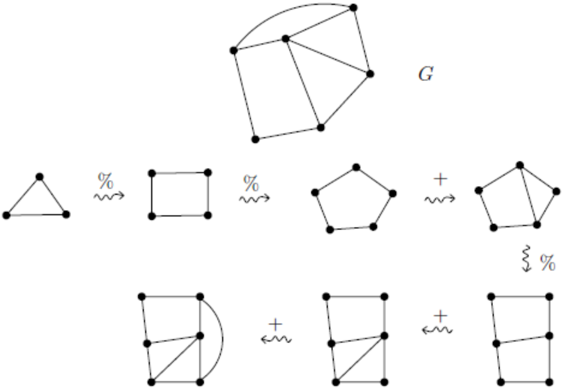
Es suficiente probar que, para todo $e \in E(G)$, G es 2-conexo si y sólo si $G\%e$ es 2-conexo. Veamos sólo la vuelta, si $v \in V(G)$ entonces $G - v$ es conexo si y sólo si $(G\%e) - v$ es conexo, por tanto si $G\%$ es 2-conexo entonces G también es 2-conexo.

Caracterización de grafos 2-conexo

Teorema

Un grafo G es 2-conexo si y sólo si este puede ser creado de un triángulo (K_3) por una secuencia de subdivisiones y adición de aristas.

Ejemplo: Veamos como generar el grafo G.



Grafos libres de triángulos

Sea G un grafo simple con $\mid V(G) \mid = n$, si $\mid E(G) \mid = k$ entonces

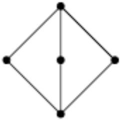
$$0 \leq k \leq \binom{n}{2}.$$

Es bien sabido que todo grafo simple con n vértices es isomorfo a K_n, analicemos la siguiente interrogante:
¿ Cuántas aristas como máximo puede tener un grafo simple G con n vértices libre de triángulos?

Casos particulares

Sea $T(n)$ el número máximo de aristas que puede tener un grafo G libre de triángulos con n vértices. Luego se tiene que:

- $T(1) = 0$.
- $T(2) = 1$.
- $T(3) = 2$.
- $T(4) = 4$, $(G \simeq C_4)$.
- $T(5) = 6$. En efecto como muestra el dibujo:



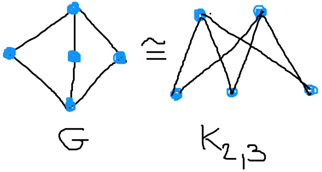
Teorema

Para todo número natural n se tiene que $T(n) = [\![\frac{n^2}{4}]\!]$.

Teorema

Para todo número natural n cada grafo libre de triángulo con la máxima cantidad de aristas es isomorfo a el grafo $K_{a,b}$ con $a = [\![\frac{n}{2}]\!]$ y $b = n - [\![\frac{n}{2}]\!]$

Ejemplo: Para un grafo $G = (V, E)$ libre de triángulos con $\mid V(G) \mid = n = 5$ se tiene que $a = 2$ y $b = 3$, por tanto:



Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo libre de triángulos. Entonces existe una partición de V en dos subconjuntos X y Y tal que para todo vértice $x \in V$ se tiene que $deg_G(x) \leq deg_{K_{|X|,|Y|}}(x)$.

Este teorema permite probar de manera rápida que

$$T(n) = [\![\frac{n^2}{4}]\!].$$

En efecto, si $\mid X \mid = a$ y $\mid Y \mid = b$ se tiene por el teorema anterior que:

$$\mid E(G) \mid \leq \mid E(K_{a,b}) \mid$$

con $a + b = n$, luego como deseamos maximizar $a.b$ se tiene:
$a.b = a(n - a) = -a^2 + an$, es decir el máximo valor del producto e obtiene cuando $a = \frac{n}{2}$. Luego

$$\mid E(G) \mid \leq \frac{n^2}{4}.$$

Por tanto $T(n) = [\![\frac{n^2}{4}]\!]$.