Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Junio 17, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Coordenadas polares
- Curvas en coordenadas polares
- Relación entre coordenadas cartesianas y polares

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Coordenadas polares

Hasta aquí hemos trabajado siempre con el sistema rectangular cartesiano de coordenadas que es la forma más usada de representar puntos del plano mediante pares de números.
Sin embargo en algunas ocasiones se necesita emplear un convenio diferente al cartesiano. Por ejemplo, en el trabajo de las carreteras, las curvas no se pueden hacer de cualquier manera, se debe lograr que la "curvatura" vaya aumentando gradualmente hasta ser máxima en el centro de la curvatura, a partir de donde comienza de nuevo a disminuir la curvatura hasta que la curva se convierte nuevamente en una recta.
Las curvas más frecuentemente usadas son las hipérbolas y la Lemniscata de Bernoulli. Esta curva, por cierto, también aparece en el análisis de ciertas antenas de radio.

Lemniscatas

Usualmente se llama Lemniscata a una curva en el plano que tiene forma de ocho. La más conocida es la Lemniscata de Bernoulli, cuya ecuación en forma cartesiana es:

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Lo principal es notar que no es posible expresarla en forma explícita, despejando y como función de x. Su gráfica es:

Coordenadas polares

Vamos a presentar una manera diferente de asignarle a cada punto del plano un par de coordenadas, el llamado sistema polar. En este sistema algunas curvas, como la lemniscata, tienen ecuaciones mucho más simples.

En lugar de dos ejes que se intersecan a 90° en el origen, el sistema polar utiliza como referencia un punto, llamado polo, y un semieje que comienza en el polo y que se denomina eje polar.

Las coordenadas polares de un punto P del plano son:

r: distancia dirigida (con signo) de P a Q.

θ: ángulo (en radianes) desde

Coordenadas polares

Convenio de signos:

r: Positivo si se mide en la dirección del lado final de θ.

θ: Positivo si el ángulo se genera por el movimiento del eje polar en sentido antihorario.

Negativo si el ángulo se genera por el movimiento del eje polar en sentido horario.

Ejemplo

$A\left(2,\frac{\pi}{6}\right), B\left(2,-\frac{\pi}{4}\right), C\left(2,\frac{3\pi}{4}\right), D\left(-2,-\frac{\pi}{4}\right), E\left(2,-\frac{5\pi}{4}\right),$
$F(0,\pi), G(3,0), H(3,\pi).$

Nótese que aunque cada par ordenado solo corresponde a un punto

Curvas en coordenadas polares

Una ecuación en r, θ de la forma:

$$r = f(r, \theta), \qquad \text{o de forma más general} \quad F(r, \theta) = 0,$$

se satisface, en general, para infinitos pares (r, θ).
Trazando en el plano polar este conjunto infinito de puntos se obtiene usualmente un curva que se denomina "gráfica" de la ecuación polar.

Ejemplo

$$r = 2 + 2\cos\theta.$$

- Si $\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 4.$
- Cuando θ aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$, r disminuye de 4 a 2.
- Cuando θ aumenta de $\frac{\pi}{2}$ a π, r disminuye de 2 a 0.
- Cuando θ aumenta de π a $\frac{3\pi}{2}$, r aumenta de 0 a 2.

Relación entre coordenadas cartesianas y polares

Tomemos un sistema cartesiano y uno polar superpuestos, de modo que el polo y el origen coincidan y el eje polar corresponda con el semieje OX positivo, entonces un punto P del plano tiene coordenadas cartesianas (x, y) y polares (r, θ).
En la figura se muestra un caso en que $r > 0$.
Se tiene

$$x = r\cos\theta \ ,$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \ ,$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \ ,$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \ .$$

Ejemplo

- Cartesianas: $(2, 1)$.
  Polares:

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = 0.464 \text{ rad.}$$

  Luego las coordenadas en polares es: $(\sqrt{5}, 0.464)$.

- Polares: $(3, \frac{\pi}{6})$.
  Cartesianas:

$$x = 3\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$y = 3\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}.$$

Ejemplo

Lemniscata.
En cartesianas es:

$$(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$$

usando las identidades de las coordenadas polares

$$(r^2)^2 - a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

$$r^4 - a^2r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

$$r^2(r^2 - a^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)) = 0$$

$r^2 = 0$ (el polo) ó $r^2 = a^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$

$$r^2 = a^2\cos 2\theta \quad \text{Lemniscata}$$

Ejemplo

Nótese que (en la ecuación $r^2 = a^2 \cos 2\theta$):

- Para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \cos 2\theta \leq 1$ y se obtienen dos valores de r, uno positivo y otro negativo;
- Para $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$, se tiene $\frac{\pi}{2} < 2\cos\theta < \frac{3\pi}{2}$ y $\cos 2\theta < 0$, por lo cual no existen puntos en el sector $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$;
- Después de $\frac{3\pi}{4}$, $\cos 2\theta$ se hace de nuevo positivo y aparece la otra parte de la Lemniscata.

Ejemplo

Polares: $r = 4\cos\theta$.
Cartesianas:

$$r^2 6 = 4r \operatorname{sen}\theta$$
$$x^2 + y^2 = 4y$$
$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$
$$x^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

Circunferencia con centro en $(0, 2)$ y radio 2.

Ejemplo

Circunferencias notables

De modo similar al ejemplo anterior se tiene:

Ejemplo

Trazar las circunferencias:

- $r = 3\cos\theta$.
- $r = -2\operatorname{sen}\theta$.
- $r = 1$.

Sesión 01

1 Coordenadas polares
- Curvas en coordenadas polares
- Relación entre coordenadas cartesianas y polares

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Junio 17, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Curva paramétrica.
- Derivada de una función paramétrica
- Trazado de una curva paramétrica

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Curva paramétrica)

Una curva paramétrica $\mathscr{C}$ es la representación de un conjunto de puntos (x, y) de la forma

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(h)$$

Ejemplo

La curva definida por

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t + 1 \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}.$$

es una recta

En general, se puede parametrizar cualquier recta en $\mathbb{R}^2$, vertical o no.

Ejemplo

La gráfica de cualquier función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede parametrizar:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

Observación

No todas las parametrizaciones provienen de funciones:

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Describimos, para $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Se verifica que $x^2 + y^2 = 1$,

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -1, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 0.$$

También $x(t) > -1$ para todo t, de modo que la curva paramétrica no cubre completamente la circunferencia.

Derivada de una función paramétrica

Siendo

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

De la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}$$

Ejemplo

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva

$$\begin{cases} x = \sec t \\ y = \tan t \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

en el punto $(\sqrt{2}, 1)$.

Resolución

La pendiente de la curva en t es

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\sec^2 t}{\sec t \cdot \tan t} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{\sec t}{\tan t}
\end{aligned}$$

Resolución

Evaluando en $t = \dfrac{\pi}{4}$, se tiene

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\ .$$

la recta tangente es

$$y = 1 + \sqrt{2}\cdot(x - \sqrt{2})\ ,$$
$$y = \sqrt{2}x - 1\ .$$

Ejemplo

Determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ como una función de t si

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases},$$

Resolución

Primero $y' = \dfrac{dy}{dx}$, esto es

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ y' &= \frac{1-3t^2}{1-2t^2} \end{aligned}$$

Luego, derivando y' con respecto de t

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} \ .$$

Resolución

Entonces debemos calcular $\dfrac{dt}{dx}$. Por el teorema de función inversa, esa expresión es igual $\dfrac{1}{dx/dt}$, en los puntos donde la derivada de x respecto de t no es cero. En esos puntos la inversa existe y la derivada de la inversa $t(x)$ es como se indicó arriba.
En conclusión

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{\dfrac{-6t(1-2t)-(1-3t^2)(-2)}{(1-2t)^2}}{1-2t} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}.$$

Trazado de una curva paramétrica

Para $x, y : I \to \mathbb{R}$.

- Simetría con respecto al eje X: si para cada $t_1 \in I$, existe $t_2 \in I$ tal que
$$(x(t_2), y(t_2)) = (x(t_1), -y(t_1)).$$
- Simetría con respecto al eje Y: si para cada $t_1 \in I$, existe $t_2 \in I$ tal que
$$(x(t_2), y(t_2)) = (-x(t_1), y(t_1)).$$

El primer caso ocurre por ejemplo cuando x es función par e y impar, y el segundo cuando x es impar e y es par.

Trazado de una curva paramétrica

- Puntos críticos: puntos t donde $x'(t) = 0$ o $y'(t) = 0$.
- Asíntotas: puntos t_0 para los cuales, cuando $t \to t_0^{\pm}$, ya sea $x(t) \to +\infty$, o $y(t) \to +\infty$.
  - $x(t) \to x_0, y(t) \to \pm\infty$ cuando $t \to t_0^{\pm}$: asíntota vertical.
  - $x(t) \to +\infty, y(t) \to y_0$ cuando $t \to t_0^{\pm}$: asíntota horizontal derecha.
  - $x(t) \to -\infty, y(t) \to y_0$ cuando $t \to t_0^{\pm}$: asíntota horizontal izquierda.
  - $x(t) \to +\infty, y(t) - mx(t) - b \to 0$ cuando $t \to t_0^{\pm}$: asíntota oblicua derecha $y = mx + b$.
  - $x(t) \to -\infty, y(t) - mx(t) - b \to 0$ cuando $t \to t_0^{\pm}$: asíntota oblicua izquierda $y = mx + b$.

Ejemplo

Bosquejar la gráfica de la curva

$$\begin{cases} x = 4\cos t + 3 \\ y = 2\operatorname{sen} t + 1, \end{cases} \qquad \text{con } t \in [0, 2\pi].$$

Resolución

Tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{4} = \cos t \\[2ex] \dfrac{y-1}{2} = \operatorname{sen} t, \end{cases}$$

Así,

$$\frac{(x-3)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1.$$

Resolución

De modo que la curva es una elipse centrada en $(3, 1)$.

Ejemplo

Bosquejar la gráfica de

$$x = a\cos^3(t), \quad y = a\,\mathrm{sen}^3(t),$$

para $t \in [0, 2\pi]$, siendo $a > 0$ fijo.

Resolución

Dado que las funciones periódicas $\cos^3(t)$ y $\operatorname{sen}^3(t)$ tiene período 2π, será suficiente considerar la variación del parámetro t en $[0, 2\pi]$.

Luego, $[-a, a]$ es el dominio de definición tanto para x como para y. Por lo tanto, la curva no tiene asíntotas horizontales. Se cumple:

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2(t)\operatorname{sen}(t), \quad \frac{dy}{dt} = 3a\operatorname{sen}^2(t)\cos(t)$$

Estas derivadas se reducen a cero cuando $t = 0,\ t = \dfrac{\pi}{2},\ t = \pi,\ t = \dfrac{3\pi}{2}$ y $t = 2\pi$. Además, $\dfrac{dy}{dx} = -\tan t$.

Resolución

El análisis de los signos de $\dfrac{dy}{dx}$ se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo para t	Intervalo para x	Intervalo para y	Signo de $\dfrac{dy}{dx}$	Crecimiento de $y = h(x)$
$]0, \pi/2[$	$]0, a[$	$]0, a[$	$-$	decreciente
$]\pi/2, \pi[$	$]-a, 0[$	$]0, a[$	$+$	creciente
$]\pi, 3\pi/2[$	$]-a, 0[$	$]-a, 0[$	$-$	decreciente
$]3\pi/2, 2\pi[$	$]0, a[$	$]-a, 0[$	$+$	creciente

Resolución

Por otro lado, $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{dy}{dx} = \infty$ y $\lim\limits_{t\to\frac{3\pi}{2}} \dfrac{dy}{dx} = \infty$.

Luego, en los puntos correspondientes a $t = \dfrac{\pi}{2}$ y $t = \dfrac{3\pi}{2}$, la tangente a la curva es vertical.

Además: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} = 0,\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = 0,\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=2\pi} = 0.$

Luego, en los puntos correspondientes a $t = 0, t = \pi$ y $t = 2\pi$, la tangente es horizontal.

La segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a\cos^4(t)\operatorname{sen}(t)}.$$

Resolución

Esta segunda derivada se reduce a cero en $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$ y $t = 2\pi$ El análisis de los signos de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ se ilustra en la tabla siguiente.

Intervalo para t	Signo de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$	Concavidad para $y = h(x)$
$\langle 0, \pi/2 \rangle$	$+$	convexa
$\langle \pi/2, \pi \rangle$	$+$	convexa
$\langle \pi, 3\pi/2 \rangle$	$-$	concava
$\langle 3\pi/2, 2\pi \rangle$	$-$	concava

Resolución

La gráfica de la curva se llama astroide y se muestra en la figura. Su ecuación cartesiana es $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Ejemplo

Una rueda de radio a se mueve a lo largo de una recta horizontal. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que recorre un punto P localizado en la circunferencia de la rueda. La trayectoria se llama cicloide.

Resolución

Se toma el eje X como la recta horizontal, se marca un punto P en la rueda, se empieza a mover esta última, con P en el origen, hacia la derecha. Como parámetro, se utiliza el ángulo t que gira la rueda, medido en radianes. La figura muestra la rueda un poco después, cuando su base se encuentra a at unidades del origen.

Resolución

Las coordenadas de P son

$$\begin{aligned} x &= at + a\cos\theta \\ y &= a + a\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Resolución

Para expresar θ en términos de t, se observa en la figura que $t+\theta=\dfrac{3\pi}{2}$, de manera que $\theta=\dfrac{3\pi}{2}-t$.

Con esto se tiene $\cos\theta=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right)=-\operatorname{sen}t$,

por otro lado $\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}-t\right)=-\cos t$,

las ecuaciones que buscamos son

$$\begin{cases} x=a\,(t-\operatorname{sen}t) \\ y=a\,(1-\cos t) \end{cases} \quad \text{con } t\geq 0\ .$$

Resolución

La curva que se obtiene es llamada Cicloide.

Ejercicio

Estudie analíticamente y trace la gráfica la curva

$$\begin{cases} x = \cos t + \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}.$$

Lemniscata de Gerono: $x^4 - 2x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0.$

Sesión 01

1 Curva paramétrica.
- Derivada de una función paramétrica
- Trazado de una curva paramétrica

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Junio 5, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Polinomio de Taylor
- Formula de Taylor infinitesimal
- Polinomio de Taylor de una composición

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Polinomio de Taylor

Recordemos que una aproximación de f alrededor de $x = a$ está dada por

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + f'(a)h}_{\text{aproximación}} + \underbrace{r(h)}_{\text{residuo}} \qquad \text{con} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Si definimos $p(x)$ como un polinomio de grado 1 en x tal que

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

entonces

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + r(x-a) \\ p(a) = f(a), \quad p'(a) = f'(a) \end{cases}$$

es decir f es aproximación por un polinomio de grado 1 que reproduce el comportamiento de f y f' en $x = a$ (interpolación).

Polinomio de Taylor

¿Podemos encontrar $p(x)$ de grado 2 que interpole a f, f' y f'' en $x = a$?
Si $p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$ entonces

$$p(a) = c_0, \quad p'(a) = c_1, \quad p''(a) = 2c_2,$$

luego

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2,$$

Polinomio de Taylor

Además si $r(h) = f(a+h) - p(a+h)$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2} f''(a)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a) - hf''(a)}{2h} \quad \text{(L'Hospital)} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \left(\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} - f''(a) \right) = 0 \quad (f''(a) \text{ existe})
\end{aligned}$$

Ejemplo

Para $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 0$ encontramos

- La aproximación lineal

$$p_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$p_1(x) = 1 + x$$

- La aproximación cuadrática

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f'(0)}{2}(x - 0)^2$$
$$p_1(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

- La aproximación cúbica

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
f(0) &= p_3(0) \Longrightarrow d = 1 \\
f'(0) &= p_3'(0) \Longrightarrow c = 1 \\
f''(0) &= p_3''(0) \Longrightarrow 2b = 1 \\
f'''(0) &= p_3'''(0) \Longrightarrow 6a = 1
\end{aligned}
$$

$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$
$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$
$y = e^x$
$y = 1 + x$
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6

Observación

Los polinomios $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ se llaman polinomios de Taylor de la función exponencial alrededor de $x = 0$.
Las aproximaciones dadas son locales, mejoran si aumentamos el grado del polinomio de Taylor, pero a medida que nos alejamos de a la aproximación empeora.

Definición (Polinomio de Taylor)

Sea f una función n veces derivable en $x = x_0$, entonces el polinomio

$$p_n(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se llama polinomio de Taylor de orden n de f alrededor de x_0.

Si denotamos por $f^{(0)}$ a f entonces

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Ejemplo

Encuentre los polinomios de Taylor hasta el orden 7 de la función seno alrededor de $x = 0$.

Resolución: Calculamos las derivadas de seno:

$$\operatorname{sen}'(0) = 1, \quad \operatorname{sen}''(0) = 0,$$
$$\operatorname{sen}'''(0) = -1, \quad \operatorname{sen}^{(4)}(0) = 0,$$

por lo tanto

$$p_1(x) = x, \quad p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3,$$

$$p_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, \quad p_7(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7.$$

Resolución

Calculamos las derivadas de seno:

$$\operatorname{sen}'(0) = 1, \quad \operatorname{sen}''(0) = 0,$$
$$\operatorname{sen}'''(0) = -1, \quad \operatorname{sen}^{(4)}(0) = 0,$$

por lo tanto

$$p_1(x) = x, \quad p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3,$$
$$p_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, \quad p_7(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7.$$

Resolución

$p_1(x) = x$
$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$
$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$
$f(x) = \text{sen}(x)$
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5

Teorema (Formula de Taylor infinitesimal)

Sea $I = \langle a, b \rangle$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $x_0 \in I$, si definimos $J = \langle a - x_0, b - x_0 \rangle$ y $r : J \to \mathbb{R}$ tal que

$$r(h) = f(x_0 + h) - p_n(x_0 + h), \ \forall h \in J,$$

entonces $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0.$

[

] ¿Existirá otro polinomio de grado menor o igual a n que aproxime f en el sentido del teorema anterior? Y que interpole a f y todas sus n primeras derivadas en x_0. Sea $q(x)$ un polinomio que interpole f y sus n primeras derivadas en x_0, entonces $r(h) = p_n(x_0 + h) - q(x_0 + h)$ es un polinomio en h de grado menor o igual a n que tiene sus n primeras derivadas nulas en 0. Sea $r(h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots + c_n h^n$, luego

$$\begin{aligned} r(0) = 0 &\implies c_0 = 0 \\ r'(0) = 0 &\implies c_1 = 0 \\ &\vdots \\ r^{(n)}(0) = 0 &\implies c_n = 0 \end{aligned}$$

[

] ¿Que relación hay entre un polinomio de grado n y su interpolante de Taylor?
Sea $p_n(x)$ el polinomio de Taylor de orden n para $p(x)$ alrededor de x_0, luego ambos polinomios coinciden en x_0 y en sus n primeras derivadas en x_0, por lo tanto son iguales.
De esto deducimos que cualquier polinomio $p(x)$ de grado n se puede escribir como

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}p^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Teorema (Caracterización del polinomio de Taylor)

Si encontramos un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a n tal que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ entonces $p = p_n$.

Demostración

Como $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ entonces $\lim_{x\to x_0} \dfrac{p(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x-x_0)^i$ y $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i(x-x_0)^i$, entonces

$p(x) - p_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(c_i - d_i)(x-x_0)^i$, luego

$$\lim_{x\to x_0} p(x) - p_n(x) = 0 = \lim_{x\to x_0}(c_0 - d_0) \implies c_0 = d_0,$$

Demostración.

Como $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ entonces $\lim_{x\to x_0} \dfrac{p(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x-x_0)^i$ y $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i(x-x_0)^i$, entonces

$p(x) - p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (c_i - d_i)(x-x_0)^i$, luego

$$\lim_{x\to x_0} p(x) - p_n(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} (c_0 - d_0) \implies c_0 = d_0,$$

de igual modo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)-p_n(x)}{(x-x_0)} = 0 = \lim_{x\to x_0} (c_1 - d_1) \implies c_1 = d_1,$$

Esta caracterización permite encontrar polinomios de Taylor de productos:
Sean p_n y q_n los polinomios de Taylor de f y g respectivamente alrededor de $x = a$, luego

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (p_n(x) + r_1(x-a))(q_n(x) + r_2(x-a)) \\ &= w_n(x) + r_3(x-a), \end{aligned}$$

donde $w_n(x)$ es el polinomio que se obtiene de $p_n(x)q_n(x)$ descartando los términos $(x-a)^i$ de grado mayor a n, y

$$r_3(x-a) = r_1(x-a)q_n(x) + r_2(x-a)p_n(x) + r_1(x-a)r_2(x-a) + (x-a)^{n+1}v$$

de aquí

$$\lim_{x\to a}\frac{r_3(x-a)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{r_1(x-a)q_n(x)}{(x-a)^n}+\lim_{x\to a}\frac{r_2(x-a)p_n(x)}{(x-a)^n}$$

$$+\lim_{x\to a}\frac{r_1(x-a)r_2(x-a)}{(x-a)^n}+\lim_{x\to a}(x-a)v(x)=0.$$

Ejemplo: Encuentre el polinomio de Taylor de orden 6 de x^3e^x al rededor de $x=0$.

Resolución:

$$\begin{aligned}x^3e^x &= x^3(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+r(x))\\ &= \underbrace{x^3+x^4+\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{6}x^6}_{p_6(x)}+x^3r(x)\end{aligned}$$

Ejemplo: Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 de $e^x \operatorname{sen}(2x)$ alrededor de $x = 0$.

Resolución:

$$\begin{aligned} e^x \operatorname{sen}(2x) &= (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + r_1(x))((2x) - \frac{1}{6}(2x)^3 + r_2(x)) \\ &= \underbrace{2x + 2x^2 + x^3 - \frac{4}{3}x^3}_{p_3(x)} + r(x) \end{aligned}$$

$$p_3(x) = 2x + 2x^2 + x^3 - \frac{1}{3}x^3.$$

Polinomio de Taylor de una composición

Si f y g tiene derivadas hasta el orden k y $g(x_0) = 0$ entonces

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + r_k$$

$$g(x) = b_1(x - x_0) + r_1$$

por lo tanto

$$f(g(x)) = a_0 + a_1 b_1 (x - x_0) + \cdots + a_k b_1^k (x - x_0)^k + r_k.$$

Es decir realizamos la composición de los polinomios de Taylor correspondientes y descartamos los términos con potencias de $(x - x_0)$ mayor a k.

Ejemplo: Encuentre el polinomio de Taylor de cuarto orden para $e^{\operatorname{sen}(x)}$.

Resolución:

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{sen}(x)} &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + r_4 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + r_4 \end{aligned}$$

donde hemos agrupado en r_4 los términos con potencia mayor a 4.

Sesión 01

1 Polinomio de Taylor
- Formula de Taylor infinitesimal
- Polinomio de Taylor de una composición

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Junio 5, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Ejemplos

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - x)$$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x \to 0^+} x^x$$

Ejercicios

1. Utilice la regla de L'Hôpital donde sea apropiado para evaluar el límite en cada caso.

   a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

   e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan 2x}{\ln x}$

   f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicios

2. Demuestre que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$
para cualquier entero positivo n.
3. Demuestre que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$
para cualquier $p > 0$.

Ejercicios

4. Si f' es continua, $f(2) = 0$ y $f'(2) = 7$, evalúe

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2+3x) + f(2+5x)}{x}$$

5. Si f' es continua, utilice la regla L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Sesión 01

1 Ejemplos

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 30, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

Derivadas de orden superior

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. La función derivada $f' : A_1 \to \mathbb{R}$, $A_1 \subset A$ puede también tener derivada en un punto x_0, la segunda derivada de f en x_0:

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

También se utilizan las notaciones

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = y'' = f''(x) = f^{(2)}(x),$$

donde $y = f(x)$.

Derivadas de orden superior

Notamos que la función correspondiente $f'' = (f')' : A_2 \to \mathbb{R}$, definida sobre $A_2 \subset A_1$, también podría ser derivable y definir de forma análoga la tercera derivada. Siguiendo esta idea, definimos la tercera derivada $f'''(x_0)$ de f en x_0 como la derivada de f'' en x_0

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0)$$

y la función correspondiente $f''' : A_3 \to \mathbb{R}, A_3 \subset A_2$,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = y''' = f'''(x) = f^{(3)}(x).$$

Derivadas de orden superior

Habiendo definido la derivada de orden $n-1$, $\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = f^{(n-1)}(x)$ como una función $f^{(n-1)} : A_{n-1} \to \mathbb{R}$, definimos la derivada de orden n en un punto x_0 como la derivada de esta,

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0),$$

y su función correspondiente $f^{(n)} : A_n \to \mathbb{R}$, donde $A_n \subset A_{n-1}$. Como antes,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Convenimos que $f^{(0)} = f$ de modo que $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$.

Ejemplo

Sea f una función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

Encuentre una formula para la derivada de orden n de la función f y demuestre por inducción matemática.

Resolución

Representamos $f(x) = (x+2)^{-1}$. Para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)(x+2)^{-2} \\ f''(x) &= (-1)(-2)(x+2)^{-3} \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4} \end{aligned}$$

y deducimos entonces que en general

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)(-2)\cdots(-n)(x+2)^{-(n+1)} \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Resolución

Demostremos que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)} \tag{1}$$

por inducción sobre $n \geq 1$.

- Para $n = 1$, derivando directamente $f(x) = (x+2)^{-1}$,

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = (-1)(x+2)^{-2} = (-1)^1 1!(x+2)^{-(1+1)}$$

Resolución

- Supongamos que la ecuación (**??**) es válida para un n (hipótesis inductiva). Derivando

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= ((-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)})' \\ f^{(n+1)} &= (-1)^n n!((x+2)^{-(n+1)})' \\ f^{(n+1)} &= (-1)^n n!(-(n+1))(x+2)^{-(n+1)-1} \\ f^{(n+1)} &= (-1)^{n+1}(n+1)!(x+2)^{-((n+1)+1)} \end{aligned}$$

La igualdad $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!(x+2)^{-((n+1)+1)}$ significa que (**??**) vale para $n+1$ en lugar de n.
Por el principio de inducción la ecuación (**??**) vale para todo $n \geq 1$

Sesión 02

Derivación implícita

Cada una de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5y &= -1 \\ x^2 + y^2 &= 1 \\ \cos(x+y) - 5x + y^3 + y &= 0 \end{aligned}$$

expresa una dependencia de la variable y respecto de x.
Para $3x^2 + 5y = -1$, tal dependencia puede ser expresada explícitamente mediante $y = \dfrac{-1+3x^2}{5}$, una ecuación de la forma $y = f(x)$.
Para $\cos(x+y) - 5x + y^3 + y = 0$ es imposible obtener una ecuación explícita de la forma $y = f(x)$.

Ecuación implícita

Una ecuación implícita entre las variables x e y es una ecuación de la forma

$$F(x, y) = 0 \ ,$$

de modo que $F(x, y) = 0$ si y solo si $y = f(x)$.
O también, la ecuación implícita $F(x, y) = 0$ define la función $y = f(x)$ si y solo si

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Ejemplo

En los ejemplos anteriores:

- $F(x, y) = 3x^2 + 5y + 1.$
- $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$
- $F(x, y) = \cos(x + y) - 5x + y^3 + y.$

Son las funciones implícitas de las ecuaciones mencionadas.

Observación

Una ecuación implícita define, de modo natural, el conjunto

$$C = \{(x, y) | F(x, y) = 0\}.$$

Este conjunto es el conjunto solución de la ecuación $F(x, y) = 0$.
En el caso de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, C es el círculo unitario.
En el caso en que la ecuación $F(x, y) = 0$ define la función $y = f(x)$, el conjunto solución C contiene la curva gráfico de la función f.

Observación

Genéricamente se tiene que C es una curva. Así, el siguiente interés es el calcular la recta tangente a la curva.
Si la curva es parte del gráfico de $y = f(x)$ para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en (x_0, y_0) es necesario calcular

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = y'(x_0) = f'(x_0).$$

Derivación implícita

Usualmente se piensa que es necesario conocer f, o despejar y, para después derivar. Sin embargo, como ya vimos eso no siempre es posible. Sin embargo, es posible calcular $\frac{dy}{dx}$ mediante un proceso denominado derivación implícita. Este proceso consiste en derivar ambos miembros de una ecuación con respecto a x, usando las reglas de derivación y luego resolviendo para $\frac{dy}{dx}$.
En la derivación implícita lo más se usa es la regla de la cadena, porque estaremos suponiendo que una variable (usualmente y) es función de la otra (usualmente x).

Ejemplo

Si $y = y(x)$, entonces

- Derivar y^4 (respecto de x) es:
$$\frac{d}{dx}(y^4) = \frac{d}{dy}(y^4)\frac{dy}{dx} = 4y^3y'.$$
- Derivar $(x^2 + y)$ es:
$$\frac{d}{dx}(x^2 + y) = 2x + \frac{d}{dy}(y)\frac{dy}{dx} = 2x + y'.$$
- Derivar x^5y^2 es:

¿Cómo sería derivar las expresiones anteriores respecto de y?

Ejemplo

Considere la ecuación $\cos(x+y) = y\,\mathrm{sen}(x)$.
Derivando respecto de x ambos miembros se obtiene:

$$-\,\mathrm{sen}(x+y)(1+y') = y'\,\mathrm{sen}(x) + y\cos(x)$$

Podemos despejar y'

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\cos(x) + \mathrm{sen}(x+y)}{\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x+y)}.$$

Ejercicio

La curva C mostrada en la figura es el conjunto formado por todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x^3 - xy + y^2 = 4$.

Determine la ecuación de la recta tangente a C en el punto de intersección de C con el eje X.

Ejercicio

La curva C mostrada en la figura es el conjunto formado por todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y^3 - 5x^2y = 2x^5$.

1. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva C en el punto $(1, -2)$.
2. Si la recta tangente a la curva C en el punto P (ver al figura) es una recta horizontal, determine la coordenadas del punto P.

Ejercicio

La elipse $\mathcal{E}$ mostrada en la figura es el conjunto formado por los todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $\dfrac{(x+y)^2}{32} + \dfrac{(y-x)^2}{8} = 1.$

1. Calcule la razón de cambio $\dfrac{dx}{dy}$ cuando $x = 3$ y $y = 1$.
2. Determine la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $(1, 3)$.
3. Encuentre todos los puntos de $\mathcal{E}$ donde la recta tangente es vertical.

Sesión 02

Teorema (Derivada del logaritmo natural)

Sea $I \subset]0, +\infty[$. Si $f(x) = \ln(x)$, $\forall x \in I$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostración.

En efecto

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} &= \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}\\ &= \ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right)^{1/x}\\ &= \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\end{aligned}$$

como $\lim\limits_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h} = e$ entonces

$$(\ln(x))' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} = \frac{1}{x}\ln(e) = \frac{1}{x}\ .$$

Derivada de funciones hiperbólicas

- Si $f(x) = \text{senh}(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = \cosh(x)$
- Si $f(x) = \cosh(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = \text{senh}(x)$
- Si $f(x) = \tanh(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = \text{sech}^2(x)$
- Si $f(x) = \coth(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = -\text{csch}^2(x)$
- Si $f(x) = \text{sech}(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = -\tanh(x)\text{sech}(x)$
- Si $f(x) = \text{csch}(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = -\coth(x)\text{csch}(x)$

Demostración.

En efecto, si $x \in I$

$$\operatorname{senh}'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

del mismo modo

$$\cosh'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\square$

Demostración.

Las demás derivadas de las demás funciones hiperbólicas pueden obtenerse aplicando las reglas de suma y producto de derivadas.

$$\begin{aligned}\tanh'(x) &= \frac{\operatorname{senh}'(x)\cosh(x) - \cosh'(x)\operatorname{senh}(x)}{\cosh^2(x)}\\ &= \frac{\cosh(x)\cosh(x) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(x)}{\cosh^2(x)}\\ &= \frac{1}{\cosh^2(x)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\coth'(x) &= -\frac{\tanh'(x)}{\tanh^2(x)} = -\frac{1/\cosh^2(x)}{\operatorname{senh}^2(x)/\cosh^2(x)}\\ &= -\frac{1}{\operatorname{senh}^2(x)}.\end{aligned}$$

Derivación logarítmica

La última derivada es la base de una técnica, la de derivación logarítmica:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(f(x)\right)\right] = \frac{f'(x)}{f(x)} \ .$$

Ejemplo

Si $y = x^\alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo (y $x \in \mathbb{R}$ o $x > 0$ según corresponda), entonces $\ln y = \alpha \ln x$, de donde, derivando

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x} \ ,$$

de donde

$$y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} \ .$$

Concluimos que

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \ .$$

Ejemplo

Si $y = a^x$, siendo $a > 0,\ a \neq 1$ fijo, tenemos, sucesivamente,

$$\ln y = x \ln a \ ,$$

luego,

$$\frac{y'}{y} = (x \ln a)' = \ln a \ ,$$

e $\quad y' = y \ln a = a^x \ln a$.Esto lo escribimos como

$$(a^x)' = a^x \ln a \ .$$

Ejemplo

Si queremos encontrar la recta tangente L_T, en el punto $(2, 8)$, a la curva descrita por

$$y = x2^x \ ,$$

en primer lugar calculamos la derivada:

$$y'(x) = x(\ln 2)2^x + 2^x \ ,$$

y encontramos la pendiente de la recta tangente:

$$y'(2) = (\ln 2)8 + 4 \quad \Longrightarrow \quad m = 8\ln 2 + 4 \ .$$

finalmente obtenemos la ecuación de L_T:

$$L_t : \ y = (8\ln 2 + 4)(x - 2) + 8 \ .$$

Método de derivación logarítmica

Para obtener la derivada de $y = f(x)$ mediante el método de derivación logarítmica, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Tomamos logaritmos naturales en ambos miembros de la expresión por derivar.
2. Utilizamos las propiedades de los logaritmos para reducir los productos y potencias presentes.
3. Derivados ambos miembros respecto de la variable independiente.
4. Despejamos la derivada y'.
5. Reemplazamos la expresión de y y simplificamos la expresión resultante.

Ejemplo

Para derivar $y = f(x) = \frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}}$.

1. $\ln y = \ln\left(\frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}}\right)$,
2. $\ln y = \ln(x^{\frac{1}{2}}(x+1)^5) - \ln(10(x^2-3)^{\frac{1}{3}})$,
   $= \frac{1}{2}\ln(x) + 5\ln(x+1) - \ln 10 - \frac{1}{3}\ln(x^2-3)$,
3. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2-3}$,
4. $y' = y\left(\frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{2x}{3(x^2-3)}\right)$,
5. $y' = \left(\frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}}\right)\left(\frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{2x}{3(x^2-3)}\right)$,

Sesión 02

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 27, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Funciones convexas y cóncavas en el plano

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función convexa)

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$, diremos que f es convexa en I si para todo par de puntos x_1, $x_2 \in I$ y para cualquier $0 \leqslant t \leqslant 1$ se cumple que

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Interpretación geométrica de una función convexa

Definición (Función cóncava)

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$, diremos que f es cóncava en I si para todo par de puntos x_1, $x_2 \in I$ y para cualquier $0 \leqslant t \leqslant 1$ se cumple que

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Interpretación geométrica de una función cóncava

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

- Notamos que f es cóncava si $-f$ es convexa y viceversa.
- La gráfica de una función convexa está por debajo de cualquiera de sus secantes.
- La gráfica de una función cóncava esta sobre cualquiera de sus secantes.

Teorema

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en I. Entonces

- *f es convexa en I si y solo si para todo*

$$x_1, x_2 \in I : f'(x_2)(x_1 - x_2) \leqslant f(x_1) - f(x_2)$$

- *f es cóncava en I si y solo si para todo*

$$x_1, x_2 \in I : f'(x_2)(x_1 - x_2) \geqslant f(x_1) - f(x_2)$$

Demostración.

- ($\longrightarrow$) Si $x_1 = x_2$ la desigualdad se cumple. Supongamos que $x_1 \neq x_2$ entonces como f es convexa

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \forall t \in]0,1[$$

luego, $\dfrac{f(x_2 + t(x_1 - x_2)) - f(x_2)}{t} \leqslant f(x_1) - f(x_2)$ si hacemos $h = t(x_1 - x_2)$ y pasamos al límite,

$$(x_1 - x_2) \lim_{h \to 0} \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h} \leqslant f(x_1) - f(x_2)$$

donde consideramos el caso de las derivadas laterales si es necesario.

Demostración.

($\longleftarrow$) Sean x_1, $x_2 \in I$ y $t \in [0,1]$. Denotamos $x_t = tx_1 + (1-t)x_2 \in I$ entonces

$$f'(x_t)(x_1 - x_t) \leqslant f(x_1) - f(x_t) \implies f(x_t) \leqslant f(x_1) - (1-t)f'(x_t)(x_1 - x_2)$$

y

$$f'(x_t)(x_2 - x_t) \leqslant f(x_2) - f(x_t) \implies f(x_t) \leqslant f(x_2) - tf'(x_t)(x_2 - x_1)$$

luego

$$tf(x_t) + (1-t)f(x_t) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Demostración.

Vemos que si f es convexa y diferenciable en I entonces para $a \in I$

$$f(a) + f'(a)(x-a) \leqslant f(x) \quad \forall x \in I$$

es decir la gráfica de f esta sobre cualquiera de sus rectas tangentes. $\square$

Observación

Además si a es un punto critico de f entonces $f'(a) = 0$ y por lo tanto $f(a) \leqslant f(x), \forall x \in I$, es decir f alcanza un valor mínimo en a.

Teorema

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en I. Entonces

- *f es convexa en I si y solo si $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$*
- *f es cóncava en I si y solo si $f''(x) \leqslant 0$, $\forall x \in I$*

Demostración

($\longleftarrow$) Sean x_1 y x_2 en I, luego

$$f'(x_2)(x_1 - x_2) \leqslant f(x_1) - f(x_2)$$

y

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1)$$

si sumamos ambas desigualdades

$$(f'(x_2) - f'(x_1))(x_1 - x_2) \leqslant 0$$

es decir f' es no decreciente y por lo tanto $f''(x) \geqslant 0$.

Demostración

($\longrightarrow$) Sean x_1, x_2 en I, y aplicamos el teorema de valor medio (f' es continua y diferenciable)

$$\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = f''(c) \geqslant 0$$

por lo tanto f' es no decreciente. Nuevamente aplicamos el teorema de valor medio:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \text{ para algún } c \text{ entre } x_1 \text{ y } x_2$$

Demostración.

si $x_1 < x_2$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geqslant f'(x_1) \implies f(x_2)-f(x_1) \geqslant f'(x_1)(x_2-x_1)$$

si $x_1 > x_2$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \leqslant f'(x_1) \implies f(x_2)-f(x_1) \geqslant f'(x_1)(x_2-x_1)$$

en cualquier caso f es convexa. $\square$

Ejemplo

- $f(x) = e^x$ es convexa, pues $f''(x) = e^x > 0$
- $f(x) = \ln x$ es cóncava pues $f''(x) = -1/x^2 < 0$
- $f(x) = \cosh x$ es convexa pues $f''(x) = \cosh(x) > 0$
- $f(x) = \operatorname{senh} x$ es convexa en $[0, +\infty[$ y cóncava en $]-\infty, 0]$

Ejemplo

Sea $f : [1, 6] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 100$$

Calculamos f''

$$f''(x) = 12(x^2 - 4x + 1) = 12(x - (\sqrt{3} + 2))(x - (-\sqrt{3} + 2))$$

Luego f es convexa en $\left[\sqrt{3} + 2, 6\right]$.

Sesión 01

1 Funciones convexas y cóncavas en el plano

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 29, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

1 Razón de cambio

2 Esbozo de gráficas de funciones

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ y $x_0, x \in I$. La razón de cambio promedio (r.c.p.) de f entre x_0 y x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La razón de cambio instantánea (r.c.i.) de f entre x_0 y x es el límite (si existe) de la r.c.p. es decir

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ejemplo

Para la función $C(q) = 3q^2 + 5q + 10$, calcule la r.c.p. de C entre 40 y 41, y entre 40 y 42, y la r.c.i. de C en 40.

Resolución

De la definición:

- r.c.p.$_{q_0=40,\Delta q=1}C = \dfrac{\Delta C}{\Delta q} = \dfrac{248}{1} = 248$
  Entre 40 y 41 unidades, el costo aumenta a razón de 248 dolares/unidad.
- r.c.p.$_{q_0=40,\Delta q=2}C = \dfrac{\Delta C}{\Delta q} = \dfrac{502}{2} = 251$
  Entre 40 y 42 unidades, el costo aumenta a razón de 251 dolares/unidad.
- Como $C'(q) = 6q + 5$, entonces r.c.i.$_{q_0=40}C = C'(40) = 245$.
  Produciendo 40 unidades, el costo aumenta aproximadamente a razón de 245 dolares/unidad.

Ejemplo

En el caso de una función que pide la posición de una partícula en función del tiempo, $s = s(t)$,

- la razón de cambio promedio representa la velocidad promedio de la partícula,
- la razón de cambio instantánea es la velocidad instantánea de la partícula.

Si la distancia está en km y el tiempo en horas h, las razones de cambio se encuentran en unidades de km/h.

Ejemplo

Un globo esférico se infla con aire a razón de 200 cm^3/min. ¿Con qué rapidez cambia el radio cuando este mide 10 cm?

Resolución

Sea V volumen esfera y r la longitud del radio de la esfera.

Dato: $\dfrac{V}{t} = 200$

La razón que se pide determinar es $\dfrac{dr}{dt}\Big|_{r=10}$.

Como $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, entonces $\dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$.

Reemplazando el valor de $\dfrac{dV}{dt}$ y $r = 10$, se obtiene

$$200 = 4\pi(10)^2 \frac{dr}{dt}\Big|_{r=10}$$

Así, $\dfrac{dr}{dt}\Big|_{r=10} = \dfrac{1}{2\pi} \approx 0.16$ cm/min.

Ejemplo

La altura h (en metros) y el radio de la base r (en metros) de un casquete esférico de 42π m^3 de volumen satisfacen la ecuación

$$\frac{h}{6}(3r^2 + h^2) = 45$$

De acuerdo a esta relación entre h y r calcule

- $\dfrac{dr}{dh}$ cuando $h = 2$ y $r = \dfrac{122}{3}$.
- $\dfrac{dh}{dr}$ cuando $h = 3$ y $r = 5$.

Resolución

Primero comprobamos que los puntos $(h, r) = (2, \frac{122}{3})$ y $(h, r) = (3, 5)$ satisfacen la ecuación.

- Derivamos la relación $\frac{h}{6}(3r^2 + h^2) = 45$ respecto de h,

$$\frac{1}{6}(3r^2 + h^2) + \frac{h}{6}(3 \cdot 2r\frac{dr}{dh} + 2h) = 0$$

Reemplazando,

$$3\left(\frac{122}{3}\right) + 2^2 + 2\left(6\sqrt{\frac{122}{3}}\frac{dr}{dh} + 4\right) = 0$$

Despejando, $\frac{dr}{dh} = -\frac{134}{12}\sqrt{\frac{3}{122}}$.

Resolución

- Derivamos la relación $\frac{h}{6}(3r^2+h^2)=45$ respecto de r,

$$\frac{1}{6}\frac{dh}{dr}(3r^2+h^2)+\frac{h}{6}(6r+2h\frac{dh}{dr})=0$$

Despejamos,

$$\frac{dh}{dr}(6r^2+h^2+2h^2)+6hr=0$$

Así, $\frac{dh}{dr}=-\frac{2hr}{r^2+h^2}$. Reemplazamos en $(h,r)=(3,5)$,

$$\frac{dh}{dr}=-\frac{2\cdot 3\cdot 5}{5^2+3^3}=-\frac{30}{34}$$

Ejemplo

En un circuito compuesto por un f.e.m., una resistencia y un condensador se requiere que la capacitancia C del condensador y la resistencia R satisfagan la ecuación $R = e^{-\frac{1}{RC}}$. De acuerdo a esta ecuación calcule la razón de cambio en cada ítem.

- $\dfrac{dR}{dC}$ cuando $R = \dfrac{1}{2}$ y $C = \dfrac{2}{\ln 2}$.
- $\dfrac{dC}{dR}$ cuando $R = \dfrac{1}{4}$ y $C = \dfrac{2}{\ln 2}$.

Resolución

Primero comprobamos que $(R, C) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{\ln 2})$ y $(R, C) = (\frac{1}{4}, \frac{2}{\ln 2})$, satisfagan la relación.

- Derivamos la relación $R = e^{-\frac{1}{RC}}$ respecto de C,

$$\frac{dR}{dC} = e^{-\frac{1}{RC}}(-1)\left(-\frac{\frac{dR}{dC} + R}{(RC)^2}\right)$$

Despejamos, $\dfrac{dR}{dC} = \dfrac{RC}{C^2(RC-1)}$ Reemplazamos,

$$\frac{dR}{dC} = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{\frac{4}{\ln^2 2}(\frac{1}{\ln 2} - 1)} = \frac{\ln^2 2}{4(1 - \ln 2)}$$

Resolución

- Derivamos la relación $R = e^{-\frac{1}{RC}}$ respecto de R,

$$1 = e^{-\frac{1}{RC}}(-1)\left(-\frac{C + R\frac{dC}{dR}}{(RC)^2}\right)$$

Despejamos, $\dfrac{dC}{dR} = \dfrac{C(RC-1)}{R}$ Reemplazamos,

$$\frac{dC}{dR} = \frac{\frac{2}{\ln 2}\left(\frac{1}{2\ln 2} - 1\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{\ln^2 2}(1 - 2\ln 2)$$

Ejemplo

Un proyecto requiere fabricar una placa metálica triangular de base 3 m y de altura $4\sqrt{3}$, como en la figura. Un ingeniero propone una placa de lados $u = 7$ y $v = 8$ (en metros).

El director del proyectos dice que $u = 7$ no se ajusta al diseño y pide aumentarlo ligeramente. Sin embargo, al alterar u será necesario alterar v, para preservar la base y la altura.

Calcule la razón de cambio $\dfrac{dv}{du}$ cuando $u = 7$ y $v = 8$ y determine si v aumentará o disminuirá luego de aumentar u ligeramente.

Resolución

En este caso de modelamiento, lo primero es establecer la relación entre las variables u y v. Como la base y la altura son fijas, el área de la figura también, $A = 6\sqrt{3}$.

Por otro lado podemos poner el área del triángulo en función de sus lados.

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(u+v+3)(u+v-3)(u-v+3)(-u+v+3)}$$

Derivemos la relación con respecto a u,

$$0 = \frac{1}{4}\frac{\frac{d}{du}[(u+v+3)(u+v-3)(u-v+3)(-u+v+3)]}{2\sqrt{(u+v+3)(u+v-3)(u-v+3)(-u+v+3)}}$$

Resolución

Luego,

$$
\begin{aligned}
0 \quad = \quad & (1+\frac{dv}{du})(u+v-3)(u-v+3)(-u+v+3) \\
& +(u+v+3)(1+\frac{dv}{du})(u-v+3)(-u+v+3) \\
& +(u+v+3)(u+v-3)(1-\frac{dv}{du})(-u+v+3) \\
& +(u+v+3)(u+v-3)(u-v+3)(-1+\frac{dv}{du})
\end{aligned}
$$

Resolución

De esta relación debemos obtener $\dfrac{dv}{du}$, pero como se requiere en $u = 7$, y $v = 8$, podemos reemplazar estos valores en la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} 0 &= (1+\frac{dv}{du})(15-3)(-1+3)(1+3) \\ &\quad +(15+3)(1+\frac{dv}{du})(-1+3)(1+3) \\ &\quad +(15+3)(15-3)(1-\frac{dv}{du})(1+3) \\ &\quad +(15+3)(15-3)(-1+3)(-1+\frac{dv}{du}) \end{aligned}$$

Resolución

Así, $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{7}{2}$. Es decir, la razón de cambio es positiva, lo que indica que cuando u aumenta ligeramente por encima de 7, v también aumenta ligeramente por encima de 8.

Sesión 02

1 Razón de cambio

2 Esbozo de gráficas de funciones

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Determine el número de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $x^5 - 5x^3 = -11.$

b) $x^5 - 5x^3 = 10.$

c) $x^2 - 6\ln(x+2) = -5.$

d) $\ln(x^2) + \dfrac{1}{x} = 5.$

Resolución a)

Hacemos $f(x) = x^5 - 5x^3 + 11$. El problema es entonces hallar cuantos $x \in \mathbb{R}$, existen tales que $f(x) = 0$.
Veamos la derivada, $f'(x) = 5x^4 - 15x^2$. Al factorizar obtenemos $f'(x) = 5x^2(x^2 - 3)$. De modo que tenemos tres zonas.

- $]-\infty, -\sqrt{3}]$, donde f es creciente pues $f'(x) > 0$ en $]-\infty, -\sqrt{3}]$.
- $[-\sqrt{3}, 0]$, donde f es decreciente pues $f'(x) < 0$ en $]-\sqrt{3}, 0]$.
- $[0, \sqrt{3}]$, donde f es decreciente pues $f'(x) < 0$ en $]0, \sqrt{3}]$.
- $[\sqrt{3}, +\infty]$, donde f es creciente pues $f'(x) > 0$ en $[\sqrt{3}, +\infty[$.

Resolución a)

Ahora debemos evaluar f en los puntos $\pm\sqrt{3}$, para saber si la gráfica de f corta o no el eje X.

$$f(-\sqrt{3}) = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 11 = 11 + 6\sqrt{3} > 0.$$
$$f(\sqrt{3}) = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 11 = 11 - 6\sqrt{3} > 0.$$

Además $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Por lo tanto la ecuación $x^5 - 5x^3 = -11$ solo tiene una solución.

Resolución b)

Hacemos $f(x) = x^5 - 5x^3 - 10$. El problema es entonces hallar cuantos $x \in \mathbb{R}$, existen tales que $f(x) = 0$.
Veamos la derivada, $f'(x) = 5x^4 - 15x^2$, al factorizar obtenemos $f'(x) = 5x^2(x^2 - 3)$. De modo que tenemos tres zonas.

- $]-\infty, -\sqrt{3}]$, donde f es creciente pues $f'(x) > 0$ en $]-\infty, -\sqrt{3}]$.
- $[-\sqrt{3}, 0]$, donde f es decreciente pues $f'(x) < 0$ en $]-\sqrt{3}, 0]$.
- $[0, \sqrt{3}]$, donde f es decreciente pues $f'(x) < 0$ en $]0, \sqrt{3}]$.
- $[\sqrt{3}, +\infty]$, donde f es creciente pues $f'(x) > 0$ en $[\sqrt{3}, +\infty[$.

Resolución b)

Ahora debemos evaluar f en los puntos $\pm\sqrt{3}$, para saber si la gráfica de f corta o no el eje X.

$$f(-\sqrt{3}) = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 11 = 11 + 6\sqrt{3} > 0.$$
$$f(\sqrt{3}) = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 11 = 11 - 6\sqrt{3} > 0.$$

Además $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Por lo tanto la ecuación $x^5 - 5x^3 = 10$ tiene 3 soluciones.

Ejemplo

Para la función $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^4}{8 - x^3}$.

a) Determine
   - Las ecuaciones de todas las asíntotas, en caso existan.
   - Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, además de los extremos relativos, en caso existan.
   - Los intervalos de concavidad, además de las coordenadas de los puntos de inflexión, en caso existan.

b) Tomando en cuenta los resultados de los items anteriores, esboce la gráfica de la función f, indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes coordenados y las coordenadas de los puntos de intersección con las asíntotas, si los tuviera.

Resolución

a) Primero, notamos que $x = 2$ no está en el dominio. Analizamos cerca de $x = 2$ posteriormente.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{8-x^3} = -1.$
  La recta asíntota (si existe) tiene pendiente $= -1$.
- Ahora veamos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)+x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{8-x^3}+x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+8x-x^4}{8-x^3} = 0.$$

Entonces la recta $y = -x$ es asíntota derecha.

Resolución

a)

- De modo similar: $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{8-x^3} = -1$. De modo que, la recta asíntota (si existe) tiene pendiente $= -1$. Así también:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{8-x^3}+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+8x-x^4}{8-x^3} = 0.$$

  Entonces la recta $y = -x$ también es asíntota izquierda.
- Calculemos ahora

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty.$$

Resolución

a) ■ Por otro lado, $f(x) = -x + \dfrac{8x}{8 - x^3}$. Así

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{64 - 8x^3 + 24x^3}{(8 - x^3)^2} \\ &= \frac{x^3(32 - x^3)}{(8 - x^3)^2} \end{aligned}$$

Resolución

b) Gráfica de la función f.

$$f(x) = \frac{x^4}{8 - x^3}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

1 Razón de cambio

2 Esbozo de gráficas de funciones

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 29, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Funciones inversas
- Derivada de una función inversa
- Funciones trigonométricas inversas

2 Derivadas de funciones inversas
- Derivadas de funciones trigonométricas inversas
- Funciones hiperbólicas
- Derivadas de funciones hiperbólicas
- Funciones hiperbólicas inversas

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

Si f es continua y uno a uno en un intervalo I, entonces f es o bien creciente o bien decreciente en dicho intervalo I.

Demostración.

Sean $a_0 < b_0$ dos números del intervalo I. Al ser f uno a uno, se sabe que

$$\text{o bien } (i) : f(b_0) - f(a_0) > 0,$$
$$\text{o bien } (ii) : f(b_0) - f(a_0) < 0.$$

Veamos el caso (i). Se demostrará que la misma desigualdad se cumple para cualesquiera $a_1 < b_1$ del intervalo, de modo que f es creciente. (Un razonamiento análogo haría ver que si se cumple (ii), en ese caso f es de creciente).

Demostración.

Sean

$$x_t = (1-t)a_0 + ta_1 \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1,$$
$$y_t = (1-t)b_0 + tb_1$$

Entonces $x_0 = a_0$ y $x_1 = a_1$ y todos los puntos x_t están entre a_0 y a_1. De modo similar, todos los y_t están entre b_0 y b_1.
Así pues, los x_t e y_t están todos en el intervalo I. Además, puesto que $a_0 < b_0$ y $a_1 < b_1$, se tiene también

$$x_t < y_t' \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1,$$

Demostración.

considerando ahora la función

$$g(t) = f(y_t) - f(x_t) \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Esta función es continua en $[0, 1]$, y cumple que $g(0) = f(b_0) - f(a_0) > 0$, en consecuencia $g(t) > 0$ para todo $t \in [0, 1]$, de lo contrario la función no sería inyectiva.
Siendo así se tiene que $g(1) = f(b_1) - f(a_1) > 0$ para cualquier par $a_1 < b_1$. □

Función inversa

En primer lugar se supone que f es una función creciente continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$.
Entonces, según el teorema de los valores intermedios, f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Por lo tanto, el dominio de f^{-1} es el intervalo cerrado $[f(a), f(b)]$. Análogamente, si f es continua y decreciente sobre $[a, b]$, entonces el dominio de f^{-1} en $[f(b), f(a)]$.
Si f es una función creciente continua sobre un intervalo abierto $]a, b[$, el análisis se hace algo más difícil.

Función inversa

Para empezar, se elige algún punto c de $]a, b[$. Se verá primero cuáles son los valores mayores que $f(c)$ tomados por f. Una posibilidad es que f tiene valores arbitrariamente grande en este caso f toma todos los valores mayores que $f(c)$, según el teorema de los valores intermedios.

$y = f(x)$

Función inversa

Si, por otra parte, f no toma valores arbitrariamente grandes, entonces $A = \{f(x) : c \leq x < b\}$ está acotado superiormente, de modo que A tiene una cota superior mínima α tal como see muestra en la figura.

Función inversa

Sea y un número cualesquiera con $f(c) < y < \alpha$. Entonces f toma algún valor $f(x) > y$ (puesto que α es la cota superior mínima de A). Según el teorema de los valores intermedios, f toma efectivamente el valor y. Observe que f no puede tomar el valor α mismo; pues si $\alpha = f(x)$ para $a < x < b$ y elegimos t con $x < t < b$, entonces $f(t) > \alpha$, lo cual es imposible.
Exactamente el mismo razonamiento sirve para valores menores que $f(c)$: o bien f toma todos los valores menores que $f(c)$, o bien existe un número $\beta < f(c)$ tal que f toma todos los valores comprendidos entre β y $f(c)$, pero no el mismo β.

Función inversa

El razonamiento entero puede repetirse si f es decreciente, y si el dominio de f es $\mathbb{R}$ o $]a, +\infty[$ o $]-\infty, a[$.
Resumiendo: si f es una función continua creciente cuyo dominio es un intervalo de una de las formas

$$]a, b[,]-\infty, b[,]a, +\infty[, \text{ o } \mathbb{R},$$

entonces el dominio de f^{-1} es también un intervalo de una de dichas cuatro formas.

Teorema

Si f es continua y uno-uno sobre un intervalo, entonces f^{-1} también es continua.

Demostración

Se sabe por el teorema anterior que f es o bien creciente o bien decreciente. Podemos suponer que f es creciente, ya que después se puede tratar el otro caso aplicando lo ya demostrado a $-f$.
Se demostrará que

$$\lim_{x \to b} f^{-1}(x) = f^{-1}(b)$$

para todo b del dominio de f^{-1}. Un tal número b es de la forma $f(a) = b$ para algún a del dominio de f.

Demostración

Para cualquier $\varepsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $f(a) - \delta < x < f(a) + \delta$, entonces

$$a - \varepsilon < f^{-1}(x) < a + \varepsilon$$

La siguiente figura sugiere la manera de determinar δ (recuérdese que al mirar de lado se ve la gráfica de f^{-1}).

Demostración

Al ser $a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$, se sigue que $f(a - \epsilon) < f(a) < f(a + \epsilon)$. Se toma a δ como el más pequeño de los números $f(a + \varepsilon) - f(a)$ y $f(a) - f(a - \varepsilon)$.
Esta elección de δ asegura que $f(a - \varepsilon) \leq f(a) - \delta$ y $f(a) + \delta \leq f(a + \varepsilon)$. En consecuencia, si $f(a) - \delta < x < f(a) + \delta$, entonces $f(a - \varepsilon) < x < f(a + \varepsilon)$.
Al ser f creciente, f^{-1} es también decreciente, y obtenemos $f^{-1}(f(a - \varepsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(a + \varepsilon))$, es decir, $a - \varepsilon < f^{-1}(x) < a + \varepsilon$, que es precisamente lo que se quería encontrar.

Derivada de la función inversa

La figura muestra la gráfica de una función uno-uno f con una recta tangente $\mathscr{L}$ en $(a, f(a))$.

Si se refleja la gráfica de f respecto de la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de f^{-1} y la tangente $\mathscr{L}'$ en el punto $(f(a), a)$. La pendiente de $\mathscr{L}'$ es la recíproca de la pendiente de $\mathscr{L}$.

Derivada de la función inversa

En otras palabras,

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Esta fórmula puede escribirse de manera que exprese $(f^{-1})'(b)$ directamente, para cada b del dominio de f^{-1},

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Contrariamente al razonamiento usado para la continuidad, esta "demostración" en imágenes se hace algo más complicada al formularla analíticamente.

Derivada de la función inversa

Hay otro procedimiento que podría intentarse. Puesto que sabemos que

$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

resulta tentador demostrar la fórmula deseada mediante una aplicación de la regla de la cadena:

$$f(f^{-1}(x))(f^{-1})(x) = 1,$$

de modo que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Derivada de la función inversa

Lamentablemente, esto no es una demostración de que f^{-1} es derivable, puesto que la regla de la cadena no puede aplicarse a no ser que se sepa ya que f^{-1} es derivable. Pero este razonamiento indica cómo tendrá que ser $(f^{-1})'(x)$ si f^{-1} es derivable, y puede también utilizarse para obtener alguna importante información preliminar.

Teorema

Si f es una función uno-uno continua definida sobre un intervalo y $f'(f^{-1}(a)) = 0$, entonces f^{-1} no es derivable en a.

Demostración.

Se tiene

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Si f^{-1} fuese derivable en a, la regla de la cadena implicaría que

$$f'(f^{-1}(a)).(f^{-1})'(a) = 1,$$

de donde

$$0.(f^{-1})'(a) = 1,$$

lo cual es absurdo. $\square$

Ejemplo

Un ejemplo sencillo al que es aplicable el teorema anterior lo constituye la función $f(x) = x^3$. Al ser $f'(0) = 0$ y $0 = f^{-1}(0)$, la función f^{-1} no es derivable en 0 (como se puede ver en las siguientes figuras).

Derivada de la función inversa

Una vez visto dónde no puede ser derivable una función inversa, estamos en condiciones para dar la demostración rigurosa de que en todos los demás casos la derivada viene dada por la fórmula que ya hemos "deducido" de dos maneras diferentes. Observe que el razonamiento a continuación utiliza la continuidad de f^{-1}, que ya se ha demostrado.

Teorema

Sea f una función uno-uno continua definida sobre un intervalo, y supongamos que f es derivable en $f^{-1}(b)$, con derivable $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Entonces f^{-1} es derivable en b, y

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Demostración.

Si $b = f(a)$. Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h}$$

Ahora bien, todo número $b + h$ del dominio de f^{-1} puede escribirse de la forma

$$b + h = f(a + k)$$

para un k único (en rigor se debería poner $k(h)$, pero se usará k para mayor sencillez).

Demostración.

Entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(b+h)-a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(f(a+k))-a}{f(a+k)-b}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{k}{f(a+k)-f(a)}$$

Ahora, no es difícil obtener una expresión explícita de k, al ser $b+h=f(a+k)$ se tiene $f^{-1}(b+h)=a+k$ o $k=f^{-1}(b+h)-f^{-1}(b)$.

Demostración.

Ahora bien, según el teorema, la función f^{-1} es continua en b. Esto significa que k tiende hacia 0 cuando h tiende hacia 0. Al ser

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(a+k)-f(a)}{k}=f'(a)=f'(f^{-1}(b))\neq 0,$$

esto implica que

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

$\square$

Ejemplo

Para

- n impar, sea $f_n(x) = x^n$ para todo x;
- para n par, sea $f_n(x) = x^n,\ x \geq 0$.

Entonces f_n es una función uno-uno continua, cuya función inversa es $f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Ejemplo

Según el teorema se tiene, para $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{1}{f_n'(f_n^{-1}(x))} \\ g_n'(x) &= \frac{1}{n(f_n^{-1}(x))^{n-1}} \\ g_n'(x) &= \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} \\ g_n'(x) &= \frac{1}{n} \cdot x^{(1/n)-1} \end{aligned}$$

Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas. Las funciones tangente y cotangente tienen período π y las restantes funciones trigonométricas tienen período 2π.
Una función periódica no es univalente. Por ejemplo $\operatorname{sen}(2n\pi + x) = \operatorname{sen} x$ para todo entero n, luego hay infinitos pares ordenados en la función sen con el mismo segundo elemento.
Como las funciones trigonométricas no son univalentes, no tienen funciones inversas.

Funciones trigonométricas inversas

Sin embargo, si restringimos adecuadamente el dominio por definición de cada una de las funciones trigonométricas obtenemos nuevas funciones restringidas que si son univalentes. Las inversas de estas funciones restringidas serán llamadas funciones trigonométricas inversas.

Por conveniencia, introduciremos la notación $f|_E$ para la función restringida

$$f|_E = \{(x, f(x)) | x \in \mathrm{Dom}(f) \cap E\}.$$

Es decir, $f|_E$ es la función con dominio $\mathrm{Dom}(f) \cap E$ y la misma regla de correspondencia que f.

Función seno inverso

La función $\operatorname{sen}|_E$, donde $E = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, es una función univalente cuya inversa llamada seno inverso o arco seno, $(\operatorname{sen}|_E)^{-1} = \operatorname{arcsen}$, tiene dominio $\operatorname{Dom}(\operatorname{arcsen}) = [-1, 1]$ y rango $\operatorname{Ran}(\operatorname{arcsen}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\boxed{f(x) = \operatorname{arcsen} x}$$

Función coseno inverso

La función $\cos|_E$, donde $E = [0, \pi]$, es una función univalente cuya inversa llamada coseno inverso o arco coseno, $(\cos|_E)^{-1} = \arccos$, tiene dominio $\mathrm{Dom}(\arccos) = [-1, 1]$ y rango $\mathrm{Ran}(\arccos) = [0, \pi]$.

$$\boxed{f(x) = \arccos x}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Función tangente inverso

La función $\tan|_E$, donde $E =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, es una función univalente cuya inversa llamada tangente inverso o arco tangente, $(\tan|_E)^{-1} = \arctan$, tiene dominio $\mathrm{Dom}(\arctan) =]-\infty, +\infty[$ y rango $\mathrm{Ran}(\arctan) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\boxed{f(x) = \arctan x}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Función cotangente inverso

La función $\cot|_E$, donde $E =]0, \pi[$, es una función univalente cuya inversa llamada cotangente inverso o arco cotangente, $(\cot|_E)^{-1} = \operatorname{arccot}$, tiene dominio $\operatorname{Dom}(\operatorname{arccot}) =]-\infty, +\infty[$ y rango $\operatorname{Ran}(\operatorname{arccot}) =]0, \pi[$.

$$\boxed{f(x) = \operatorname{arccot} x}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Función secante inverso

La función $\sec|_E$, donde $E = \mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, es una función univalente cuya inversa llamada secante inverso o arco secante, $(\sec|_E)^{-1} = \operatorname{arcsec}$, tiene dominio $\operatorname{Dom}(\operatorname{arcsec}) = \mathbb{R}] \setminus [-1, 1]$ y rango $\operatorname{Ran}(\operatorname{arcsec}) = \mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Función cosecante inverso

La función $\csc|_E$, donde $E =]-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup]0, \frac{\pi}{2}]$, es una función univalente cuya inversa llamada cosecante inverso o arco cosecante, $(\csc|_E)^{-1} = \operatorname{arccsc}$, tiene dominio $\operatorname{Dom}(\operatorname{arccsc}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ y rango $\operatorname{Ran}(\operatorname{arccsc}) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\boxed{f(x) = \operatorname{arccsc} x}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Funciones inversas
- Derivada de una función inversa
- Funciones trigonométricas inversas

2 Derivadas de funciones inversas
- Derivadas de funciones trigonométricas inversas
- Funciones hiperbólicas
- Derivadas de funciones hiperbólicas
- Funciones hiperbólicas inversas

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivada de la función seno inverso

Se analizará el caso de la función arcsen. Como la función seno es derivable y con derivada no nula sobre $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, entonces la función arcsen es derivable sobre $]-1, 1[$ y

$$D_x \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{D_x \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}.$$

Pero, $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$ sobre $]-1, 1[$.
De este modo, se obtiene

$$D_x \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$$

Tabla de derivadas de funciones trigonométricas inversas

f^{-1}	$\mathrm{Dom}(f^{-1})$	$F = Df^{-1}$	$\mathrm{Dom}(F)$
$\operatorname{arcsen}(x)$	$[-1,1]$	$D\operatorname{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$D\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$D\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arccot}(x)$	$\mathbb{R}$	$D\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arcsec}(x)$	$\mathbb{R}\setminus]-1,1[$	$D\operatorname{arcsec}(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$
$\operatorname{arccsc}(x)$	$\mathbb{R}\setminus]-1,1[$	$D\operatorname{arccsc}(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$

Funciones hiperbólicas

- $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\tanh(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$

Funciones hiperbólicas

- $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\operatorname{csch}(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{sech}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Función seno hiperbólico

La función senh es derivable en $\mathbb{R}$. Analizamos la derivada

$$\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

observamos que la derivada no tiene punto crítico, siempre es mayor que cero, es decir que siempre es creciente. De modo que es uno-uno, con lo cual tiene inversa.

Función seno hiperbólico

Analizamos la segunda derivada,

$$\operatorname{senh}''(x) = \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La segunda derivada solo es cero en $x = 0$, veamos si $x = 0$ es punto de inflexión.

- Como $f''(x) < 0$ en $x < 0$, la pendiente de la recta tangente disminuye conforme x aumenta.
- Como $f''(x) > 0$ en $x > 0$, la pendiente de la recta tangente aumenta conforme x aumenta.

Función seno hiperbólico

Gráfica del seno hiperbólico

$$\boxed{f(x) = \operatorname{senh} x}$$

Función coseno hiperbólico

La función $\cosh$ es derivable en $\mathbb{R}$. Analizamos la derivada

$$\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

De modo que la función tiene punto crítico en $x = 0$.

Función coseno hiperbólico

Analizamos la segunda derivada

$$\cosh''(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

que siempre es mayor que cero.
Es decir, la pendiente de la recta a la gráfica siempre aumenta.
En particular, en el punto crítico $x = 0$ donde $\cosh'(x) = 0$ tenemos un punto de mínimo.

Función coseno hiperbólico

Gráfica del coseno hiperbólico

$$f(x) = \cosh x$$

Derivadas de funciones hiperbólicas

- $D_x \operatorname{senh}(x) = \cosh(x), \quad x \in \mathbb{R}.$
- $D_x \cosh(x) = \operatorname{senh}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$
- $D_x \tanh(x) = \operatorname{sech}^2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$
- $D_x \coth(x) = -\operatorname{csch}^2(x), \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$
- $D_x \operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x), \quad x \in \mathbb{R}.$
- $D_x \operatorname{csch}(x) = -\operatorname{csch}(x)\coth(x), \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$

Función seno hiperbólico inverso

$$y = \operatorname{senh}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{arcsenh}(y).$$

$$\boxed{f(x) = \operatorname{arcsenh} x}$$

- $\operatorname{Dom}(\operatorname{arcsenh}) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{Ran}(\operatorname{arcsenh}) = \mathbb{R}$

Función coseno hiperbólico inverso

$$y = \cosh(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \operatorname{arccosh}(y).$$

Restringimos $\cosh$ a la rama creciente $E = [0, +\infty[$.

- $\operatorname{Dom}(\operatorname{arccosh}) = [1, +\infty[$
- $\operatorname{Ran}(\operatorname{arccosh}) = [0, +\infty[$

Forma explícita de la función $f(x) = \operatorname{arcsenh}(x)$

Se tiene, $y = \operatorname{arcsenh}(x) \iff x = \operatorname{senh}(x)$. Esto es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ e^{2y} - 2xe^y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Tomamos como variable e^y, luego

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}$$

Forma explícita de la función $f(x) = \operatorname{arcsenh}(x)$

Como $e^y > 0$, se tiene

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

de modo que

$$y = \operatorname{arcsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Forma explícita de la función $f(x) = \operatorname{arccosh}(x)$

Se tiene, $y = \operatorname{arccosh}(x) \iff x = \cosh(x)$. Esto es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \\ e^{2y} - 2xe^y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Tomamos como variable e^y, luego

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$$

Forma explícita de la función $f(x) = \operatorname{arccosh}(x)$

Como $x \notin]-1, 1[$ y $e^y > 1$, pues hemos elegido esa rama para la inversa de $\cosh$. Luego

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

de modo que

$$y = \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Tabla funciones hiperbólicas inversas

Función inversa f^{-1}	$\mathrm{Dom}(f^{-1})$
$\operatorname{arcsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$[1, +\infty[$
$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$	$]-1, 1[$
$\operatorname{arccoth}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1-x}{1+x})$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
$\operatorname{arcsech}(x) = \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})$	$]0, 1]$
$\operatorname{arccsch}(x) = \ln(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\lvert x\rvert})$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Derivada de la función seno hiperbólico inverso

De la forma explícita $\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, derivamos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

Derivada de la función seno hiperbólico inverso

También, si derivamos a ambos lados de $\operatorname{senh}(\operatorname{arcsenh}(x)) = x$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsenh}(x))} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{2}{e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} + e^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{1+x^2+x\sqrt{x^2+1}} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas

- $D_x \operatorname{arcsenh}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R}$
- $D_x \operatorname{arccosh}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
- $D_x \operatorname{arctanh}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$

Derivadas de funciones hiperbólicas inversas

- $D_x \operatorname{arccoth}(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$
- $D_x \operatorname{arcsech}(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1$
- $D_x \operatorname{arccsch}(x) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}, \quad x \neq 0$

Sesión 01

1 Funciones inversas
- Derivada de una función inversa
- Funciones trigonométricas inversas

2 Derivadas de funciones inversas
- Derivadas de funciones trigonométricas inversas
- Funciones hiperbólicas
- Derivadas de funciones hiperbólicas
- Funciones hiperbólicas inversas

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

[t]Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 22, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

1 Aproximación lineal

2 Diferenciales

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Cuando $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto a interior de D, definimos lo siguiente: La linealización de f en a es la función $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\ell(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

- Cuando f es continua en a aprendimos que $x \approx a \Rightarrow f(x) \approx f(a)$.
- Cuando f es derivable en a podemos mejorar la aproximación: $x \approx a \Rightarrow f(x) \approx \ell(x)$.

Esta última aproximación es llamada aproximación lineal.

Observación

La recta tangente L es la gráfica de la linealización ℓ.

Teorema

Si f es derivable en a y ℓ es la linealización de f en a, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - \ell(x)|}{|x - a|} = 0$$

es decir, cuando $x \approx a$ el error $|f(x) - \ell(x)|$ es mucho menor que la distancia $|x - a|$.

Ejemplo

Defina la linealización de la función f, definida por $f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)}$, en torno al punto $x_0 = 1$.

Resolución

La función $f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)}$ es diferenciable en $x_0 = 1$, luego,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{[x_0(x_0-2)]^2}} \cdot (2x-2) \\ f'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \ell(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) \\ \ell(x) &= -1 + 0 \cdot (x-1) \\ \ell(x) &= -1 \end{aligned}$$

Ejemplo

Use la linealización de una función en torno a un punto, elegido convenientemente, para aproximar el valor de $\sqrt{17}$.

Resolución

Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y $x_0 = 16$. La función f es diferenciable en $x_0 = 16$, luego

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \\ f'(16) &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \ell(x) &= f(16) + f'(16)(x-16) \\ \ell(x) &= 4 + \frac{1}{8} \cdot (x-16) \end{aligned}$$

Así, $\ell(17) = 4 + \frac{1}{8}(17-16) = 4.125$ comparando con $f(17) = 4.123$ se tiene una buena aproximación.

Resolución

Así, $\ell(17) = 4 + \frac{1}{8}(17 - 16) = 4.125$ comparando con $f(17) = 4.123$ se tiene una buena aproximación.

Definición

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. La variación de x entre x_0 y x es

$$\Delta x = x - x_0$$

La variación de la función f entre x_0 y x, también llamada "variación de y", es

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Ejemplo

El costo total en dólares de fabricar q unidades de cierto artículo es

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 10$$

Calcule la variación del costo de 40 a 41 unidades, y de 40 a 42 unidades.

Resolución

En ambos casos, $q_0 = 40$.

- En el primer caso $q = 41$, $\Delta q = 1$ y $\Delta C = C(41) - C(40) = 5258 - 5010 = 248$.
  Interpretación: produciendo 40 unidades, cuando se aumenta una unidad, el costo aumenta 248 dólares.
- En el segundo caso, $q = 42$, $\Delta q = 2$ y $\Delta C = C(42) - C(40) = 5512 - 5010 = 502$.
  Interpretación: produciendo 40 unidades, cuando se aumenta dos unidades, el costo aumenta 502 dólares.

Sesión 02

1 Aproximación lineal

2 Diferenciales

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Diferencial)

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in I$. Entonces para valores pequeños de Δx, tenemos

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es decir $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$.
El diferencial de f en x_0, que depende de Δx, se denota como dy y se define como

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

Esta definición hace que dy sea la variación aproximada de y entre x_0 y $(x_0 + \Delta x)$

Interpretación geométrica

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

Si $y = I(x) = x$, entonces para cualquier x_0 y Δx, se tiene que el diferencial de la función $I(x)$ es

$$I'(x_0)\Delta x = \Delta x$$

Debido a esto, en adelante denotaremos Δx como dx. Este diferencial será llamado diferencial de la variable independiente x. Usando la notación anterior, podemos escribir $dy = f'(x_0)\,dx$.

Ejemplo

Calcule un valor aproximado de $\sqrt{65}$ usando el diferencial como una aproximación al incremento de alguna función adecuada.

Resolución

Considere $y = f(x) = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$, cuya derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ para $x > 0$. Considerando $x_0 = 64$ y $\Delta x = 1$, se tiene

$$f(65) - f(64) = \Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{16}$$

Así, $\sqrt{65} \approx \sqrt{64} + \dfrac{1}{16} = 8,0625$

Ejemplo

El costo total, en miles de dólares, de fabricar q miles de unidades de cierto artículo es

$$C(q) = 0.01q^2 + 2.5q - 50$$

Siendo el nivel actual de producción de $100\,000$ unidades, se planea disminuirlo en $95\,000$ unidades. Determinar la variación aproximada del costo debida a tal cambio.

Resolución

En este caso $q_0 = 100$ y $\Delta q = -5$. Como $C'(q) = 0.02q + 2.5$, entonces

$$dC = C'(q_0)\Delta q = (4.5)(-5) = -22.5$$

Comparando con la variación real:

$$\Delta C = C(q_0 + \Delta q) - C(q_0) = C(95) - C(100) = -22.25$$

Sesión 02

1 Aproximación lineal

2 Diferenciales

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 21, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Aplicaciones de la derivada
- Valores extremos de una función

2 Máximos y mínimos

3 Problemas de optimización

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Indique si la siguiente proposición es verdadero o falso: Si $f'(x) > 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R}$.

Resolución

Podemos descomponer el rango de f, del siguiente modo

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f(\cup[n, n+1]) \\ f(\mathbb{R}) &= \bigcup f([n, n+1]) \\ f(\mathbb{R}) &= \bigcup [f(n), f(n+1)] \end{aligned}$$

¿Por qué es esta última igualdad? Veamos,

- La función es inyectiva. De lo contrario tendría un punto con derivada cero.
- Se tiene $\cdots < f(n-1) < f(n) < f(n+1) < \cdots$, de lo contrario alguna derivada sería menor o igual a 0.

Resolución

Ahora veamos que $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R}$.
En cada intervalo $[f(n), f(n+1)]$ se tiene $f(n+1) - f(n) > 1$.
En efecto, del teorema del valor medio,

$$\begin{aligned}
\frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} &= f(n+1) - f(n) \\
\frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} &= f\prime(c) \\
\frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} &> 1
\end{aligned}$$

para algún $c \in]n, n+1[$.

Resolución

Siendo así,

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \bigcup [f(n), f(n+1)] \\ f(\mathbb{R}) &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Máximo relativo o máximo local)

Sea $f : X \to \mathbb{R}$. La función f tiene un máximo relativo o máximo local en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ si existe una vecindad $V_\delta(x_0)$ tal que

$$f(x) \leqslant f(x_0), \quad \forall x \in V_\delta(x_0) \cap X$$

Definición (Mínimo relativo o mínimo local)

Sea $f : X \to \mathbb{R}$. La función f tiene un mínimo relativo o mínimo local en $x_0 \in \operatorname{Dom} f$ si existe una vecindad $V_\delta(x_0)$ tal que

$$f(x_0) \leqslant f(x), \forall x \in V_\delta(x_0) \cap X$$

$$\boxed{y = f(x)}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

Los máximos y mínimos relativos de f se denominan valores extremos.

Teorema

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ *y* $a \in X'_- \cap X'_+$. *Si* f *es diferenciable en* a *y* $f'(a) > 0$, *entonces existe* $\delta > 0$ *tal que si* $a - \delta < x < a$ *entonces* $f(x) < f(a)$ *y si* $a < x < a + \delta$ *entonces* $f(x) > f(a)$

Demostración.

En efecto, para $\varepsilon = f'(a) = d > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - d\right| < d$.

Luego, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$.

De manera análoga si X fuera un intervalo con extremos a, b y $f'(a) > 0$ entonces f tendrá un mínimo relativo en a. Si $f'(a) < 0$, entonces f tendrá un máximo relativo en a. $\square$

Observación

Si $x_0 \in]a, b[$ y $f'(x_0) \neq 0$ entonces f no toma un valor extremo en x_0.

Teorema (Fermat)

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f tiene un mínimo o máximo en $x_0 \in Int(I)$. Si f es diferenciable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$

Definición

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un punto crítico de f si $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe.

Ejemplo

Halle los puntos críticos de $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ si:

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 100$$

Calculamos f'

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 12x + 40 \\ &= 4(x^3 - 6x^2 + 3x + 10) = 4(x-2)(x+1)(x-5) \end{aligned}$$

Los puntos críticos de f son 2 y 5.

Observación

Observamos que no todos los valores extremos de una función se dan en puntos críticos, por ejemplo

- $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en 0, pero no es diferenciable en ese punto.
- $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ no tiene puntos críticos, pero por ser continua en un intervalo cerrado y acotado tiene máximo y mínimo.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ tiene punto crítico en 0 pero no tiene valores extremos.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ tiene punto crítico en 0 y también alcanza un valor extremo.

Sesión 01

1 Aplicaciones de la derivada
- Valores extremos de una función

2 Máximos y mínimos

3 Problemas de optimización

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Criterio de la primera derivada)

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función continua en* I *y derivable en el interior de* $I \setminus \{x_0\}$.

- *Si* $f'(x) > 0$ *para* $x < x_0$ *y* $f'(x) < 0$ *para* $x > x_0$, *entonces* f *tiene un máximo en* x_0.
- *Si* $f'(x) < 0$ *para* $x < x_0$ *y* $f'(x) > 0$ *para* $x > x_0$, *entonces* f *tiene un mínimo en* x_0.

Método para hallar mínimos y máximos absolutos

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Para encontrar el máximo o mínimo absoluto de f, evaluamos f en

- Los extremos del intervalo, a y b;
- los puntos críticos, es decir donde la derivada se anula; y
- los puntos donde f no es derivable.

El mayor de los valores calculados es el máximo absoluto, y el menor de los valores calculados es el mínimo absoluto.

Teorema (Criterio de la segunda derivada)

Si f tiene un punto crítico en x_0, y es dos veces diferenciable en x_0, entonces

- *Si $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un punto de mínimo local.*
- *Si $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un punto de máximo local.*

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

En el primer caso al ser x_0 punto crítico, entonces $f'(x_0) = 0$ y como la segunda derivada en x_0 es $f''(x_0) > 0$ se tiene que para un $\delta > 0$ pequeño se tiene $f'(x_0) > 0$ en los $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ y $f'(x_0) > 0$ los $x \in]x_0, x_0 + \delta[$.
Usando el criterio de los intervalos de monotonía (Criterio de la primera derivada), tenemos que x_0 es un punto de mínimo. $\square$

Observación

El teorema anterior no dice nada respecto de los puntos donde $f''(x) = 0$. Cuando x_0 es punto crítico y $f''(x_0) = 0$, no podemos afirmar nada sobre máximos o mínimos en x_0.

Ejemplo

Las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$, $h(x) = -x^4$.

Sesión 01

1 Aplicaciones de la derivada
- Valores extremos de una función

2 Máximos y mínimos

3 Problemas de optimización

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Pasos para la resolución de problemas de optimización

1. **Comprenda el problema** El primer paso consiste en leer detenidamente el problema hasta que se entienda claramente. Pregúntese: ¿qué es lo desconocido? ¿Cuáles son las cantidades conocidas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayoría de los problemas resulta útil dibujar un diagrama e identificar en este las cantidades dadas y las cantidades requeridas.

Pasos para la resolución de problemas de optimización

3. **Introduzca la notación** Asigne un símbolo a la cantidad que va a ser maximizada o minimizada (se le llamará Q por ahora). También seleccione símbolos $(a, b, c, \ldots, x, y)$ para otras cantidades desconocidas y etiquete el diagrama con estos símbolos. Puede ser provechoso utilizar iniciales como símbolos sugerentes, por ejemplo, A para el área, h para la altura, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.

Pasos para la resolución de problemas de optimización

5. Si Q se ha expresado como una función de más de una variable en el paso 4, utilice la información dada para encontrar relaciones (en forma de ecuaciones) entre estas variables. Utilice estas ecuaciones para eliminar todas, excepto una de las variables en la expresión para Q. Así Q se expresará en función de una variable x, es decir, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Utilice los métodos para encontrar los valores máximo o mínimo absolutos de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado.

Ejemplo

Un agricultor tiene $1\,200$ m de material y quiere construir una malla para cercar un campo rectangular que bordea un río recto, de modo que no necesita malla a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener el campo para encerrar el área más grande?

Resolución

La figura ilustra el caso general.

Se quiere maximizar el área A del rectángulo. Sea x y y el largo y el ancho, respectivamente, del rectángulo (en metros). Entonces, se quiere expresar A en términos de x y y:

$$A = xy \tag{1}$$

Resolución

Se utiliza la información dada de que la longitud total de la malla es 1200 m, esto es, $2x + y = 1\,200$.
Así, $y = 1200 - 2x$, reemplazando en (1) se tiene

$$A = x(1\,200 - 2x) \tag{2}$$
$$A = 1\,200x - 2x^2 \tag{3}$$

Observe que $x \geq 0$ y $x \leq 600$ (de lo contrario $A < 0$), por lo que la función que se desea maximizar es

$$A(x) = 1200x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 600$$

Resolución

La derivada es $A'(x) = 1\,200 - 4x$, por lo que para encontrar los números críticos se resuelve

$$1200 - 4x = 0$$

que da $x = 300$. El valor máximo de A se debe producir en este número crítico o en un punto final del intervalo. Ya que $A(0) = 0$, $A(300) = 180\,000$ y $A(600) = 0$.
Luego el valor máximo se da cuando $A(300) = 180\,000$.
Por tanto, el campo rectangular debe tener 300 m de largo y 600 m de ancho.

Sesión 01

1 Aplicaciones de la derivada
- Valores extremos de una función

2 Máximos y mínimos

3 Problemas de optimización

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 17, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

1 Derivadas de orden superior

2 Derivación implícita

3 Derivación logarítmica

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivadas de orden superior

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. La función derivada $f' : A_1 \to \mathbb{R}$, $A_1 \subset A$ puede también tener derivada en un punto x_0, la segunda derivada de f en x_0:

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

También se utilizan las notaciones

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = y'' = f''(x) = f^{(2)}(x),$$

donde $y = f(x)$.

Derivadas de orden superior

Notamos que la función correspondiente $f'' = (f')' : A_2 \to \mathbb{R}$, definida sobre $A_2 \subset A_1$, también podría ser derivable y definir de forma análoga la tercera derivada. Siguiendo esta idea, definimos la tercera derivada $f'''(x_0)$ de f en x_0 como la derivada de f'' en x_0

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0)$$

y la función correspondiente $f''' : A_3 \to \mathbb{R}, A_3 \subset A_2$,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = y''' = f'''(x) = f^{(3)}(x).$$

Derivadas de orden superior

Habiendo definido la derivada de orden $n-1$, $\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = f^{(n-1)}(x)$ como una función $f^{(n-1)} : A_{n-1} \to \mathbb{R}$, definimos la derivada de orden n en un punto x_0 como la derivada de esta,

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0),$$

y su función correspondiente $f^{(n)} : A_n \to \mathbb{R}$, donde $A_n \subset A_{n-1}$. Como antes,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Convenimos que $f^{(0)} = f$ de modo que $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$.

Ejemplo

Sea f una función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

Encuentre una formula para la derivada de orden n de la función f y demuestre por inducción matemática.

Resolución

Representamos $f(x) = (x+2)^{-1}$. Para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)(x+2)^{-2} \\ f''(x) &= (-1)(-2)(x+2)^{-3} \\ f'''(x) &= (-1)(-2)(-3)(x+2)^{-4} \end{aligned}$$

y deducimos entonces que en general

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)(-2)\cdots(-n)(x+2)^{-(n+1)} \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Resolución

Demostremos que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)} \tag{1}$$

por inducción sobre $n \geq 1$.

- Para $n = 1$, derivando directamente $f(x) = (x+2)^{-1}$,

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = (-1)(x+2)^{-2} = (-1)^1 1!(x+2)^{-(1+1)}$$

Resolución

- Supongamos que la ecuación (1) es válida para un n (hipótesis inductiva). Derivando

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= ((-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)})' \\ f^{(n+1)} &= (-1)^n n!((x+2)^{-(n+1)})' \\ f^{(n+1)} &= (-1)^n n!(-(n+1))(x+2)^{-(n+1)-1} \\ f^{(n+1)} &= (-1)^{n+1}(n+1)!(x+2)^{-((n+1)+1)} \end{aligned}$$

La igualdad $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!(x+2)^{-((n+1)+1)}$ significa que (1) vale para $n+1$ en lugar de n.
Por el principio de inducción la ecuación (1) vale para todo $n \geq 1$.

Sesión 02

1 Derivadas de orden superior

2 Derivación implícita

3 Derivación logarítmica

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivación implícita

Cada una de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5y &= -1 \\ x^2 + y^2 &= 1 \\ \cos(x+y) - 5x + y^3 + y &= 0 \end{aligned}$$

expresa una dependencia de la variable y respecto de x.
Para $3x^2 + 5y = -1$, tal dependencia puede ser expresada explícitamente mediante $y = \dfrac{-1+3x^2}{5}$, una ecuación de la forma $y = f(x)$.
Para $\cos(x+y) - 5x + y^3 + y = 0$ es imposible obtener una ecuación explícita de la forma $y = f(x)$.

Ecuación implícita

Una ecuación implícita entre las variables x e y es una ecuación de la forma

$$F(x, y) = 0 \ ,$$

de modo que $F(x, y) = 0$ si y solo si $y = f(x)$.
O también, la ecuación implícita $F(x, y) = 0$ define la función $y = f(x)$ si y solo si

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Ejemplo

En los ejemplos anteriores:

- $F(x, y) = 3x^2 + 5y + 1.$
- $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$
- $F(x, y) = \cos(x + y) - 5x + y^3 + y.$

Son las funciones implícitas de las ecuaciones mencionadas.

Observación

Una ecuación implícita define, de modo natural, el conjunto

$$C = \{(x, y) | F(x, y) = 0\}.$$

Este conjunto es el conjunto solución de la ecuación $F(x, y) = 0$.

- En el caso de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, C es el círculo unitario.
- En el caso en que la ecuación $F(x, y) = 0$ define la función $y = f(x)$, el conjunto solución C contiene la curva gráfico de la función f.

Observación

Genéricamente se tiene que C es una curva. Así, el siguiente interés es el calcular la recta tangente a la curva.
Si la curva es parte del gráfico de $y = f(x)$ para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en (x_0, y_0) es necesario calcular

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = y'(x_0) = f'(x_0).$$

Derivación implícita

Usualmente se piensa que es necesario conocer f, o despejar y, para después derivar. Sin embargo, como ya vimos eso no siempre es posible. Sin embargo, es posible calcular $\dfrac{dy}{dx}$ mediante un proceso denominado derivación implícita. Este proceso consiste en derivar ambos miembros de una ecuación con respecto a x, usando las reglas de derivación y luego resolviendo para $\dfrac{dy}{dx}$.

En la derivación implícita lo más se usa es la regla de la cadena, porque estaremos suponiendo que una variable (usualmente y) es función de la otra (usualmente x).

Ejemplo

Si $y = y(x)$, entonces

- Derivar y^4 (respecto de x) es:
$$\frac{d}{dx}(y^4) = \frac{d}{dy}(y^4)\frac{dy}{dx} = 4y^3y'.$$
- Derivar $(x^2 + y)$ es:
$$\frac{d}{dx}(x^2 + y) = 2x + \frac{d}{dy}(y)\frac{dy}{dx} = 2x + y'.$$
- Derivar x^5y^2 es:

¿Cómo sería derivar las expresiones anteriores respecto de y?

Ejemplo

Considere la ecuación $\cos(x+y) = y\,\mathrm{sen}(x)$.
Derivando respecto de x ambos miembros se obtiene:

$$-\,\mathrm{sen}(x+y)(1+y') = y'\,\mathrm{sen}(x) + y\cos(x)$$

Podemos despejar y'

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\cos(x) + \mathrm{sen}(x+y)}{\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x+y)}$$

Ejercicio

La curva $\mathscr{C}$ mostrada en la figura es el conjunto formado por todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x^3 - xy + y^2 = 4$.

Determine la ecuación de la recta tangente a $\mathscr{C}$ en el punto de intersección de $\mathscr{C}$ con el eje X.

Resolución

Comencemos por lo fácil. La intersección de la curva $\mathscr{C}$ con el eje X es el punto $(x_0, 0)$ que satisface la ecuación dada. Esto es, se debe cumplir

$$x_0^3 - x_0 \cdot 0 + 0^2 = 4$$

de donde se obtiene $x_0 = \sqrt[3]{4}$.

Veamos ahora la recta tangente

Queremos hallar al pendiente de la recta tangente. Vamos a suponer que la curva (cerca del punto $(x_0, 0)$) es la gráfica de una función $y(x)$. Derivando implícitamente $y(x)$.

$$3x^2 - y - xy' + 2yy' = 0$$

Resolución

Tenemos que $x_0 = \sqrt[3]{4}$ y $y(\sqrt[3]{4}) = 0$, de modo que la ecuación anterior queda

$$3(\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{4}y'(\sqrt[3]{4}) = 0$$

es decir $y'(\sqrt[3]{4}) = 3\sqrt[3]{4}$.
Entonces, la recta tangente a la curva en el punto $(\sqrt[3]{4}, 0)$ es

$$y = 3\sqrt[3]{4}(x - \sqrt[3]{4})$$

Ejercicio

La curva C es el conjunto formado por todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y^3 - 5x^2y = 2x^5$.

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva C en el punto $(1, -2)$.

b) Si la recta tangente a la curva C en el punto P es una recta horizontal, determine la coordenadas del punto P.

Ejercicio

La elipse $\mathscr{E}$ es el conjunto formado por los todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $\dfrac{(x+y)^2}{32} + \dfrac{(y-x)^2}{8} = 1$.

a) Calcule la razón de cambio $\dfrac{dx}{dy}$ cuando $x = 3$ y $y = 1$.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $(1, 3)$.

c) Encuentre todos los puntos de $\mathscr{E}$ donde la recta tangente es vertical.

Sesión 02

1 Derivadas de orden superior

2 Derivación implícita

3 Derivación logarítmica

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Derivada del logaritmo natural)

Sea $I \subset]0, +\infty[$. Si $f(x) = \ln(x)$, $\forall x \in I$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostración.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} &= \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} \\
\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} &= \ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right)^{1/x} \\
\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} &= \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}
\end{aligned}$$

Demostración.

Además, $\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h} = e.$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
(\ln(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}\\
(\ln(x))' &= \frac{1}{x}\ln(e)\\
(\ln(x))' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$\square$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivada de funciones hiperbólicas

- Si $f(x) = \text{senh}(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = \cosh(x)$
- Si $f(x) = \cosh(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = \text{senh}(x)$
- Si $f(x) = \tanh(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = \text{sech}^2(x)$
- Si $f(x) = \coth(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = -\text{csch}^2(x)$
- Si $f(x) = \text{sech}(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = -\tanh(x)\text{sech}(x)$
- Si $f(x) = \text{csch}(x), \forall x \in I$, entonces $f'(x) = -\coth(x)\text{csch}(x)$

Demostración.

En efecto, si $x \in I$

$$\operatorname{senh}'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

del mismo modo

$$\cosh'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\square$

Demostración.

Las demás derivadas de las demás funciones hiperbólicas pueden obtenerse aplicando las reglas de suma y producto de derivadas.

$$
\begin{aligned}
(\tanh x)' &= \frac{(\operatorname{senh} x)' \cosh x - (\cosh x)' \operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} \\
(\tanh x)' &= \frac{\cosh x \cosh x - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} x}{\cosh^2 x} \\
(\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2(x)}
\end{aligned}
$$

□

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(\coth x)' &= -\frac{(\tanh x)'}{\tanh^2 x} \\
(\coth x)' &= -\frac{1/\cosh^2 x}{\operatorname{senh}^2 x/\cosh^2 x} \\
(\coth x)' &= -\frac{1}{\operatorname{senh}^2(x)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Derivación logarítmica

La última derivada es la base de una técnica, la de **derivación logarítmica**:

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(f(x)\right)\right] = \frac{f'(x)}{f(x)} \ .$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Si $y = x^\alpha$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo (y $x \in \mathbb{R}$ o $x > 0$ según corresponda), entonces $\ln y = \alpha \ln x$, de donde, derivando

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

de donde

$$y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1} \ .$$

Concluimos que

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \ .$$

Ejemplo

Si $y = a^x$, siendo $a > 0,\ a \neq 1$ fijo, tenemos,

$$\ln y = x \ln a$$

luego,

$$\frac{y'}{y} = (x \ln a)' = \ln a$$

Finalmente,

$$y' = y \ln a = a^x \ln a$$

Esto lo escribimos como

$$(a^x)' = a^x \ln a \ .$$

Ejemplo

Si queremos encontrar la recta tangente L_T, en el punto $(2, 8)$, a la curva descrita por $y = x2^x$, en primer lugar calculamos la derivada:

$$y'(x) = x(\ln 2)2^x + 2^x$$

y encontramos la pendiente de la recta tangente:

$$y'(2) = (\ln 2)8 + 4 \quad \Longrightarrow \quad m = 8\ln 2 + 4$$

Finalmente obtenemos la ecuación de L_T:

$$L_T : \; y = (8\ln 2 + 4)(x - 2) + 8 \; .$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Método de derivación logarítmica

Para obtener la derivada de $y = f(x)$ mediante el método de derivación logarítmica, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Tomamos logaritmos naturales en ambos miembros de la expresión por derivar.
2. Utilizamos las propiedades de los logaritmos para reducir los productos y potencias presentes.
3. Derivados ambos miembros respecto de la variable independiente.
4. Despejamos la derivada y'.
5. Reemplazamos la expresión de y y simplificamos la expresión resultante.

Ejemplo

Para derivar $y = f(x) = \frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}}$.

1. $\ln y = \ln\left(\frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}}\right)$,
2. $\ln y = \ln(x^{\frac{1}{2}}(x+1)^5) - \ln(10(x^2-3)^{\frac{1}{3}})$,
   $= \frac{1}{2}\ln(x) + 5\ln(x+1) - \ln 10 - \frac{1}{3}\ln(x^2-3)$,
3. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2-3}$,
4. $y' = y\left(\frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{2x}{3(x^2-3)}\right)$,
5. $y' = \left(\frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}}\right)\left(\frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{2x}{3(x^2-3)}\right)$,

Sesión 02

1 Derivadas de orden superior

2 Derivación implícita

3 Derivación logarítmica

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 13, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Teorema de Rolle

2 Teorema del valor intermedio
- Teorema del valor medio generalizado

3 Corolarios del teorema del valor medio

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Rolle)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demostración.

Si f es constante en $[a, b]$, entonces para cada $x_0 \in]a, b[$ se cumple que $f'(x_0) = 0$.
Supongamos que f no es constante en $[a, b]$. Como f es continua en $[a, b]$, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo en $[a, b]$.
Supongamos que f alcanza su valor mínimo en x_1 y su valor máximo en x_2.

Demostración.

Luego, uno de ellos debe estar en $]a, b[$, pues si ambos estuvieran en el conjunto $\{a, b\}$ de la condición $f(a) = f(b)$ se tendría que f es constante.

Supongamos que $x_1 \in]a, b[$. Luego, se tiene $f(x_1) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$ y $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0, \forall x \in [a, x_1[$ y como f es derivable en x_1, entonces $\lim\limits_{x \to x_1^-} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0$ lo que implica que $f'_-(x_1) = f'(x_1) \leq 0$.

Demostración.

De la misma forma $\forall x \in]x_1, b]$ se tiene $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0$ y como f es derivable en x_1, entonces $\lim\limits_{x \to x_1^+} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0$ lo que implica que $f'_+(x_1) = f'(x_1) \geq 0$. Así, se tiene que $f'(x_1) = 0$.
Si $x_2 \in]a, b[$, la prueba es similar. $\square$

Ejemplo

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1. \\ 0 & , x = 1. \end{cases}$$

Es claro que $f(0) = f(1)$, f es derivable en $]0,1[$, pero f no es continua en $[0,1]$ (f no es continua en 1).
Se puede ver que $f'(x) = 1$, para cada $]0,1[$, y por lo tanto, f' nunca es cero en $]0,1[$. Esto sucede pues f no es continua en $[0.1]$.

Ejemplo

Sea $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, la función definida por $g(x) = |x|$, $\forall x \in [-1, 1]$.
Es claro que $g(-1) = g(1) = 1$, g es continua en $[-1, 1]$ y que g no es derivable en $]-1, 1[$ (g no es derivable en 0). Se puede ver que $g'(x) = -1$, si $x < 0$ y $g'(x) = 1$, si $x > 0$.
Así, g' nunca es cero en $]-1, 1[$. La causa de esto es que g no es derivable en 0.

Ejemplo

Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$.
Es claro que $f(-1) = f(1) = 0$, f es continua en $[-1, 1]$ y f es derivable en $]-1, 1[$ con $f'(x) = -\dfrac{x}{1 - x^2}, \forall x \in]-1, 1[$.
Como f satisface las condiciones del teorema de Rolle, existe $x_0 \in]-1, 1[$ tal que $f'(x_0) = 0$.
De la ecuación anterior, se obtiene que $x_0 = 0$.

Ejercicio

Sean f, g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, demuestre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

Sesión 01

1 Teorema de Rolle

2 Teorema del valor intermedio
- Teorema del valor medio generalizado

3 Corolarios del teorema del valor medio

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Valor medio de Lagrange)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Luego existe $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración.

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad \forall x \in [a, b].$$

Veamos que g satisface las condiciones del teorema de Rolle $g(a) = 0 = g(b)$. Es claro que g es continua en $[a, b]$, g es derivable en $]a, b[$ y $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Por el teorema de Rolle, existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $g'(x_0) = 0$; es decir, $f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

Por lo tanto, $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $\square$

Interpretación geométrica del teorema del valor medio

Si f es una función con gráfica continua y tiene recta tangente (no vertical) en todos los puntos $P(x, f(x))$ con abscisas están en $x_0 \in]a, b[$, entonces existe $x_0 \in]a, b[$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es paralela al segmento que une los puntos $P_1(a, f(a))$ y $P_2(b, f(b))$.

$y = f(x)$

Ejemplo

Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x^2 + 1}{2} & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

¿Se puede aplicar el teorema del valor medio a f? Calcule, si fuera el caso, el valor de x que cumpla con la conclusión del teorema.

Resolución

La función f es continua en $[0,2]$ y es derivable en $]0,2[$, donde

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \\ x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

La derivada $f'(1)$ se calculo por definición. Luego, se cumplen las condiciones del Teorema del valor medio en virtud de lo cual existe $x_0 \in]0,2[$ tal que $f'(x_0) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{\frac{5}{2}-0}{2} = \dfrac{5}{4}$.

En este caso se obtiene $x_0 = \dfrac{5}{4}$.

Ejercicio

Sea $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = L$, entonces demuestre que $L = f'(0)$.

Ejercicio

Un automovilista que viaja de Lima a Cañete hace 1 hora con 50 minutos. La distancia entre estas ciudades es de 240 kilómetros. Si el límite de velocidad es de 110 km/hr, ¿debe o no ser multado el conductor?

Teorema (Valor medio generalizado)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones reales tales que:

- f y g son continuas en $[a, b]$.
- f y g son derivables en $]a, b[$.
- $g(a) \neq (b)$.
- $g'(x) \neq 0$ para todo $x]a, b[$.

Luego, existe $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Demostración.

Sea $h(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(a)),\ \forall x \in [a,b]$$

La función h es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, donde

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x),\ \forall x \in]a,b[$$

Demostración.

Luego, por el Teorema de Rolle existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $h'(x_0) = 0$, esto es

$$\begin{aligned} f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x_0) &= 0 \\ \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} &= \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \end{aligned}$$

$\square$

Sesión 01

1 Teorema de Rolle

2 Teorema del valor intermedio
- Teorema del valor medio generalizado

3 Corolarios del teorema del valor medio

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Corolario

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in I$, $f'(x) = 0$. Luego, f es constante en I.

Demostración.

Sean $a, x \in I$ con $[a, x] \subset I$. Como para cada $t \in I, f'(t) = 0$ y $[a, x] \subset I$, entonces $f'(t) = 0$, para cada $t \in [a, x]$.
Esto implica que f es continua en $[a, x]$ y derivable en $]a, x[$.
Por el teorema del valor medio existe $t_0 \in]a, x[$ tal que

$$f'(t_0) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0,$$

lo cual implica que $f(x) - f(a) = 0$, es decir, $f(x) = f(a)$. $\square$

Corolario

Sea f y g funciones derivables en un intervalo I tales que para cada $x \in I$, $f'(x) = g'(x)$. Luego, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + C, \quad \forall x \in I.$$

Es decir f y g se diferencian por una constante.

Demostración.

Sea $h : I \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad \forall x \in I.$$

Es claro que para cada $x \in I, h'(x) = 0$.
Por el corolario anterior existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = C, \quad \forall x \in I$, lo que implica que

$$f(x) = g(x) + C, \quad \forall x \in I.$$

$\square$

Sesión 01

1 Teorema de Rolle

2 Teorema del valor intermedio
- Teorema del valor medio generalizado

3 Corolarios del teorema del valor medio

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 24, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

1 Cálculo de derivadas de funciones elementales

2 Álgebra de funciones derivables

3 Un límite especial

4 Regla de la cadena

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Un procedimiento incorrecto es utilizar un proceso de límite con las derivadas calculadas en intervalos abiertos y garantizar que la derivada existe si el límite de la derivada existe, es decir

$$\text{"} \lim_{x \to a^+} f'(x) = L = \lim_{x \to a^-} f'(x) \Longrightarrow f'(a) = L \text{"}$$

Ejemplo

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 1, & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{x^2}{2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

derivamos en intervalos abiertos:

$$f'(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ -x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Luego, $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$. Sin embargo, f no es continua en $x = 0$, es decir $f'(0)$ no existe.

Sesión 02

1 Cálculo de derivadas de funciones elementales

2 Álgebra de funciones derivables

3 Un límite especial

4 Regla de la cadena

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Cálculo de derivadas

- Si $f(x) = c$, donde c es una constante, entonces $f'(x) = 0$.
- Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$.
- Si $f(x) = cx$, donde c es una constante, entonces $f'(x) = c$.
- Si $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.
- Si $f(x) = x^{1/n},\ n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
- Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$.
- Si $f(x) = \cos(x)$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.
- Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2},\ x \neq= 0$.

Sesión 02

1 Cálculo de derivadas de funciones elementales

2 Álgebra de funciones derivables

3 Un límite especial

4 Regla de la cadena

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Derivada de suma, resta, producto y cociente)

Si f y g son funciones derivables en x_0, entonces:

- La suma y resta es derivable en x_0:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

- El producto es derivable en x_0:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

- Si, además, $g(x_0) \neq 0$, entonces el producto es derivable en x_0:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Ejemplo

Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$h(x) = \sqrt[3]{x}\,\mathrm{sen}(x),\ x \in \mathbb{R}$$

Determine $h'(x)$.

Derivadas de las funciones trigonométricas

- $\tan'(x) = \sec^2(x)$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots\}$
- $\cot'(x) = -\csc^2(x)$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$
- $\sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots\}$
- $\csc'(x) = -\csc(x)\cot(x)$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$

Sesión 02

1 Cálculo de derivadas de funciones elementales

2 Álgebra de funciones derivables

3 Un límite especial

4 Regla de la cadena

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Un límite especial

El número e es un número irracional y es uno de los números más importantes en matemática. Sus primeras cifras son:

$$2.718281828459045235\ldots$$

Se le suele llamar el número de Euler por Leonhard Euler.

El número e es un real que satisface:

- $e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$,
- $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1$,
- $\ln(e) = 1$.

Teorema

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = e^x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
- $f : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$, *para todo* $x \in \langle 0, +\infty \rangle$.

Ejemplo

Dada la regla de correspondencia de la función φ, donde

$$\varphi(x) = \frac{x^3 e^x - \ln(x)}{\sqrt{x} + 5\cos(x)}.$$

¿Es derivable en π? ¿Cuál es la derivada en caso exista?

Sesión 02

1 Cálculo de derivadas de funciones elementales

2 Álgebra de funciones derivables

3 Un límite especial

4 Regla de la cadena

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Regla de la cadena)

- f es derivabe en a
- f es derivabe en $f(a)$

$$\Longrightarrow \quad (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Teorema (Regla de la cadena)

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $f : B \to \mathbb{R}$ funciones para las cuales la composición $g \circ f$ está bien definida, es decir $f(A) \subset B$. Supongamos que f es derivable en $x_0 \in A \cap A'$ y g es derivable en $u_0 = f(x_0) \in B \cap B'$. Entonces, la composición $g \circ f$ es derivable en x_0, y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Demostración.

Supongamos que para $x \neq x_0$, se cumple que $f(x) \neq f(x_0)$. Esto excluye por ejemplo el caso en que f es constante. Escribimos $u = f(x)$ y $u_0 = f(x_0)$, por la continuidad de f, tenemos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Luego, para $h = g \circ f$ y $x \neq x_0$.

$$\begin{aligned}
\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Demostración.

de donde

$$
\begin{aligned}
h'(x_0) &= lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\\
h'(x_0) &= \lim_{u\to u_0}\frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
h'(x_0) &= g'(u_0)\cdot f'(x_0)\\
h'(x_0) &= g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)
\end{aligned}
$$

Aquí usamos el teorema de composición de límites. □

Ejemplo

Sea $\varphi(x) = \ln(x^2 - 9)$. Determine la recta tangente a la gráfica de φ en $(4, \ln 7)$.

Ejemplo

Con la notación de Leibniz, siendo
$y = f(u), u = u(x), y(x) = f(u(x))$, la regla se escribe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Ejemplo: La derivada de

$$y = f(x) = \cos(x^2 + 1)$$

es

$$y' = f'(x) = -\operatorname{sen}(x^2 + 1) \cdot (2x).$$

Considerando $u = x^2 + 1$, se tiene que $y = \cos(u)$ y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\operatorname{sen}(u) \cdot (2x) = -\operatorname{sen}(x^2 + 1) \cdot (2x).$$

La regla de la cadena se puede componer varias veces. Para

$$y = \underbrace{h(g(\underbrace{f(x)}_{u}))}_{v=k(x)} = h(g(u)) = h(v)$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dv} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o

$$\begin{aligned} y' &= h'(k(x)) \cdot k'(x), \\ &= h'(k(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x), \\ &= h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Ejemplo

Ejemplo: ¿La función $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2}$ es derivable en 0?

Resolución:

- x^2 es derivable en 0.
- ¿$\sqrt[3]{\cdot}$ es derivable en 0^2 ? **No**.

Eso quiere decir que no podemos aplicar la regla de la cadena. Para responder,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

entonces φ no es derivable en 0

Ejemplo

Ejemplo: ¿La función $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^4}$ es derivable en 0?
Resolución:

- x^4 es derivable en 0.
- ¿$\sqrt[3]{\cdot}$ es derivable en 0^4 ? **No**.

Eso quiere decir que no podemos aplicar la regla de la cadena.
Para responder,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

entonces $\varphi'(0) = 0$

Que no podamos aplicar la regla de la cadena **no quiere decir** que la composición no sea derivable.

Ejemplo

Halle y', si $y = \sqrt{[f(x^2)]^5 + [g(x)]^4}$.

Sesión 02

1 Cálculo de derivadas de funciones elementales

2 Álgebra de funciones derivables

3 Un límite especial

4 Regla de la cadena

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart Newblock Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e Newblock Cengage Learning
- Jon Rogawski Newblock Cálculo - Una variable. 2da ed. Newblock W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards Newblock Cálculo, Tomo I. 10ma ed. Newblock Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 24, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Recta tangente a una curva

2 La Derivada
- Recta tangente y normal

3 La función Derivada
- Notación de Derivada

4 Derivadas laterales

5 Derivación en intervalos

6 Relación entre continuidad y derivación

7 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Recta tangente a una curva

Se tiene una curva $\mathscr{C}$, el cual es la gráfica de una función $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $D = \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}$.
Sean $a, (a+h) \in D,\ h \neq 0$, se tiene que los puntos $A(a, f(a))$ y $P(a+h, f(a+h))$ pertenecen a la curva $\mathscr{C}$. Se quiere determinar la recta tangente L_T a la curva $\mathscr{C}$ en el punto $A(a, f(a))$.

Recta tangente a la curva

Para esto, faltaría conocer la pendiente de L_T. Una manera más prometedora de lograrlo es empezando con **secantes**.
De este modo, se toma la recta secante L_S determinada por los puntos $A(a, f(a))$ y $P(a+h, f(a+h))$.

Recta tangente a la curva

La pendiente de L_S esta dada por: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Cuando $h \to 0$, la tangente en $(a, f(a))$ parece ser el límite, en algún sentido de estas secantes.

Recta tangente a la curva

Hasta aquí no hemos hablado nunca de límite de rectas, pero podemos hablar del límite de sus pendientes. La pendiente de L_T en $(a, f(a))$ debería ser

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que este límite exista.

Sesión 01

1 Recta tangente a una curva

2 La Derivada
- Recta tangente y normal

3 La función Derivada
- Notación de Derivada

4 Derivadas laterales

5 Derivación en intervalos

6 Relación entre continuidad y derivación

7 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Derivada)

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $a \in D' \cap D$. Decimos que f es derivable en a si el siguiente límite existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

El número obtenido como límite se llama **derivada de f en a** y se denota como $f'(a)$.

Observación

El límite en la definición es equivalente a:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Definición

Un punto a es interior a D si $a \in D$ y existe un intervalo abierto I tal que $a \in I \subset D$.

Definición

Cuando $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto a interior de D, entonces

- **La recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ **es la recta**
$$L_T \ : \ y = f(a) + f'(a)(x - a) \ .$$
- **La recta normal** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ **es la recta**
$$L_N \ : \ y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a) \ .$$

Ejemplo

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Determine las rectas tangente y normal a la gráfica de f en $x = 1$.

Resolución

Determinemos el punto sobre la curva para $x = 1$, como $f(1) = 1$, entonces el punto sobre la curva es $(1, 1)$. Para determinar la pendiente de la recta tangente calculamos el siguiente límite,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} (h+2) = 2$$

esto es $f'(1) = 2$. Así,

- Recta tangente es $L_T : y - 1 = 2(x - 1)$.
- Recta normal es $L_N : y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 1)$.

Definición

Decimos que f es una función derivable si f es derivable en cada punto de su dominio.

Ejemplo

Las funciones constante, lineal, sen y $\cos$ son derivables. Las potencias también.
Veamos el caso $f(x) = x^2$,

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ah+h^2}{h} \\
f'(a) &= \lim_{h\to 0} (2a+h) \\
f'(a) &= 2a
\end{aligned}$$

Ejemplo

Veamos a modo de ejemplo el modo alternativo

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} \\
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} \\
f'(a) &= 2a
\end{aligned}
$$

Observación

- En la definición a puede ser un número concreto o un elemento cualquiera del dominio de f.
- No vamos a considerar el caso en el que el límite anterior existiera y sea infinito, en este caso diremos que la función no es diferenciable en a.

Ejemplo

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 5$. Calcule $f'(2)$.

Ejemplo

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Determine $f'(x)$.

Ejercicio

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demuestre que existe $f'(0)$ e indique su valor.

Ejercicio

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left| x^5 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{x^2+1}\right)\right|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Utilice la definición de la derivada de una función para calcular el valor de $f'(0)$ si es que existe.

Ejercicio

Sean $c \in \mathbb{R}$ y f una función derivable sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = f(x + c)$$

Utilice la definición de la derivada de una función y demuestre que $g'(x) = f'(x + c)$. Además, demuestre que si $h(x) = f(cx)$, entonces $h'(x) = cf'(x)$.

Sesión 01

1 Recta tangente a una curva

2 La Derivada
- Recta tangente y normal

3 La función Derivada
- Notación de Derivada

4 Derivadas laterales

5 Derivación en intervalos

6 Relación entre continuidad y derivación

7 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

La derivada de la función f con respecto a la variable x, es la función f', cuya regla de correspondencia es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista.

Observación

$\mathrm{Dom}(f') \subset \mathrm{Dom}(f)$, de hecho

$$\mathrm{Dom}(f') = \left\{ x \in \mathrm{Dom}(f) \colon \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe} \right\}$$

Notaciones

$y = f(x)$	**Función derivada**			**Derivada en a**	
Lagrange	$f'(x)$	y'		$f'(a)$	
Leibniz	$\dfrac{df(x)}{dx}$	$\dfrac{df}{dx}$	$\dfrac{dy}{dx}$	$\left.\dfrac{df}{dx}\right\|_{x=a}$	$\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=a}$
Cauchy	Dy	$Df(x)$	$D_x f(x)$	$\left.Dy\right\|_{x=a}$	
Newton	$\dot{y}$				

Ejemplo

Sea la función f dada por $f(x) = x^2 + 5$. Determine la función derivada de f.

Resolución

De la definición de la derivada de una función, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+5-(x^2+5)}{h} \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función derivada de f esta dada por $f'(x) = 2x$. Además, se tiene que $\mathrm{Dom}(f') = \mathrm{Dom}(f)$.

Sesión 01

1 Recta tangente a una curva

2 La Derivada
- Recta tangente y normal

3 La función Derivada
- Notación de Derivada

4 Derivadas laterales

5 Derivación en intervalos

6 Relación entre continuidad y derivación

7 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Derivada lateral derecha)

Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si $x_0 \in A'_+ \cap A$, la derivada lateral derecha de f en x_0 como

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

o en forma equivalente

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cuando el límite existe.

Definición (Derivada lateral izquierda)

Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si $x_0 \in A'_- \cap A$, la derivada lateral derecha de f en x_0 como

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

o en forma equivalente

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cuando el límite existe.

Función derivable

Solo en el caso en que ambas derivadas laterales existan y sean iguales, la función sera derivable en x_0 es decir

$$f'(x_0) = f'_(x_0) = f'_+(x_0)$$

Ejemplo

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcule las derivadas laterales en $x = 1$.

Ejemplo

Sea f la función definida por $f(x) = |x - 2|$. Calcule $f'(2)$.

Ejemplo

Sea f la función definida por $f(x) = |x| + |x+1|$. Analizar la derivada de f.

Observación

En muchos casos las derivadas laterales no coinciden y la curva presenta "puntos angulosos". Por el contrario, en aquellos puntos de la gráfica donde las derivadas laterales coinciden se dice que la curva es "suave".

Sesión 01

1 Recta tangente a una curva

2 La Derivada
- Recta tangente y normal

3 La función Derivada
- Notación de Derivada

4 Derivadas laterales

5 Derivación en intervalos

6 Relación entre continuidad y derivación

7 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Sea f una función. Se dice que:

- f es derivable en $]a,b[$ si para cada $x \in]a,b[$ existe $f'(x)$.
- f es derivable en $[a,b[$ si f es derivable en $x \in]a,b[$ y existe $f'_+(a)$.
- f es derivable en $]a,b]$ si f es derivable en $x \in]a,b[$ y existe $f'_-(b)$.
- f es derivable en $[a,b]$ si f es derivable en $x \in]a,b[$ y existen $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$.

Ejemplo

En la gráfica de la función f se puede observar que f es derivable en $]a, b[$ y existen $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$.

Ejemplo

Determine los intervalos donde es derivable la función f según la gráfica.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Recta tangente a una curva

2 La Derivada
- Recta tangente y normal

3 La función Derivada
- Notación de Derivada

4 Derivadas laterales

5 Derivación en intervalos

6 Relación entre continuidad y derivación

7 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A' \cap A$. En estas condiciones, si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Demostración.

Si f es una función derivable en x_0, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right)\\
\lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0)+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\
\lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f es continua en x_0. $\square$

Corolario

Si f no es continua en x_0, entonces f no es derivable en x_0.

Observación

La figura adjunta describe dos situaciones comunes en la que una función f que es continua en x_0 puede dejar de ser derivable en x_0. Estas situaciones puede ser descritas informalmente como

a) Puntos con pico

b) Puntos de rectas tangente vertical

(a)

(b)

Ejemplo

El gráfico de $y = |x|$ muestra que hay un pico en $x = 0$, y eso implica que $f(x) = |x|$ no es derivable en aquel punto.

a) Demuestre que $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

b) Encuentre una formula para $f'(x)$.

Resolución

a) Es fácil ver que $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0) = 1$, como estos límites son diferentes, entonces no existe $f'(0)$.

Resolución

b) Una formula para la derivada de $f(x) = |x|$ se obtiene así:

- Si $x > 0$, entonces $f(x) = x$ y $f'(x) = 1$
- Si $x < 0$, entonces $f(x) = -x$ y $f'(x) = -1$

Luego, $f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Observe que f' no es continua en $x = 0$.

Sesión 01

1 Recta tangente a una curva

2 La Derivada
- Recta tangente y normal

3 La función Derivada
- Notación de Derivada

4 Derivadas laterales

5 Derivación en intervalos

6 Relación entre continuidad y derivación

7 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 23, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

1 Conjuntos acotados
- Supremo
- Ínfimo

2 Funciones acotadas

3 Teoremas de continuidad
- Aplicaciones

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

1 Conjuntos acotados
- Supremo
- Ínfimo

2 Funciones acotadas

3 Teoremas de continuidad
- Aplicaciones

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Conjunto acotado superiormente

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es **acotado superiormente** si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A,\ x \leq x_0$.
Un x_0 que satisface lo anterior se denomina **cota superior** del conjunto A.
Si la cota superior x_0 está en A, i.e. $x_0 \in A$, entonces decimos que x_0 es el máximo del conjunto A. Denotamos en este caso $x_0 = \max A$.

Ejemplo

- Para el conjunto $A = [0, 1]$, 2 es una cota superior, mientras que 1 es el máximo de A.
- El conjunto $B = [0, +\infty[$ no es acotado superiormente.
- El conjunto $C = [0, 1[$ es acotado superiormente por 1, pero no posee máximo.

Conjunto acotado inferiormente

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es **acotado inferiormente** si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A,\ x \geq x_0$.
Un x_0 que satisface lo anterior se denomina **cota inferior** del conjunto A.
Si la cota inferior x_0 está en A, i.e. $x_0 \in A$, entonces decimos que x_0 es el mínimo del conjunto A. Denotamos en este caso $x_0 = \min A$.

Ejemplo

- Para el conjunto $A = [-1, 0]$, -2 es una cota inferior, mientras que -1 es el mínimo de A.
- El conjunto $B =]-\infty, 0]$ no es acotado inferiormente.
- El conjunto $C =]-1, 0]$ es acotado inferiormente por -1, pero no posee mínimo.

Conjunto acotado

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es **acotado** si lo es superior e inferior a la vez.

Definición (Supremo)

Dado $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente, denominamos **supremo** de A a la menor cota superior de A, y la denotamos por $\sup A$, si esta existe.

Observación

Si un conjunto no vacío A posee un máximo, entonces este máximo es la menor cota superior del conjunto.
Es decir, si un conjunto no vacío A posee máximo, resulta $\sup A = \max A$.

Axioma del Supremo

Todo conjunto no vacío en $\mathbb{R}$, acotado superiormente, posee supremo en $\mathbb{R}$.

Teorema

Sea A no vacío y $c \in \mathbb{R}$. Se cumple que $c = \sup A$ si y solo si

- $\forall x \in A,\ x \leq c$ (c es cota superior de A);
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A;\ c - \varepsilon < x_0$ (ningún número menor que c es cota superior de A).

Definición (Ínfimo)

Dado $A \subset \mathbb{R}$ acotado inferiormente, denominamos **ínfimo** de A a la mayor cota inferior de A, y la denotamos por $\inf A$, si esta existe.

Observación

Si un conjunto no vacío A posee un mínimo, entonces este mínimo es la mayor cota inferior del conjunto.
Es decir, si un conjunto no vacío A posee mínimo, resulta $\inf A = \min A$.

Teorema

Sea A no vacío y $d \in \mathbb{R}$. Se cumple que $d = \inf A$ si y solo si

- $\forall x \in A,\ x \geq d$ (d es cota inferior de A);
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in A;\ x_0 < d + \varepsilon$ (ningún número mayor que d es cota inferior de A).

Teorema

Todo conjunto no vacío A, acotado inferiormente, posee ínfimo.

Demostración.

No es difícil mostrar que

$$\inf A = -\sup B$$

donde

$$B = -A = \{-x : x \in A\}.$$

$\square$

Sesión 02

1 Conjuntos acotados
- Supremo
- Ínfimo

2 Funciones acotadas

3 Teoremas de continuidad
- Aplicaciones

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función acotada superiormente)

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **acotada superiormente** en $B \subset A$ si el conjunto

$$f(B) = \{f(x) : x \in B\}$$

es acotada superiormente, lo que significa que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in B, f(x) \leq M$$

Definición (Función acotada inferiormente)

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **acotada inferiormente** en $B \subset A$ si el conjunto

$$f(B) = \{f(x) : x \in B\}$$

es acotada inferiormente, lo que significa que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in B, f(x) \geq M$$

Definición (Función acotada)

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es **acotada** en $B \subset A$ si lo es superior e inferiormente en B.
Decimos que la función f es **acotada** si lo es en su dominio A.

Sesión 02

1 Conjuntos acotados
- Supremo
- Ínfimo

2 Funciones acotadas

3 Teoremas de continuidad
- Aplicaciones

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

Toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada.

Demostración.

Probemos que f es acotada superiormente. Sea

$$X = \{x \in [a, b] : f \text{ es acotada en } [a, x]\}.$$

Se tiene que $X \neq \emptyset$ pues $a \in X$, y es claro que X está acotado superiormente por b.
Probaremos que $b \in X$. Sea $c = \sup X$.
Si $c < b$, siendo f continua en c, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [a, b], |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < 1$$

Demostración.

Tome δ más pequeño, de ser necesario, para que $c+\delta<b$.
Tome $x_0 \in X$ tal que $c-\delta<x_0\leq c$. Luego existe $M\in\mathbb{R}$ tal que

- $\forall x\in[a,x_0], f(x)\leq M$;
- $\forall x\in]c-\delta,c+\delta[, f(x)<f(c)+1$.

Por lo tanto

$$\forall x\in[a,c+\delta/2], \text{ se tiene } f(x)\leq \max\{M, f(x)+1\},$$

es decir $c+\delta/2\in X$. Pero esto contradice que $c=\sup X$.
De modo que debería ser $c=b$.

Demostración.

Usando un argumento similar al anterior, tenemos que al ser f continua en b existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [a, b], |x - b| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(b)| < 1$$

Otra vez tomamos $x_0 \in X$ tal que $b - \delta < x_0 \leq b$. Luego existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

- $\forall x \in [a, x_0], f(x) \leq M$;
- $\forall x \in]b - \delta, b], f(x) < f(b) + 1$.

Por lo tanto, $\forall x \in [a, b]$, se tiene $f(x) \leq \max\{M, f(c) + 1\}$, es decir $b \in X$. $\square$

Definición (Máximo de una función)

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ posee un **máximo** en $B \subset A$ si el conjunto

$$f(B) = \{f(x) : x \in B\}$$

posee un máximo, lo que significa que existe $x_0 \in B$ tal que

$$\forall x \in B, f(x) \leq f(x_0)$$

El número $f(x_0)$ es el **valor máximo** de f en B.

Definición (Mínimo de una función)

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ posee un **mínimo** en $B \subset A$ si el conjunto

$$f(B) = \{f(x) : x \in B\}$$

posee un mínimo, lo que significa que existe $x_0 \in B$ tal que

$$\forall x \in B, f(x) \geq f(x_0)$$

El número $f(x_0)$ es el **valor mínimo** de f en B.

Teorema (Weierstrass)

Toda función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ posee un máximo y un mínimo en $[a, b]$.

Demostración.

Sea $M = \sup f([a,b]) = \sup\{f(x) \colon x \in [a,b]\}$.
Por reducción al absurdo. Si f nunca toma el valor M, entonces la función $g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ es una función continua en $[a,b]$ y $g(x) > 0$.
Del teorema anterior, g es acotada y existe $C = \sup g([a,b]) > 0$.
Luego, para todo $x \in [a,b]$, $\dfrac{1}{M - f(x)} \leq C \Rightarrow f(x) \leq M - \dfrac{1}{C}$.
Esto implica que $M - \dfrac{1}{C}$ es una cota superior y debería ser mayor o igual a M, lo cual es absurdo.
Por lo tanto, existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $M = f(x_0)$. $\square$

Teorema (Valor intermedio)

Si la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < c < f(b)$ (o $f(b) < c < f(a)$), entonces existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = c$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Lema

Sea $A \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ continua en x_0 y $k \in \mathbb{R}$.

- Si $f(x_0) < K$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) < K \ .$$

- Si $f(x_0) > K$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) > K \ .$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración. (Teorema del valor intermedio)

Sea c tal que $f(a) < c < f(b)$. Defina

$$X = \{x \in [a, b] : f(x) < c\}.$$

Se tiene que $a \in X$ y X está acotado superiormente por b. Sea $x_0 = \sup X$.

- Por el resultado anterior, existe $\delta > 0$ tal que $[a, a + \delta[\subset X$, de modo que $x_0 > a$.
- Por lo mismo, existe $\delta > 0$ tal que $]b - \delta, b] \cap X = \emptyset$, de modo que $x_0 < b$.

Demostración.

- Ahora que $a < x_0 < b$, si $f(x_0) < c$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset X$, lo que hace que $x_0 + \delta/2 \in X$, que contradice que $x_0 = \sup X$.
- Si $f(x_0) > c$, del mismo modo existe $\delta > 0$ de modo que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap X = \emptyset$, lo que nuevamente contradice la definición de supremo.

Concluimos que $f(x_0) = c$. $\square$

Teorema (Bolzano (Teorema del cero))

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Observación

1. Si una función f es continua en $[a, b]$ y, por ejemplo, $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces para pasar del punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ la gráfica de f debe, **necesariamente** cortar al eje X.

Observación

2. Para una función f discontinua en un intervalo el hecho de que tenga signo distinto en los extremos del mismo no permite asegurar nada respecto de la existencia de ceros.

Observación

3. Este teorema facilita la detección de ceros de una función y resulta particularmente útil cuando las fórmulas o métodos de cálculo que conocemos a este efecto (resolverte de la ecuación de 2do grado, Ruffini para ceros de polinomios, etc), no pueden ser aplicadas.

Ejemplo

Demuestre que para cada $d \in]3,5[$ existe $c \in]0,1[$ tal que

$$c^8 + c^5 - c^4 + c + 3 = d$$

Teorema (Punto fijo)

Si $f : [a, b] \to [a, b]$ *es continua, entonces existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $f(c) = c$.

Ejemplo

Demuestre en cada item que existe un $x > 0$ para el cual se cumple la igualdad.

a) $\ln(3 - x) + \sqrt{x} = 1 + x$.

b) $5x^3 + \cos x = 2$.

Teorema

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *y* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones continuas. Si* $f(a) < g(a)$ *y* $g(b) < f(b)$ *(intercambian de lugar en los extremos), entonces existe (al menos) un* $c \in]a, b[$ *donde* $f(c) = g(c)$.

Ejemplo

Demuestre que existe un numero real x cumpliendo con

$$\tan(x) - \operatorname{sen}(x) = 1 - 4x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo

La función $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[-\{0\} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^3}$$

a) Defina una extensión continua $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ de la función f.

b) ¿Es posible definir una extensión continua $h : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ de la función f?

Ejemplo

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es dada por

$$f(x) = \begin{cases} \beta x - 2, & \text{si } x \leq 1, \\ \dfrac{\alpha x^2 - 2}{x - 3}, & \text{si } 1 < x < 2, \\ \beta\sqrt{x-1} - 6, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

halle los valores de α y β para que f sea continua.

Sesión 02

1 Conjuntos acotados
- Supremo
- Ínfimo

2 Funciones acotadas

3 Teoremas de continuidad
- Aplicaciones

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 17, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Continuidad
- Continuidad sobre un conjunto
- Continuidad lateral

2 Funciones discontinuas
- Tipos de discontinuidad

3 Ejercicios

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Extensión y restricción de una función

Vamos a establecer lo que significan las siguientes afirmaciones:

- g es una extensión de f. En ese caso lo que se tiene es que la función g es el resultado de añadir puntos al dominio de f y definiendo su valor de alguna manera.
- f es una restricción de g. En ese caso lo que se tiene es que la función f resulta de retirar puntos al dominio de g y manteniendo la regla de correspondencia.

En ambos casos: $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Ejemplo

Sean las funciones $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 3, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Luego, g es un extensión de f.

Definición (Continuidad)

Decimos que $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in D$ si dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera existe un $\delta > 0$ de modo que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x \in D \quad \text{con} \quad |x - a| < \delta \ .$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $a \in D' \cap D$. Se tiene que f es continua en a, si y solo si,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Observación:

En el caso en que $a \in D$ pero $a \notin D'$ la función es continua en a.

Definición

Decimos que $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua cuando f es continua en todos los puntos $a \in X$ (i.e. cuando es continua en todos los puntos de su dominio).

Definición

Decimos que $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en $A \subset X$ si f es continua en todos los puntos $a \in A$.

Teorema

Las siguientes funciones son continuas.

- Polinomios.
- Las funciones sen y $\cos$ son continuas en $\mathbb{R}$.
- La función definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en $]0, +\infty[$
- La función $\exp$ es continua en $\mathbb{R}$.
- La función $\ln$ es continua en $]0, +\infty[$
- La función $[\![.]\!]$ es continua en $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

Teorema

Si g es continua y f es una restricción de g entonces f también es continua.

Ejemplo

La función $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln x$ es una función continua.

Teorema

Si f y g son funciones continuas en a, entonces

- $f - g$, $f + g$ y $f \cdot g$ son continuas en a.
- Si $g(a) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \ x \neq 0$$

es una función continua.

¿Existe una extensión continua de f definida incluso en 0?

La función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

es una extensión continua de la función f.

Teorema

Sea f una función continua en x_0, y g una función tal que $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$ y $t_0 \in (\mathrm{Dom}(f \circ g))'$, entonces

$$\lim_{t\to t_0} (f \circ g)(t) = f(x_0) = f(\lim_{t\to t_0} g(t))$$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{t\to 0} \cos\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right)$$

Teorema

Si g es una función continua en t_0 y f es una función continua en $g(t_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en t_0.

Ejemplo

Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine los valores donde $g \circ f$ es continua.

Resolución: La función f es continua en $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ y la función g es continua en $]-\infty, 1]$. Luego, $g \circ f$ es continua en $x \neq 3$ con $1 - \dfrac{x+2}{x-3} \geq 0$.
Por lo tanto, $g \circ f$ es continua en $]-\infty, -3[$.

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0, y $a < f(x_0) < b$, entonces existe $V_\delta(x_0)$ tal que $a < f(x) < b$, para todo $x \in V_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

Demostración.

Para $\varepsilon = \min\{b - f(x_0), f(x_0) - a\}$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in V_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, esto es

$$a \leq f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \leq b$$

$\square$

Corolario

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en x_0, y $f(x_0) > 0$, entonces existe $V_\delta(x_0)$ tal que $0 < f(x)$, para todo $x \in V_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$

Definición (Continuidad por la izquierda)

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua por la izquierda en $a \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $x \in X$ y $a - \delta < x < a$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definición (Continuidad por la derecha)

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua por la derecha en $a \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $x \in X$ y $a < x < a + \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Teorema

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in X$ si y solo si f es continua por la izquierda y por la derecha en a.

Observación

- Si $a \in X'_-$, entonces

$$f \text{ es continua por la izquierda en } a \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

- Si $a \in X'_+$, entonces

$$f \text{ es continua por la derecha en } a \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Ejemplo

La función máximo entero es continua por la derecha en cualquier $a \in \mathbb{R}$, ya que

$$\lim_{x \to a^+} [\![x]\!] = [\![a]\!]$$

sin embargo no es continua por la izquierda en $a = n \in \mathbb{Z}$. En efecto,

$$\lim_{x \to a^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq n$$

Ejemplo

Analice la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \geq 0 \\ x+1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} |x-2|, & \text{si } x \geq 0 \\ x^3, & \text{si } -1 < x < 0 \\ 3, & \text{si } x = -1 \end{cases}$

Sesión 01

1 Continuidad
- Continuidad sobre un conjunto
- Continuidad lateral

2 Funciones discontinuas
- Tipos de discontinuidad

3 Ejercicios

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Funciones discontinuas

De la definición de continuidad, existen dos formas de que una función $f : A \to \mathbb{R}$ no sea continua en $a \in \mathrm{Dom}(f) = A$.

- Que el límite no exista.
- En el caso que el límite exista, que el límite no sea igual a $f(a)$.

Tipos de discontinuidad

Sean $f : X \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$.

- Decimos que la discontinuidad de f en x_0 es removible si existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ pero $L \neq f(x_0)$.

Tipos de discontinuidad

- Decimos que la discontinuidad de f en x_0 es no removible si no existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Discontinuidad removible

Si f tiene una discontinuidad removible en a entonces podemos definir una nueva función $\hat{f}$ continua en a tan solo redefiniendo la regla de correspondencia de f en a.

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \neq a, \\ L & , \ x = a. \end{cases}$$

Discontinuidad no removible

Si f tiene una discontinuidad no removible en a diremos que

- f tiene una discontinuidad de salto si los límites laterales de f en a existen pero son distintos.
- f tiene una discontinuidad esencial en a si por lo menos un límite lateral en a no existe (lo que incluye el caso cuando es infinito).

Ejemplo

La función $f(x) = H(x-2)$ tiene una discontinuidad de salto en $x = 2$.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x+1} & , -1 < x \leq 0, \\ 2 & , x > 0. \end{cases}$$

tiene una discontinuidad esencial en $x = -1$ y una discontinuidad de salto en $x = 0$.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - \ln(x^2+1) & , x \geq 0 \\ 2^{\frac{1}{x}} + \cos x & , x < 0. \end{cases}$$

Indique los puntos en que f es continua.

Ejemplo

Sean a, b y c constantes y $f : \mathbb{R}\backslash\{0,3\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - a}{\sqrt{x+1} - 2} & , x > 3 \\ \\ \dfrac{2x^2 - bx - c}{x^2 - 3x} & , x < 3,\ x \neq 0. \end{cases}$$

Halle los valores de a, b y c de modo que se pueda definir una extensión continua de f en el punto $x = 3$.

Ejemplo

Demuestre que: Si f es una función continua en a, entonces $|f|$ es una función continua en a.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ para algún $k > 0$. Demuestre que f es continua en cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

Sea f una función real de variable real tal que $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es continua en $x = 0$.

Ejemplo

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) < g(x)$, para todo $x < \mathbb{R}$. Demuestre que existe una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) < 2h(x) < g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sesión 01

1 Continuidad
- Continuidad sobre un conjunto
- Continuidad lateral

2 Funciones discontinuas
- Tipos de discontinuidad

3 Ejercicios

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicios

1. Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las funciones siguientes es continua en el número dado a.
   a) $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}$, $a = 4$.
   b) $g(x) = \dfrac{x^2+5x}{2x+1}$, $a = 2$.
2. Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las funciones siguientes es continua en el intervalo dado.
   a) $f(x) = x + \sqrt{x-4}$, $[4, +\infty[$.
   b) $g(x) = \dfrac{x-1}{3x+6}$, $]-\infty, -2[$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicios

3. Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos números f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguna de las dos? Trace la gráfica de f.

   a) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x, & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ \sqrt{x}, & \text{si } x > 4 \end{cases}$

   b) $g(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Ejercicios

4. Suponga que f y g son funciones continuas tales que $g(2) = 6$ y $\lim_{x \to 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encuentre $f(2)$.
5. ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en a? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en a.
   a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$, $a = 1$
   b) $g(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}$, $a = 2$
   c) $h(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!]$, $a = \pi$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Continuidad
- Continuidad sobre un conjunto
- Continuidad lateral

2 Funciones discontinuas
- Tipos de discontinuidad

3 Ejercicios

4 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 5, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

1 Límites en el infinito

2 Asíntotas a la gráfica de una función
- Asíntota vertical
- Asíntota horizontal
- Asíntotas oblicuas

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

1 Límites en el infinito

2 Asíntotas a la gráfica de una función
- Asíntota vertical
- Asíntota horizontal
- Asíntotas oblicuas

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente, $f : A \to \mathbb{R}$, y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiene límite L en $+\infty$ (o cuando x tiende al infinito) si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $N > 0$ (que depende de ϵ) tal que, si $x \in A$ y $x > N$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. Denotamos entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \ .$$

Es decir,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N > 0 : \text{si } x \in A \wedge x > N \Longrightarrow |f(x) - L| <$$

Definición

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado inferiormente, $f : A \to \mathbb{R}$, y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiene límite L en $-\infty$ (o cuando x tiende a menos infinito) si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $N > 0$ (que depende de ϵ) tal que, si $x \in A$ y $0x < -N$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. Denotamos entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ .$$

Es decir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0 : \text{si } x \in A \wedge x < -N \Longrightarrow |f(x) - L|$$

Ejemplo: Demostrar que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = -1$$

Ejemplo: Demostrar que para n un número natural se cumple:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Proposición

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = M$.

Entonces

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = L + M.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda f(x) = \lambda L.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda (gf)(x) = L \cdot M.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{L}{M}. \quad M \neq 0$

Se deja como ejercicio la prueba.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo: Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

Resolución:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\frac{-2}{1+1}=-1$$

Ejercicio: Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\arctan x}{x+1}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Supongamos que hemos calculado $\lim\limits_{x\to *} = L$ y que queremos calcular $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Teorema

- Si $\lim\limits_{x\to *} f(x) = +\infty 0$ o $\lim\limits_{x\to *} = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
- Cuando $\lim\limits_{x\to *} f(x) = 0$ tenemos que distinguir dos casos:

$$\text{Si} \quad f(x) \to o^+ \quad \text{se tiene} \quad \lim_{x\to *} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

$$\text{Si} \quad f(x) \to o^- \quad \text{se tiene} \quad \lim_{x\to *} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Ejemplo:

- Calculemos $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$:

  Usemos que $\dfrac{\ln x}{x} = \left(\dfrac{1}{x}\right)\ln x$, para todo $x > 0$.

  Analizamos cada factor:

  cuando $x \to *$ tenemos $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ y $\ln x \to -\infty$.

  Por la aritmética de límites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

- Calculemos $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x})$:

  Como $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

  entonces $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x}) = +\infty$

Teorema

Si $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe y $\lim\limits_{x\to *} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to *} f(x) = 0$.

Demostración:

Que $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ exista quiere decir que $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ y que L es un número

real. Por la aritmética de límites

$$\lim_{x\to *} f(x) = \lim_{x\to *} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) g(x) = (L)(0) = 0$$

Observe que fue importante en la demostración del teorema que $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ sea igual a un número real.

En el siguiente ejemplo se muestra que esta condición es necesaria.

Ejemplo: Justifique la veracidad o falsedad de la siguiente proposición:

Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Falso: Justifiquelo mediante un contraejemplo.

Teorema

Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$ donde c es un número real, entonces:

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$
2. Si $c > 0$:
   - $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$
   - $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
3. Si $c < 0$:
   - $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$
   - $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

Teorema

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$
3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$
4. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$

Observación:

- En algunos casos no se puede predecir el límite de la operación conociendo simplemente el de cada operando.
- Las formas anteriores corresponden a las llamadas "formas indeterminadas":

$$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$$

Ejercicios:

1. Un profesor dijo en su clase lo siguiente: Si $\lim_{x\to 0}(g(x))^2 = 9$ entonces, o bien $\lim_{x\to 0} g(x) = 3$, o bien $\lim_{x\to 0} g(x) = -3$
   Muéstrele que está equivocado.

2. Días después dijo lo siguiente:
   Ya que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ entonces concluimos que $\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x) = 0$.
   Muéstrele que está equivocado.

3. Calcule los límites

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^k}{|x|^3} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^k}{|x|^3}$$

para $k = 1$ y para $k = 2$.

4. Encuentre todos los valores enteros positivos de k para los cuales $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^k}{|x|^3}$ existe.

Sesión 02

1 Límites en el infinito

2 Asíntotas a la gráfica de una función
- Asíntota vertical
- Asíntota horizontal
- Asíntotas oblicuas

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Asíntota vertical)

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función f si

- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$: Asíntota superior izquierda.
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$: Asíntota superior derecha.
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$: Asíntota inferior izquierda.
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$: Asíntota inferior derecha.

Definición (Asíntota horizontal)

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función f si

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$: Asíntota horizontal derecha.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$: Asíntota horizontal izquierda.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Asíntota oblicua)

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = b$.

  Entonces diremos que la recta

  $$L : y = mx + b$$

  es una asíntota oblicua derecha de la gráfica de f.

- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = b$.

  Entonces diremos que la recta

  $$L : y = mx + b$$

Asíntotas oblicuas

Asíntota oblicua.

Asíntota horizontal derecha.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo: Determinar las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 8}{x + 3}, \ \forall x \neq -3.$$

Resolución:

a) Asíntotas verticales:
$x = -3$ es una posible asíntota vertical pues anula el denominador.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x^2 + 5x - 8}{x + 3} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2 + 5x - 8}{x + 3} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

entonces $x = -3$ es una asíntota vertical para f.

b) Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+5x-8}{x+3} = \frac{2x+5-\dfrac{8}{x}}{1+\dfrac{3}{x}} = \pm\infty$$

entonces f no tiene asíntotas verticales.

c) Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+5x-8}{x^2+3x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}} = 2$$

Entonces $m = 2$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+5x-8}{x+3}-2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-8}{x+3} =$$

Entonces $b = -1$.

Por lo tanto:

- $y = 2x - 1$ es una asíntota oblicua derecha de f.
- $y = 2x - 1$ es una asíntota oblicua izquierda de f.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicio: Determinar las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}},\ x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle.$$

Solución:

Ejercicio: Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{1}{x+1} & , \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{2x^2}{x^2+1} & , \text{ si } x \geq -1 \end{cases}$$

Hallar todas las asíntotas de la función f.

Solución:

Sesión 02

1 Límites en el infinito

2 Asíntotas a la gráfica de una función
- Asíntota vertical
- Asíntota horizontal
- Asíntotas oblicuas

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 10, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Límites trigonométricos

2 Conjunto acotado

3 Límites infinitos

4 Ejercicios

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0 \ , \quad x \text{ en radianes}$$

Demostración

Consideremos que $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
De la figura: $0 \leq \operatorname{sen}(x) \leq x$
Además:
$\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0$
Al aplicar el teorema de Sandwich, se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}(x) = 0$$

Demostración.

Luego, analicemos cuando $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$ tenemos $-x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, así

$$0 \leq \operatorname{sen}(-x) \leq -x \Longrightarrow x \leq \operatorname{sen}(x) \leq 0$$

Además, $\lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0$, al aplicar el teorema de Sandwich, se tiene $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sen}(x) = 0$.

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0.$$

□

Teorema

$$\lim_{t\to 0}\cos(t) = 1\ , \quad t \text{ en radianes}$$

Teorema

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}=1\ ,\quad t \text{ en radianes}$$

Demostración

Consideremos que $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
De la figura: $\operatorname{sen}(x) \leq x \leq \tan(x)$

$$\cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq 1$$

Además:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$

Al aplicar el teorema de Sandwich, se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$$

Demostración.

Luego, analicemos cuando $x \in]-\frac{\pi}{4}, 0[$ tenemos $-x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, así

$$\operatorname{sen}(-x) \leq -x \leq \tan(-x) \Longrightarrow \cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq 1$$

Además: $\lim\limits_{x \to 0^-} \cos(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$.

Al aplicar el teorema de Sandwich, se tiene $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$.

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$$

$\square$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} &= \lim_{x\to 0} 3\cdot\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}\\
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} &= 3\lim_{3x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}\\
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} &= 3(1)\\
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} &= 3
\end{aligned}$$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x(1+\cos(x))}\\
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\cdot\frac{x}{1+\cos(x)}\\
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\cos(x)}\\
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= (1)(1)(0)=0
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sea f una función tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Demuestre que:

a) Si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L \in \mathbb{R} \implies L = 0$

b) Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x),\ \forall a \in \mathbb{R}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Límites trigonométricos

2 Conjunto acotado

3 Límites infinitos

4 Ejercicios

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que A está acotado superiormente, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in A$ se tiene $x \leq M$.
Decimos que A está acotado inferiormente, si existe $N \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in A$, se tiene $x \geq N$.
Por último, decimos que A está acotado si lo está superior e inferiormente.

Observación

Con esta última definición, un conjunto que no es acotado es un conjunto tal que, para todo $M \in \mathbb{R}$, posee un elemento x (que depende de M) tal que $x > M$, es decir, posee elementos tan grandes como se desee.

Sesión 01

1 Límites trigonométricos

2 Conjunto acotado

3 Límites infinitos

4 Ejercicios

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Límite más infinito)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, y x_0 punto de acumulación de A. Decimos que f tiene límite $+\infty$ en x_0 (o cuando x tiende a x_0) si, para cada $M \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$ (que depende de M) tal que, si $x \in A$ y $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) > M$. Denotamos entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ .$$

Definición (Límite más infinito)

Es decir, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \text{si } x \in A \ \wedge \ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Límite menos infinito)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, y x_0 punto de acumulación de A. Decimos que f tiene límite $-\infty$ en x_0 (o cuando x tiende a x_0) si, para cada $M \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$ (que depende de M) tal que, si $x \in A$ y $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) < -M$. Denotamos entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \ .$$

Es decir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \text{si } x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \implies$$

Definición

- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ significada que cuando $x \to a^+$, $f(x)$ toma valores ilimitadamente grandes-positivos.
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ significada que cuando $x \to a^-$, $f(x)$ toma valores ilimitadamente grandes-positivos.
- De manera similar se define el significado de "$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$" y "$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$".

Ejemplo

Demostrar que

$$\lim_{x\to 5} \frac{5}{|\sqrt{x-1}-2|} = +\infty$$

Ejemplo

Demostrar que

$$\lim_{x\to -3} \frac{1+x}{(x+3)^2} = -\infty$$

Proposición

Si $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *con* $g(x) > 0$ *en una vecindad de* a. *Entonces*

a) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \quad A > 0, \quad \left(\dfrac{A}{0^+} = +\infty\right)$

b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \quad A < 0, \quad \left(\dfrac{A}{0^+} = -\infty\right)$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-8}{x^3-4x^2+5x-2}$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{3x-8}{x^3-4x^2+5x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{3x-8}{(x-1)^2(x-2)} \\
\lim_{x\to 1} \frac{3x-8}{x^3-4x^2+5x-2} &= \frac{-5}{0^+(-1)} \\
\lim_{x\to 1} \frac{3x-8}{x^3-4x^2+5x-2} &= +\infty
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicio

Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Si n es un número natural par, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

b) Si n es un número natural impar, entonces

$$\lim_{x\to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

Teorema (Composición de límites)

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ con $g(B) \subset A$, $x_0 \in B'$, $u_0 \in A'$, $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$ y $\lim\limits_{u \to u_0} = L$, además, cuando $x \neq x_0$ se tiene $g(x) \neq u_0$.
Entonces,

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = L,$$

esto es,

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L.$$

Observación

En el caso en que $\lim_{x\to 0} f(u)$ exista, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

También

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(ax)$$

donde $a \neq 0$ es una constante.

Ejemplo

- Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$:

  Cuando $x \to 0^+$, vemos que $\dfrac{1}{x} \to +\infty$.

  Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to +\infty} e^t = +\infty$.

- Calcule $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$:

  Cuando $x \to 0^-$, vemos que $\dfrac{1}{x} \to -\infty$.

  Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to -\infty} e^t = 0$.

Límites trigonométricos

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \sec x = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \csc x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \csc x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln x = -\infty$

Límite de una función polinómica

Como consecuencia del álgebra de límites ya es fácil calcular los límites laterales de funciones polinómicas

$$P(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0$$

Luego,

- $\lim\limits_{x \to a^+} P(x) = P(a)$
- $\lim\limits_{x \to a^-} P(x) = P(a)$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3+x^5-2}{2x^5-3}$$

Resolución: Usando algebra de límites, se tiene

- $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^3+x^5-2) = 1+1-2 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} (2x^5-3) = 2-3 = -1 \neq 0$

Luego,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3+x^5-2}{2x^5-3} = \frac{1+1-2}{2-3} = 0$$

Sesión 01

1 Límites trigonométricos

2 Conjunto acotado

3 Límites infinitos

4 Ejercicios

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicio

Utilice la definición de limite de una función para demostrar en cada caso.

a) $\lim\limits_{x \to a} x = a.$

b) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$

c) $\lim\limits_{x \to -1} (2x - 3) = -5.$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2.$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Límites trigonométricos

2 Conjunto acotado

3 Límites infinitos

4 Ejercicios

5 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 6, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

1 Límites laterales

2 Álgebra de límites

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

1 Límites laterales

2 Álgebra de límites

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Sea $X \subset \mathbb{R}$ no vacío. Denotaremos por X'_+ al conjunto de puntos de acumulación por la derecha de X, es decir:

$$x_0 \in X'_+ \Longleftrightarrow \forall \delta > 0, \langle x_0, x_0 + \delta \rangle \cap X \neq \emptyset$$

Denotaremos por X'_- al conjunto de puntos de acumulación por la izquierda de x, es decir

$$x_0 \in X'_- \Longleftrightarrow \forall \delta > 0, \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle \cap X \neq \emptyset$$

Ejemplo

Para el conjunto $X =]0,1]$, se tiene que $0 \in X'_+$ y $1 \in X'_-$.

- $0 \in X'_+$. En efecto,
  Si $0 < \delta \leq 1$, entonces $]0, 0+\delta[\cap]0,1] =]0,\delta[\neq \emptyset$.
  Si $1 < \delta$, entonces $]0, 0+\delta[\cap]0,1] \neq \emptyset$.
  Por lo tanto $0 \in X'_+$.
- $1 \in X'_-$. En efecto,
  Si $0 < \delta \leq 1$, entonces $]1-\delta, 1[\cap]0,1] =]1-\delta, 1[\neq \emptyset$.
  Si $1 < \delta$, entonces $]1-\delta, 1[\cap]0,1] \neq \emptyset$.
  Por lo tanto $1 \in X'_+$.

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $x \in X = \mathrm{Dom}(f)$ y $x_0 \in X'_+$. Diremos que $L \in \mathbb{R}$ es el límite por la derecha de f cuando x tiende a x_0, y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

cuando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in X \ \wedge \ 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $x \in X = \mathrm{Dom}(f)$ y $x_0 \in X'_-$. Diremos que $L \in \mathbb{R}$ es el límite por la izquierda de f cuando x tiende a x_0, y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

cuando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in X \ \wedge \ 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ejemplo

Sea $f(x) = |x-1|, x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Expresamos f como una función por tramos,

$$f(x) = \begin{cases} x-1 \ , \ x \geq 1 \\ 1-x \ , \ x < 1 \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (x-1) \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (1-x) \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea f una función por tramos representada por la gráfica

- Calcule $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
- ¿Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

De la figura,

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Por lo tanto, $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $X = \mathrm{Dom}(f)$ y $x_0 \in X'_+ \cap X'_-$. Entonces vale lo siguiente:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Observación

- Si alrededor de un punto los límites laterales por la derecha e izquierda existen, pero son diferentes, entonces el límite no existe.
- En el caso en que $a \in X'_- \cap X'_+$, si uno de los límites laterales no existe, entonces el límite no existe.
- Si x es punto de acumulación solo por la derecha (o solo por la izquierda), el límite existe si y solo si el límite lateral correspondiente existe.

Convención

Usaremos la siguiente convención sobre cuándo se dice que un límite existe.
Diremos que "$\lim\limits_{x \to *} f(x)$ existe" cuando

$$\lim_{x \to *} f(x) = L \quad \text{y} \quad L \text{ es un número real.}$$

Donde $x \to *$ significa cualquiera de los comportamientos de la variable x.

Sesión 02

1 Límites laterales

2 Álgebra de límites

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Álgebra de límites

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $X = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ y $a \in X'$ tal que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$. Entonces

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \pm M.$
2. $\lim\limits_{x \to a} kf(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x) = k \cdot L.$
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \cdot M.$
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0.$

Observación: Los mismos resultados se aplican cuando $a \in X'_{\pm}$ y tomamos límite lateral $x \to a^{\pm}$.

Demostración (1).

Dado $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon' = \varepsilon/2$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x \in X \wedge 0 < |x-a| < \delta_1 &\implies |f(x) - L| < \varepsilon/2 \\ x \in X \wedge 0 < |x-a| < \delta_2 &\implies |g(x) - M| < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que si $x \in X$ y $0 < |x-a| < \delta$ tenemos que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ y $|g(x) - M| < \varepsilon/2$.

Así,
$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L+M)| &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ |f(x) + g(x) - (L+M)| &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ |f(x) + g(x) - (L+M)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

Proposición

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ y existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Demostración.

Dado $\varepsilon > 0$ para $\varepsilon' = \varepsilon/M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - 0| < \varepsilon'$. Así, $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.
Sea $x \in X$ y $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - 0| &= |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \\
|f(x)g(x) - 0| &\leq M|f(x)| \\
|f(x)g(x) - 0| &< M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \\
|f(x)g(x) - 0| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo

Demuestre que: $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

Demostración. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $|g(x)| = \left|\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Aplicamos la proposición anterior:

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Propiedades

1. $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(h + x_0)$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$
3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in V'_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

Teorema (Sandwich)

Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, X = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(h)$ y $x_0 \in X'$. Si

i. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in X$, y

ii. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$.

entonces

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

Demostración.

Dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ tales que $x \in X$ y

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Longrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \Longrightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

Elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Luego para $x \in X$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ tenemos que

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \Longrightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$$

$\square$

Ejercicios

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}[\![3x+1]\!]$, $\lim\limits_{x\to 0^-}[\![3x+1]\!]$. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0}[\![3x+1]\!]$?
2. Sea

$$f(x)=\begin{cases}(x^2+2)^{[\![x]\!]} & , \ x\geq 1\\ \sqrt[3]{x} & , \ x<1\end{cases}$$

¿Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

Sesión 02

1 Límites laterales

2 Álgebra de límites

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 1, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

1 Topología en $\mathbb{R}$
- Vecindades
- Punto de acumulación

2 Límite de una función en un punto
- Definición del límite de una función
- Unicidad del límite

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Topología en $\mathbb{R}$
- Vecindades
- Punto de acumulación

2 Límite de una función en un punto
- Definición del límite de una función
- Unicidad del límite

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Vecindad abierta)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y δ un número positivo cualesquiera. La vecindad abierta de centro a y radio δ, denotada como $V_\delta(a)$, se define como el conjunto de números reales cuya distancia al valor a es menor que δ. Es decir,

$$V_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}$$

También, $V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[= \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta\}$

Definición (Vecindad abierta reducida)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y δ un número positivo cualesquiera. La vecindad abierta reducida de centro a y radio δ, denotada como $V'_\delta(a)$, se define como el conjunto de números reales cuya distancia al valor a es menor que δ y diferente de a. Es decir son los números de $V_\delta(a)$ diferentes de a.

$$V'_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}$$

También $V'_\delta(a) = V_\delta(a) \setminus \{a\} =]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[$.

Ejemplo

- Vecindad abierta de centro $a = 0$ y radio $\delta = 1$,

$$V_1(0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 0| < 1\} =]-1, 1[$$

- Vecindad abierta reducida de centro $a = 0$ y radio $\delta = 1$,

$$V_1'(0) = V_1(0) \setminus \{0\} =]-1, 0[\cup]0, 1[$$

Ejemplo

- Vecindad abierta de centro $a = 0$ y radio $\delta = 1$,

$$V_2(3) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 2\} =]3 - 2, 3 + 2[=]1, 5[$$

- Vecindad abierta reducida de centro $a = 0$ y radio $\delta = 1$,

$$V_2'(3) = V_2(3) \setminus \{3\} =]1, 5[\setminus \{3\} =]1, 3[\cup]3, 5[$$

Proposición

Demuestre que: Si $a \in \mathbb{R}$ y $0 < \delta_1 < \delta_2$, entonces

- $V_{\delta_1}(a) \subset V_{\delta_2}(a)$.
- $V'_{\delta_1}(a) \subset V'_{\delta_2}(a)$.

Definición (Punto de acumulación)

Dado $a \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que a es punto de acumulación de A si toda bola abierta reducida centrada en a tiene elementos de A.

De forma equivalente podemos decir que a es punto de acumulación de A si toda vecindad abierta centrada en a tiene puntos del conjunto A diferentes de a, esto es

$$\text{para todo } \delta > 0 : V_\delta(a) \cap A \backslash \{a\} \neq \emptyset.$$

De manera que cuando a no es punto de acumulación de A se cumple que: existe $\delta > 0$ tal que $V_\delta(a) \cap A \subset \{a\}$.

Observación

a es un punto de acumulación de A si está acompañado de otros de A.

Definición (Conjunto derivado)

El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama conjunto derivado de A y se denota A'.

Ejemplo

- a es punto de acumulación de $V'_\delta(a)$ para cualquier $\delta > 0$.
- a es punto de acumulación del intervalo $\langle a, b]$.

$$A =]a, b]$$

Ejemplo

Si $A = [1,3] \cup \{5\}$, entonces 5 no es un punto de acumulación de A.
En efecto, para $\delta = 1$ se tiene

$$V_1(5) \cap A =]4,6[\cap \big([1,3] \cup \{5\}\big) = \{5\}$$

Por lo tanto, 5 no es punto de acumulación de $A = [1,3] \cup \{5\}$.

Ejemplo

Demuestre que el conjunto $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, solo tiene un punto de acumulación en 0.

Demostración: En efecto, tome $\delta > 0$ cualquiera. Como para cada número real existe un número natural mayor que dicho número, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\delta} < n$, de modo que $0 < \frac{1}{n} < \delta$, y por lo tanto $\frac{1}{n} \in V_\delta(0) \cap A$, cumpliendo la definición.

Ejercicio

Demuestre que ningún número real $a \neq 0$ es punto de acumulación.

Sesión 01

1 Topología en $\mathbb{R}$
- Vecindades
- Punto de acumulación

2 Límite de una función en un punto
- Definición del límite de una función
- Unicidad del límite

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Límite de una función en un punto)

Dada una función f, y un punto a que es punto de acumulación de $\mathrm{Dom}(f)$. Decimos que un $L \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f cuando x tiende a a, cuando para cualquier $\epsilon > 0$ es posible hallar $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \ \text{ y } \ 0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En ese caso escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Interpretación geométrica del limite de una función

Dado $\varepsilon > 0$, se debe encontrar $\delta > 0$ alrededor de x_0 tal que $f(V'_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)) \subset V_\varepsilon(L)$

Distintos modos de expresar la definición de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

- Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ implica $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

En caso contrario decimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe. En símbolos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \nexists$.

¿Qué es lo que se cumple cuando $\lim_{x \to a} f(x) = \nexists$?

- Cuando el límite existe: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ implica $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.
- Cuando el límite no existe: existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ puedo hallar un x tal que $x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ pero $f(x) \notin V_{\varepsilon_0}(L)$.

¿Qué es lo que se cumple cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \nexists$?

- Cuando el límite existe:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Cuando el límite no existe:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \backslash \forall \delta > 0 : x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f) \text{ pero } |f(x) - L| \geq \varepsilon_0$$

Ejemplo

Utilice la definición y demuestre que: $\lim\limits_{x \to a} c = c$

Demostración: Dado $\epsilon > 0$ necesito hallar $\delta > 0$ de modo que $|c - c| < \epsilon$ cuando se tenga $0 < |x - a| < \delta$.
Como $|c - c| < |x - a| < \delta < \epsilon$. Así, $\delta = \epsilon$, luego
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in Dom(f) \ \wedge \ 0 < |x - a| < \delta$ implica $|c - c| < \epsilon$

Utilice la definición de limite de una función para demostrar en cada caso.

a) $\lim\limits_{x \to a} x = a.$

b) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$

c) $\lim\limits_{x \to -1} 2x - 3 = -5.$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2.$

Ejemplo

Utilice la definición del limite de una función para demostrar que:

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$ necesito hallar $\delta > 0$ de modo que $|x^2 - 9| < \epsilon$ cuando se tenga $0 < |x - 3| < \delta$.
Como, $|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < |x + 3| \cdot \delta < \varepsilon$, debemos acotar $|x + 3|$ en el intervalo $3 - \delta < x < 3 + \delta$.
Se obtiene $|x + 3| < 6 + \delta$. Entonces si $\delta \leq 1$ se tiene $|x + 3| < 7$.
Luego, $|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < |x + 3| \cdot \delta < 7\delta < \varepsilon$.

Así, $\delta = \varepsilon/7$, tenemos entonces que para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos elegir $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$ y obtenemos que

$$0 < |x-3| < \delta \text{ implica } |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Hemos probado que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \min\{1, \varepsilon/7\} > 0 : \; x \in V'_\delta(3) \cap \mathrm{Dom}(f) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Teorema (Unicidad)

Si el límite de una función en un punto existe, entonces es único.

Observación

El enunciado indica que: Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función, $x_0 \in A'$ y existen $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Proof.

Demostración Para la demostración solo es necesario recordar una propiedad de los números reales.

Proposición

Si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $|a| < \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ entonces a tiene que ser 0.

$\square$

Sesión 01

1 Topología en $\mathbb{R}$
- Vecindades
- Punto de acumulación

2 Límite de una función en un punto
- Definición del límite de una función
- Unicidad del límite

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 2, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

1 Funciones
- Funciones pares, impares y periódicas
- Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas
- Imagen inversa
- Función inversa
- Funciones monótonas

2 Ejercicios

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Funciones
- Funciones pares, impares y periódicas
- Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas
- Imagen inversa
- Función inversa
- Funciones monótonas

2 Ejercicios

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función par)

Una función f, real de variable real, se denomina función par si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

- Esto implica que el dominio de una función par es simétrico respecto del origen.
- La gráfica de una función par es simétrico respecto del eje Y.

Ejemplo

Las siguientes funciones son pares:

- $f(x) = ax^2 + b,\ x \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

Demuestre que: Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones pares, entonces $f \pm g$ es función par en su dominio.

Resolución: Tenemos: $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$ y $g(-x) = g(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(g)$. Luego, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)(-x) &= f(-x) \pm g(-x) \\
(f \pm g)(-x) &= f(x) \pm g(x) \\
(f \pm g)(-x) &= (f \pm g)(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \pm g$ es función par.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función impar)

Una función f, real de variable real, se denomina función impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

- Esto implica que el dominio de una función impar es simétrico respecto del origen.
- La gráfica de una función impar es simétrico respecto del origen.

Ejemplo

Las siguientes funciones son impares:

- $f(x) = ax^3,\ x \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$
- $f(x) = \operatorname{sen} x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Ejemplo

Demuestre que: Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones impares, entonces $f \pm g$ es función impar en su dominio.

Resolución: Tenemos: $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$ y $g(-x) = g(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(g)$. Luego, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)(-x) &= f(-x) \pm g(-x) \\
(f \pm g)(-x) &= (-f(x)) \pm (-g(x)) \\
(f \pm g)(-x) &= -(f \pm g)(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f \pm g$ es función impar.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicio

Sean las funciones $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

I. Si f es par y g es impar, entonces $f \circ g$ es par en su dominio.

II. Si f es impar y g es par, entonces $f \circ g$ es par en su dominio.

Ejercicio

Fijado un entero $k \geq 0$, sea $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_k(x) = ax^k$. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

I. Si k es par, entonces f_k es una función par.

II. Si k es impar, entonces f_k es una función impar.

Definición (Función periódica)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{Dom}(f) = A$. La función f es periódica de periodo $T \neq 0$ si para todo $x \in A$, se cumple que $x + T \in A$ y

$$f(x+T) = f(x)$$

El número T se denomina periodo de la función f.
Si existe un valor mínimo de $T > 0$ con esta propiedad, se denomina a T periodo fundamental para f.

Ejemplo

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es periódica de periodo fundamental $T = 2\pi$.

Ejemplo

La función $f(x) = \cos x$ es periódica de periodo fundamental $T = 2\pi$.

Ejemplo

Las funciones trigonométricas en general son periódicas. La función $f(x) = \tan x$ es periódica de periodo fundamental $T = \pi$.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x - [\![x]\!]$ es periódica de periodo fundamental $T = 1$.

$$f(x) = x - [\![x]\!]$$

Definición

Dado la función $f \subset A \times B$. La función f es

- **inyectiva** si cada vez que $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene necesariamente que $x_1 = x_2$.
- **sobreyectiva** si para todo $y \in B$, existe $x \in A$, tal que $y = f(x)$.
  Equivalentemente, $\mathrm{Ran}(f) = B$.
- **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplo

- $f(x) = e^x$ es función inyectiva.
- $f(x) = x^2 + 1$ no es función inyectiva.
- $f(x) = ax + b$ donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$ es función biyectiva.

Definición (Imagen inversa)

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to B$ una función. Dado $y \in B$, la imagen inversa de y por f es el conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : y = f(x)\} \subset \mathrm{Dom}(f)$$

Observación

- $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ si y solo si $y \in \mathrm{Ran}(f)$. Luego, f es sobreyectiva si y solo si para todo $y \in B, f^{-1}(y) \neq \emptyset$.
- Para $y \in \mathrm{Ran}(f), f$ inyectiva significa que $f^{-1}(y) = \{x\}$ posee un solo punto.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$. La imagen inversa de f es $f^{-1}(\{3\}) = \mathbb{R}$.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. La imagen inversa de f

- Para $x = 0$ es $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) = 0\}$
$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$$
- Para $x = 4$ es $f^{-1}(\{4\}) = \{x \in \mathbb{R}/f(x) = 4\}$
$$f^{-1}(\{4\}) = \{x \in \mathbb{R}/x^2 = 4\}$$
$$f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$$

Criterio de la recta horizontal

Si toda recta horizontal interseca a la gráfica de una función f en un sólo punto, entonces f es inyectiva.

- Función no inyectiva

$$f(x) = x^2 + 1$$

- Función inyectiva

$$f(x) = x^3 - 1$$

Observación

El hecho de que para un valor dado de $y \in B$ exista un único valor de x en $f^{-1}(y)$, nos indica que la asignación de tal valor de x a y es una función.

Definición (Función inversa)

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to B$ una función. Si f es inyectiva definimos la función inversa de f, $f^* \colon B \to A$, tal que

$$y = f^*(x) \text{ si y solo si } x = f(y)$$

Definición (Función inversa)

En forma equivalente:
Si la función $f = \{(x, f(x))/x \in \mathrm{Dom}(f)\}$ es inyectiva. Se define la función inversa, denotado por f^*, como

$$f^* = \{(f(x), x)/x \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

Así,

- $\mathrm{Dom}(f^*) = \mathrm{Ran}(f)$
- $\mathrm{Ran}(f^*) = \mathrm{Dom}(f)$

Ejemplo

La función $y = f(x) = x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ es inyectiva, entonces existe la función f^*, es decir

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^3 - 1 \\ x &= y^3 - 1 \\ y = f^*(x) &= \sqrt[3]{x+1} \end{aligned}$$

- $\mathrm{Dom}\,(f^*) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Ran}\,(f^*) = \mathbb{R}$

Ejemplo

La función $y = \ln x$, $x \in]0, +\infty[$ es inyectiva, entonces existe la función $\ln^*$, es decir

$$\begin{aligned} y &= \ln x \\ x &= \exp y \\ \ln^* x &= \exp x \end{aligned}$$

- $\mathrm{Dom}\,(\ln^*) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Ran}\,(\ln^*) =]0, +\infty[$

Definición (Función creciente)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo. Decimos que f es creciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definición (Función estrictamente creciente)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo. Decimos que f es estrictamente creciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Definición (Función decreciente)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo. Decimos que f es decreciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Definición (Función estrictamente decreciente)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo. Decimos que f es estrictamente decreciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_2) < f(x_1)$.

Definición (Función monótona)

En cualquiera de las cuatro ultimas definiciones, diremos que f es monótona sobre I, siendo estrictamente monótona si es estrictamente creciente o decreciente.

Observación

Algunos autores utilizan los términos no decreciente y creciente en lugar de los respectivos creciente y estrictamente creciente, y del mismo modo para el decrecimiento.

Ejemplo

Los siguientes funciones son monótonas.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ es estrictamente creciente.
- $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es estrictamente decreciente.
- $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente.
- Toda función constante es creciente y decreciente a la vez.

Ejemplo

Se muestra la gráfica de la función f.

- f es creciente.
- f no es inyectiva.
- $f^{-1}(\{4\}) = [-1, 6]$.
- $f^{-1}(]5, +\infty[) = [6, +\infty[$.
- f no tiene inversa.

Ejemplo

Se muestra la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$.

- f es inyectiva.
- f no es sobreyectiva (sobre $\mathbb{R}$).
- f es decreciente en $]-\infty, 0[$.
- f es decreciente en $]0, +\infty[$.

Relación entre monotonía e inyectividad

- Si f es monótona estricta, implica que f es inyectiva.
- Si f es inyectiva, no implica que f es monótona estricta.

Sesión 01

1 Funciones
- Funciones pares, impares y periódicas
- Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas
- Imagen inversa
- Función inversa
- Funciones monótonas

2 Ejercicios

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicios

Determine si f es par, impar o ninguna de las dos. Si tiene una calculadora graficadora, utilícela para verificar visualmente su respuesta.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

b) $f(x) = x|x|$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

e) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

f) $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

Ejercicios

Suponga que f es una función inyectiva.

a) Si $f(x) = x^5 + x^3 + x$, ¿qué es $f^{-1}(3)$?

b) Si $f^{-1}(8) = 2$, ¿qué es $f(2)$?

Ejercicios

Encuentre una fórmula explícita para f^{-1} y utilícela para trazar la gráfica de f^{-1}, f y la recta $y = x$ en la misma pantalla. Para comprobar su trabajo, vea si las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones a través de la recta.

a) $f(x) = \sqrt{4x+3}$

b) $f(x) = 1 + e^{-x}$

Ejercicios

Sea la función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

a) Demuestre que f es una función impar.

b) Encuentre la inversa de f.

Sesión 01

1 Funciones
- Funciones pares, impares y periódicas
- Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas
- Imagen inversa
- Función inversa
- Funciones monótonas

2 Ejercicios

3 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

Funciones

Profesores del curso:

LUIS ROCA [1]
JOHNNY VALVERDE [1]
FÉLIX VILLANUEVA [1]

OSWALDO VELÁSQUEZ [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

7 de junio de 2020

Paridad de funciones

Definición 1 (Función par, impar)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *con* $\mathrm{Dom}(f) = A$. *La función* f *es*

1. *par si, para cada* $x \in A$, *se cumple que* $-x \in A$ *y*

$$f(-x) = f(x).$$

2. *impar si, para cada* $x \in A$, *se cumple que* $-x \in A$ *y*

$$f(-x) = -f(x).$$

Fijado un entero $k \geq 0$, sea $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_k(x) = x^k.$$

Entonces

- Si k es par, entonces f_k es una función par
- Si k es impar, entonces f_k es una función impar

Y
f(x) = f(−x)
X
−x
x

Y
f(−x)
X
−x
x
f(x)

Periodicidad de funciones

Definición 2 (Función periódica)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{Dom}(f) = A$. La función f es periódica de periodo $T \neq 0$ si para todo $x \in A$, se cumple que $x + T \in A$ y

$$f(x + T) = f(x).$$

El número T se denomina entonces periodo de la función f. Si existe un valor mínimo de $T > 0$ con esta propiedad, se denomina a T periodo fundamental para f.

Periodicidad de funciones

Definición 2 (Función periódica)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{Dom}(f) = A$. La función f es periódica de periodo $T \neq 0$ si para todo $x \in A$, se cumple que $x + T \in A$ y

$$f(x + T) = f(x).$$

El número T se denomina entonces periodo de la función f. Si existe un valor mínimo de $T > 0$ con esta propiedad, se denomina a T periodo fundamental para f.

- Las funciones $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son periódicas de periodo fundamental 2π.
- La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x - [\![x]\!]$$

es periódica.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición 3

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ *con* $\mathrm{Dom}(f) = A$ *(*f *es una aplicación). La función* f *es*

1. *inyectiva si*

$$\forall x \in A, \forall y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

2. *sobreyectiva si*

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$

   Equivalentemente, $\mathrm{Ran}(f) = B$.

3. *biyectiva si es inyectiva y biyectiva a la vez.*

¿Cuál es el criterio gráfico para determinar que una función es inyectiva o sobreyectiva?

Definición 4

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ una función. Dado $y \in B$, la imagen inversa de y por f es el conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : y = f(x)\}.$$

Por ejemplo

- $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ si y solo si $y \in \mathrm{Ran}(f)$. Luego, f es sobreyectiva si y solo si
$$\forall y \in B, f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$
- Para $y \in \mathrm{Ran}(f)$, f inyectiva significa que $f^{-1}(y) = \{x\}$ posee un solo punto.

¿Qué significa esto gráficamente? ¿Cómo visualizo los puntos de $f^{-1}(y)$ en general?

Definición 4

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ una función. Dado $y \in B$, la imagen inversa de y por f es el conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : y = f(x)\}.$$

Por ejemplo

- $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ si y solo si $y \in \mathrm{Ran}(f)$. Luego, f es sobreyectiva si y solo si
$$\forall y \in B, f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$
- Para $y \in \mathrm{Ran}(f)$, f inyectiva significa que $f^{-1}(y) = \{x\}$ posee un solo punto.

¿Qué significa esto gráficamente? ¿Cómo visualizo los puntos de $f^{-1}(y)$ en general?

Definición 4

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ una función. Dado $y \in B$, la imagen inversa de y por f es el conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : y = f(x)\}.$$

Por ejemplo

- $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ si y solo si $y \in \mathrm{Ran}(f)$. Luego, f es sobreyectiva si y solo si
$$\forall y \in B, f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$
- Para $y \in \mathrm{Ran}(f)$, f inyectiva significa que $f^{-1}(y) = \{x\}$ posee un solo punto.

¿Qué significa esto gráficamente? ¿Cómo visualizo los puntos de $f^{-1}(y)$ en general?

Función inversa

El hecho de que para un dado valor de $y \in B$ exista un único valor de x en $f^{-1}(y)$, nos indica que la asignación de tal valor de x a y es una función. Es la función inversa

Definición 5

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ una función. Si f es inyectiva[a], definimos la función inversa de f, $f^* : B \to A$, de modo que

$$y = f^*(x) \text{ si y solo si } x = f(y).$$

[a] f no requiere ser aplicación para definir inyectividad ni sobreyectividad

Nótese que

$$\mathrm{Dom}(f^*) = \mathrm{Ran}(f), \quad \mathrm{Ran}(f^*) = \mathrm{Dom}(f),$$

de modo que si f es sobreyectiva, entonces f^* resulta ser una aplicación, y si f es una aplicación, entonces f^* resulta sobreyectiva. En particular, si f es una aplicación biyectiva, entonces f^* también lo es.

Crecimiento de funciones

Definición 6

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo. Decimos que f es

1. *creciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$;*
2. *estrictamente creciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$;*
3. *decreciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_2) \leq f(x_2)$;*
4. *estrictamente decreciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_2) < f(x_1)$.*

En cualquiera de estos casos, diremos que f es monótona sobre I, siendo estrictamente monótona si es estrictamente creciente o decreciente.[a]

[a] algunos autores utilizan los términos no decreciente y creciente en lugar de los respectivos crecience y estrictamente creciente, y del mismo modo para el decrecimiento

Los siguientes son ejemplos de funciones monótonas.

1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ es estrictamente creciente, cumpliendo trivialmente la definición.
2. La función $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es estrictamente decreciente.
3. La función $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente.
4. Toda función constante es creciente y decreciente a la vez.

¿Relación entre monotonía e inyectividad?

Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Marzo 22, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

1 Función
- Funciones reales de variable real
- Funciones especiales
- Funciones trigonométricas
- Funciones trascendentes

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Función
- Funciones reales de variable real
- Funciones especiales
- Funciones trigonométricas
- Funciones trascendentes

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Producto cartesiano)

Sean A y B dos conjuntos no vacíos, el producto cartesiano de A por B es:

$$A \times B = \{(x, y)/x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo

Sean $A = \{\triangle, \bigcirc, \square\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$.

$$\begin{aligned} A \times B = &\{(\triangle, a), (\triangle, b), (\triangle, c), (\triangle, d), (\bigcirc, a), (\bigcirc, b), (\bigcirc, c), \\ &(\bigcirc, d), (\square, a), (\square, b), (\square, c), (\square, d)\} \end{aligned}$$

Definición (Relación)

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se dice que R es una relación de A en B, si $R \subset A \times B$.

Ejemplo

$$f = \{(\triangle, a), (\bigcirc, b), (\square, b)\} \subset A \times B \ ,$$

$$g = \{(\triangle, c), (\square, b), (\square, d)\} \subset A \times B \ .$$

Definición (Función)

Dados A y B dos conjuntos no vacío. Una función de A en B es un subconjunto f del producto cartesiano $A \times B$ donde para cada elemento x de A, existe a lo más un elemento y de B tal que el par ordenado (x, y) está en f.

En símbolos, f es una función de A en B si

$$\forall x \in A, \exists! y \in B : (x, y) \in f$$

Al conjunto A se le llama dominio y al conjunto B se le llama codominio.

Ejemplo

Del ejemplo anterior, tenemos que f es una función.

$$f = \{(\triangle, a), (\bigcirc, b), (\square, b)\}.$$

Observación:

- El concepto de función también se puede definir de la siguiente manera. Una función f de A en B es un subconjunto del producto cartesiano que satisface las siguientes condiciones:

$$\text{Existencia} : \forall x \in A, \exists y \in B : (x, y) \in f.$$

$$\text{Unicidad} : \text{Si } (x, y) \in f \text{ y } (x, z) \in f, \text{ entonces } y = z.$$

Observación:

- Si f es una función de A en B y $(x, y) \in f$, se escribe $y = f(x)$ y se dice que y es la imagen de x bajo f y que x es una preimagen de y bajo f.
- f y $f(x)$ tienen diferente significado, f es la función, mientras que $f(x)$ es el valor de la función en x.
- Al dominio de f se le denota $\mathrm{Dom}(f)$ donde $\mathrm{Dom}(f) = A$.

Ejemplo

$A = \{-1, 0, 1\}, B = \{0, 1, 2\}, f : A \to B, f(x) = x^2.$

Ejemplo

Tome los conjuntos $A = \{\text{Alumnos de la EPM}\}$ y $B = \{\text{Profesores de la EPM}\}$, considere el conjunto de pares ordenados que se pueden formar del siguiente modo

$$f = \{(x, y) \in A \times B / y \text{ es profesor de } x\}$$

En este caso f no es función.

Ejemplo

Tome los conjuntos $A = \{\text{Alumnos de la EPM}\}$ y $B = \{\text{Palabra alfanumérica de 9 caracteres}\}$, considere el conjunto de pares ordenados que se pueden formar del siguiente modo

$$f = \{(x, y) \in A \times B / y \text{ es el código UNI de } x\}$$

En este caso f es función.

Función real de variable real

Las funciones $f : X \to Y$, donde $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$ son llamadas funciones reales de variable real. Las funciones reales de variable real pueden ser bien representadas en el plano cartesiano por su gráfica.

Ejemplo

$A = \{-1, 0, 1\}, B = \{0, 1, 2\}, f : A \to B, f(x) = x^2.$

Definición (Gráfica de una función)

Dada $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función real de variable real. La gráfico de la función f, denotado por $\mathrm{Graf}(f)$ es el conjunto

$$\mathrm{Graf}\,(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x \in A, y = f(x)\}$$

Ejemplo

Sean $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ y la función $f\colon A \to B$ con regla de correspondencia $f(x) = x^2$. La gráfica de f es $\mathrm{Graf}(f) = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$ cuya representación es

Observación:

- De la definición es claro que $(x, y) \in \mathrm{Graf}(f)$ si y solo si $y = f(x)$.
- $\mathrm{Dom}(f)$ es la proyección ortogonal de $\mathrm{Graf}(f)$ sobre el eje X.
- $\mathrm{Ran}(f)$ es la proyección ortogonal de $\mathrm{Graf}(f)$ sobre el eje Y.

Definición (Función constante)

Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es llamada función constante si su rango es un conjunto unitario.

Definición (Función constante)

Sean c un número real y A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. La función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in A : f(x) = c$ se llama función constante.

- $\mathrm{Dom}\,(f) = A$.
- $\mathrm{Ran}\,(f) = \{c\}$.

Definición (Función identidad)

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. La función identidad sobre A se denota por $I_A : A \to \mathbb{R}$ y se define como $\forall x \in A : I_A(x) = x$.

$$\boxed{I_A(x) = x}$$

- $\mathrm{Dom}(I_A) = A$.
- $\mathrm{Ran}(I_A) = A$.

Definición (Función afín)

La función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y se define como $f(x) = mx + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donde $m, b \in \mathbb{R}$, son dos constantes reales.

$$\boxed{f(x) = mx + b}$$

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R}$.

Observación:

Si $b = 0$, entonces $f(x) = mx$ se denomina función lineal.

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R}$.

Definición (Función polinomial)

Una función P se llama polinomial si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas los coeficientes de la polinomial. El dominio de cualquier polinomial es $\mathbb{R}$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el grado de la polinomial es n.

Ejemplo

La función

$$P(x) = 3x^5 + x^4 - \frac{3}{4}x^3 + x + \sqrt{3}$$

es una polinomial de grado 5.

Definición (Función cuadrática)

Una polinomial de grado 2 es de la forma

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

y se llama función cuadrática.
Su gráfica es siempre una parábola obtenida por desplazamientos de la parábola $y = ax^2$. La parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

Ejemplo

- $f(x) = x^2 + x + 1$

- $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$

Definición (Función cúbica)

Una polinomial de grado 3 es de la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$

y se llama función cúbica.

Ejemplo

- $f(x) = x^3 - x + 1$

Definición (Función potencia)

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama función potencia. Consideramos los siguientes casos.

- $a = n$, donde n es un número entero positivo.
- $a = \dfrac{1}{n}$, donde n es un número entero positivo.
- $a = -1$

Caso I

La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar.

- Si n es par, entonces su gráfica es similar a la parábola $y = x^2$.
- Si n es impar, entonces es una función impar, y su gráfica es similar a la de $y = x^3$.

Caso I

La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar. cuando n aumenta, la gráfica de $y = x^n$ se aplana más cerca de 0 y es más pronunciada cuando $|x| \geq 1$.

Caso II

La función $f(x) = x^{1/n}$ es una función raíz.

- Para $n = 2$ es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, con dominio en $[0, +\infty[$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $x = y^2$. Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$.

Caso II

La función $f(x) = x^{1/n}$ es una función raíz.

- Para $n = 3$ se tiene la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$. La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar $(n > 3)$ es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.

Caso III

La gráfica de la función recíproca $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es la gráfica que tiene la ecuación $y = \dfrac{1}{x}$ o $xy = 1$, y es una hipérbola con los ejes de coordenadas como sus asíntotas.

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definición (Función racional)

Una función racional f es un cociente de dos funciones polinomiales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo

La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional con dominio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Definición (Función algebraica)

Una función f se llama función algebraica si puede construirse utilizando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación, división y tomando raíces) comenzando con los polinomios. Cualquier función racional es automáticamente una función algebraica.

Ejemplo

Las siguientes funciones son algebraicas

- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- $g(x) = \dfrac{x^4-16x^2}{x+\sqrt{x}} + (x-2)\sqrt[3]{x+1}$

Definición (Función seno)

La función seno dado por la regla de correspondencia $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene por gráfica

- $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\operatorname{Ran}(f) = [-1, 1]$.

Definición (Función coseno)

La función coseno dado por la regla de correspondencia $f(x) = \cos x$ tiene por gráfica

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Ran}(f) = [-1, 1]$.

Definición (Función tangente)

La función tangente dada por la regla de correspondencia $f(x) = \tan x$ tiene por gráfica:

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$.
- $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R}$.

Definición (Función exponencial)

Las funciones exponenciales son funciones de la forma $f(x) = b^x$, donde la base b es una constante positiva.

$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = (0.5)^x$$

Definición (Función logarítmica)

Las funciones logarítmicas $f(x) = \log_b x$, donde la base b es una constante positiva, son las funciones inversas de las funciones exponenciales.

Sesión 01

1 Función
- Funciones reales de variable real
- Funciones especiales
- Funciones trigonométricas
- Funciones trascendentes

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning