COEFICIENTES BINOMIALES. ESTIMACIONES DE LA FUNCIÓN FACTORIAL

Profesores del curso:

Ronald Mass [1]

Ángel Ramírez [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

14 de junio de 2020

Tabla de contenidos

Teorema Binomial

Teorema 1

Para cualquier entero n no negativo se cumple:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

En particular, el teorema anterior para $x = 1$ resulta:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Proposición 1

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

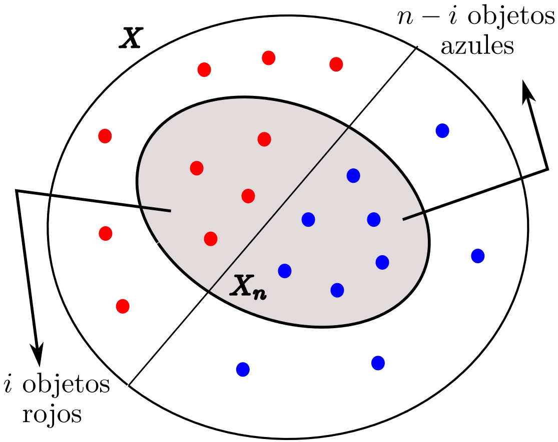
Demostración:

Observe que:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}$$

y que esta suma representa el número de subconjuntos de n elementos de un conjunto que tiene $2n$ elementos (probando así la proposición).

Considere un conjunto X tal que $|X| = 2n$, de los cuales n elementos son de color rojo y los n restantes son de color azul. Para elegir un subconjunto $X_n \subset X$ de n elementos, ahora significa elegir subconjuntos de i elementos de color rojo y subconjuntos de $n-i$ elementos de color azul, donde $i = 0, 1, \ldots, n$.



Para un i dado, existen $\binom{n}{i}$ posibilidades para elegir subconjuntos de objetos rojos, independientemente se tienen $\binom{n}{n-i}$ posibilidades para elegir subconjuntos de objetos azules. En total, el número de subconjuntos de n elementos de X pueden ser seleccionados de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$ modos distintos.

Ejemplo:

Calcule $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}3^{j-1}$.

Del Teorema Binomial tenemos:

$\dfrac{d}{dx}(1+x)^n = n(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}x^{j-1}$ y evaluando en $x=3$ resulta:

$$\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}3^{j-1} = n4^{n-1}.$$

Tabla de contenidos

¿Cómo ordenar elementos de un conjunto cuando uno de sus elementos se repite? Ejemplo: cara

Consideremos cara $\equiv$ cara para "*diferenciar*" las letras " **a** " una de la otra en la palabra " **cara**". Veamos ahora las formas **distintas** de ordenar las letras:

cara	caar	cara	caar	craa	craa	raac	rcaa
raca	raca	raac	rcaa	acra	acar	arca	arac
aacr	aarc	acra	acar	arca	arac	aacr	aarc

Vemos que 2 ordenaciones de cara da lugar a la misma ordenación de las letras (resultado de intercambiar apor a). Por tanto, las letras de cara pueden ser ordenadas de $\frac{24}{2} = 12$ formas distintas.

Caso general:

Proposición 2

Supongamos que tenemos una lista de n objetos de r tipos diferentes. Del tipo 1 hay un total de n_1 objetos, todos ellos indistinguibles. Del tipo 2 hay n_2 objetos y así sucesivamente hasta el tipo r del cual hay n_r objetos. Entonces, el número total de ordenaciones de estos objetos es:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \, \ldots \, n_r!}$$

Demotración:

Para situar los n objetos, situamos en primer lugar los n_1 objetos del tipo 1. Para esto, únicamente hay que elegir el lugar en van a situarse estos objetos, y eso puede hacerse de $\binom{n}{n_1}$ formas.
Una vez hecho esto, situamos los n_2 objetos del tipo 2. Ahora tenemos únicamente $n - n_1$ lugares disponibles, luego, podemos colocarlos de $\binom{n-n_1}{n_2}$ formas.
Razonando de esta forma sucesivamente, el número total de ordenaciones es:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\dots\binom{n-n_1-\dots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\dots\,n_r!}$$

El problema de repartir objetos distinguibles en cajas distinguibles es una aplicación de la Proposición 2. Supongamos que tenemos n objetos y queremos repartirlos en r cajas de forma que en la primera caja haya n_1 objetos, en la caja 2 hay n_2 objetos y así sucesivamente hasta la $r-$ésima caja en la que debe haber n_r objetos.
El número de formas viene dado por:

$$\underbrace{\binom{n}{n_1}}_{Caja\,1}\underbrace{\binom{n-n_1}{n_2}}_{Caja\,2}\cdots\underbrace{\binom{n-n_1-\ldots-n_{r-1}}{n_r}}_{Caja\,r}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_r!}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$. Se define el **coeficiente multinomial** como:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \,\ldots\, n_r!}$$

Lema 1

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ tal que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n + 1$. Entonces:

$$\sum_{k=1}^{r} \binom{n}{n1, n_2, \ldots, n_k - 1, \ldots, n_r} = \binom{n+1}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$$

Si para algún i entre 1 y r se tiene $n_i = 0$ entonces el sumando para $k = i$ también vale cero.

Demostración:

$$\binom{n}{n_1-1, n_2, \ldots, n_r} + \ldots + \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r - 1} =$$

$$\frac{n!}{(n_1-1)!\, n_2! \ldots n_r!} + \ldots + \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots (n_r-1)!} =$$

$$\frac{n!\, n_1}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!} + \ldots + \frac{n!\, n_r}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}(n_1 + \ldots + n_r) = \frac{(n+1)!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!} = \binom{n+1}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$$

Teorema 2 (Teorema multinomial)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_r=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$$

Demostración:

Inducción sobre n:

1. Caso base: $n = 1$:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_r,$$

pues las únicas formas de expresar 1 como suma de r sumandos es: $1 + 0 + \ldots + 0$ (da lugar al sumando x_1), $0 + 1 + \ldots + 0$ (da lugar al sumando x_2) y así sucesivamente.

2. Hipótesis de inducción: El teorema es válido para n.

Demostración: (cont.)

3. Demostremos para $n+1$:
   Denote $a = (x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$, luego:

   $$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^{n+1} = (x_1+\ldots+x_r)^n(x_1+\ldots+x_r) = a(x_1+\ldots+x_r)$$

   Ahora, dados $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n+1$, el coeficiente de:

   $$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_r^{n_r} \quad \text{en} \quad (x_1 + \ldots + x_r)^{n+1}$$

   se obtiene sumando los coeficientes de:

   $$x_1^{n_1-1}x_2^{n_2}\ldots x_r^{n_r}, x_1^{n_1}x_2^{n_2-1}\ldots x_r^{n_r}, \ldots, x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_r^{n_r-1}$$

   que aparecen en el desarrollo de " a ".

Demostración: (cont.)

Por la hipótesis inductiva, estos coeficientes valen:

$$\binom{n}{n_1 - 1, n_2, \ldots, n_r}, \binom{n}{n_1, n_2 - 1, \ldots, n_r}, \ldots, \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r - 1}$$

y su suma se calcula usando el Lema 1, lo cual resulta en:

$$\binom{n+1}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$$

Ejemplos:

1. Demuestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$
2. Determine el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $(1 + x^2 - x^3)^9$.
3. Calcule $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}5^{2n-2k}2^{2k-2}6^{k+2}.$

Resolución:

Veamos **3**:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(5^2)^{n-k}[(2^2)(6)]^k(2^{-2})(6^2) \\ &= 25\frac{36}{4}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}25^{n-1-k}(24^k) \\ &= 25(9)(25-24)^{n-1} = 225. \end{aligned}$$

Tabla de contenidos

Primeras estimaciones

Observe que:

$$n! \leq \prod_{i=1}^{n} i \leq \prod_{i=1}^{n} n = n^n$$

$$n! = \prod_{i=2}^{n} i \geq \prod_{i=2}^{n} 2 = 2^{n-1}$$

por tanto se tiene la siguiente estimación:

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^n$$

¿$n!$ está más cerca de 2^{n-1} o de n^n?

Tenemos dos casos:

1. n par: Entonces $\frac{n}{2}$ elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ son a lo más $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}$ son mayores que $\frac{n}{2}$. Luego:

$$n! \geq \prod_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} i \geq \prod_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{n}{2} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^{n}$$

por otro lado:

$$n! \leq \left(\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{n}{2}\right)\left(\prod_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} n\right) = \frac{n^n}{2^{n/2}}.$$

¿n! está más cerca de 2^{n-1} o de n^n? (cont.)

2. n impar: Demuestre que:

$$\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n < n! \leq \frac{n^n}{2^{n/2}}$$

para todo $n \geq 3$

Teorema 3

Para todo $n \in \mathbb{N}$: $\quad n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

Demostración:

La idea es conectar cada $i = 1, 2, \ldots, n$ con $n+1-i$ y estimar cada producto $i(n+1-i)$ superiormente e inferiormente.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se tiene que $n+1-i = n, n-1, \ldots, 2, 1$; así el producto:

$$\prod_{i=1}^{n} i(n+1-i)$$

contiene cada factor $j = 1, 2, \ldots, n$ exactamente 2 veces, así se obtiene $(n!)^2$, por tanto:

$$(n!)^2 = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i(n+1-i)}$$

Eligiendo $a = i$ y $b = n+1-i$ y sabiendo que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ para todo $a, b \geq 0$; se obtiene:

$$\sqrt{i(n+1-i)} \leq \frac{(i+n+1-i)}{2} = \frac{n+1}{2},$$

así:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i(n+1-i)} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Para probar la cota inferior, basta mostrar que $i(n+1-i) \geq n$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.
Para $2 \leq i \leq n-1$ tenemos el producto de dos números y observe:

- El más grande siendo al menos $n/2$,
- El más pequeño siendo al menos 2,

por tanto:

$$i(n+1-i) \geq \frac{n}{2}(2) = n \quad \forall\, i$$

entonces:

$$n! \geq \sqrt{n^n} = n^{n/2}.$$

Teorema 4

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple: $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Demostración:

Probemos la cota superior, es decir: $n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Procedemos por inducción:

1. Caso base: $n = 1$, se verifica fácilmente: $1 \leq 1$.
2. Hipótesis de inducción: Supongamos válida la cota para $n-1$, es decir:
$$(n-1)! \leq e(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}$$

3. Veamos que se cumple para n:

$$n! = n(n-1)! \leq n\left[e(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}\right]$$

$$n! \leq \underbrace{ne\frac{(n-1)^n}{e^{n-1}}\frac{e}{e}\frac{n^n}{n^n}}_{=}$$

$$\leq \left[en\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]\underbrace{\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^n e\right]}_{(*)}$$

resta mostrar que $(*)$ es menor que 1. En efecto:

$$(*) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n e = e\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \leq e\left(e^{-1/n}\right)^n = ee^{-1} = 1$$

Probar la cota inferior queda como ejercicio.

Teorema 5 (Fórmula de Stirling)

Para $n \in \mathbb{N}$ *se define* $f(n) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *y se cumple:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n!} = 1$$

La demostración queda como ejercicio.