Ordenamientos parcial y lineal

Ronald Mas
Angel Ramirez

12 de junio de 2020

Contenido

Elementos minimales y maximales

Definición

Sea $(X, \preceq)$ un conjunto ordenado.

1) Un elemento $a \in X$ se dice que es elemento minimal de $(X, \preceq)$ si no existe $x \in X$ tal que $x \prec a$.
2) Un elemento $a \in X$ se dice que es elemento maximal de $(X, \preceq)$ si no existe $x \in X$ tal que $x \succ a$.

Definición

Sea $(X, \preceq)$ un conjunto ordenado.

1) Un elemento $a \in X$ se dice que es el elemento mínimo de $(X, \preceq)$ si $a \preceq x$, $\forall x \in X$.
2) Un elemento $a \in X$ se dice que es el elemento máximo de $(X, \preceq)$ si $x \preceq a$, $\forall x \in X$.

Diagrama de Hasse

Es una representación gráfica simplificada de un conjunto ordenado finito.
Ejemplo: En el Ejemplo 1) el elemento minimal y maximal coinciden con el elemento mínimo y máximo respectivamente. En el ejemplo 2) el elemento minimal coincide con el elemento mínimo y no posee elemento máximo.

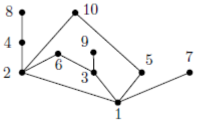
1) Diagrama de Hasse del conjunto linealmente ordenado

$$(A, \leq) = (\{1, 2, \cdots, 7\}, \leq) :$$

Elemento minimal:1
Elemento maximal:7

2) Diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado

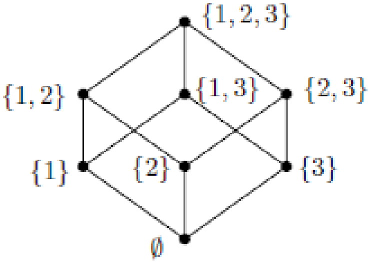
$$(B, |) = (\{1, 2, \cdots, 10\}, |) :$$



Elemento minimal:1
Elemento maximales:6,7,8,9,10

3) Diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado

$$(C, \subseteq) = (\{1,2,3\}, \subseteq)$$



Elemento minimal:$\emptyset$
Elemento maximal: $\{1,2,3\}$

Teorema

Todo conjunto parcialmente ordenado $(X, \preceq)$ *posee al menos un elemento minimal.*

Prueba:
Sea $x_0 \in X$. Si x_0 es minimal no hay nada que probar, caso contrario existe $x_1 \prec x_0$, luego si x_1 es minimal no hay nada que probar, caso contrario existe $x_2 \prec x_1$. Luego como X es finito, al proceder una cantidad finita de veces se tiene el resultado deseado.

Teorema

Sea $(X, \preceq)$ *un conjunto finito parcialmente ordenado. Entonces existe un ordenamiento lineal* $\leq$ *en* X *tal que* $x \preceq y$ *implica que* $x \leq y$.

Ordenamiento por inclusión

Definición

Sean $(X, \preceq)$ y $(X', \preceq')$ dos conjuntos ordenados. Una aplicación $f : X \to X'$ es llamada un **encaje** de $(X, \preceq)$ en $(X', \preceq')$ si cumple las siguientes propiedades:

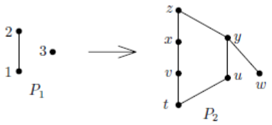
1) f es una aplicación inyectiva.
2) $f(x) \preceq' f(y)$ si y sólo si $x \preceq y$.

Observaciones:

- Si f es un encaje y también sobreyectiva entonces f e un isomorfismo.
- Un encaje f significa que una parte de $(X', \preceq')$, es decir la parte $\{f(x) : x \in X\}$ se parece a $(X, \preceq)$.

Ejemplo

Ejemplo: Sean los siguientes diagramas de Hasse de dos conjuntos ordenados.



Son ejemplos de encajes:

$$\begin{array}{cccc} f: & P_1 & \to & P_2 \\ & 1 & \mapsto & v \\ & 2 & \mapsto & x \\ & 3 & \mapsto & y \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} f': & P_1 & \to & P_2 \\ & 1 & \mapsto & t \\ & 2 & \mapsto & x \\ & 3 & \mapsto & w \end{array}$$

No son ejemplos de encajes:

$$\begin{array}{cccc} g: & P_1 & \to & P_2 \\ & 1 & \mapsto & t \\ & 2 & \mapsto & v \\ & 3 & \mapsto & y \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} g' & P_1 & \to & P_2 \\ & 1 & \mapsto & x \\ & 2 & \mapsto & w \\ & 3 & \mapsto & u \end{array}$$

Teorema

Para todo conjunto ordenado $(X, \preceq)$ existe un encaje en $(2^X, \subseteq)$.

Prueba:

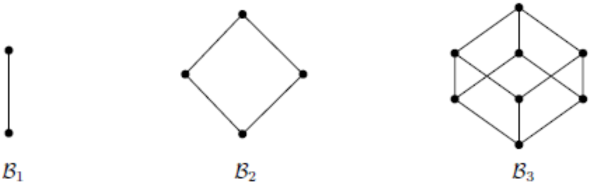
Definamos:

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & 2^X \\ & x & \mapsto & f(x) = \{y \in X : y \preceq x\}. \end{array}$$

Veamos que f es un encaje

1) Si $f(x) = f(y)$, entonces por ser $\preceq$ reflexiva se tiene que $x \in f(x)$ y $y \in f(Y)$, luego $x \preceq y$ y $y \preceq x$ y por ser $\preceq$ antisimétrica se tiene $x = y$. Por tanto f es inyectiva.
2)
   - Veamos que, si $x \preceq y$ entonces $f(x) \subseteq f(y)$:
     Sea $z \in f(x)$ entonces $z \preceq x$ y por transitividad de $\preceq$ se tiene que $z \preceq y$, luego $z \in f(y)$.
   - Veamos que, si $f(x) \subseteq f(y)$ entonces $x \preceq y$:
     Como $f(x) \subseteq f(y)$ entonces $x \in f(y)$ y por tanto $x \preceq y$.

En particular, para $X = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto ordenado $(2^X, \subseteq)$ se denotan por B_n. Veamos los diagramas de Hasse de B_1, B_2, B_3.



Una aplicación de adicionar propiedades a dichos conjuntos es el estudio del Álgebra de Boole.

Independencia sobre un conjunto ordenado

En adelante usemos P para denotar un conjunto finito parcialmente ordenado $(X, \preceq)$.

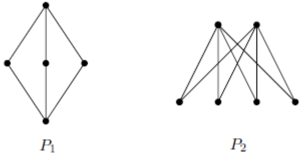
Definición

Un conjunto $A \subseteq X$ es llamado **independiente** en P si cualquier par de elementos distintos de A son incomparables.

Denotamos:

$$\alpha(P) = max\{|A| : A \, \text{es indenpendiente en } P\}.$$

Ejemplo: Para los conjuntos parcialmente ordenados



se tiene que $\alpha(P_1) = 3$ y $\alpha(P_2) = 4$.

Definición

Un conjunto $A \subseteq X$ es llamado una cadena en P si cualquier par de elementos son comparables.

Denotamos:

$$w(P) = max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \ k = \text{número de elementos de la cadena P}\}$$

Ejemplo: Para los conjuntos parcialmente ordenados del ejemplo anterior se tiene que $w(P_1) = 3$ y $w(P_2) = 2$.

Teorema

Para conjunto finito ordenado $P = (X, \preceq)$ se cumple que:

$$\alpha(P) \cdot w(P) \geq |X|.$$