Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Septiembre 5, 2021

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que una función F es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

- Una antiderivada de la función $f(x) = \cos x$ con $x \in]0, 2\pi[$ es la función $F(x) = \operatorname{sen} x$, en efecto $F'(x) = \cos x = f(x)$ para todo $x \in]0, 2\pi[$.

Ejemplo

- Una antiderivada de la función $f(x) = \cos x$ con $x \in]0, 2\pi[$ es la función $F(x) = \operatorname{sen} x$, en efecto $F'(x) = \cos x = f(x)$ para todo $x \in]0, 2\pi[$.
- Pero la función $G(x) = \operatorname{sen} x + 2020$ con $x \in]0, 2\pi[$ también satisface $G'(x) = \cos x = f(x)$ para todo $x \in]0, 2\pi[$, así $G(x) = \operatorname{sen} x + 2020$ también es una antiderivada de f en $]0, 2\pi[$.

Teorema

Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces la función $G(x) = F(x) + C$ es una antiderivada de f sobre I, donde C es una constante.

Teorema

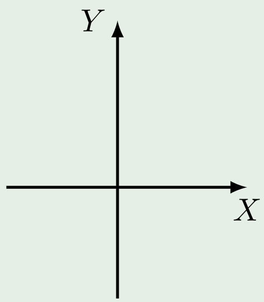
Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces la función $G(x) = F(x) + C$ es una antiderivada de f sobre I, donde C es una constante.

Demostración.

Sea F una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.
Además la función $G(x) = F(x) + C$ es diferenciable en I, luego $G'(x) = F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.
Por lo tanto, G es una antiderivada de f sobre I. $\square$

Ejemplo

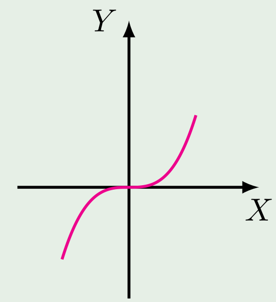
Para la función $f(x) = x^2$, vemos que una antiderivada de f es $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.



Antiderivadas | **Antiderivada e integral indefinida** | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Para la función $f(x) = x^2$, vemos que una antiderivada de f es $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.



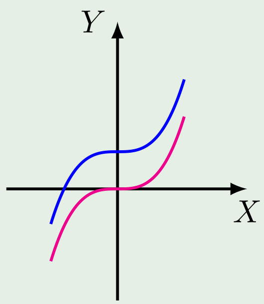
- $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | **Antiderivada e integral indefinida** | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Para la función $f(x) = x^2$, vemos que una antiderivada de f es $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.



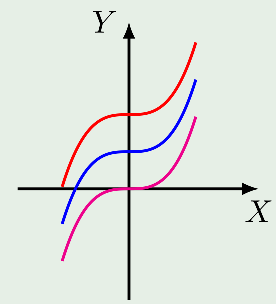
- $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$
- $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | **Antiderivada e integral indefinida** | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Para la función $f(x) = x^2$, vemos que una antiderivada de f es $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.

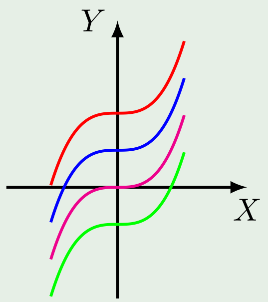


- $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$
- $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$
- $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Para la función $f(x) = x^2$, vemos que una antiderivada de f es $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$.



La integral indefinida

Definición

Sean I un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ una función y F una antiderivada de f en I. La integral indefinida (o antiderivada general) de f en I se denota por $\int f(x)dx$ y se define como:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde C es una constante real.

Ejemplo

Encuentre la integral indefinida de $f(x) = x^n$, $n \neq -1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejemplo

Encuentre la integral indefinida de $f(x) = x^n$, $n \neq -1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Resolución: La función $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ es una antiderivada de $f(x) = x^n$ en $\mathbb{R}$, pues $F'(x) = x^n = f(x)$.

Ejemplo

Encuentre la integral indefinida de $f(x) = x^n$, $n \neq -1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Resolución: La función $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ es una antiderivada de $f(x) = x^n$ en $\mathbb{R}$, pues $F'(x) = x^n = f(x)$.
Así la integral indefinida de $f(x) = x^n$ es

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Ejemplo

Encuentre la integral indefinida de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Ejemplo

Encuentre la integral indefinida de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Resolución: La función $F(x) = -\dfrac{1}{x}$ es una antiderivada de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en cualquier intervalo que no contenga a 0, ya que $F'(x) = \dfrac{1}{x^2} = f(x)$.

Ejemplo

Encuentre la integral indefinida de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Resolución: La función $F(x) = -\dfrac{1}{x}$ es una antiderivada de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en cualquier intervalo que no contenga a 0, ya que $F'(x) = \dfrac{1}{x^2} = f(x)$.

Así la integral indefinida de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es

$$\int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + C$$

Observación

No siempre es posible encontrar antiderivadas elementales de una función.

Observación

No siempre es posible encontrar antiderivadas elementales de una función.

Ejemplo

Para la función $f(x) = e^{-x^2}$ no existe ninguna función elemental $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

Teorema

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : I \to \mathbb{R}$, F y G antiderivadas de f y g respectivamente, entonces $F + G$ es una antiderivada de $f + g$ en I, además

$$\int (f+g)(x)dx = F(x) + G(x) + C, \quad \forall x \in I$$

donde C es una constante real.

Demostración.

Si F y G son antiderivadas de f y g respectivamente sobre el intervalo I, entonces $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Luego,

$$(F+G)'(x) \quad = \quad [F(x) + G(x)]'$$

.

$\square$

Demostración.

Si F y G son antiderivadas de f y g respectivamente sobre el intervalo I, entonces $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Luego,

$$\begin{aligned}(F+G)'(x) &= [F(x)+G(x)]' \\ (F+G)'(x) &= F'(x)+G'(x)\end{aligned}$$

. $\square$

Antiderivadas Antiderivada e integral indefinida Aplicaciones de la integral indefinida Ejercicios Referencias

Demostración.

Si F y G son antiderivadas de f y g respectivamente sobre el intervalo I, entonces $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Luego,

$$\begin{aligned}(F+G)'(x) &= [F(x)+G(x)]' \\ (F+G)'(x) &= F'(x)+G'(x) \\ (F+G)'(x) &= f(x)+g(x)\end{aligned}$$

. $\square$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas Antiderivada e integral indefinida Aplicaciones de la integral indefinida Ejercicios Referencias

Demostración.

Si F y G son antiderivadas de f y g respectivamente sobre el intervalo I, entonces $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Luego,

$$\begin{aligned}(F+G)'(x) &= [F(x)+G(x)]' \\ (F+G)'(x) &= F'(x)+G'(x) \\ (F+G)'(x) &= f(x)+g(x) \\ (F+G)'(x) &= (f+g)(x), \quad \forall x \in I\end{aligned}$$

. $\square$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas Antiderivada e integral indefinida Aplicaciones de la integral indefinida Ejercicios Referencias

Demostración.

Si F y G son antiderivadas de f y g respectivamente sobre el intervalo I, entonces $F'(x) = f(x)$ y $G'(x) = g(x)$. Luego,

$$\begin{aligned}(F+G)'(x) &= [F(x)+G(x)]' \\ (F+G)'(x) &= F'(x)+G'(x) \\ (F+G)'(x) &= f(x)+g(x) \\ (F+G)'(x) &= (f+g)(x), \quad \forall x \in I\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F+G$ es una antiderivada de $f+g$ en I. $\square$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración.

Además,

$$\int (f+g)(x)dx = (F+G)(x)+C$$

$\square$

Demostración.

Además,

$$\begin{aligned}\int (f+g)(x)dx &= (F+G)(x)+C \\ \int (f+g)(x)dx &= F(x)+G(x)+C, \quad \forall x \in I\end{aligned}$$

$\square$

Demostración.

Además,

$$\begin{aligned}\int (f+g)(x)dx &= (F+G)(x)+C \\ \int (f+g)(x)dx &= F(x)+G(x)+C, \quad \forall x \in I\end{aligned}$$

donde C es una constante real. $\square$

Teorema

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$, F una antiderivada de f y k una constante real, entonces kF es una antiderivada de kf, además

$$\int (kf)(x)dx = kF(x)+C, \quad \forall x \in I$$

Tabla de antiderivadas

Funciones

$\dfrac{d}{dx}x = 1$	

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Tabla de antiderivadas

Funciones

$\dfrac{d}{dx}x = 1$	$\displaystyle\int dx = x + C$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Tabla de antiderivadas

Funciones

$\dfrac{d}{dx}x = 1$	$\displaystyle\int dx = x + C$
$\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = x^n, n \neq -1$	

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Tabla de antiderivadas

Funciones

$\dfrac{d}{dx}x = 1$	$\displaystyle\int dx = x + C$
$\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = x^n, n \neq -1$	$\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Tabla de antiderivadas

Funciones

$\frac{d}{dx}x = 1$	$\int dx = x + C$
$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n, n \neq -1$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$	

Tabla de antiderivadas

Funciones

$\frac{d}{dx}x = 1$	$\int dx = x + C$
$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n, n \neq -1$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$

Funciones trigonométricas

$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	

Funciones trigonométricas

$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Antiderivadas Antiderivada e integral indefinida Aplicaciones de la integral indefinida Ejercicios Referencias

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas Antiderivada e integral indefinida Aplicaciones de la integral indefinida Ejercicios Referencias

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$
$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas Antiderivada e integral indefinida Aplicaciones de la integral indefinida Ejercicios Referencias

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$
$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \qquad \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$
$$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$
$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad \int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Funciones trigonométricas

$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$	

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Funciones trigonométricas

$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Funciones trigonométricas inversas

$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsec} |x| + C$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Funciones exponenciales

$$\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b), \quad (b > 0, b \neq 1)$$

Funciones exponenciales

$$\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b), \quad (b > 0, b \neq 1)$$

$$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$$

Funciones exponenciales

$$\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b), \quad (b > 0, b \neq 1)$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$$

Funciones exponenciales

$$\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b), \quad (b > 0, b \neq 1)$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\int b^x\,dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Ejemplo

Encuentre la integral indefinida de la función

$$f(x) = 3\cos x + 4x^2 - 7\sqrt[5]{x^2}$$

Ejemplo

Encuentre la integral indefinida de la función

$$f(x) = 3\cos x + 4x^2 - 7\sqrt[5]{x^2}$$

Resolución: Una antiderivada de la función f es

$$F(x) = 3\operatorname{sen} x + \frac{4}{3}x^3 - 5x^{7/5}$$

Ejemplo

Encuentre la integral indefinida de la función

$$f(x) = 3\cos x + 4x^2 - 7\sqrt[5]{x^2}$$

Resolución: Una antiderivada de la función f es

$$F(x) = 3\operatorname{sen} x + \frac{4}{3}x^3 - 5x^{7/5}$$

Por lo tanto,

$$\int (3\cos x + 4x^2 - 7\sqrt[5]{x^2})\,dx = 3\operatorname{sen} x + \frac{4}{3}x^3 - 5x^{7/5} + C$$

Sesión 01

Problema geométrico

Ejemplo

Determine la ecuación de la curva para el cual $y'' = \dfrac{4}{x^3}$ y que es tangente a la recta $2x + y = 5$ en el punto $(1, 3)$.

Problema geométrico

Ejemplo

Determine la ecuación de la curva para el cual $y'' = \dfrac{4}{x^3}$ y que es tangente a la recta $2x + y = 5$ en el punto $(1, 3)$.

Resolución: Tenemos

$$\int y'' dx = \int \frac{4}{x^3} dx$$

Problema geométrico

Ejemplo

Determine la ecuación de la curva para el cual $y'' = \dfrac{4}{x^3}$ y que es tangente a la recta $2x + y = 5$ en el punto $(1, 3)$.

Resolución: Tenemos

$$\int y'' dx = \int \frac{4}{x^3} dx$$

esto nos conduce

$$y'(x) = -\frac{2}{x^2} + C, \quad \forall x \in]0, \infty[$$

Derivando en forma implícita a la ecuación $2x + y = 5$, obtenemos $2 + y' = 0$ esto nos conduce;

$$y'(x) \quad = \quad -2$$

Derivando en forma implícita a la ecuación $2x + y = 5$, obtenemos $2 + y' = 0$ esto nos conduce;

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2 \\ -\frac{2}{(1)^2} + C &= -2 \end{aligned}$$

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Derivando en forma implícita a la ecuación $2x + y = 5$, obtenemos $2 + y' = 0$ esto nos conduce;

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2 \\ -\frac{2}{(1)^2} + C &= -2 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Derivando en forma implícita a la ecuación $2x + y = 5$, obtenemos $2 + y' = 0$ esto nos conduce;

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2 \\ -\frac{2}{(1)^2} + C &= -2 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Antiderivadas | Antiderivada e integral indefinida | Aplicaciones de la integral indefinida | Ejercicios | Referencias

Derivando en forma implícita a la ecuación $2x + y = 5$, obtenemos $2 + y' = 0$ esto nos conduce;

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2 \\ -\frac{2}{(1)^2} + C &= -2 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Derivando en forma implícita a la ecuación $2x + y = 5$, obtenemos $2 + y' = 0$ esto nos conduce;

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2 \\ -\frac{2}{(1)^2} + C &= -2 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{2}{x^2} \\ \int y'(x)dx &= \int -\frac{2}{x^2}dx \end{aligned}$$

Derivando en forma implícita a la ecuación $2x + y = 5$, obtenemos $2 + y' = 0$ esto nos conduce;

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2 \\ -\frac{2}{(1)^2} + C &= -2 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{2}{x^2} \\ \int y'(x)dx &= \int -\frac{2}{x^2}dx \\ y(x) &= \frac{2}{x} + K \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 1$, para hallar K, tenemos

$$y(1) = \frac{2}{1} + K$$

Evaluando en $x = 1$, para hallar K, tenemos

$$\begin{aligned} y(1) &= \frac{2}{1} + K \\ 3 &= 2 + K \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 1$, para hallar K, tenemos

$$\begin{aligned} y(1) &= \frac{2}{1} + K \\ 3 &= 2 + K \\ 1 &= K \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 1$, para hallar K, tenemos

$$\begin{aligned} y(1) &= \frac{2}{1} + K \\ 3 &= 2 + K \\ 1 &= K \end{aligned}$$

Finalmente,

Evaluando en $x = 1$, para hallar K, tenemos

$$\begin{aligned} y(1) &= \frac{2}{1} + K \\ 3 &= 2 + K \\ 1 &= K \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y(x) = \frac{2}{x} + 1 \quad \forall x \in]0, \infty[$$

Algunas ecuaciones diferenciales sencillas

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden

La técnica de antiderivadas se puede usar con frecuencia para resolver una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

donde la variable dependiente y no aparece en el lado derecho. Luego, la solución general es la integral indefinida

$$y(x) = \int f(x)dx$$

Ejemplo

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 6x^3 + 2x$$

Ejemplo

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 6x^3 + 2x$$

Resolución: La solución general está dado por

$$y(x) = \int (6x^3 + 2x)dx$$

Ejemplo

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 6x^3 + 2x$$

Resolución: La solución general está dado por

$$\begin{aligned} y(x) &= \int (6x^3 + 2x)dx \\ y(x) &= \frac{3}{2}x^4 + x^2 + C \end{aligned}$$

Sesión 01

Ejercicios

1. Encuentre una antiderivada de
   a) $\int (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2})\,dx$
   b) $\int (x+4)(2x+1)\,dx$
   c) $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 2}{x^2+1}\,dx$
   d) $\int (x^3 - 2\sqrt{x})(x)\,dx$
   e) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\,dx$
   f) $\int (1 + \tan^2 x)\,dx$

Ejercicios

2. Del fondo de un tanque de almacenamiento fluye agua con una rapidez de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, donde $0 \leq t \leq 50$. Encuentre la cantidad de agua que fluye del tanque durante los primeros 10 minutos.
3. Una población de bacterias es de $4\,000$ en el tiempo $t = 0$ y su rapidez de crecimiento es $100 \cdot 2^t$ bacterias por hora después de t horas ¿Cuál es la población después de una hora?

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 01

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 7e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Ron Larson - Bruce Edwards
Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
Cengage Learning

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Septiembre 5, 2021

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

Sesión 02

Método de sustitución

Cambio de variable de integración

Si no se encuentra inmediatamente una determinación de $\displaystyle\int f(x)\,dx$ expresadas en funciones elementales, puede ser útil cambiar la variable x a t por la transformación $x = g(t)$, esto es

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

donde una vez obtenida la integral indefinida del segundo miembro se reemplaza t por su valor en función de x, esto es, por $t = g^{-1}(x)$, supuesta uniforme.

Ejemplo

Evalúe $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\, dx$.

Sesión 02 | Método de integración | Integrales indefinidas de funciones trigonométricas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\, dx$.

Resolución: Haciendo la sustitución $u = 1 + x^3$ se tiene que $du = 3x^2 dx$. Luego,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 | Método de integración | Integrales indefinidas de funciones trigonométricas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\, dx$.

Resolución: Haciendo la sustitución $u = 1 + x^3$ se tiene que $du = 3x^2 dx$. Luego,

$$\int \sqrt[3]{1+x^3}x^2\, dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{1+x^3}(3x^2)\, dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 | Método de integración | Integrales indefinidas de funciones trigonométricas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\, dx$.

Resolución: Haciendo la sustitución $u = 1 + x^3$ se tiene que $du = 3x^2 dx$. Luego,

$$\int \sqrt[3]{1+x^3}x^2\, dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{1+x^3}(3x^2)\, dx$$

$$\int \sqrt[3]{1+x^3}x^2\, dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{u}\, du = \frac{1}{3}\frac{3}{4}u^{4/3} + C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Evalúe $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\, dx$.

Resolución: Haciendo la sustitución $u = 1 + x^3$ se tiene que $du = 3x^2 dx$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{1+x^3} x^2\, dx &= \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{1+x^3}(3x^2)\, dx \\
\int \sqrt[3]{1+x^3} x^2\, dx &= \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{u}\, du = \frac{1}{3}\frac{3}{4}u^{4/3} + C \\
\int \sqrt[3]{1+x^3} x^2\, dx &= \frac{1}{4}(1+x^3)^{4/3} + C
\end{aligned}$$

Sesión 02 Método de integración Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}} dx$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 Método de integración Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}} dx$.

Resolución: Haciendo la sustitución $u = x^3 + 3x^2 + 4$ se tiene que $du = 3(x^2+2x)\, dx$. Luego,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 Método de integración Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}} dx$.

Resolución: Haciendo la sustitución $u = x^3 + 3x^2 + 4$ se tiene que $du = 3(x^2+2x)\, dx$. Luego,

$$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+2x)}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Evalúe $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}dx.$

Resolución: Haciendo la sustitución $u = x^3+3x^2+4$ se tiene que $du = 3(x^2+2x)\,dx$. Luego,

$$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+2x)}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}\,dx = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{3}\cdot 2u^{1/2}+C$$

Sesión 02 Método de integración Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}dx.$

Resolución: Haciendo la sustitución $u = x^3+3x^2+4$ se tiene que $du = 3(x^2+2x)\,dx$. Luego,

$$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+2x)}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}\,dx = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{3}\cdot 2u^{1/2}+C$$

$$\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+4}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x^2+4}+C$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 Método de integración Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx.$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 Método de integración Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx.$

Resolución: Haciendo el cambio de variable $t = 1+\operatorname{sen}^2 x$ se sigue que $dt = 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx$, es decir $dt = \operatorname{sen} 2x\,dx$. Luego,

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$.

Resolución: Haciendo el cambio de variable $t = 1+\operatorname{sen}^2 x$ se sigue que $dt = 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx$, es decir $dt = \operatorname{sen} 2x\,dx$. Luego,

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[4]{t}}\,dt = \int t^{-1/4}dt$$

Sesión 02 Método de integración Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$.

Resolución: Haciendo el cambio de variable $t = 1+\operatorname{sen}^2 x$ se sigue que $dt = 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx$, es decir $dt = \operatorname{sen} 2x\,dx$. Luego,

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[4]{t}}\,dt = \int t^{-1/4}dt$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx = \frac{4}{3}t^{3/4}+C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 Método de integración Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$.

Resolución: Haciendo el cambio de variable $t = 1+\operatorname{sen}^2 x$ se sigue que $dt = 2\operatorname{sen} x\cos x\,dx$, es decir $dt = \operatorname{sen} 2x\,dx$. Luego,

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[4]{t}}\,dt = \int t^{-1/4}dt$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx = \frac{4}{3}t^{3/4}+C$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt[4]{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx = \frac{1}{3}(1+\operatorname{sen}^2 x)^{3/4}+C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 Método de integración Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Ejercicios Referencias

Método de Integración por partes

Integración por partes

Sean f y g dos funciones diferenciables, por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Método de Integración por partes

Integración por partes

Sean f y g dos funciones diferenciables, por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int [f(x)g'(x) + f'(x)g(x)]\,dx &= f(x)g(x) \\ \int f(x)g'(x)\,dx + \int f'(x)g(x)\,dx &= f(x)g(x) \end{aligned}$$

Integración por partes

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Integración por partes

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ejemplo

Evalúe $\int x\cos x\,dx$.

Ejemplo

Evalúe $\int x \cos x \, dx$.

Resolución: Se elige $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, de donde $f'(x) = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Luego,

Ejemplo

Evalúe $\int x \cos x \, dx$.

Resolución: Se elige $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, de donde $f'(x) = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Luego,

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx$$

Ejemplo

Evalúe $\int x \cos x \, dx$.

Resolución: Se elige $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos x$, de donde $f'(x) = 1$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Luego,

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx \\ \int x \cos x dx &= x \operatorname{sen} x + \cos x + C \end{aligned}$$

Ejemplo

Evalúe $\int \frac{x^2}{(x \cos x - \operatorname{sen} x)^2} \, dx$.

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx.$

Resolución: Haciendo

$$u = \frac{x}{\operatorname{sen} x} \qquad dv = \frac{x\operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx$$

Sesión 02 | Método de integración | Integrales indefinidas de funciones trigonométricas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx.$

Resolución: Haciendo

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{\operatorname{sen} x} & dv &= \frac{x\operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx \\ du &= \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 | Método de integración | Integrales indefinidas de funciones trigonométricas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx.$

Resolución: Haciendo

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{\operatorname{sen} x} & dv &= \frac{x\operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx \\ du &= \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx & v &= \int \frac{x\operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 | Método de integración | Integrales indefinidas de funciones trigonométricas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx.$

Resolución: Haciendo

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{\operatorname{sen} x} & dv &= \frac{x\operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx \\ du &= \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx & v &= \int \frac{x\operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx \end{aligned}$$

y con el cambio $t = x\cos x - \operatorname{sen} x$, se tiene

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx.$

Resolución: Haciendo

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{\operatorname{sen} x} & dv &= \frac{x \operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx \\ du &= \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx & v &= \int \frac{x \operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx \end{aligned}$$

y con el cambio $t = x\cos x - \operatorname{sen} x$, se tiene

$$dt = (\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx$$

Sesión 02 | Método de integración | Integrales indefinidas de funciones trigonométricas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx.$

Resolución: Haciendo

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{\operatorname{sen} x} & dv &= \frac{x \operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx \\ du &= \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx & v &= \int \frac{x \operatorname{sen} x}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}\,dx \end{aligned}$$

y con el cambio $t = x\cos x - \operatorname{sen} x$, se tiene

$$\begin{aligned} dt &= (\cos x - x\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx \\ dt &= -x\operatorname{sen} x\,dx \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 | Método de integración | Integrales indefinidas de funciones trigonométricas | Ejercicios | Referencias

Luego,

$$v = \int -\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 02 | Método de integración | Integrales indefinidas de funciones trigonométricas | Ejercicios | Referencias

Luego,

$$\begin{aligned} v &= \int -\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t} \\ v &= \frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Luego,

$$v = \int -\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t}$$
$$v = \frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x}$$

entonces

Luego,

$$v = \int -\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t}$$
$$v = \frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x}$$

entonces

$$I = \frac{x}{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x}\right) - \int \frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x}\,\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$

Luego,

$$v = \int -\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{t}$$
$$v = \frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x}$$

entonces

$$I = \frac{x}{\operatorname{sen} x}\left(\frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x}\right) - \int \frac{1}{x\cos x - \operatorname{sen} x}\,\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$
$$I = \frac{x}{\operatorname{sen} x(x\cos x - \operatorname{sen} x)} - \cot x + C$$

Sesión 02

Integrales trigonométricas

Ejemplo

Evalúe $\int \cos^3 x\, dx$.

Integrales trigonométricas

Ejemplo

Evalúe $\int \cos^3 x\, dx$.

Resolución: Por identidades trigonométricas $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$,

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx$$

Integrales trigonométricas

Ejemplo

Evalúe $\int \cos^3 x\, dx$.

Resolución: Por identidades trigonométricas $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$,

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cos x\, dx \\ \int \cos^3 x\, dx &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx\end{aligned}$$

Sustituyendo $u = \operatorname{sen} x$ y $du = \cos x\, dx$ se tiene

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1 - u^2)\, du$$

Sustituyendo $u = \operatorname{sen} x$ y $du = \cos x \, dx$ se tiene

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \int (1-u^2)\, du \\ \int \cos^3 x \, dx &= u - \frac{1}{3}u^3 + C\end{aligned}$$

Sustituyendo $u = \operatorname{sen} x$ y $du = \cos x \, dx$ se tiene

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, dx &= \int (1-u^2)\, du \\ \int \cos^3 x \, dx &= u - \frac{1}{3}u^3 + C \\ \int \cos^3 x \, dx &= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C\end{aligned}$$

Ejemplo

Evalúe $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

Ejemplo

Evalúe $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

Resolución: Por identidades trigonométricas $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

Ejemplo

Evalúe $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

Resolución: Por identidades trigonométricas $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

Sustituyendo $u = \cos x$ y $du = -\operatorname{sen}\, dx$ se tiene

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = \int (1-u^2)^2 u^2 (-\,du)$$

Sustituyendo $u = \cos x$ y $du = -\operatorname{sen}\, dx$ se tiene

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = \int (1-u^2)^2 u^2 (-\,du)$$

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du$$

Sustituyendo $u = \cos x$ y $du = -\operatorname{sen}\, dx$ se tiene

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = \int (1-u^2)^2 u^2 (-\,du)$$

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du$$

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = -\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7\right) + C$$

Sustituyendo $u = \cos x$ y $du = -\operatorname{sen}\, dx$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int (1-u^2)^2 u^2 (-\,du) \\
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du \\
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= -\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7\right) + C \\
\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C
\end{aligned}$$

Sesión 02

Ejercicios

1. Encuentre una antiderivada de
   a) $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$
   b) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$
   c) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\, dx$
   d) $\int x\tan^2 x\, dx$
   e) $\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\, dx$
   f) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

Ejercicios

2. Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$$

   donde $n \geq 2$ es un entero.
3. Evalúe cada una de las siguientes integrales indefinidas. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, dibujando la función y su antiderivada (considere $C = 0$).
   a) $\int x(x^2-1)^3\, dx$
   b) $\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\, dx$

Sesión 02

Sesión 02 Método de integración Integrales indefinidas de funciones trigonométricas Ejercicios Referencias

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Ron Larson - Bruce Edwards
Cálculo, Tomo I. 11ma ed.
Cengage Learning

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Septiembre 12, 2021

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Contenido

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03

Principio de inducción matemática

Este principio establece que dado un subconjunto de enteros positivos $S \subset \mathbb{N}$ tal que

Principio de inducción matemática

Este principio establece que dado un subconjunto de enteros positivos $S \subset \mathbb{N}$ tal que

i. el número 1 pertenece a S, y

Principio de inducción matemática

Este principio establece que dado un subconjunto de enteros positivos $S \subset \mathbb{N}$ tal que

i. el número 1 pertenece a S, y

ii. si el número m pertenece a S, entonces $m + 1$ pertenece a S,

Principio de inducción matemática

Este principio establece que dado un subconjunto de enteros positivos $S \subset \mathbb{N}$ tal que

i. el número 1 pertenece a S, y
ii. si el número m pertenece a S, entonces $m+1$ pertenece a S,

entonces S coincide con el conjunto de todos los enteros positivos, es decir $S = \mathbb{N}$.

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demuestre que para cualquier número real $p \geq -1$ y cualquier entero positivo n se cumple que $(1+p)^n \geq 1 + np$.

Resolución:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demuestre que para cualquier número real $p \geq -1$ y cualquier entero positivo n se cumple que $(1+p)^n \geq 1 + np$.

Resolución: Sea $S = \{n \in \mathbb{N} / (1+p)^n \geq 1 + np\}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demuestre que para cualquier número real $p \geq -1$ y cualquier entero positivo n se cumple que $(1+p)^n \geq 1 + np$.

Resolución: Sea $S = \{n \in \mathbb{N} / (1+p)^n \geq 1 + np\}$

i. 1 pertenece a S ya que $(1+p)^1 = 1 + 1 \cdot p$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Demuestre que para cualquier número real $p \geq -1$ y cualquier entero positivo n se cumple que $(1+p)^n \geq 1 + np$.

Resolución: Sea $S = \{n \in \mathbb{N} / (1+p)^n \geq 1 + np\}$

i. 1 pertenece a S ya que $(1+p)^1 = 1 + 1 \cdot p$

ii. Si m pertenece a S, entonces $(1+p)^m \geq 1 + mp$.

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias
Ejemplo
Demuestre que para cualquier número real $p \geq -1$ y cualquier entero positivo n se cumple que $(1+p)^n \geq 1 + np$.
Resolución: Sea $S = \{n \in \mathbb{N} / (1+p)^n \geq 1 + np\}$
i. 1 pertenece a S ya que $(1+p)^1 = 1 + 1 \cdot p$
ii. Si m pertenece a S, entonces $(1+p)^m \geq 1 + mp$.
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Luego,

$$(1+p)^{m+1} = (1+p)(1+p)^m$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias
Luego,

$$\begin{aligned} (1+p)^{m+1} &= (1+p)(1+p)^m \\ (1+p)^{m+1} &\geq (1+p)(1+mp) = 1 + p + mp + mp^2 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Luego,

$$
\begin{aligned}
(1+p)^{m+1} &= (1+p)(1+p)^m \\
(1+p)^{m+1} &\geq (1+p)(1+mp) = 1+p+mp+mp^2 \\
(1+p)^{m+1} &\geq 1+(m+1)p
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
(1+p)^{m+1} &= (1+p)(1+p)^m \\
(1+p)^{m+1} &\geq (1+p)(1+mp) = 1+p+mp+mp^2 \\
(1+p)^{m+1} &\geq 1+(m+1)p
\end{aligned}
$$

Así pues, $m \in S$ implica que $(m+1) \in S$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
(1+p)^{m+1} &= (1+p)(1+p)^m \\
(1+p)^{m+1} &\geq (1+p)(1+mp) = 1+p+mp+mp^2 \\
(1+p)^{m+1} &\geq 1+(m+1)p
\end{aligned}
$$

Así pues, $m \in S$ implica que $(m+1) \in S$.
Por lo tanto, $S = \mathbb{N}$.

Ejemplo

Demuestre que si n es un entero positivo cualquiera, entonces $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es un entero.

Resolución:

Ejemplo

Demuestre que si n es un entero positivo cualquiera, entonces $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es un entero.

Resolución: Sea $S = \left\{ n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{3}(n^3+2n) \in \mathbb{Z} \right\}$.

Ejemplo

Demuestre que si n es un entero positivo cualquiera, entonces $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es un entero.

Resolución: Sea $S = \left\{ n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{3}(n^3+2n) \in \mathbb{Z} \right\}$.

i. $1 \in S$, ya que $\frac{1}{3}(1+2) = 1$.

Ejemplo

Demuestre que si n es un entero positivo cualquiera, entonces $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es un entero.

Resolución: Sea $S = \left\{ n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{3}(n^3+2n) \in \mathbb{Z} \right\}$.

i. $1 \in S$, ya que $\frac{1}{3}(1+2) = 1$.

ii. Si $m \in S$, entonces $\frac{1}{3}(m^3+2m) \in \mathbb{Z}$.

Luego,

$$\frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] = \frac{1}{3}(m^3+3m^2+3m+1+2m+2)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] &= \frac{1}{3}(m^3+3m^2+3m+1+2m+2)\\ \frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] &= \underbrace{\frac{1}{3}(m^3+2m)}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{m^2+m+1}_{\in\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] &= \frac{1}{3}(m^3+3m^2+3m+1+2m+2)\\ \frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] &= \underbrace{\frac{1}{3}(m^3+2m)}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{m^2+m+1}_{\in\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] \in \mathbb{Z}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] &= \frac{1}{3}(m^3+3m^2+3m+1+2m+2)\\ \frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] &= \underbrace{\frac{1}{3}(m^3+2m)}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{m^2+m+1}_{\in\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] \in \mathbb{Z}$$

Así, $m \in S$ implica $(m+1) \in S$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] &= \frac{1}{3}(m^3+3m^2+3m+1+2m+2)\\ \frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] &= \underbrace{\frac{1}{3}(m^3+2m)}_{\in\mathbb{Z}}+\underbrace{m^2+m+1}_{\in\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] \in \mathbb{Z}$$

Así, $m \in S$ implica $(m+1) \in S$.
Por lo tanto, $S = \mathbb{N}$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03

El símbolo de sumatoria

Si el índice es variable desde 1 a n, la notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ significa la suma abreviada de los n términos $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, y se lee: Sumatoria de a_i con i variando desde 1 a n.

El símbolo de sumatoria

Si el índice es variable desde 1 a n, la notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ significa la suma abreviada de los n términos $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, y se lee: Sumatoria de a_i con i variando desde 1 a n.
El desarrollo de una sumatoria se obtiene asignando a i, cada uno de los sucesivos valores de su rango de variación, y sumando los términos así obtenidos.

El símbolo de sumatoria

Si el índice es variable desde 1 a n, la notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ significa la suma abreviada de los n términos $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, y se lee: Sumatoria de a_i con i variando desde 1 a n.
El desarrollo de una sumatoria se obtiene asignando a i, cada uno de los sucesivos valores de su rango de variación, y sumando los términos así obtenidos.

Por ejemplo: $\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

Ejemplo

Desarrollar las siguientes sumatorias

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^i}{i}$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{i+1}$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a$

Resolución:

a) $$\sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^i}{i} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

Ejemplo

Desarrollar las siguientes sumatorias

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^i}{i}$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{i+1}$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a$

Resolución:

a) $$\sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^i}{i} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{i+1} = \frac{2\cdot 1}{1+1} + \frac{2\cdot 2}{2+1} + \frac{2\cdot 3}{3+1} + \ldots + \frac{2\cdot n}{n+1}$$

Ejemplo

Desarrollar las siguientes sumatorias

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^i}{i}$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{i+1}$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a$

Resolución:

a) $$\sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^i}{i} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i}{i+1} = \frac{2\cdot 1}{1+1} + \frac{2\cdot 2}{2+1} + \frac{2\cdot 3}{3+1} + \ldots + \frac{2\cdot n}{n+1}$$

c) $$\sum_{i=1}^{n} a = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n}$$

Ejemplo

Exprese en términos de sumatorias las siguientes sumas

a) $1 + 8 + 27 + 64 + 125$

b) $2 + \dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{3} + \dfrac{5}{4} + \dfrac{6}{5}$

Resolución:

a) $$1 + 8 + 27 + 64 = \sum_{i=1}^{4} i^3$$

Ejemplo

Exprese en términos de sumatorias las siguientes sumas

a) $1+8+27+64+125$

b) $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}$

Resolución:

a) $1+8+27+64=\sum_{i=1}^{4} i^3$

b) $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}=\sum_{i=1}^{5}\frac{i+1}{i}$

Propiedades de las sumatorias

Para todo n entero positivo se puede probar

P1. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

Propiedades de las sumatorias

Para todo n entero positivo se puede probar

P1. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

P2. $\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})=a_n-a_0$ ó $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_1$

Propiedades de las sumatorias

Para todo n entero positivo se puede probar

P1. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

P2. $\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})=a_n-a_0$ ó $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_1$

P3. $\sum_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i\pm\sum_{i=1}^{n}b_i$

Propiedades de las sumatorias

Para todo n entero positivo se puede probar

P4. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$, para todo $n > 1$ o

equivalentemente $\sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i$

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Propiedades de las sumatorias

Para todo n entero positivo se puede probar

P4. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$, para todo $n > 1$ o

equivalentemente $\sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i$

P5. $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=h}^{n+h} a_{i-h}, \ h \in \mathbb{Z}$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$.

Resolución:

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$.

Resolución: Por inducción matemática

i. $n = 1 : \sum_{i=1}^{1} 2^i = 2^1 = 4 - 2 = 2^{1+1} - 2$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$.

Resolución: Por inducción matemática

i. $n = 1: \sum_{i=1}^{1} 2^i = 2^1 = 4 - 2 = 2^{1+1} - 2$

ii. $n = m: \sum_{i=1}^{1} 2^i = 2^{m+1} - 2.$

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Para $n = m + 1$:

$$\sum_{i=1}^{m+1} 2^i = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^m + 2^{m+1}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Para $n = m + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} 2^i &= 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^m + 2^{m+1} \\ &= \sum_{i=1}^{m} 2^i + 2^{m+1}\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Para $n = m + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} 2^i &= 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^m + 2^{m+1} \\ &= \sum_{i=1}^{m} 2^i + 2^{m+1} \\ &= 2^{m+1} - 2 + 2^{m+1}\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Para $n = m + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} 2^i &= 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^m + 2^{m+1}\\ &= \sum_{i=1}^{m} 2^i + 2^{m+1}\\ &= 2^{m+1} - 2 + 2^{m+1}\\ &= 2 \cdot 2^{m+1} - 2\end{aligned}$$

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Para $n = m + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} 2^i &= 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^m + 2^{m+1}\\ &= \sum_{i=1}^{m} 2^i + 2^{m+1}\\ &= 2^{m+1} - 2 + 2^{m+1}\\ &= 2 \cdot 2^{m+1} - 2\\ &= 2^{m+1+1} - 2\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Para $n = m + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1} 2^i &= 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^m + 2^{m+1}\\ &= \sum_{i=1}^{m} 2^i + 2^{m+1}\\ &= 2^{m+1} - 2 + 2^{m+1}\\ &= 2 \cdot 2^{m+1} - 2\\ &= 2^{m+1+1} - 2\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Ejemplo (Sumas geométricas)

Si $x \neq 1$, $x \neq 0$ y $\sum_{i=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$, demuestre que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolución:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo (Sumas geométricas)

Si $x \neq 1$, $x \neq 0$ y $\sum_{i=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$, demuestre que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolución: Sea $a_k = x^k$, por P4 se tiene

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Ejemplo (Sumas geométricas)

Si $x \neq 1$, $x \neq 0$ y $\sum_{i=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$, demuestre que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolución: Sea $a_k = x^k$, por P4 se tiene

$$a_{n+1} - a_0 = \sum_{k=0}^{n} (x^{k+1} - x^k)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

esto es

$$x^{n+1} - 1 = \sum_{k=0}^{n} (x^{k+1} - x^k)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

esto es

$$x^{n+1} - 1 = \sum_{k=0}^{n} (x^{k+1} - x^k)$$

$$x^{n+1} - 1 = \sum_{k=0}^{n} x^k (x - 1)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

esto es

$$
\begin{aligned}
x^{n+1}-1 &= \sum_{k=0}^{n}(x^{k+1}-x^{k})\\
x^{n+1}-1 &= \sum_{k=0}^{n}x^{k}(x-1)\\
x^{n+1}-1 &= (x-1)\sum_{k=0}^{n}x^{k}
\end{aligned}
$$

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

esto es

$$
\begin{aligned}
x^{n+1}-1 &= \sum_{k=0}^{n}(x^{k+1}-x^{k})\\
x^{n+1}-1 &= \sum_{k=0}^{n}x^{k}(x-1)\\
x^{n+1}-1 &= (x-1)\sum_{k=0}^{n}x^{k}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{n}x^{k}=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Sesión 03

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Partición de un intervalo

Definición

Una partición del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito de números $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$ elegidos en $[a,b]$, que verifica

$$a=x_0\leq x_1\leq x_2\leq x_3\leq\ldots\leq x_{n-1}\leq x_n=b$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Partición de un intervalo

Definición

Una partición del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de números $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ elegidos en $[a, b]$, que verifica

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Denotaremos a la partición P, de la siguiente manera

$$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

Ejemplo

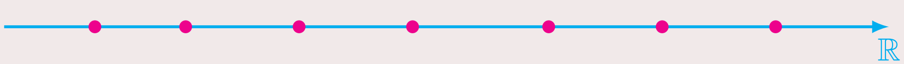
Si $P_1 = \left\{0, \dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{3}, 1\right\}$ y $P_2 = \left\{0, \dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, 1\right\}$ son particiones del intervalo $[0, 1]$.

Longitud de un intervalo

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.

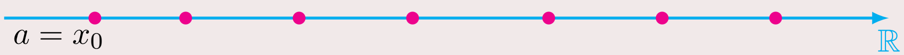
Longitud de un intervalo

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.



Longitud de un intervalo

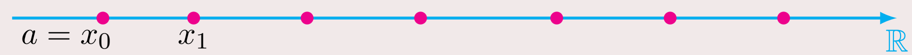
Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.



Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Longitud de un intervalo

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.

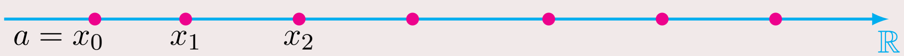


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Longitud de un intervalo

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.

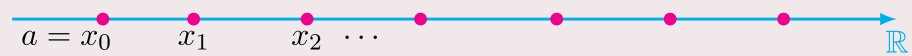


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Longitud de un intervalo

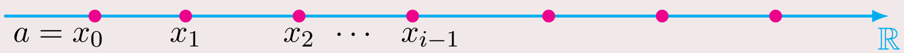
Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Longitud de un intervalo

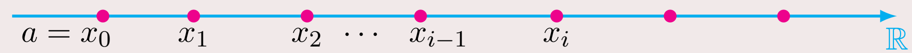
Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.



Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Longitud de un intervalo

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.

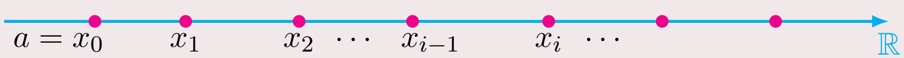


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Longitud de un intervalo

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.

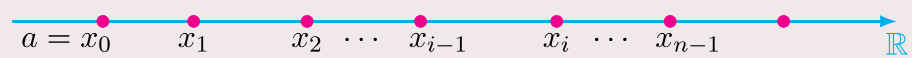


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Longitud de un intervalo

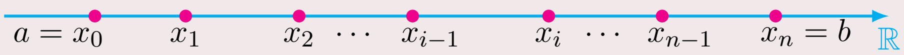
Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Longitud de un intervalo

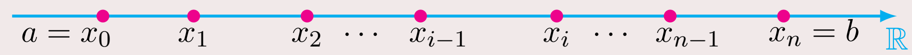
Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n+1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.



Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Longitud de un intervalo

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n+1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.
La longitud del i-ésimo subintervalo se define como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

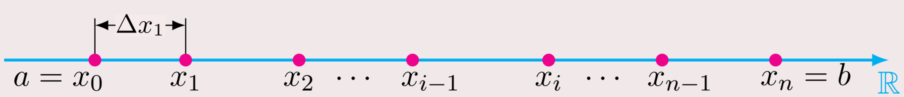


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Longitud de un intervalo

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n+1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.
La longitud del i-ésimo subintervalo se define como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

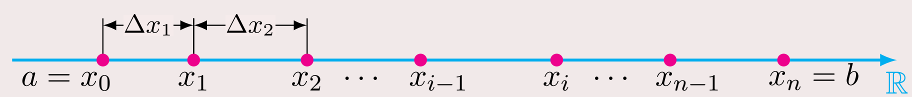


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Longitud de un intervalo

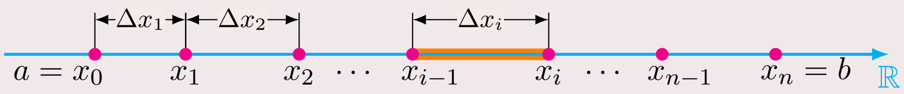
Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n+1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.
La longitud del i-ésimo subintervalo se define como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

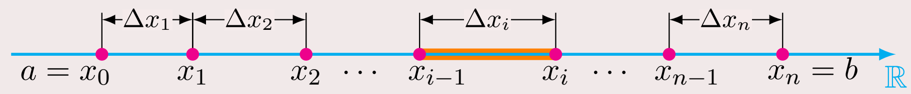
Longitud de un intervalo

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.
La longitud del i-ésimo subintervalo se define como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



Longitud de un intervalo

Asociada a toda partición se tiene el conjunto de n subintervalos cerrados $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ con $n + 1$ puntos de subdivisión.
El intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se llama el i-ésimo subintervalo.
La longitud del i-ésimo subintervalo se define como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.



Observación

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

Definición (Norma de una partición)

La norma de una partición se designa por $\|P\|$ y se define como
$\|P\| = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$

Definición (Norma de una partición)

La norma de una partición se designa por $\|P\|$ y se define como $\|P\| = \max\{\Delta x_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$

Ejemplo

Si $P_1 = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, 1\right\}$ y $P_2 = \left\{0, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ son particiones del intervalo $[0, 1]$, entonces $\|P_1\| = \max\left\{\frac{1}{7}, \frac{4}{21}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$ y $\|P_2\| = \max\left\{\frac{1}{7}, \frac{3}{28}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{2}$.

Sesión 03

Definición (Suma inferior)

Sea f una función acotada sobre $[a, b]$ y $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a, b]$, tenemos

$$m_i(f) = \inf\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Definición (Suma inferior)

Sea f una función acotada sobre $[a, b]$ y $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a, b]$, tenemos

$$m_i(f) = \inf\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

la suma inferior de f para P se representa por $\underline{S}(f, P)$ y se define como

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

Definición (Suma superior)

Sea f una función acotada sobre $[a, b]$ y $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a, b]$, tenemos

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Definición (Suma superior)

Sea f una función acotada sobre $[a, b]$ y $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a, b]$, tenemos

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Definición (Suma superior)

Sea f una función acotada sobre $[a, b]$ y $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ una partición de $[a, b]$, tenemos

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

la suma superior de f para P se representa por $\overline{S}(f, P)$ y se define como

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Ejemplo

Sea f una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x, & \text{si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} + 1, & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

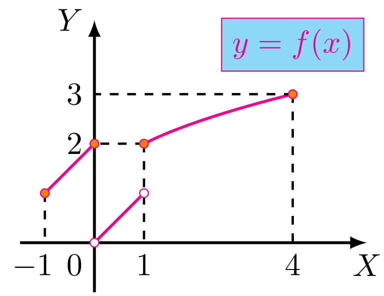
y $P = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$ una partición de $[-1, 4]$. Calcule $\underline{S}(f, P)$ y $\overline{S}(f, P)$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución:

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Resolución: Tenemos que f es acotada sobre $[-1,4]$ por que $0 \leq f(x) \leq 3$, para todo $x \in [-1,4]$

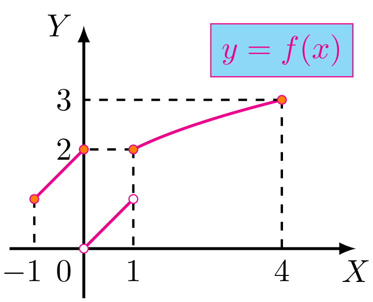


$[x_0,x_1]: \; m_1 = 1, \qquad M_1 = 2$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Resolución: Tenemos que f es acotada sobre $[-1,4]$ por que $0 \leq f(x) \leq 3$, para todo $x \in [-1,4]$



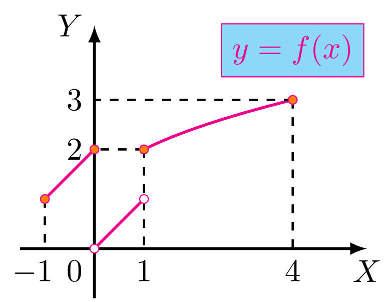
$[x_0,x_1]: \; m_1 = 1, \qquad M_1 = 2$

$[x_1,x_2]: \; m_2 = 0, \qquad M_2 = 1$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Resolución: Tenemos que f es acotada sobre $[-1,4]$ por que $0 \leq f(x) \leq 3$, para todo $x \in [-1,4]$



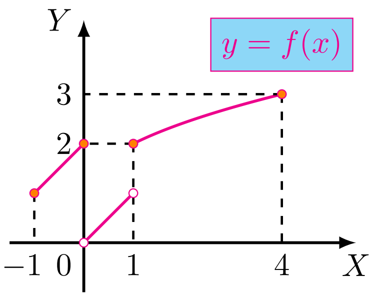
$[x_0,x_1]: \; m_1 = 1, \qquad M_1 = 2$

$[x_1,x_2]: \; m_2 = 0, \qquad M_2 = 1$

$[x_2,x_3]: \; m_3 = 2, \qquad M_3 = \sqrt{3}+1$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Tenemos que f es acotada sobre $[-1,4]$ por que $0 \leq f(x) \leq 3$, para todo $x \in [-1,4]$



$$
\begin{array}{ll}
[x_0, x_1]: \; m_1 = 1, & M_1 = 2 \\
[x_1, x_2]: \; m_2 = 0, & M_2 = 1 \\
[x_2, x_3]: \; m_3 = 2, & M_3 = \sqrt{3} + 1 \\
[x_3, x_4]: \; m_4 = \sqrt{3} + 1, & M_4 = 3
\end{array}
$$

$$
\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{4} m_i(f)(x_i - x_{i-1})
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{4} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= (1)(0-(-1)) + (0)(1-0) + (2)(3-1) + (\sqrt{3}+1)(4-3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{4} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= (1)(0-(-1)) + (0)(1-0) + (2)(3-1) + (\sqrt{3}+1)(4-3) \\
&= 7,73
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{4} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= (1)(0-(-1)) + (0)(1-0) + (2)(3-1) + (\sqrt{3}+1)(4-3) \\
&= 7,73
\end{aligned}
$$

$$
\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{4} M_i(f)(x_i - x_{i-1})
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{4} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= (1)(0-(-1)) + (0)(1-0) + (2)(3-1) + (\sqrt{3}+1)(4-3) \\
&= 7,73
\end{aligned}
$$

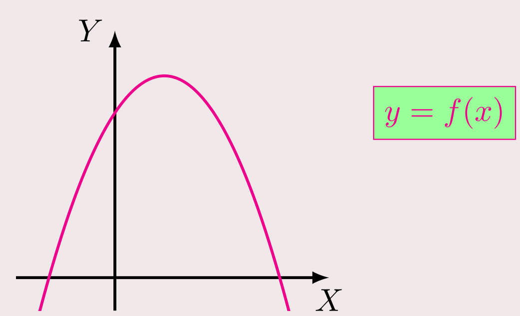
$$
\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{4} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= (2)(0-(-1)) + (1)(1-0) + (\sqrt{3}+1)(3-1) + (3)(4-3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{4} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= (1)(0-(-1)) + (0)(1-0) + (2)(3-1) + (\sqrt{3}+1)(4-3) \\
&= 7,73
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{4} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= (2)(0-(-1)) + (1)(1-0) + (\sqrt{3}+1)(3-1) + (3)(4-3) \\
&= 11,46
\end{aligned}
$$

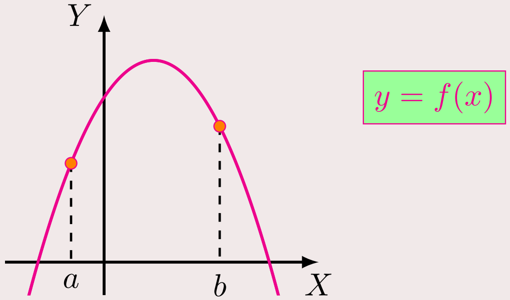
Interpretación geométrica de la suma inferior

La figura muestra que la suma inferior $\underline{S}(f,P)$ corresponden a la suma de áreas de los rectángulos por debajo de la gráfica de f.



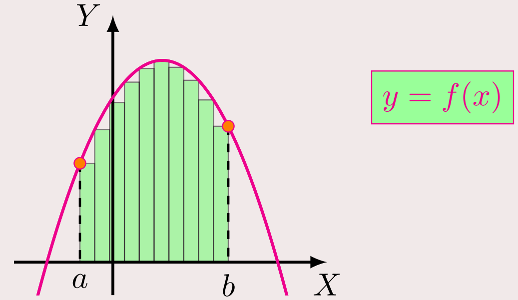
Interpretación geométrica de la suma inferior

La figura muestra que la suma inferior $\underline{S}(f,P)$ corresponden a la suma de áreas de los rectángulos por debajo de la gráfica de f.



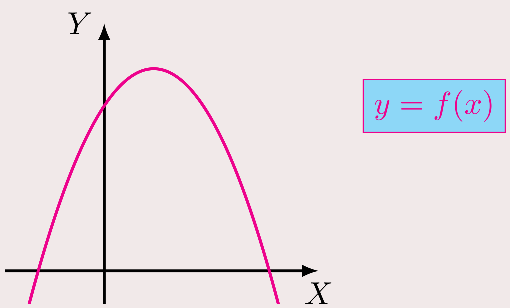
Interpretación geométrica de la suma inferior

La figura muestra que la suma inferior $\underline{S}(f,P)$ corresponden a la suma de áreas de los rectángulos por debajo de la gráfica de f.



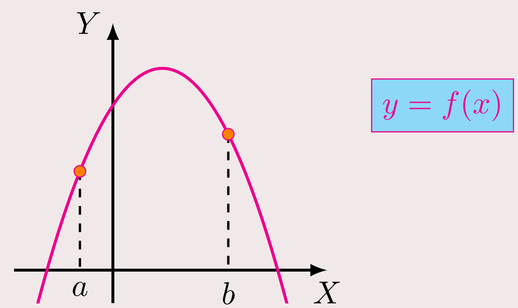
Interpretación geométrica de la suma superior

La figura muestra que la suma superior $\overline{S}(f,P)$ corresponden a la suma de las áreas de los rectángulos por arriba de la gráfica de f.



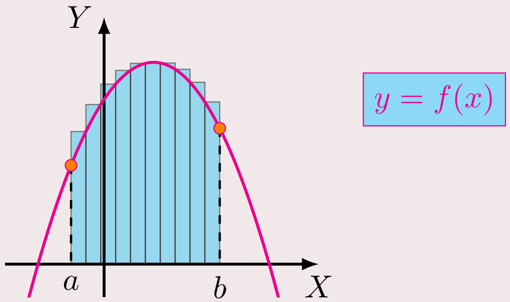
Interpretación geométrica de la suma superior

La figura muestra que la suma superior $\overline{S}(f,P)$ corresponden a la suma de las áreas de los rectángulos por arriba de la gráfica de f.



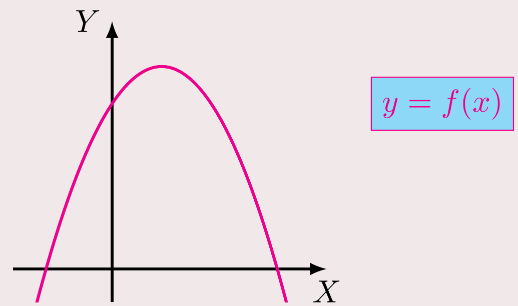
Interpretación geométrica de la suma superior

La figura muestra que la suma superior $\overline{S}(f,P)$ corresponden a la suma de las áreas de los rectángulos por arriba de la gráfica de f.



Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

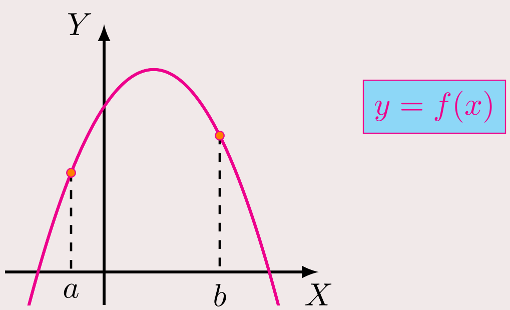
Suma superior e inferior



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

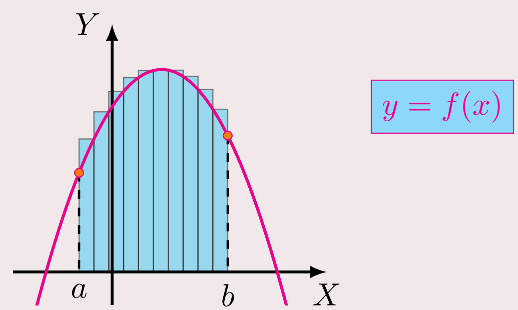
Suma superior e inferior



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

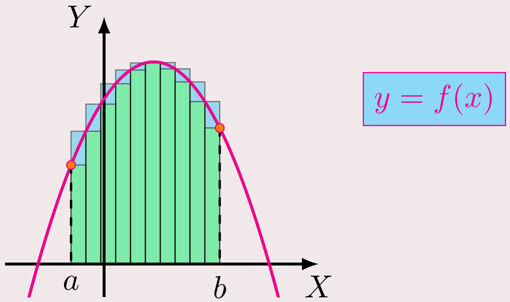
Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Suma superior e inferior



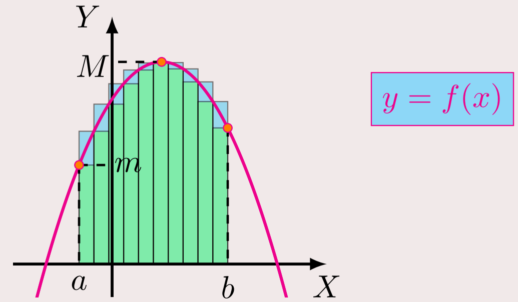
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Suma superior e inferior



Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

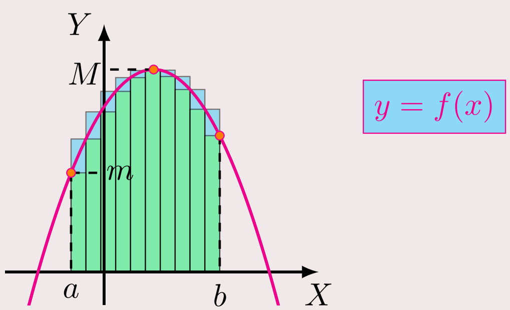
Suma superior e inferior



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Suma superior e inferior



$$m(b-a) \leq \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) \leq M(b-a)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03 Principio de inducción matemática Sumatorias La integral definida Sumas de Riemann Ejercicios Referencias

Enlace de interes

El siguiente enlace presenta ejemplos sobre las sumas de Riemann

`https://www.geogebra.org/m/ybDxNjzf`

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 03

Ejercicios

1. Utilizando inducción matemática o las propiedades de las sumatorias, demuestre que
   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
   c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} kx = -\frac{\cos(n+1)x + \cos nx - \cos x - 1}{2\operatorname{sen} x}$
   d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(k+1) = \ln\left[(n+1)!\right]$

Ejercicios

2. Suponga que f es no decreciente en $[a,b]$.
   a) Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es un partición de $[a,b]$, ¿cómo son $\underline{S}(f,P)$ y $\overline{S}(f,P)$?
   b) Suponga que $x_i - x_{i-1} = \delta$ para todo i. Demuestre que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \delta[f(b) - f(a)]$$

Ejercicios

3. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

   a) Calcule $\underline{S}(f,P)$ para todas las particiones P de $[0,1]$.
   b) Halle $\inf\{\overline{S}(f,P) \colon P$ partición de $[0,1]\}$.

Sesión 03

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Septiembre 12, 2021

Contenido

Sesión 04

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Definición (Integral inferior)

Sea $\mathscr{P}$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$ y $\{\underline{S}(f,P)\colon P \in \mathscr{P}\}$ el conjunto de todas las posibles sumas inferiores de f sobre $[a,b]$, se define la integral inferior de f de a a b

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Definición (Integral inferior)

Sea $\mathscr{P}$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$ y $\{\underline{S}(f,P)\colon P \in \mathscr{P}\}$ el conjunto de todas las posibles sumas inferiores de f sobre $[a,b]$, se define la integral inferior de f de a a b

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f,P)\colon P \in \mathscr{P}\}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Definición (Integral superior)

Sea $\mathscr{P}$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$ y $\{\overline{S}(f,P)\colon P \in \mathscr{P}\}$ el conjunto de todas las posibles sumas superiores de f sobre $[a,b]$, se define la integral superior de f de a a b

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Definición (Integral superior)

Sea $\mathscr{P}$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a,b]$ y $\{\overline{S}(f,P)\colon P\in\mathscr{P}\}$ el conjunto de todas las posibles sumas superiores de f sobre $[a,b]$, se define la integral superior de f de a a b

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\left\{\overline{S}(f,P)\colon P\in\mathscr{P}\right\}$$

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Definición (Refinamiento)

Dadas dos particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$, se dice que P_1 es un refinamiento de P_2 si $P_2\subset P_1$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Definición (Refinamiento)

Dadas dos particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$, se dice que P_1 es un refinamiento de P_2 si $P_2\subset P_1$.

Ejemplo

Sean $P_1=\left\{0,\frac{1}{7},\frac{1}{4},\frac{1}{3},1\right\}$ y $P_2=\left\{0,\frac{1}{7},\frac{1}{3},1\right\}$ dos particiones del intervalo $[0,1]$, entonces P_1 es un refinamiento de P_2 ya que $P_2\subset P_1$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Teorema

Si $P\subset P'$, entonces $\underline{S}(f,P)\leq\underline{S}(f,P')$ y $\overline{S}(f,P')\leq\overline{S}(f,P)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Teorema

Si $P \subset P'$, entonces $\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,P')$ y $\overline{S}(f,P') \leq \overline{S}(f,P)$.

Demostración.

Si $P = P'$, el teorema es obvio.

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Teorema

Si $P \subset P'$, entonces $\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,P')$ y $\overline{S}(f,P') \leq \overline{S}(f,P)$.

Demostración.

Si $P = P'$, el teorema es obvio.
Supongamos que $P \neq P'$ y $P \subset P'$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Teorema

Si $P \subset P'$, entonces $\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,P')$ y $\overline{S}(f,P') \leq \overline{S}(f,P)$.

Demostración.

Si $P = P'$, el teorema es obvio.
Supongamos que $P \neq P'$ y $P \subset P'$.
Sea x'_j el primer punto de división de P' que no es de P, entonces para algún k, $x_{k-1} < x'_j < x_k$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Demostración.

Definamos

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración.

Definamos

$$\begin{aligned} P_1 &= \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_j, x_k, \ldots, x_n\} \\ m^*(f) &= \inf\left\{f(x)/x \in [x_{k-1}, x'_j]\right\} \end{aligned}$$

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Demostración.

Definamos

$$\begin{aligned} P_1 &= \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_j, x_k, \ldots, x_n\} \\ m^*(f) &= \inf\left\{f(x)/x \in [x_{k-1}, x'_j]\right\} \\ m^{**}(f) &= \inf\left\{f(x)/x \in [x'_j, x_k]\right\} \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Demostración.

Por la definición de $m_k(f)$ se tiene

$$m_k(f) \leq m^*(f)$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Demostración.

Por la definición de $m_k(f)$ se tiene

$$\begin{aligned} m_k(f) &\leq m^*(f) \\ m_k(f) &\leq m^{**}(f) \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración.

Por la definición de $m_k(f)$ se tiene

$$\begin{aligned} m_k(f) &\leq m^*(f) \\ m_k(f) &\leq m^{**}(f) \end{aligned}$$

Luego,

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Demostración.

Por la definición de $m_k(f)$ se tiene

$$\begin{aligned} m_k(f) &\leq m^*(f) \\ m_k(f) &\leq m^{**}(f) \end{aligned}$$

Luego,

$$m_k(f)(x_k - x_{k-1}) = m_k(f)(x'_j - x_{k-1}) + m_k(f)(x_k - x'_j)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Demostración.

Por la definición de $m_k(f)$ se tiene

$$\begin{aligned} m_k(f) &\leq m^*(f) \\ m_k(f) &\leq m^{**}(f) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) &= m_k(f)(x'_j - x_{k-1}) + m_k(f)(x_k - x'_j) \\ m_k(f)(x_k - x_{k-1}) &\leq m^*(f)(x'_j - x_{k-1}) + m^{**}(f)(x_k - x'_j) \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Demostración

y de aquí

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) +$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración

y de aquí

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) &= m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + \\
&\quad \ldots + m_{k-1}(f)(x_{k-1} - x_{k-2}) + \ldots
\end{aligned}
$$

Demostración

y de aquí

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) &= m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + \\
&\quad \ldots + m_{k-1}(f)(x_{k-1} - x_{k-2}) + \ldots \\
&\quad + m_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \ldots
\end{aligned}
$$

Demostración

y de aquí

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) &= m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + \\
&\quad \ldots + m_{k-1}(f)(x_{k-1} - x_{k-2}) + \ldots \\
&\quad + m_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \ldots \\
&\quad + m_{k+1}(f)(x_{k+1} - x_k) + \ldots
\end{aligned}
$$

Demostración

y de aquí

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) &= m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + \\
&\quad \ldots + m_{k-1}(f)(x_{k-1} - x_{k-2}) + \ldots \\
&\quad + m_k(f)(x_k - x_{k-1}) + \ldots \\
&\quad + m_{k+1}(f)(x_{k+1} - x_k) + \ldots \\
&\quad + m_n(f)(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Demostración

y de aquí

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) +$$

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Demostración

y de aquí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) &\leq m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + \\ &\quad \ldots + m_{k-1}(f)(x_{k-1} - x_{k-2})\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Demostración

y de aquí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) &\leq m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + \\ &\quad \ldots + m_{k-1}(f)(x_{k-1} - x_{k-2}) \\ &\quad + m^*(f)(x'_j - x_{k-1}) + m^{**}(f)(x_k - x'_j)\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Demostración

y de aquí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) &\leq m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + \\ &\quad \ldots + m_{k-1}(f)(x_{k-1} - x_{k-2}) \\ &\quad + m^*(f)(x'_j - x_{k-1}) + m^{**}(f)(x_k - x'_j) \\ &\quad + m_{k+1}(f)(x_{k+1} - x_k) + \ldots\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración

y de aquí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \quad \leq \quad & m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + \\ & \ldots + m_{k-1}(f)(x_{k-1} - x_{k-2}) \\ & + m^*(f)(x'_j - x_{k-1}) + m^{**}(f)(x_k - x'_j) \\ & + m_{k+1}(f)(x_{k+1} - x_k) + \ldots \\ & + m_n(f)(x_n - x_{n-1})\end{aligned}$$

Demostración

y de aquí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \quad \leq \quad & m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + \\ & \ldots + m_{k-1}(f)(x_{k-1} - x_{k-2}) \\ & + m^*(f)(x'_j - x_{k-1}) + m^{**}(f)(x_k - x'_j) \\ & + m_{k+1}(f)(x_{k+1} - x_k) + \ldots \\ & + m_n(f)(x_n - x_{n-1}) \\ \underline{S}(f,P) \quad \leq \quad & \underline{S}(f,P_1)\end{aligned}$$

Demostración.

Repitiendo este procedimiento un número finito de veces, podemos añadir a P todos los x'_i de P' que no estén ya en P y obtener así

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,P')$$

□

Demostración.

Repitiendo este procedimiento un número finito de veces, podemos añadir a P todos los x'_i de P' que no estén ya en P y obtener así

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,P')$$

En forma análoga, con las desigualdades invertidas, obtenemos

□

Demostración.

Repitiendo este procedimiento un número finito de veces, podemos añadir a P todos los x_i' de P' que no estén ya en P y obtener así

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,P')$$

En forma análoga, con las desigualdades invertidas, obtenemos

$$\overline{S}(f,P) \geq \overline{S}(f,P')$$

$\square$

Propiedades de las integrales superior e inferior

P1. Si f está acotada sobre $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

Propiedades de las integrales superior e inferior

P1. Si f está acotada sobre $[a,b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M(b-a)$$

Propiedades de las integrales superior e inferior

P2. Si f esta acotada en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$, entonces

Propiedades de las integrales superior e inferior

P2. Si f esta acotada en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$, entonces

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$

Propiedades de las integrales superior e inferior

P2. Si f esta acotada en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$, entonces

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$

y

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$$

Propiedades de las integrales superior e inferior

P3. Si f y g son acotadas en $[a,b]$, entonces

Propiedades de las integrales superior e inferior

P3. Si f y g son acotadas en $[a,b]$, entonces

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g)$$

Propiedades de las integrales superior e inferior

P3. Si f y g son acotadas en $[a,b]$, entonces

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g)$$

y

$$\overline{\int_a^b} (f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$$

Sesión 04

Definición (Función integrable)

Se dice que una función f definida sobre $[a,b]$ es integrable según Riemann si f es acotada sobre $[a,b]$ y $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Integral definida de Riemann

Si f es integrable sobre $[a,b]$, la integral definida de Riemann de f desde a a b se representa por $\int_a^b f$ y se define por

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

Observación

También se escribe $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

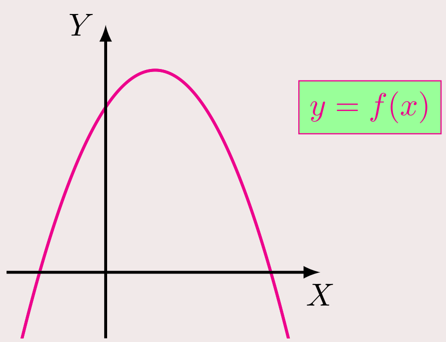
La variable x, t es aparente y, por tanto es muda

Sesión 04

Área e integral definida

La integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de la región determinada por la gráfica de la función f, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje X, cuando $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$.

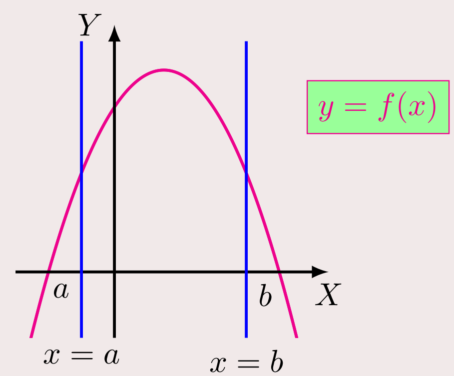
$$A(\mathscr{R}) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Área e integral definida

La integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de la región determinada por la gráfica de la función f, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje X, cuando $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$.

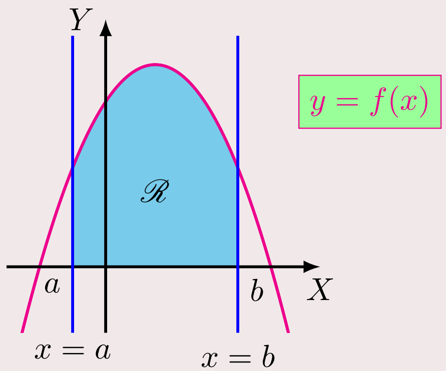
$$A(\mathscr{R}) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Área e integral definida

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de la región determinada por la gráfica de la función f, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje X, cuando $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

$$A(\mathscr{R}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

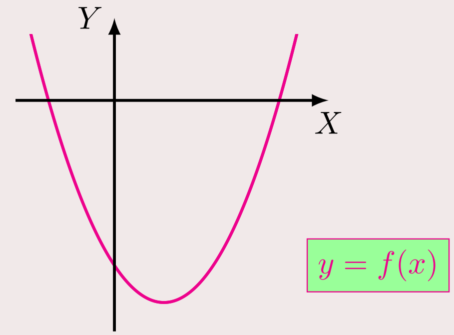


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Área e integral definida

Si $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces el área de la región determinada por la gráfica de la función f, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje X es.

$$A(\mathscr{R}) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

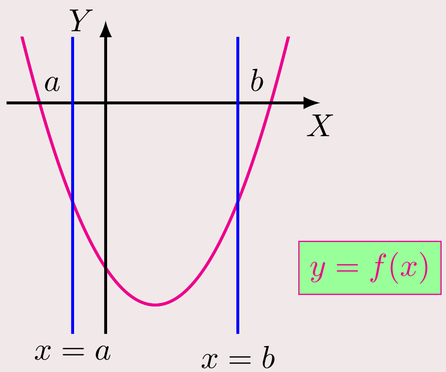


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Área e integral definida

Si $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces el área de la región determinada por la gráfica de la función f, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje X es.

$$A(\mathscr{R}) = -\int_a^b f(x)\,dx$$

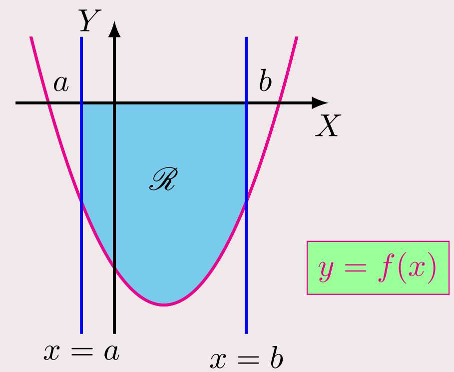


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Área e integral definida

Si $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces el área de la región determinada por la gráfica de la función f, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje X es.

$$A(\mathscr{R}) = -\int_a^b f(x)\,dx$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

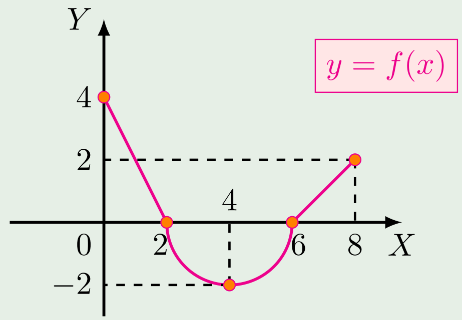
Ejemplo

La gráfica f consiste en dos segmentos y una semicircunferencia. Úsela para evaluar cada una de las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$

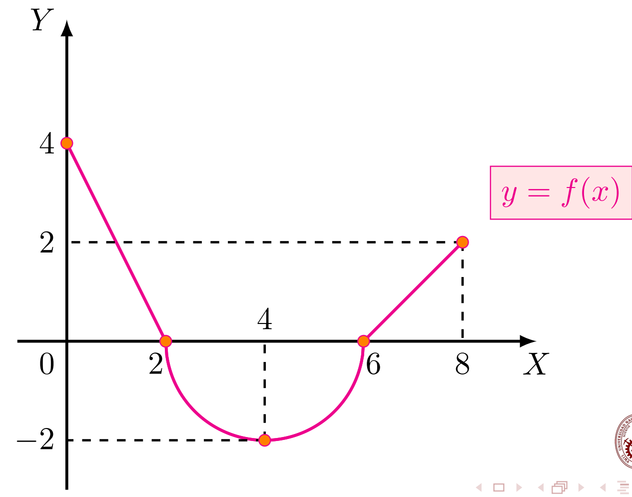
b) $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx$



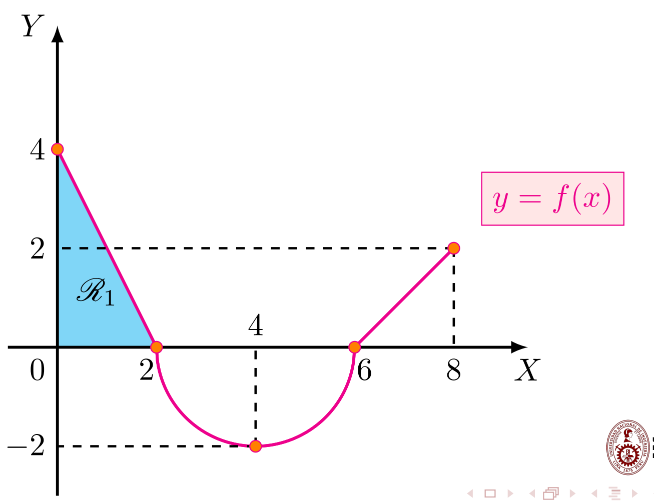
Resolución: De la gráfica de la función

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$



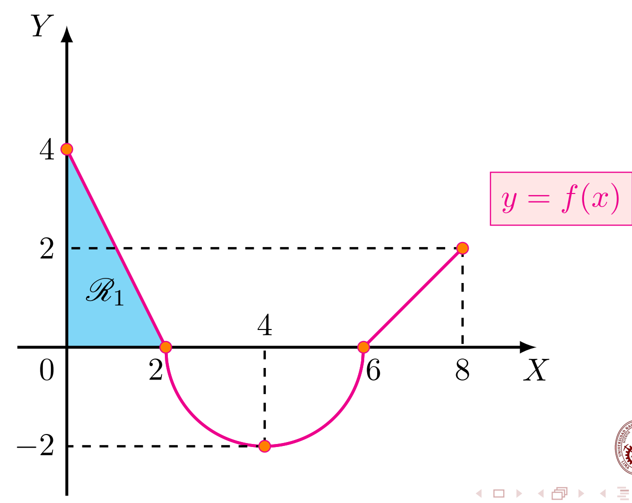
Resolución: De la gráfica de la función

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = A(\mathscr{R}_1)$



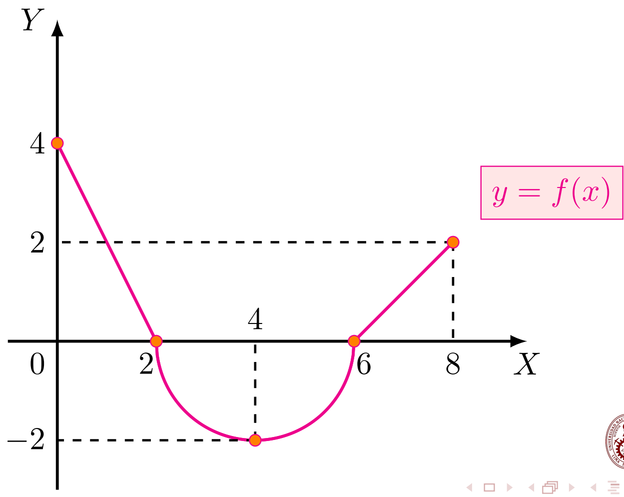
Resolución: De la gráfica de la función

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = A(\mathscr{R}_1) = \frac{4\times 2}{2} = 4$



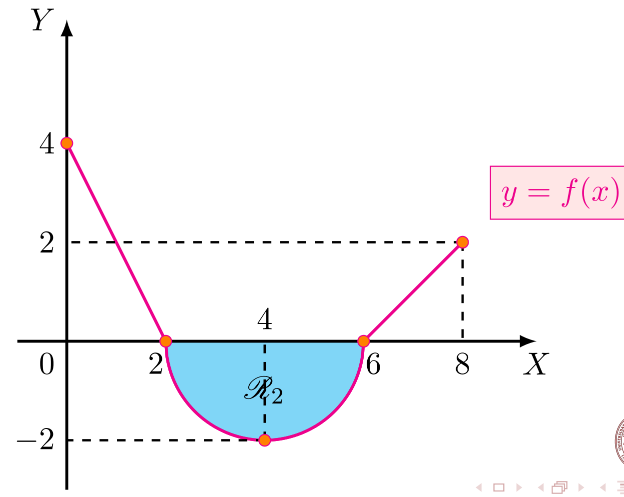
Resolución: De la gráfica de la función

b) $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,dx$



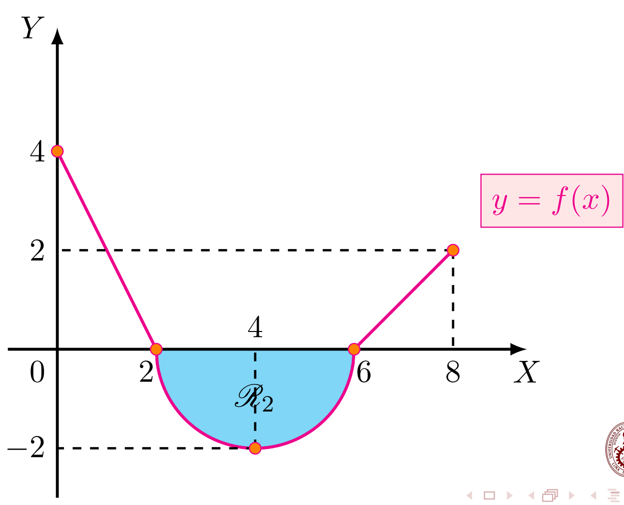
Resolución: De la gráfica de la función

b) $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,dx = -A(\mathscr{R}_2)$



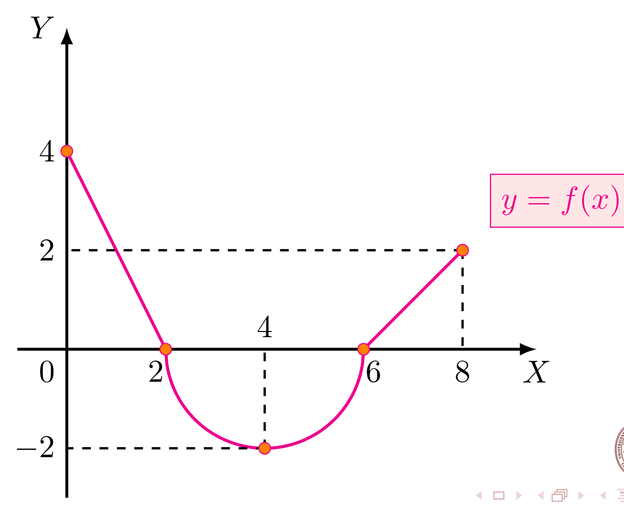
Resolución: De la gráfica de la función

b) $\displaystyle\int_2^6 f(x)\,dx = -A(\mathscr{R}_2) = -\frac{\pi(2)^2}{2} = -2\pi$



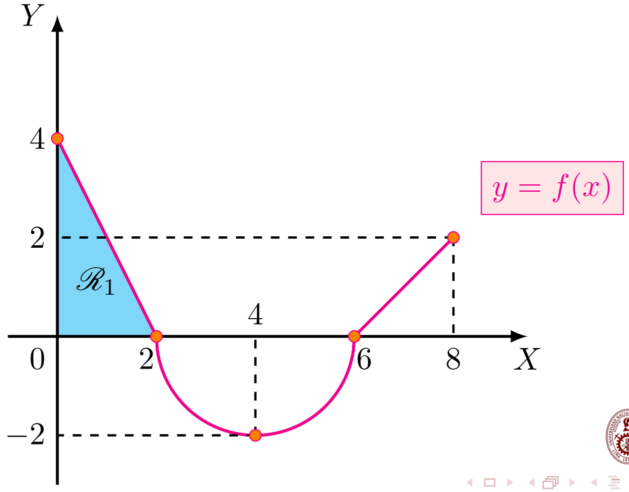
Resolución: De la gráfica de la función

c) $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx$



Resolución: De la gráfica de la función

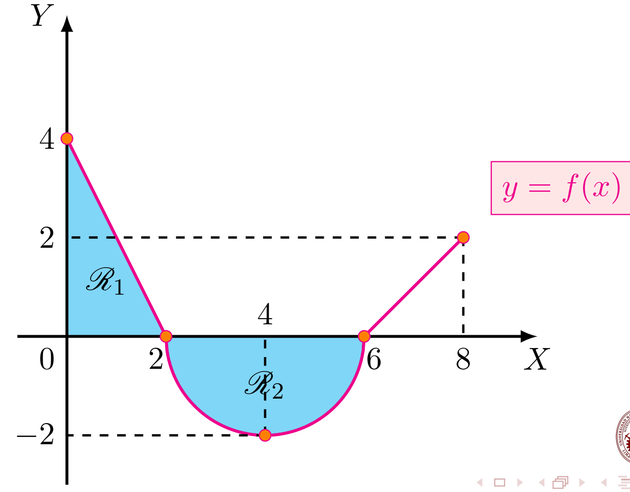
c) $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx = A(\mathscr{R}_1)$



Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Resolución: De la gráfica de la función

c) $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx = A(\mathscr{R}_1) - A(\mathscr{R}_2)$

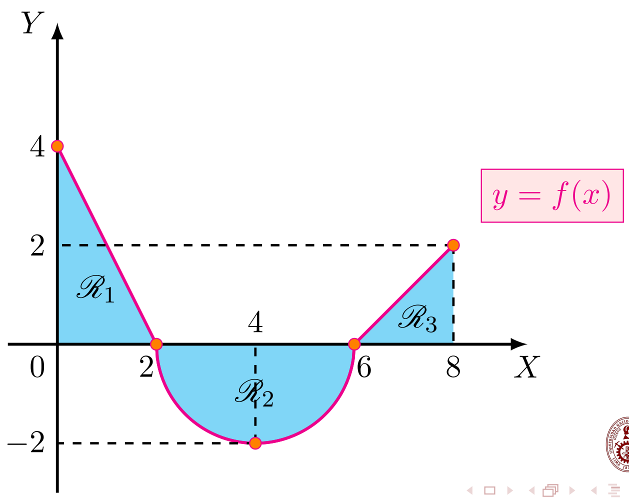


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Resolución: De la gráfica de la función

c) $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx = A(\mathscr{R}_1) - A(\mathscr{R}_2) + A(\mathscr{R}_3)$

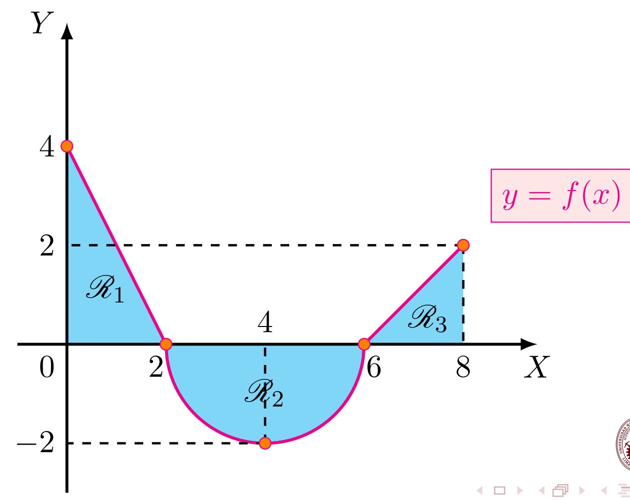


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 Integral inferior y superior Integral definida Área e integral definida Ejercicios Referencias

Resolución: De la gráfica de la función

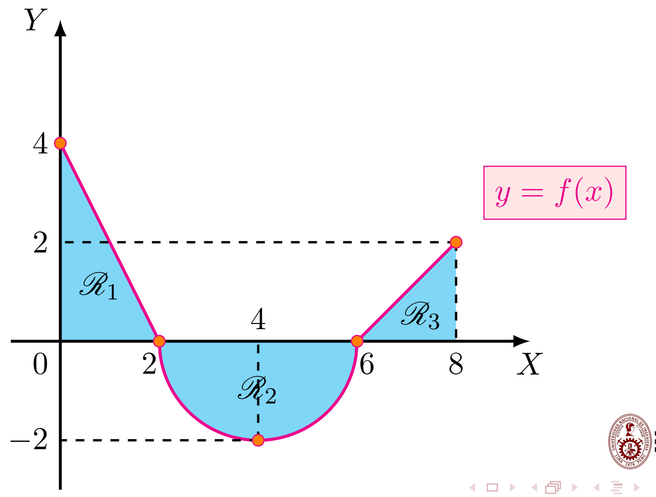
c) $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx = A(\mathscr{R}_1) - A(\mathscr{R}_2) + A(\mathscr{R}_3) = 4 - 2\pi + 2$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: De la gráfica de la función

c) $\int_0^8 f(x)\,dx = A(\mathscr{R}_1) - A(\mathscr{R}_2) + A(\mathscr{R}_3) = 4 - 2\pi + 2 = 6 - 2\pi$



Sesión 04

Ejercicios

1. Decida cuáles de las siguientes funciones son integrables en $[0,2]$, y calcule la integral cuando sea posible.
   a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x-2, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
   b) $f(x) = x + [\![x]\!]$
   c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{[\![\frac{1}{x}]\!]}, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ o } x > 1. \end{cases}$

Ejercicios

2. Demuestre que si f es integrable en $[a,b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$.
3. Demuestre que si f y g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

Ejercicios

4. Evalúe cada una de las siguientes integrales interpretándola en términos de áreas.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (1-x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{0}^{10} |x-5|\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-3}^{0} (1+\sqrt{9-x^2})\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-5}^{5} (x-\sqrt{25-x^2})\,dx$

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Sesión 04

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 04 | Integral inferior y superior | Integral definida | Área e integral definida | Ejercicios | Referencias

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Septiembre 20, 2021

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Contenido

Sesión 05

Criterio de integrabilidad de Riemann

Teorema

Una función acotada f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P con la propiedad que

Criterio de integrabilidad de Riemann

Teorema

Una función acotada f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P con la propiedad que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$$

Demostración.

Demostración.

($\Leftarrow$)
Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P de $[a, b]$ tal que $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$.

Demostración.

($\Leftarrow$)
Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P de $[a, b]$ tal que $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$.
Por teorema $\underline{S}(f, P) \leq \sup\{\underline{S}(f, P')\}$ y $\inf\{\overline{S}(f, P')\} \leq \overline{S}(f, P)$, entonces

Demostración.

($\Leftarrow$)
Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P de $[a, b]$ tal que $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$.
Por teorema $\underline{S}(f, P) \leq \sup\{\underline{S}(f, P')\}$ y $\inf\{\overline{S}(f, P')\} \leq \overline{S}(f, P)$, entonces

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$$

Demostración.

$(\Leftarrow)$

Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P de $[a,b]$ tal que $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$.

Por teorema $\underline{S}(f,P) \leq \sup\{\underline{S}(f,P')\}$ y $\inf\{\overline{S}(f,P')\} \leq \overline{S}(f,P)$, entonces

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$$

Así, $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Demostración.

$(\Leftarrow)$

Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P de $[a,b]$ tal que $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$.

Por teorema $\underline{S}(f,P) \leq \sup\{\underline{S}(f,P')\}$ y $\inf\{\overline{S}(f,P')\} \leq \overline{S}(f,P)$, entonces

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$$

Así, $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

Por lo tanto, f es integrable sobre $[a,b]$. $\square$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Demostración.

$(\Rightarrow)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Demostración.

$(\Rightarrow)$ Supongamos que f es integrable sobre $[a,b]$, entonces

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que f es integrable sobre $[a,b]$, entonces

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f$$

Luego, $\displaystyle\int_a^b f$ es el supremo de las sumas inferiores $\{\underline{S}(f,P)\}$ y el ínfimo de las sumas superiores $\{\overline{S}(f,P)\}$.

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Demostración

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Demostración

De donde, para cada $\varepsilon > 0$, existen particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$, tal que

$$\int_a^b f - \underline{S}(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Demostración

De donde, para cada $\varepsilon > 0$, existen particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$, tal que

$$\int_a^b f - \underline{S}(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\overline{S}(f,P_2) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración

De donde, para cada $\varepsilon > 0$, existen particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$, tal que

$$\int_a^b f - \underline{S}(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\overline{S}(f,P_2) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}$$

sumando estas dos desigualdades, obtenemos

$$\overline{S}(f,P_2) - \underline{S}(f,P_1) < \varepsilon$$

Demostración.

Demostración.

Sea $P = P_1 \cup P_2$, luego P es un refinamiento tanto de P_1 como de P_2.

Demostración.

Sea $P = P_1 \cup P_2$, luego P es un refinamiento tanto de P_1 como de P_2.
Por lo tanto,

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P_2) - \underline{S}(f,P_1) < \varepsilon$$

$\square$

Sesión 05

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Cotas para el error de aproximación de una integral definida

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Cotas para el error de aproximación de una integral definida

Como $\underline{S}(f,P) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}(f,P)$, entonces

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Cotas para el error de aproximación de una integral definida

Como $\underline{S}(f,P) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}(f,P)$, entonces $\frac{1}{2}\left[\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)\right]$

es una cota superior del error

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Cotas para el error de aproximación de una integral definida

Como $\underline{S}(f,P) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}(f,P)$, entonces $\frac{1}{2}\left[\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)\right]$ es una cota superior del error y $\frac{1}{2}\left[\underline{S}(f,P) - \overline{S}(f,P)\right]$ es una cota inferior del error,

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Cotas para el error de aproximación de una integral definida

Como $\underline{S}(f,P) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}(f,P)$, entonces $\frac{1}{2}\left[\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)\right]$ es una cota superior del error y $\frac{1}{2}\left[\underline{S}(f,P) - \overline{S}(f,P)\right]$ es una cota inferior del error, cometidos al tomar $\frac{1}{2}\left[\underline{S}(f,P) + \overline{S}(f,P)\right]$ como valor de $\int_a^b f$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demostrar que la función de Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es racional.} \end{cases}$$

no es integrable según Riemann.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Resolución:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Para cualquier partición P de $[0,1]$ se tiene que

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Resolución: Para cualquier partición P de $[0,1]$ se tiene que
$\underline{S}(f,P)=0$ y $\overline{S}(f,P)=1$ y además f es acotada en $[0,1]$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Resolución: Para cualquier partición P de $[0,1]$ se tiene que
$\underline{S}(f,P)=0$ y $\overline{S}(f,P)=1$ y además f es acotada en $[0,1]$.
Esto nos conduce a $\underline{\int_0^1} f = 0$ y $\overline{\int_0^1} f = 1$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Resolución: Para cualquier partición P de $[0,1]$ se tiene que
$\underline{S}(f,P)=0$ y $\overline{S}(f,P)=1$ y además f es acotada en $[0,1]$.
Esto nos conduce a $\underline{\int_0^1} f = 0$ y $\overline{\int_0^1} f = 1$ con lo cual tenemos que

$\underline{\int_0^1} f \neq \overline{\int_0^1} f$ para cualquier partición de $[0,1]$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Para cualquier partición P de $[0,1]$ se tiene que $\underline{S}(f,P)=0$ y $\overline{S}(f,P)=1$ y además f es acotada en $[0,1]$.

Esto nos conduce a $\underline{\int_0^1} f = 0$ y $\overline{\int_0^1} f = 1$ con lo cual tenemos que

$\underline{\int_0^1} f \neq \overline{\int_0^1} f$ para cualquier partición de $[0,1]$.

Por lo tanto, f no es integrable según Riemann.

Teorema

Si f es continua en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$.

Demostración.

Como f es una función continua sobre $[a,b]$, se tiene que f es acotada sobre $[a,b]$ y además uniformemente continua en $[a,b]$.

Demostración.

Como f es una función continua sobre $[a,b]$, se tiene que f es acotada sobre $[a,b]$ y además uniformemente continua en $[a,b]$.Luego, existe $\delta > 0$ tal que para todo x e y de $[a,b]$, si $|x-y| < \delta$, entonces

Demostración.

Como f es una función continua sobre $[a, b]$, se tiene que f es acotada sobre $[a, b]$ y además uniformemente continua en $[a, b]$.Luego, existe $\delta > 0$ tal que para todo x e y de $[a, b]$, si $|x - y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Demostración.

Como f es una función continua sobre $[a, b]$, se tiene que f es acotada sobre $[a, b]$ y además uniformemente continua en $[a, b]$.Luego, existe $\delta > 0$ tal que para todo x e y de $[a, b]$, si $|x - y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Eligiendo una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Demostración.

Como f es una función continua sobre $[a, b]$, se tiene que f es acotada sobre $[a, b]$ y además uniformemente continua en $[a, b]$.Luego, existe $\delta > 0$ tal que para todo x e y de $[a, b]$, si $|x - y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Eligiendo una partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Así

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad \text{para todo } x, y \in [t_{i-1}, t_i]$$

FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Demostración.

Como f es continua en cada subintervalo, alcanza a sus extremos m_i y M_i,

Demostración.

Como f es continua en cada subintervalo, alcanza a sus extremos m_i y M_i, luego

$$M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Demostración.

Como f es continua en cada subintervalo, alcanza a sus extremos m_i y M_i, luego

$$M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración.

Finalmente,

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

□

Demostración.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

□

Demostración.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})\\ \overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P) &< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\\ \overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P) &< \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)\end{aligned}$$

□

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Demostración.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})\\ \overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P) &< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\\ \overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P) &< \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)\\ \overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P) &< \varepsilon\end{aligned}$$

□

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Teorema

Si f es integrable sobre $[c,d]$ y $[a,b]\subset[c,d]$, entonces f es integrable sobre $[a,b]$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Sesión 05

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

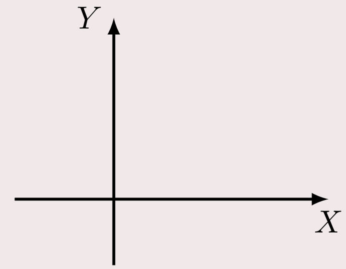
Propiedades de la integral definida

P1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Propiedades de la integral definida

P1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

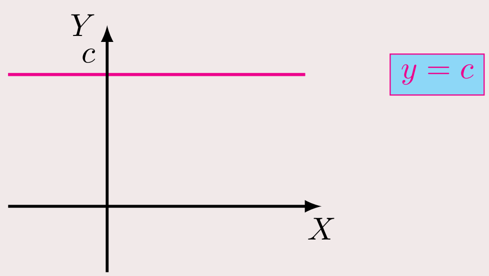


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Propiedades de la integral definida

P1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

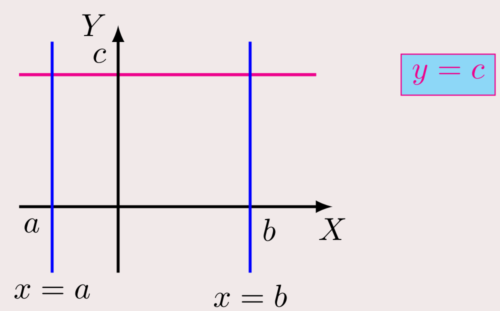


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Propiedades de la integral definida

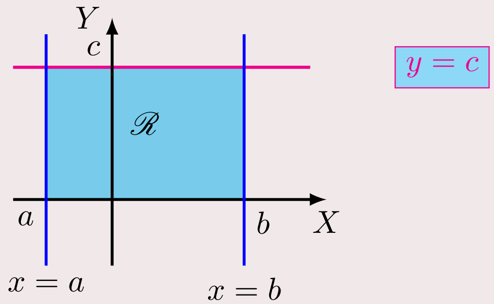
P1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Propiedades de la integral definida

P1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

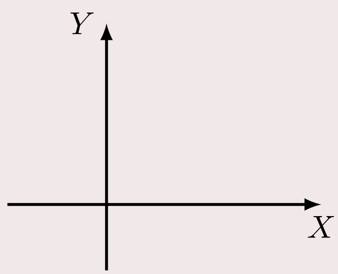


Propiedades de la integral definida

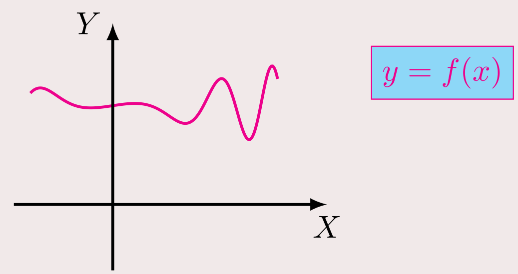
P2. Si $c \in [a,b]$ y f es integrable en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$, además

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

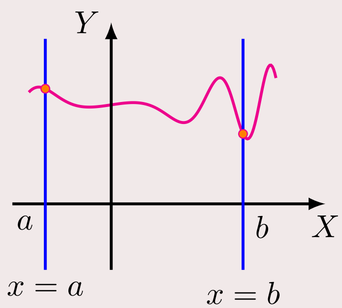
Propiedades de la integral definida



Propiedades de la integral definida

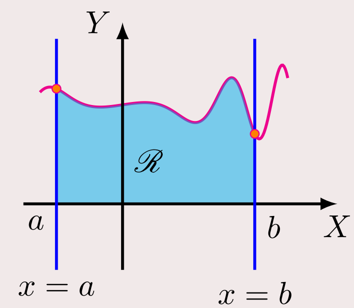


Propiedades de la integral definida



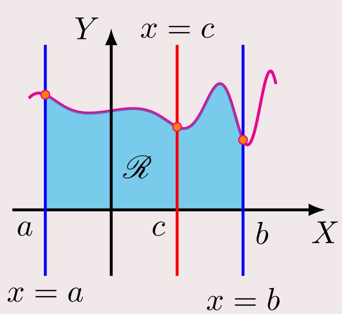
$y = f(x)$

Propiedades de la integral definida



$y = f(x)$

Propiedades de la integral definida



$y = f(x)$

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int_1^5 |x-4|\,dx.$

Ejemplo

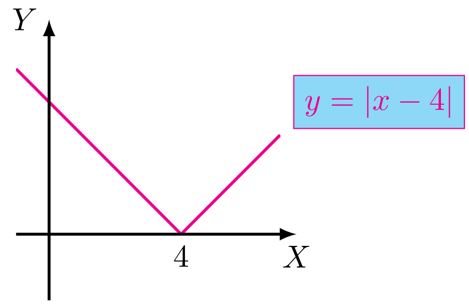
Evalúe $\displaystyle\int_1^5 |x-4|\,dx$.

Resolución: Sabemos que $|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{si } x \geq 4 \\ 4-x, & \text{si } x < 4 \end{cases}$

Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int_1^5 |x-4|\,dx$.

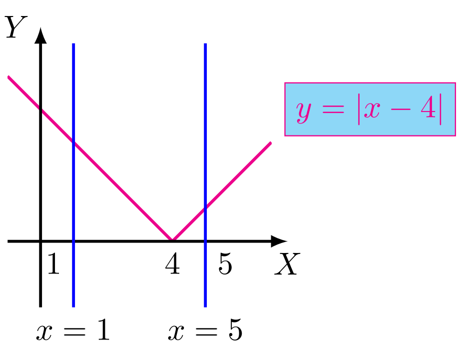
Resolución: Sabemos que $|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{si } x \geq 4 \\ 4-x, & \text{si } x < 4 \end{cases}$



Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int_1^5 |x-4|\,dx$.

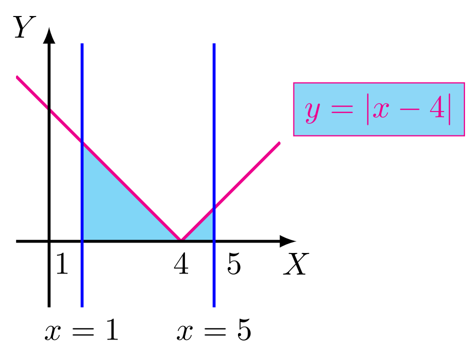
Resolución: Sabemos que $|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{si } x \geq 4 \\ 4-x, & \text{si } x < 4 \end{cases}$



Ejemplo

Evalúe $\displaystyle\int_1^5 |x-4|\,dx$.

Resolución: Sabemos que $|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{si } x \geq 4 \\ 4-x, & \text{si } x < 4 \end{cases}$



Luego,

$$\int_1^5 |x-4|\,dx = \int_1^4 |x-4|\,dx + \int_4^5 |x-4|\,dx$$

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Luego,

$$\int_1^5 |x-4|\,dx = \int_1^4 |x-4|\,dx + \int_4^5 |x-4|\,dx$$

$$\int_1^5 |x-4|\,dx = \int_1^4 (4-x)\,dx + \int_4^5 (x-4)\,dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Luego,

$$\int_1^5 |x-4|\,dx = \int_1^4 |x-4|\,dx + \int_4^5 |x-4|\,dx$$

$$\int_1^5 |x-4|\,dx = \int_1^4 (4-x)\,dx + \int_4^5 (x-4)\,dx$$

$$\int_1^5 |x-4|\,dx = \left[4x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 + \left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^5$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Luego,

$$\int_1^5 |x-4|\,dx = \int_1^4 |x-4|\,dx + \int_4^5 |x-4|\,dx$$

$$\int_1^5 |x-4|\,dx = \int_1^4 (4-x)\,dx + \int_4^5 (x-4)\,dx$$

$$\int_1^5 |x-4|\,dx = \left[4x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 + \left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^5$$

$$\int_1^5 |x-4|\,dx = \frac{9}{2}+\frac{1}{2}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_1^5 |x-4|\,dx &= \int_1^4 |x-4|\,dx + \int_4^5 |x-4|\,dx \\
\int_1^5 |x-4|\,dx &= \int_1^4 (4-x)\,dx + \int_4^5 (x-4)\,dx \\
\int_1^5 |x-4|\,dx &= \left[4x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 + \left[\frac{1}{2}x^2-4x\right]_4^5 \\
\int_1^5 |x-4|\,dx &= \frac{9}{2}+\frac{1}{2} \\
\int_1^5 |x-4|\,dx &= 5
\end{aligned}$$

Propiedades de las integral definida

P3. Si $c \in [a,b]$ y f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$, además

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Ejemplo

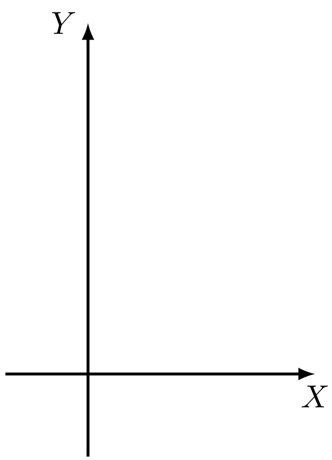
Calcule el valor de la siguiente integral $\displaystyle\int_{-1}^4 f(x)\,dx$, si

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x \in [-1,2[\\ x^2-6x+11, & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

Resolución:

Resolución: La gráfica de la función

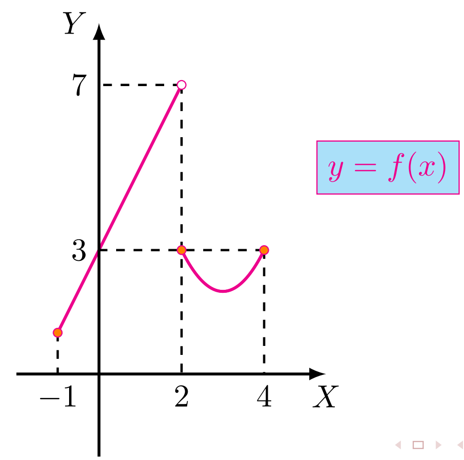
$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x \in [-1,2[\\ x^2-6x+11, & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$



Sesión 05 | Existencia de funciones integrables | Cotas para el error | Propiedades de la integral definida | Ejercicios | Referencias

Resolución: La gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x \in [-1,2[\\ x^2-6x+11, & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

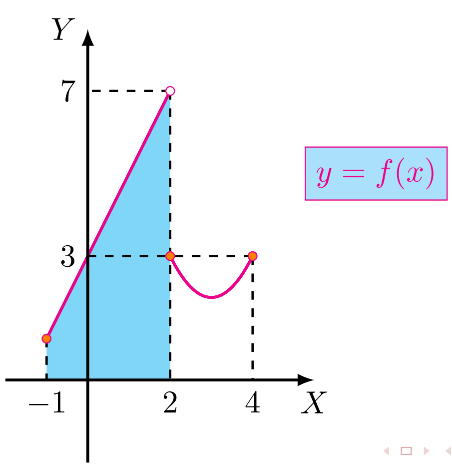


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 | Existencia de funciones integrables | Cotas para el error | Propiedades de la integral definida | Ejercicios | Referencias

Resolución: La gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x \in [-1,2[\\ x^2-6x+11, & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$

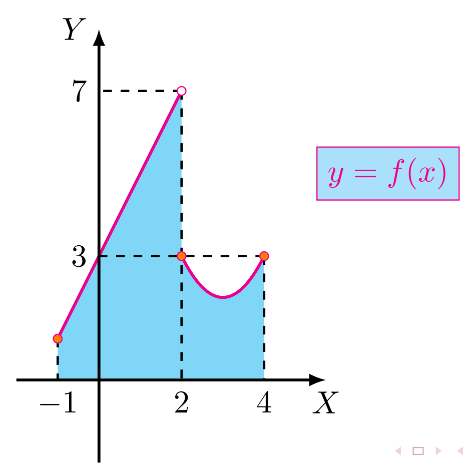


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 | Existencia de funciones integrables | Cotas para el error | Propiedades de la integral definida | Ejercicios | Referencias

Resolución: La gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x \in [-1,2[\\ x^2-6x+11, & \text{si } x \in [2,4] \end{cases}$$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Luego,

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx$$

Sesión 05 | Existencia de funciones integrables | Cotas para el error | Propiedades de la integral definida | Ejercicios | Referencias

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx \\
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{2} (2x+3)\,dx + \int_{2}^{4} (x^2-6x+11)\,dx
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 | Existencia de funciones integrables | Cotas para el error | Propiedades de la integral definida | Ejercicios | Referencias

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx \\
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{2} (2x+3)\,dx + \int_{2}^{4} (x^2-6x+11)\,dx \\
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \left[x^2+3x\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+11x\right]_{2}^{4}
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 | Existencia de funciones integrables | Cotas para el error | Propiedades de la integral definida | Ejercicios | Referencias

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx \\
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{2} (2x+3)\,dx + \int_{2}^{4} (x^2-6x+11)\,dx \\
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \left[x^2+3x\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+11x\right]_{2}^{4} \\
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= 12 + \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx \\
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{2} (2x+3)\,dx + \int_{2}^{4} (x^2-6x+11)\,dx \\
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \left[x^2+3x\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+11x\right]_{2}^{4} \\
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= 12+\frac{14}{3} \\
\int_{-1}^{4} f(x)\,dx &= \frac{50}{3}
\end{aligned}$$

Propiedades de las integral definida

P4. Si f es integrable en $[a,b]$ y c es una constante, entonces cf es integrable en $[a,b]$ y

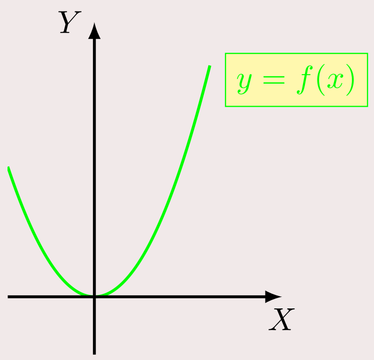
$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedades de la integral definida

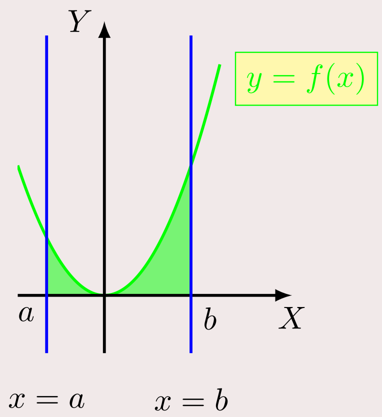
P5. Si f y g son integrables en $[a,b]$, entonces $f+g$ es integrable en $[a,b]$, además

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

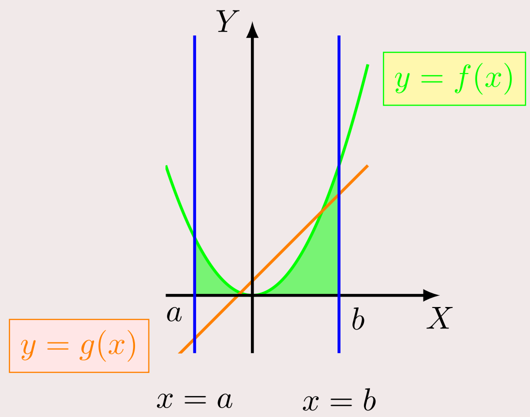
Propiedades de la integral definida



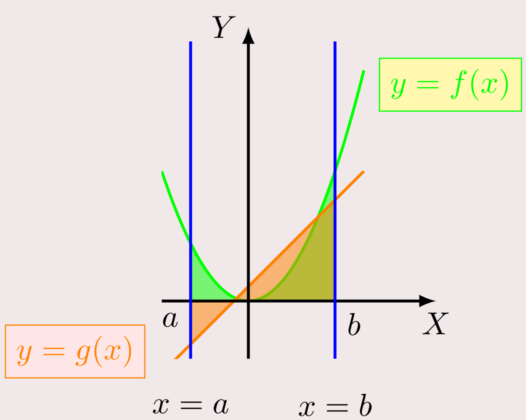
Propiedades de la integral definida



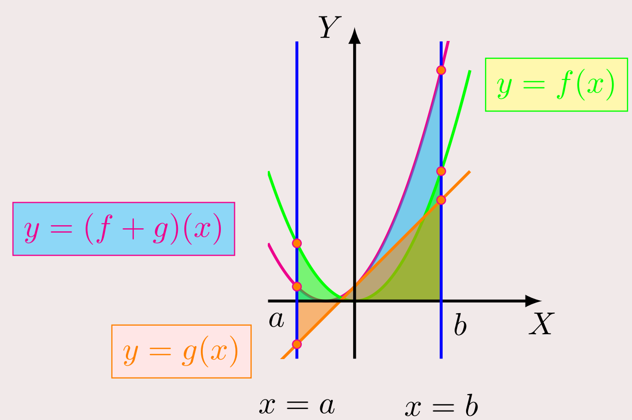
Propiedades de la integral definida



Propiedades de la integral definida



Propiedades de la integral definida



Ejemplo

Si $\int_0^9 f(x)\,dx = 37$ y $\int_0^9 g(x)\,dx = 16$, encuentre

$$I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$$

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Propiedades de la integral definida

P6. Si f y g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo x en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demostrar que

$$\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

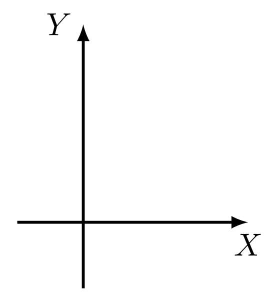
Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demostrar que

$$\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Resolución: La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^4+1}$ es



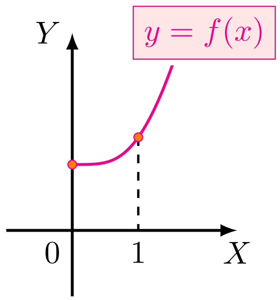
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Demostrar que

$$\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Resolución: La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^4+1}$ es



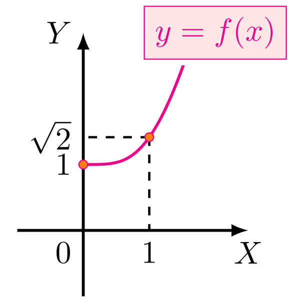
Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demostrar que

$$\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Resolución: La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^4+1}$ es



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

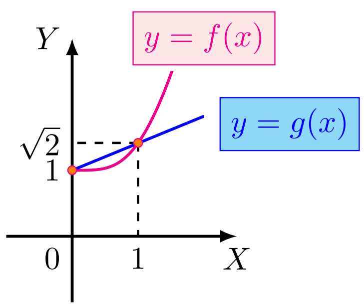
Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demostrar que

$$\int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Resolución: La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^4+1}$ es



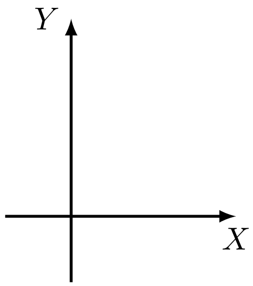
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

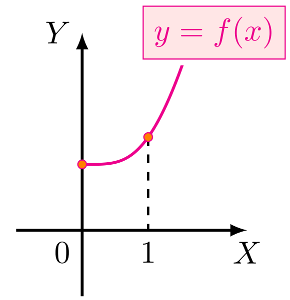
La regla de correspondencia de g es $g(x) = (\sqrt{2}-1)x + 1$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

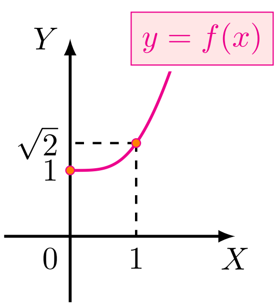
La regla de correspondencia de g es $g(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1$. Luego, f y g son integrables para todo $x \in [0, 1]$.



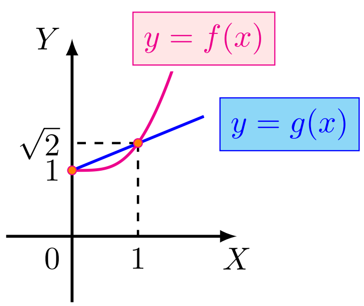
La regla de correspondencia de g es $g(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1$. Luego, f y g son integrables para todo $x \in [0, 1]$.



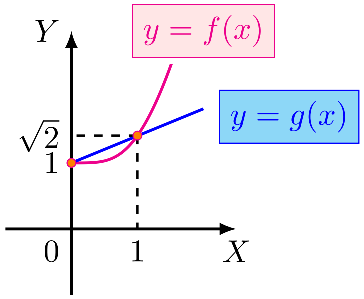
La regla de correspondencia de g es $g(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1$. Luego, f y g son integrables para todo $x \in [0, 1]$.



La regla de correspondencia de g es $g(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1$. Luego, f y g son integrables para todo $x \in [0, 1]$.

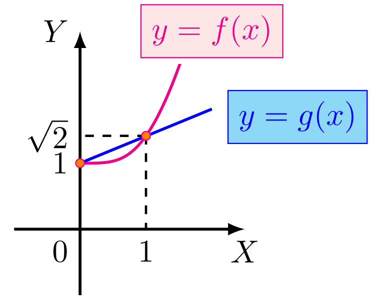


La regla de correspondencia de g es $g(x) = (\sqrt{2}-1)x + 1$. Luego, f y g son integrables para todo $x \in [0,1]$. Además,



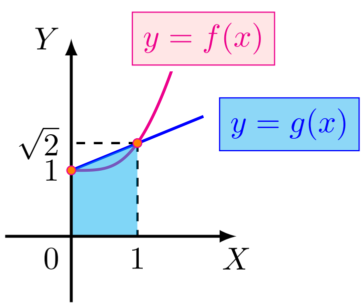
$$f(x) \leq g(x)$$

La regla de correspondencia de g es $g(x) = (\sqrt{2}-1)x + 1$. Luego, f y g son integrables para todo $x \in [0,1]$. Además,



$$\begin{aligned} f(x) &\leq g(x) \\ \int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx &\leq \int_0^1 g(x)\,dx \end{aligned}$$

La regla de correspondencia de g es $g(x) = (\sqrt{2}-1)x + 1$. Luego, f y g son integrables para todo $x \in [0,1]$. Además,



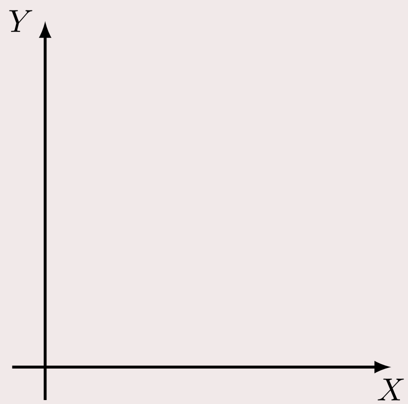
$$\begin{aligned} f(x) &\leq g(x) \\ \int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx &\leq \int_0^1 g(x)\,dx \\ \int_0^1 \sqrt{x^4+1}\,dx &\leq \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Propiedades de la integral definida

P7. Si f es integrable en $[a,b]$ y $m \leq f \leq M$, entonces

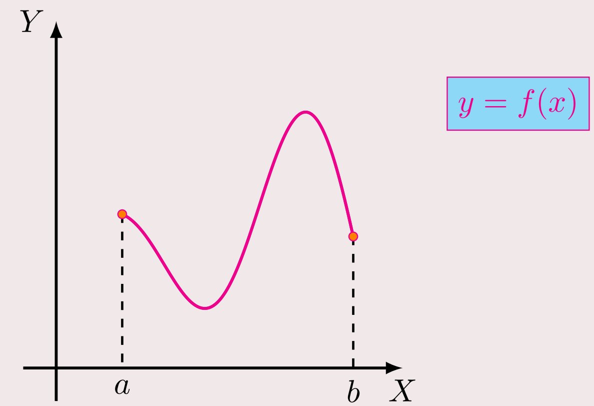
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Propiedades de la integral definida



Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

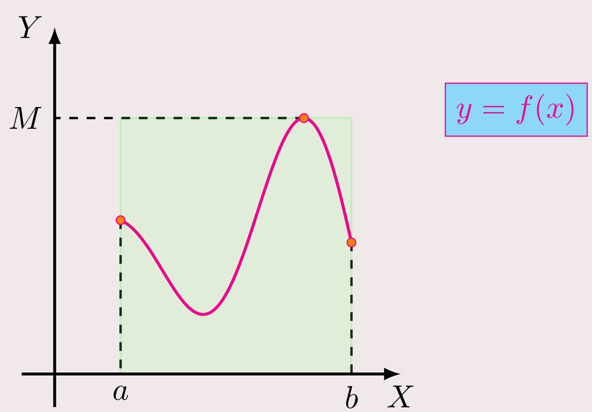
Propiedades de la integral definida



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

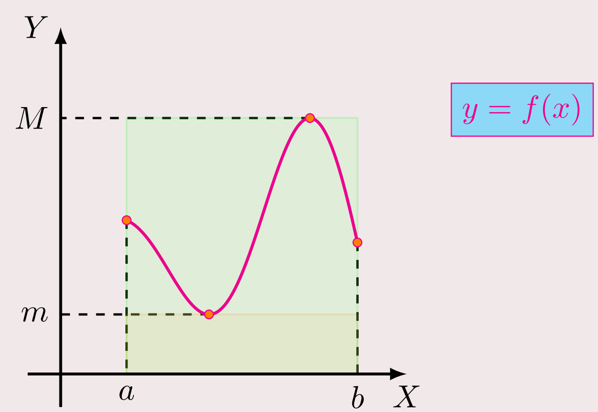
Propiedades de la integral definida



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

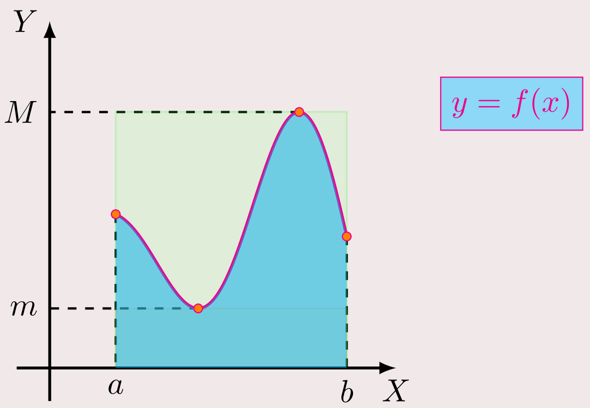
Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Propiedades de la integral definida



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Propiedades de la integral definida



Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Ejemplo

Demuestre que

$$\frac{\pi}{\pi+2} \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{1+x+\operatorname{sen} x}\,dx \leq \pi+2$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Resolución:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Resolución: Sea $f(x) = \dfrac{1}{1+x+\operatorname{sen} x}$, $x \in [0,\pi]$

$$0 \leq x \leq \pi$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Sea $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + \operatorname{sen} x}$, $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \pi \\ 0 &\leq \operatorname{sen} x \leq 1 \end{aligned}$$

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Resolución: Sea $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + \operatorname{sen} x}$, $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \pi \\ 0 &\leq \operatorname{sen} x \leq 1 \\ 0 &\leq x + \operatorname{sen} x \leq \pi + 1 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Resolución: Sea $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + \operatorname{sen} x}$, $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \pi \\ 0 &\leq \operatorname{sen} x \leq 1 \\ 0 &\leq x + \operatorname{sen} x \leq \pi + 1 \\ 1 &\leq 1 + x + \operatorname{sen} x \leq \pi + 2 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Resolución: Sea $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + \operatorname{sen} x}$, $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \pi \\ 0 &\leq \operatorname{sen} x \leq 1 \\ 0 &\leq x + \operatorname{sen} x \leq \pi + 1 \\ 1 &\leq 1 + x + \operatorname{sen} x \leq \pi + 2 \\ \frac{1}{\pi + 2} &\leq \frac{1}{1 + x + \operatorname{sen} x} \leq 1 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Aplicando P7 se tiene,

$$\frac{1}{\pi+2}\cdot(\pi-0) \leq \int_0^{\pi}\frac{1}{1+x+\operatorname{sen}x}\,dx \leq 1\cdot(\pi-0)$$

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Aplicando P7 se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi+2}\cdot(\pi-0) &\leq \int_0^{\pi}\frac{1}{1+x+\operatorname{sen}x}\,dx \leq 1\cdot(\pi-0)\\ \frac{\pi}{\pi+2} &\leq \int_0^{\pi}\frac{1}{1+x+\operatorname{sen}x}\,dx \leq \pi \leq \pi+2\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Aplicando P7 se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi+2}\cdot(\pi-0) &\leq \int_0^{\pi}\frac{1}{1+x+\operatorname{sen}x}\,dx \leq 1\cdot(\pi-0)\\ \frac{\pi}{\pi+2} &\leq \int_0^{\pi}\frac{1}{1+x+\operatorname{sen}x}\,dx \leq \pi \leq \pi+2\end{aligned}$$

Por lo tanto,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 05 Existencia de funciones integrables Cotas para el error Propiedades de la integral definida Ejercicios Referencias

Aplicando P7 se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi+2}\cdot(\pi-0) &\leq \int_0^{\pi}\frac{1}{1+x+\operatorname{sen}x}\,dx \leq 1\cdot(\pi-0)\\ \frac{\pi}{\pi+2} &\leq \int_0^{\pi}\frac{1}{1+x+\operatorname{sen}x}\,dx \leq \pi \leq \pi+2\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\pi}{\pi+2} \leq \int_0^{\pi}\frac{1}{1+x+\operatorname{sen}x}\,dx \leq \pi+2$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Propiedades de la integral definida

P8. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Sesión 05

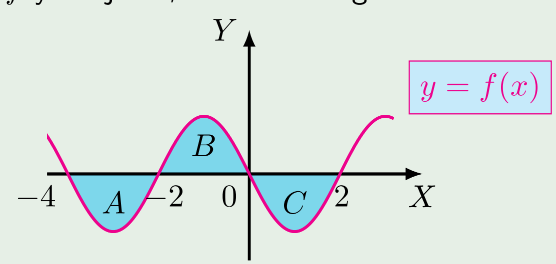
Ejercicios

1. Escriba como una sola integral en la forma $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$$

Ejercicios

2. Cada una de las regiones A, B y C, determinadas por la gráfica de f y el eje X, tienen área igual a 3 u^2.



Calcule el valor de $\int_{-4}^{2} [f(x) + 2x + 5]\,dx$.

Ejercicios

3. Estime el valor de cada una de las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$

Sesión 05

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Septiembre 20, 2021

Contenido

Sesión 06

La integral definida como límite de una suma

Teorema

Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

La integral definida como límite de una suma

Teorema

Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

La integral definida como límite de una suma

Teorema

Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

para toda partición P con norma $\|P\| < \delta$ y todos los $\overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Observación:

El teorema anterior nos muestra que haciendo la norma de nuestra partición suficientemente pequeña podemos calcular por un número finito de multiplicaciones y adiciones integrales definidas de funciones continuas tan aproximadamente como deseemos. el resultado se expresa a menudo con una notación de límites.

Observación:

El teorema anterior nos muestra que haciendo la norma de nuestra partición suficientemente pequeña podemos calcular por un número finito de multiplicaciones y adiciones integrales definidas de funciones continuas tan aproximadamente como deseemos. el resultado se expresa a menudo con una notación de límites.
Si f es continua sobre $[a,b]$, entonces

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx,\ \forall \overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Si al intervalo $[a,b]$ lo dividimos en n subintervalos que tienen la misma longitud, la longitud de cada subintervalo es

Si al intervalo $[a,b]$ lo dividimos en n subintervalos que tienen la misma longitud, la longitud de cada subintervalo es $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, de esto tenemos

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Si al intervalo $[a,b]$ lo dividimos en n subintervalos que tienen la misma longitud, la longitud de cada subintervalo es $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, de esto tenemos

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Si al intervalo $[a,b]$ lo dividimos en n subintervalos que tienen la misma longitud, la longitud de cada subintervalo es $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, de esto tenemos

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

En este caso, los extremos de cada subintervalo son

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Si al intervalo $[a,b]$ lo dividimos en n subintervalos que tienen la misma longitud, la longitud de cada subintervalo es $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, de esto tenemos

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

En este caso, los extremos de cada subintervalo son

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \ldots, x_i = a + i\Delta x, \ldots, x_n = b$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

También se tiene $\|P\| = \Delta x$,

También se tiene $\|P\| = \Delta x$,de esto $\|P\| \to 0$ si y sólo si $n \to \infty$.

También se tiene $\|P\| = \Delta x$,de esto $\|P\| \to 0$ si y sólo si $n \to \infty$. Si cada $\overline{x}_i$ es considerado como los extremos derechos de cada subintervalo esto es, $\overline{x}_i = a + i\Delta x$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

También se tiene $\|P\| = \Delta x$,de esto $\|P\| \to 0$ si y sólo si $n \to \infty$. Si cada $\overline{x}_i$ es considerado como los extremos derechos de cada subintervalo esto es, $\overline{x}_i = a + i\Delta x$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x$$

Ejemplo

Calcule usando sumas de Riemann, el valor de

$$I = \int_0^2 (x^3 - x)\, dx$$

Ejemplo

Calcule usando sumas de Riemann, el valor de

$$I = \int_0^2 (x^3 - x)\, dx$$

Resolución:

Ejemplo

Calcule usando sumas de Riemann, el valor de

$$I = \int_0^2 (x^3 - x)\, dx$$

Resolución: La función $f(x) = x^3 - x$ es continua en el intervalo $[0, 2]$. Considerando la partición regular P de $[0, 2]$, se tiene

$$\Delta x = \frac{2-0}{n}$$

Ejemplo

Calcule usando sumas de Riemann, el valor de

$$I = \int_0^2 (x^3 - x)\, dx$$

Resolución: La función $f(x) = x^3 - x$ es continua en el intervalo $[0, 2]$. Considerando la partición regular P de $[0, 2]$, se tiene

$$\Delta x = \frac{2-0}{n}$$

$$\Delta x = \frac{2}{n}$$

Ejemplo

Calcule usando sumas de Riemann, el valor de

$$I = \int_0^2 (x^3 - x)\, dx$$

Resolución: La función $f(x) = x^3 - x$ es continua en el intervalo $[0, 2]$. Considerando la partición regular P de $[0, 2]$, se tiene

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} \qquad \overline{x}_i = 0 + i\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{2}{n}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Calcule usando sumas de Riemann, el valor de

$$I = \int_0^2 (x^3 - x)\, dx$$

Resolución: La función $f(x) = x^3 - x$ es continua en el intervalo $[0, 2]$. Considerando la partición regular P de $[0, 2]$, se tiene

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} \qquad \overline{x}_i = 0 + i\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{2}{n} \qquad \overline{x}_i = \frac{2i}{n}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Luego,

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Luego,

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x$$

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 - \left(\frac{2i}{n}\right) \right] \frac{2}{n}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x\\
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3-\left(\frac{2i}{n}\right)\right]\frac{2}{n}\\
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x\\
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3-\left(\frac{2i}{n}\right)\right]\frac{2}{n}\\
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right)\\
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{2}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x\\
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3-\left(\frac{2i}{n}\right)\right]\frac{2}{n}\\
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right)\\
\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{2}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]\\
\int_0^2 f(x)\,dx &= 2
\end{aligned}$$

Sesión 06

Primer teorema fundamental del cálculo

Teorema

Sea F la función definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Primer teorema fundamental del cálculo

Teorema

Sea F la función definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Si f es continua sobre un intervalo I y si $a \in I$, entonces F es diferenciable sobre I y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Demostración

Supongamos que $x_0 \in I$, $h \neq 0$ y $x_0 + h \in I$,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Demostración

Supongamos que $x_0 \in I$, $h \neq 0$ y $x_0 + h \in I$, entonces

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración

Supongamos que $x_0 \in I$, $h \neq 0$ y $x_0 + h \in I$, entonces

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt$$
$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Demostración

Como $f(x_0) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$, obtenemos

Demostración

Como $f(x_0) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$, obtenemos

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\,dt$$

Demostración

Como $f(x_0) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$, obtenemos

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\,dt$$

Como f es continua en x_0, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ para todo $t \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

Demostración.

Podemos entonces concluir que $0 < |h| < \delta$ y $x_0 + h \in I$

Demostración.

Podemos entonces concluir que $0 < |h| < \delta$ y $x_0 + h \in I$ implica que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

Demostración.

Podemos entonces concluir que $0 < |h| < \delta$ y $x_0 + h \in I$ implica que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$siempre que $x_0 \leq t \leq x_0 + h$ si $h > 0$ o $x_0 + h \leq t \leq x_0$ si $h < 0$. Por lo tanto,

Demostración.

Podemos entonces concluir que $0 < |h| < \delta$ y $x_0 + h \in I$ implica que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$siempre que $x_0 \leq t \leq x_0 + h$ si $h > 0$ o $x_0 + h \leq t \leq x_0$ si $h < 0$. Por lo tanto,

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \right| = \varepsilon$$

siempre que $0 < |h| < \delta$ y $x_0 + h \in I$.

Demostración.

Podemos entonces concluir que $0 < |h| < \delta$ y $x_0 + h \in I$ implica que $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$siempre que $x_0 \leq t \leq x_0 + h$ si $h > 0$ o $x_0 + h \leq t \leq x_0$ si $h < 0$. Por lo tanto,

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0 + h} \varepsilon dt \right| = \varepsilon$$

siempre que $0 < |h| < \delta$ y $x_0 + h \in I$. De donde

$$F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0), \quad \text{para todo } x_0 \in I$$

$\square$

Segundo teorema fundamental del cálculo

Teorema

Sea f una función continua sobre un intervalo I.

Segundo teorema fundamental del cálculo

Teorema

Sea f una función continua sobre un intervalo I.Si F es diferenciable sobre I y si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$,

Segundo teorema fundamental del cálculo

Teorema

Sea f una función continua sobre un intervalo I.Si F es diferenciable sobre I y si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, entonces para $a,b \in I$ cualesquiera

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración.

Sea G la función definida sobre I por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Demostración.

Sea G la función definida sobre I por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Demostración.

Sea G la función definida sobre I por

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.
Luego $G'(x) = F'(x)$ para todo $x \in I$ y

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

para cierto número C y todo $x \in I$.

Demostración.

Como $G(a) = 0$, se sigue entonces que $C = -F(a)$.

Demostración.

Como $G(a) = 0$, se sigue entonces que $C = -F(a)$. Por lo tanto

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

$\square$

Teorema del valor medio para integrales definidas

Teorema

Si f es una función continua en $[a, b]$,

Teorema del valor medio para integrales definidas

Teorema

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces existe un número real $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

Demostración.

Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$,

Demostración.

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$, entonces por el primer teorema fundamental del cálculo la función F es diferenciable sobre $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostración.

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$, entonces por el primer teorema fundamental del cálculo la función F es diferenciable sobre $[a,b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Por el teorema del valor medio para derivadas, existe $c \in]a,b[$ tal que

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$$

Demostración.

Además, $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ y $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Demostración.

Además, $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ y $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F'(c)(b-a) \\ \int_a^b f(t)\,dt - 0 &= f(c)(b-a) \end{aligned}$$

Demostración.

Además, $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$ y $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F'(c)(b-a) \\ \int_a^b f(t)\,dt - 0 &= f(c)(b-a) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

$\square$

Teorema

Sea G la función definida por $G(x) = \int_a^u f(t)dt$, donde $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $u = u(x)$ es una función derivable $(u : J \to I)$,

Teorema

Sea G la función definida por $G(x) = \int_a^u f(t)dt$, donde $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y $u = u(x)$ es una función derivable $(u : J \to I)$, entonces $G'(x) = f(u) \cdot u'$ para todo $x \in J$.

Demostración.

Sea $F(y) = \int_a^y f(t)dt$ y $y = u(x)$,

Demostración.

Sea $F(y) = \int_a^y f(t)dt$ y $y = u(x)$, luego

$$(F \circ u)(x) = F(u(x))$$

Demostración.

Sea $F(y) = \int_a^y f(t)dt$ y $y = u(x)$, luego

$$\begin{aligned}(F \circ u)(x) &= F(u(x))\\ (F \circ u)(x) &= \int_a^u f(t)dt\end{aligned}$$

Demostración.

Sea $F(y) = \int_a^y f(t)dt$ y $y = u(x)$, luego

$$\begin{aligned}(F \circ u)(x) &= F(u(x))\\ (F \circ u)(x) &= \int_a^u f(t)dt\\ (F \circ u)(x) &= G(x)\end{aligned}$$

Demostración.

Por la regla de la cadena y por el primer teorema fundamental del calculo

Demostración.

Por la regla de la cadena y por el primer teorema fundamental del calculose tiene

$$G'(x) = F'(u(x)) \cdot u'(x)$$

□

Demostración.

Por la regla de la cadena y por el primer teorema fundamental del calculose tiene

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(u(x)) \cdot u'(x) \\ G'(x) &= F'(u) \cdot u' \end{aligned}$$

□

Demostración.

Por la regla de la cadena y por el primer teorema fundamental del calculose tiene

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(u(x)) \cdot u'(x) \\ G'(x) &= F'(u) \cdot u' \\ G'(x) &= f(u) \cdot u' \end{aligned}$$

□

Observación

Observación

1. Del primer teorema fundamental cálculo:

$$D_x\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

Observación

1. Del primer teorema fundamental cálculo:

$$D_x\left[\int_a^x f(t)dt\right]=f(x)$$

2. Del segundo teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b D_x\left[F(x)\right]dx=F(b)-F(a)$$

Usaremos la siguiente notación: $[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_a^b x^{-2}dx$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_a^b x^{-2}dx$

Resolución:

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_a^b x^{-2}dx$

Resolución: Si $x \neq 0$, entonces $D_x[x^{-1}] = -x^{-2}$.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_a^b x^{-2}dx$

Resolución: Si $x \neq 0$, entonces $D_x[x^{-1}] = -x^{-2}$.
De donde, si $a, b \in]0, \infty[$ o $a, b \in]-\infty, 0[$,

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_a^b x^{-2}dx$

Resolución: Si $x \neq 0$, entonces $D_x[x^{-1}] = -x^{-2}$.
De donde, si $a, b \in]0, \infty[$ o $a, b \in]-\infty, 0[$, podemos aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo y obtener:

$$\begin{aligned}\int_a^b x^{-2}dx &= \int_a^b D_x(-x^{-1})dx = \left[-x^{-1}\right]_a^b \\ \int_a^b x^{-2}dx &= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\end{aligned}$$

Para ilustrar la necesidad de la restricción de que $a, b \in]0, \infty[$ o $a, b \in]-\infty, 0[$, planteemos la pregunta:

Para ilustrar la necesidad de la restricción de que $a, b \in]0, \infty[$ o $a, b \in]-\infty, 0[$, planteemos la pregunta:

$$\text{¿Es } \int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2?$$

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Para ilustrar la necesidad de la restricción de que $a, b \in]0, \infty[$ o $a, b \in]-\infty, 0[$, planteemos la pregunta:

$$\text{¿Es } \int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx = \left[-x^{-1}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2?$$

la respuesta es, ciertamente no, ya que si la integral estuviera definida sería ciertamente positiva.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int_{-2}^{4} (x-2)^2\, dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int_{-2}^{4} (x-2)^2\, dx$$

Resolución:

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Evalúe
$$I = \int_{-2}^{4} (x-2)^2\, dx$$

Resolución:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{4} (x^2 - 4x + 4)\, dx \\ I &= \int_{-2}^{4} x^2\, dx - 4\int_{-2}^{4} x\, dx + 4\int_{-2}^{4} dx \end{aligned}$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$I = \frac{1}{3}\int_{-2}^{4} D_x\left[x^3\right] dx - \frac{4}{2}\int_{-2}^{4} D_x\left[x^2\right] dx + 4\int_{-2}^{4} D_x[x] dx$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_{-2}^{4} D_x\left[x^3\right] dx - \frac{4}{2}\int_{-2}^{4} D_x\left[x^2\right] dx + 4\int_{-2}^{4} D_x[x] dx \\ I &= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{4} - \frac{4}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{4} + 4\left[x\right]_{-2}^{4} \end{aligned}$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_{-2}^{4} D_x\left[x^3\right] dx - \frac{4}{2}\int_{-2}^{4} D_x\left[x^2\right] dx + 4\int_{-2}^{4} D_x[x] dx \\ I &= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{4} - \frac{4}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{4} + 4\left[x\right]_{-2}^{4} \\ I &= \frac{1}{3}\left[4^3 - (-2)^3\right] - \frac{4}{2}\left[4^2 - (-2)^2\right] + 4[4-(-2)] \end{aligned}$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_{-2}^{4} D_x\left[x^3\right]dx - \frac{4}{2}\int_{-2}^{4} D_x\left[x^2\right]dx + 4\int_{-2}^{4} D_x[x]dx \\ I &= \frac{1}{3}\left[x^3\right]_{-2}^{4} - \frac{4}{2}\left[x^2\right]_{-2}^{4} + 4\left[x\right]_{-2}^{4} \\ I &= \frac{1}{3}\left[4^3-(-2)^3\right] - \frac{4}{2}\left[4^2-(-2)^2\right] + 4[4-(-2)] \\ I &= 24 \end{aligned}$$

Otro método es el siguiente:

$$I = \int_{-2}^{4}(x-2)^2\,dx$$

Otro método es el siguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{4}(x-2)^2\,dx \\ I &= \int_{-2}^{4} D_x\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]dx \end{aligned}$$

Otro método es el siguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{4}(x-2)^2\,dx \\ I &= \int_{-2}^{4} D_x\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]dx \\ I &= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{-2}^{4} \end{aligned}$$

Otro método es el siguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{4} (x-2)^2\,dx \\ I &= \int_{-2}^{4} D_x\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]dx \\ I &= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{-2}^{4} \\ I &= \frac{1}{3}\left[(4-2)^3-(-2-2)^3\right] \end{aligned}$$

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Otro método es el siguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{4} (x-2)^2\,dx \\ I &= \int_{-2}^{4} D_x\left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]dx \\ I &= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\right]_{-2}^{4} \\ I &= \frac{1}{3}\left[(4-2)^3-(-2-2)^3\right] \\ I &= 24 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Ejemplo

Calcular

$$I = \int_{0}^{2\pi} x\cos x\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

Ejemplo

Calcular

$$I = \int_{0}^{2\pi} x\cos x\,dx$$

Resolución: Se sabe que:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Calcular

$$I = \int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$$

Resolución: Se sabe que:

$$x\cos x = D_x[x\operatorname{sen}x + \cos x]$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x\cos x dx &= \int_0^{2\pi} D_x[x\operatorname{sen}x+\cos x]dx\\ I &= [x\operatorname{sen}x+\cos x]_0^{2\pi}\end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular

$$I = \int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$$

Resolución: Se sabe que:

$$x\cos x = D_x[x\operatorname{sen}x + \cos x]$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x\cos x dx &= \int_0^{2\pi} D_x[x\operatorname{sen}x+\cos x]dx\\ I &= [x\operatorname{sen}x+\cos x]_0^{2\pi}\\ I &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular

$$I = \int_{-4}^{4} \left|x^2+x-6\right|\,dx$$

Ejemplo

Calcular

$$I = \int_{-4}^{4} \left|x^2+x-6\right|\,dx$$

Resolución: Analizando los signos de $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

Ejemplo

Calcular
$$I = \int_{-4}^{4} \left|x^2 + x - 6\right| \, dx$$

Resolución: Analizando los signos de $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

$$\left|x^2 + x - 6\right| = \begin{cases} x^2 + x - 6, & \text{si } x \in]-\infty, -3] \cup [2, \infty[\\ -(x^2 + x - 6), & \text{si } x \in]-3, 2[\end{cases}$$

$$I = \int_{-4}^{-3} \left(x^2 + x - 6\right) dx - \int_{-3}^{2} \left(x^2 + x - 6\right) dx + \int_{2}^{4} \left(x^2 + x - 6\right) dx$$

$$I = \int_{-4}^{-3} \left(x^2 + x - 6\right) dx - \int_{-3}^{2} \left(x^2 + x - 6\right) dx + \int_{2}^{4} \left(x^2 + x - 6\right) dx$$

por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$I = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-4}^{-3} - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{2}^{4}$$

$$I = \int_{-4}^{-3} \left(x^2 + x - 6\right) dx - \int_{-3}^{2} \left(x^2 + x - 6\right) dx + \int_{2}^{4} \left(x^2 + x - 6\right) dx$$

por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$I = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-4}^{-3} - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{2}^{4}$$

$$I = \frac{17}{6} - \left(-\frac{125}{6}\right) + \frac{38}{3}$$

$$I = \int_{-4}^{-3} \left(x^2+x-6\right) dx - \int_{-3}^{2} \left(x^2+x-6\right) dx + \int_{2}^{4} \left(x^2+x-6\right) dx$$

por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-4}^{-3} - \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_{2}^{4} \\ I &= \frac{17}{6} - \left(-\frac{125}{6}\right) + \frac{38}{3} \\ I &= \frac{109}{3} \end{aligned}$$

Ejemplo

Determine $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x x f(t)dt$.

Ejemplo

Determine $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x x f(t)dt$.

Resolución: Tenemos, $F(x) = x\int_0^x f(t)dt$, derivando F se tiene

Ejemplo

Determine $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x x f(t)dt$.

Resolución: Tenemos, $F(x) = x\int_0^x f(t)dt$, derivando F se tiene

$$F'(x) = xD_x\left[\int_0^x f(t)dt\right] + D_x[x]\int_0^x f(t)dt$$

Ejemplo

Determine $F'(x)$ si $F(x) = \int_0^x x f(t)dt$.

Resolución: Tenemos, $F(x) = x\int_0^x f(t)dt$, derivando F se tiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= xD_x\left[\int_0^x f(t)dt\right] + D_x[x]\int_0^x f(t)dt \\ F'(x) &= xf(x) + \int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$

Ejemplo

Si $\int_0^{\frac{1}{3x+1}} f(t)dt = \frac{2}{ax} + ax$, donde f es una función continua sobre $\mathbb{R}$. Determine los valores de a de modo que $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{3}$.

Ejemplo

Si $\int_0^{\frac{1}{3x+1}} f(t)dt = \frac{2}{ax} + ax$, donde f es una función continua sobre $\mathbb{R}$. Determine los valores de a de modo que $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{3}$.

Resolución:

Ejemplo

Si $\int_0^{\frac{1}{3x+1}} f(t)dt = \frac{2}{ax} + ax$, donde f es una función continua sobre $\mathbb{R}$. Determine los valores de a de modo que $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{3}$.

Resolución: Sea $F(x) = \int_0^{\frac{1}{3x+1}} f(t)dt = \frac{2}{ax} + ax$

Ejemplo

Si $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3x+1}} f(t)dt = \frac{2}{ax} + ax$, donde f es una función continua sobre $\mathbb{R}$. Determine los valores de a de modo que $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{3}$.

Resolución: Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3x+1}} f(t)dt = \frac{2}{ax} + ax$

Derivando y utilizando el teorema

$$F'(x) = f\left(\frac{1}{3x+1}\right) D_x\left(\frac{1}{3x+1}\right) = D_x\left(\frac{2}{ax} + ax\right)$$

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

luego,

$$f\left(\frac{1}{3x+1}\right)\left[-\frac{3}{(3x+1)^2}\right] = -\frac{2}{ax^2} + a$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

luego,

$$f\left(\frac{1}{3x+1}\right)\left[-\frac{3}{(3x+1)^2}\right] = -\frac{2}{ax^2} + a$$

por otro lado tenemos: $f\left(\frac{1}{3x+1}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)$,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 La integral definida como límite de una suma Teoremas fundamentales del cálculo integral Ejercicios Referencias

luego,

$$f\left(\frac{1}{3x+1}\right)\left[-\frac{3}{(3x+1)^2}\right] = -\frac{2}{ax^2} + a$$

por otro lado tenemos: $f\left(\frac{1}{3x+1}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)$, de esto $x = 1$.

Reemplazando en ecuación:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{4^2}\right) &= -\frac{2}{a} + a \\ \left(\frac{16}{3}\right)\left(-\frac{3}{16}\right) &= -\frac{2}{a} + a \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

luego,

$$f\left(\frac{1}{3x+1}\right)\left[-\frac{3}{(3x+1)^2}\right] = -\frac{2}{ax^2} + a$$

por otro lado tenemos: $f\left(\dfrac{1}{3x+1}\right) = f\left(\dfrac{1}{4}\right)$, de esto $x = 1$.

Reemplazando en ecuación:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{4^2}\right) &= -\frac{2}{a} + a \\ \left(\frac{16}{3}\right)\left(-\frac{3}{16}\right) &= -\frac{2}{a} + a \\ 0 &= a^2 + a - 2 \end{aligned}$$

Sesión 06 | La integral definida como límite de una suma | Teoremas fundamentales del cálculo integral | Ejercicios | Referencias

luego,

$$f\left(\frac{1}{3x+1}\right)\left[-\frac{3}{(3x+1)^2}\right] = -\frac{2}{ax^2} + a$$

por otro lado tenemos: $f\left(\dfrac{1}{3x+1}\right) = f\left(\dfrac{1}{4}\right)$, de esto $x = 1$.

Reemplazando en ecuación:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{4^2}\right) &= -\frac{2}{a} + a \\ \left(\frac{16}{3}\right)\left(-\frac{3}{16}\right) &= -\frac{2}{a} + a \\ 0 &= a^2 + a - 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $a = -2$ ó $a = 1$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 | La integral definida como límite de una suma | Teoremas fundamentales del cálculo integral | Ejercicios | Referencias

Sesión 06

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 06 | La integral definida como límite de una suma | Teoremas fundamentales del cálculo integral | Ejercicios | Referencias

Ejercicios

1. Sea F una función real definida como

$$F(x) = \int_0^x t\sqrt{t+1}dt$$

para todo $x > -1$. Grafique la función F

2. Demuestre que si f es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left[\int_0^u f(t)dt\right] du$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejercicios

3. Demuestre que

$$\int_a^b \frac{2x}{1+x^2}dx = \int_{1+a^2}^{1+b^2} \frac{du}{u}$$

Ejercicios

4. Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones
   a) $f(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt$
   b) $g(x) \int_0^{e^x} \ln t\,dt$
   c) $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$
   d) $i(x) = \int_{1-3x}^1 \frac{t^3}{1+t^2}\,dt$

Ejercicios

5. Evalúe cada una de las siguientes integrales
   a) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$
   b) $\int_0^1 (x^e + e^x)\,dx$
   c) $\int_0^\pi f(x), dx$ donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } 0 \le x < \frac{pi}{2} \\ \cos x, & \text{si } \frac{pi}{2} \le x \le 2 \end{cases}$
   d) $\int_0^\pi f(x), dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 4-x^2, & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$

Sesión 06

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Septiembre 24, 2021

Contenido

Sesión 07

Integración numérica

Para calcular una integral definida mediante la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Integración numérica

Para calcular una integral definida mediante la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

hemos de ser capaces, primero, de hallar una antiderivada F y luego evaluar en $x = a$ y $x = b$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Integración numérica

Para calcular una integral definida mediante la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

hemos de ser capaces, primero, de hallar una antiderivada F y luego evaluar en $x = a$ y $x = b$. Cuando esto no es posible, el método falla, incluso para incluso integrales de aspecto tan sencillo como las siguientes:

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Integración numérica

Para calcular una integral definida mediante la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

hemos de ser capaces, primero, de hallar una antiderivada F y luego evaluar en $x = a$ y $x = b$. Cuando esto no es posible, el método falla, incluso para incluso integrales de aspecto tan sencillo como las siguientes: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ ó $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Integración numérica

Para calcular una integral definida mediante la fórmula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

hemos de ser capaces, primero, de hallar una antiderivada F y luego evaluar en $x = a$ y $x = b$. Cuando esto no es posible, el método falla, incluso para incluso integrales de aspecto tan sencillo como las siguientes: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\operatorname{sen} x dx$ ó $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx$.
No existe "funciones elementales" cuyas derivadas sean $\sqrt{x}\operatorname{sen} x$ y e^{-x^2}.

Sesión 07

Aproximación por trapecios

Centremos nuestra atención en

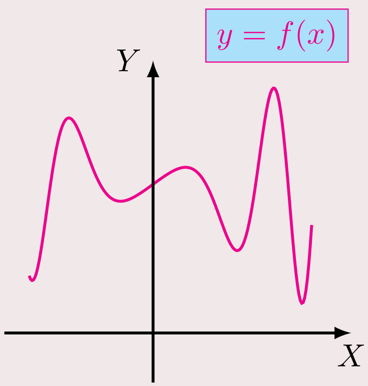
$$\int_a^b f(x)dx$$

Aproximación por trapecios

Centremos nuestra atención en

$$\int_a^b f(x)dx$$

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, una función continua.
Para simplificar nuestras figuras supongamos que f es positiva.

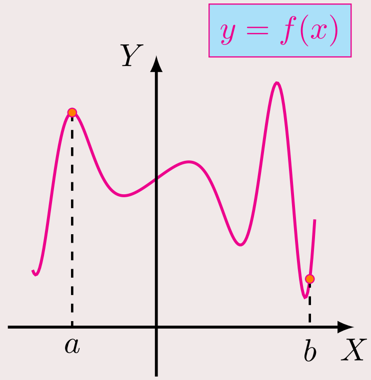


Aproximación por trapecios

Centremos nuestra atención en

$$\int_a^b f(x)dx$$

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, una función continua.
Para simplificar nuestras figuras supongamos que f es positiva.

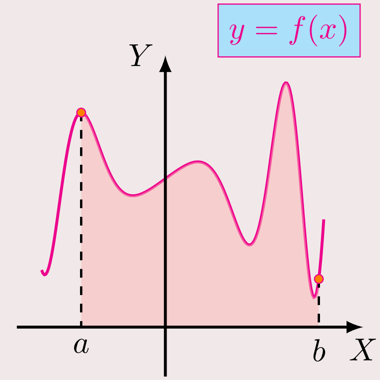


Aproximación por trapecios

Centremos nuestra atención en

$$\int_a^b f(x)dx$$

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, una función continua.
Para simplificar nuestras figuras supongamos que f es positiva.



Aproximación por trapecios

Empezamos dividiendo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de los cuales tiene longitud $\dfrac{b-a}{n}$.

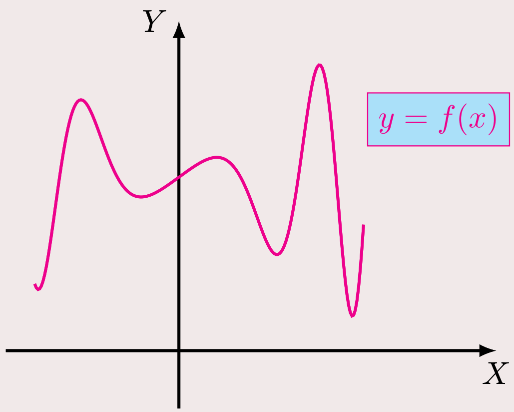
Aproximación por trapecios

Empezamos dividiendo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de los cuales tiene longitud $\dfrac{b-a}{n}$.
Es decir,

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \ldots \cup [x_{i-1}, x_i] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

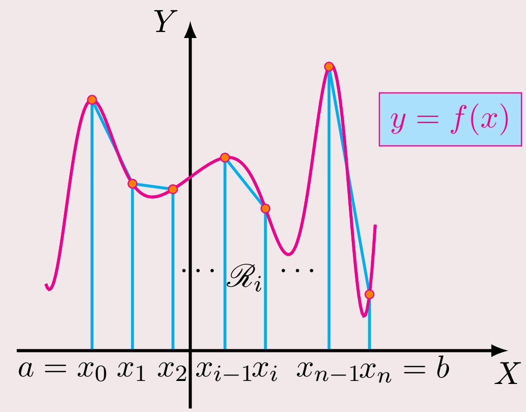
con $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Aproximación por trapecios



Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

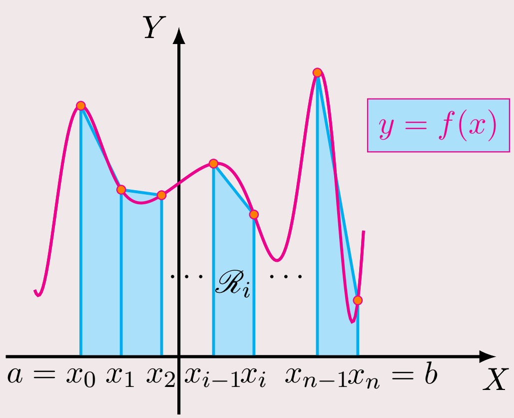
Aproximación por trapecios



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Aproximación por trapecios



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Aproximación por trapecios

Centremos nuestra atención en el área de $\mathscr{R}_i$:

$$A\left(\mathscr{R}_i\right) = \frac{1}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]\Delta x$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Aproximación por trapecios

Centremos nuestra atención en el área de $\mathscr{R}_i$:

$$A(\mathscr{R}_i) = \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,\Delta x$$

$$A(\mathscr{R}_i) = \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Aproximación por trapecios

Sumando estas áreas parciales $\mathscr{R}_i$ obtenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A(\mathscr{R}_i)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Aproximación por trapecios

Sumando estas áreas parciales $\mathscr{R}_i$ obtenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A(\mathscr{R}_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,\Delta x$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Aproximación por trapecios

Sumando estas áreas parciales $\mathscr{R}_i$ obtenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A(\mathscr{R}_i)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\,\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Aproximación por trapecios

Finalmente,

Aproximación por trapecios

Finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})]$$

Aproximación por trapecios

Finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})]$$

donde $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots n.$

Aproximación por trapecios

Finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})]$$

donde $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots n.$
Cuando mayor es el número n, es mayor la aproximación al valor de la integral definida.

Sesión 07

Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

Aproximación por parábolas

Se obtiene dividiendo $[a, b]$ en un número n par de intervalos de igual longitud y aproximando $f(x)$ por una función de segundo grado que pasa por cada 3 puntos sucesivos correspondientes a $x_0, x_1, x_2;\ x_2, x_3, x_4;\ \ldots;\ x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

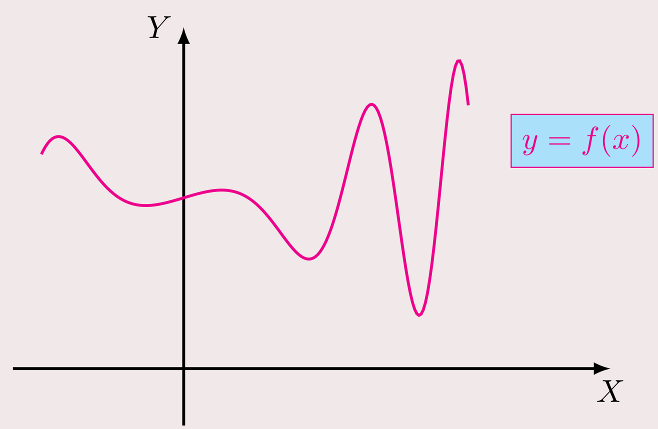
Aproximación por parábolas

Se obtiene dividiendo $[a, b]$ en un número n par de intervalos de igual longitud y aproximando $f(x)$ por una función de segundo grado que pasa por cada 3 puntos sucesivos correspondientes a $x_0, x_1, x_2;\ x_2, x_3, x_4;\ \ldots;\ x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$.
Geométricamente equivale a representar la curva $y = f(x)$ por un conjunto de arcos parabólicos que se aproxima a ella.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

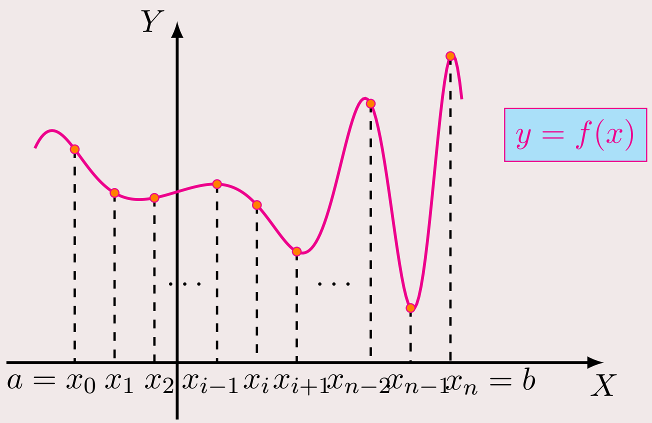
Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

Aproximación por parábolas



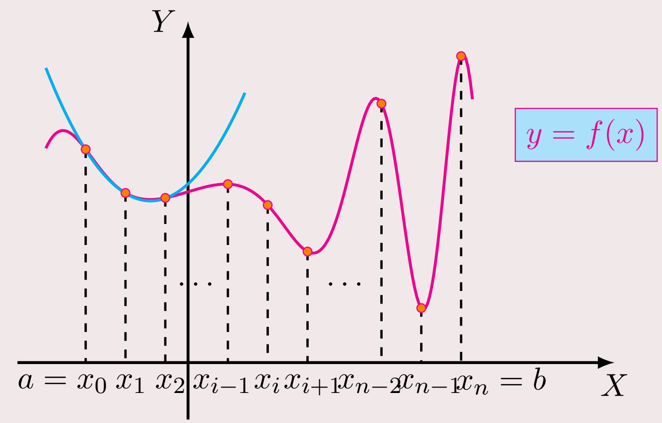
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Aproximación por parábolas



Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

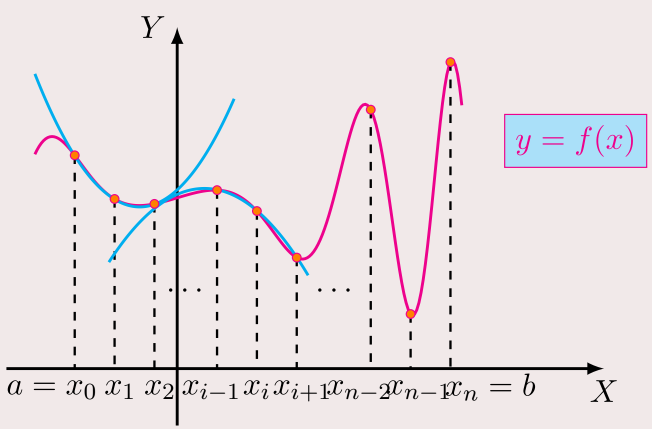
Aproximación por parábolas



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

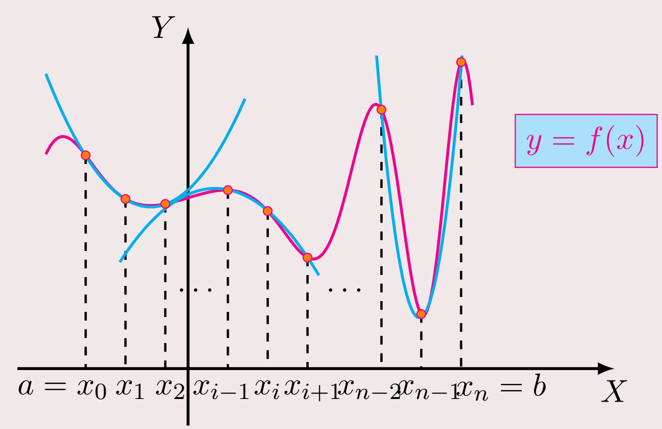
Aproximación por parábolas



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

Aproximación por parábolas



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Proposición

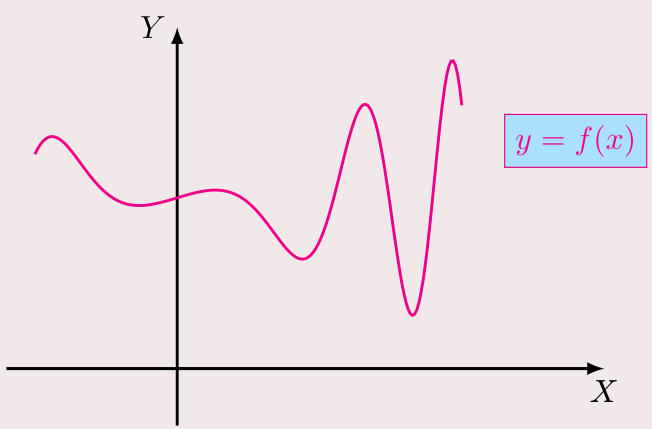
Sea $g(x) = Ax^2 + Bx + C$, donde $x \in [a, b]$, $y_0 = g(a)$, $y_1 = g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, $y_2 = g(b)$,

Proposición

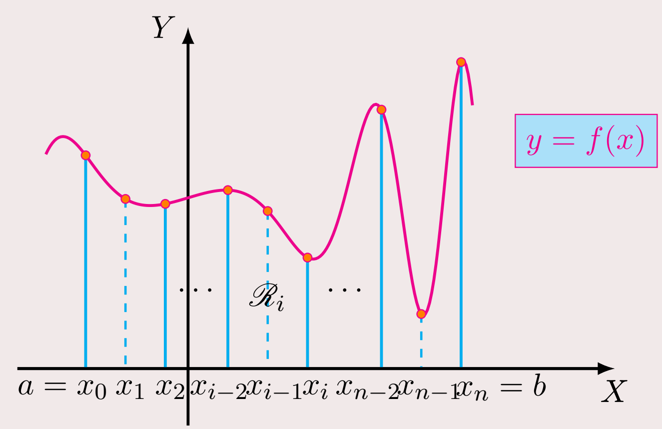
Sea $g(x) = Ax^2 + Bx + C$, donde $x \in [a, b]$, $y_0 = g(a)$, $y_1 = g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, $y_2 = g(b)$,entonces

$$\int_a^b (Ax^2 + Bx + C)dx = \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2], \ \Delta x = \frac{b-a}{2}$$

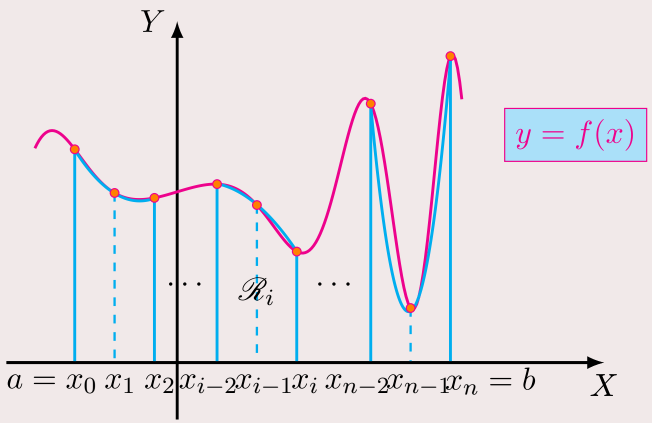
Aproximación por parábolas



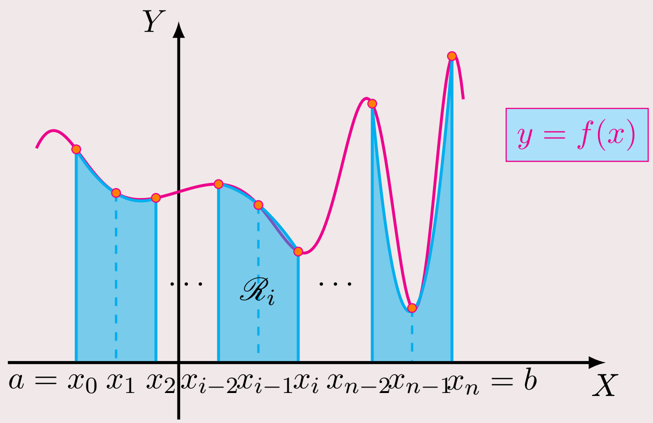
Aproximación por parábolas



Aproximación por parábolas



Aproximación por parábolas



Aproximación por parábolas

Centremos nuestra atención en el área de $\mathscr{R}_i$:

Aproximación por parábolas

Centremos nuestra atención en el área de $\mathscr{R}_i$:

$$A(\mathscr{R}_i) = \frac{\Delta x}{3}[y_{i-2} + 4y_{i-1} + y_i]$$

Aproximación por parábolas

Centremos nuestra atención en el área de $\mathscr{R}_i$:

$$A(\mathscr{R}_i) = \frac{\Delta x}{3}[y_{i-2} + 4y_{i-1} + y_i]$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y n es numero par.

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Aproximación por parábolas

Sumando todas las áreas:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{\Delta x}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4] + \ldots + \frac{\Delta x}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Aproximación por parábolas

Sumando todas las áreas:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] + \frac{\Delta x}{3}[y_2 + 4y_3 + y_4] + \ldots + \frac{\Delta x}{3}[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Aproximación por parábolas

Finalmente,

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Aproximación por parábolas

Finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1}) \\ +2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})]$$

Aproximación por parábolas

Finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1}) \\ +2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})]$$

donde $y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n.$

Sesión 07

Cotas para el error de los métodos del trapecio y de Simpson

Sabemos;

$$I = \int_a^b f(x)dx = T_n + ET_n$$

Cotas para el error de los métodos del trapecio y de Simpson

Sabemos;

$$I = \int_a^b f(x)dx = T_n + ET_n$$
$$I = \int_a^b f(x)dx = S_n + ES_n$$

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Cotas para el error de los métodos del trapecio y de Simpson

Sabemos;

$$I = \int_a^b f(x)dx = T_n + ET_n$$
$$I = \int_a^b f(x)dx = S_n + ES_n$$

donde T_n es el valor por el método de los trapecios y S_n es el valor por el método de Simpson,

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Cotas para el error de los métodos del trapecio y de Simpson

Sabemos;

$$I = \int_a^b f(x)dx = T_n + ET_n$$
$$I = \int_a^b f(x)dx = S_n + ES_n$$

donde T_n es el valor por el método de los trapecios y S_n es el valor por el método de Simpson, entonces $|ET_n| = |I - T_n|$ y $|ES_n| = |I - S_n|$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Estimación del error en la regla de los trapecios

Supongamos que la segunda derivada f'' es continua en $[a, b]$ y que $|f''(x)| \leq M_2$ para todo $x \in [a, b]$,

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Estimación del error en la regla de los trapecios

Supongamos que la segunda derivada f'' es continua en $[a,b]$ y que $|f''(x)| \leq M_2$ para todo $x \in [a,b]$,entonces

$$|ET_n| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

Estimación del error en la regla de Simpson

Supongamos que la cuarta derivada $f^{(4)}$ es continua en $[a,b]$ y que $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M_4$ para todo $x \in [a,b]$,

Estimación del error en la regla de Simpson

Supongamos que la cuarta derivada $f^{(4)}$ es continua en $[a,b]$ y que $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M_4$ para todo $x \in [a,b]$,entonces

$$|ES_n| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}$$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x}$ con un error inferior a 0.01.

Resolución: Usando el método de los trapecios: como $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

Ejemplo

Calcular $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ con un error inferior a 0.01.

Resolución: Usando el método de los trapecios: como $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $|f''(x)| \leq 2, \ \forall x \in [1,3]$, de donde $M_2 = 2$.

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Ejemplo

Calcular $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ con un error inferior a 0.01.

Resolución: Usando el método de los trapecios: como $f(x) = \frac{1}{x}$, entonces $|f''(x)| \leq 2, \ \forall x \in [1,3]$, de donde $M_2 = 2$. Luego,

$$
\begin{aligned}
|ET_n| &\leq \frac{2(2)^3}{12n^2} < 0.01 \\
n &= 12
\end{aligned}
$$

Así, $\Delta x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Los puntos de partición son:

Los puntos de partición son: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{7}{6}$, $x_2 = \frac{8}{6}$, $x_3 = \frac{9}{6}$, $x_4 = \frac{10}{6}$, $x_5 = \frac{11}{6}$, $x_6 = 2$, $x_7 = \frac{13}{6}$, $x_8 = \frac{14}{6}$, $x_9 = \frac{15}{6}$, $x_{10} = \frac{16}{6}$, $x_{11} = \frac{17}{6}$ y $x_{12} = 3$.

Luego,

Los puntos de partición son: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{7}{6}$, $x_2 = \frac{8}{6}$, $x_3 = \frac{9}{6}$, $x_4 = \frac{10}{6}$, $x_5 = \frac{11}{6}$, $x_6 = 2$, $x_7 = \frac{13}{6}$, $x_8 = \frac{14}{6}$, $x_9 = \frac{15}{6}$, $x_{10} = \frac{16}{6}$, $x_{11} = \frac{17}{6}$ y $x_{12} = 3$.

Luego, $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0.8571$, $f(x_2) = 0.75$, $f(x_3) = 0.6667$, $f(x_4) = 0.6$, $f(x_5) = 0.5454$, $f(x_6) = 0.5$, $f(x_7) = 0.4615$, $f(x_8) = 0.4286$, $f(x_9) = 0.4$, $f(x_{10}) = 0.375$,

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Los puntos de partición son: $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{7}{6}$, $x_2 = \frac{8}{6}$, $x_3 = \frac{9}{6}$, $x_4 = \frac{10}{6}$, $x_5 = \frac{11}{6}$, $x_6 = 2$, $x_7 = \frac{13}{6}$, $x_8 = \frac{14}{6}$, $x_9 = \frac{15}{6}$, $x_{10} = \frac{16}{6}$, $x_{11} = \frac{17}{6}$ y $x_{12} = 3$.

Luego, $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0.8571$, $f(x_2) = 0.75$, $f(x_3) = 0.6667$, $f(x_4) = 0.6$, $f(x_5) = 0.5454$, $f(x_6) = 0.5$, $f(x_7) = 0.4615$, $f(x_8) = 0.4286$, $f(x_9) = 0.4$, $f(x_{10}) = 0.375$,$f(x_{11}) = 0.3529$, $f(x_{12}) = 0.3333$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Finalmente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 Integración numérica Regla del trapecio Regla de Simpson Cotas para el error Ejercicios Referencias

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{x} \quad \approx \quad & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)[1 + 0.3333 + 2(0.8571 + 0.75 + 0.6667 + 0.6 \\ & +0.5454 + 0.5 + 0.4615 + 0.4286 + 0.4 + 0.375 + 0.3529)]\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Finalmente,

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)[1 + 0.3333 + 2(0.8571 + 0.75 + 0.6667 + 0.6$$
$$+0.5454 + 0.5 + 0.4615 + 0.4286 + 0.4 + 0.375 + 0.3529)]$$
$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{12}[13.2077]$$

Finalmente,

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)[1 + 0.3333 + 2(0.8571 + 0.75 + 0.6667 + 0.6$$
$$+0.5454 + 0.5 + 0.4615 + 0.4286 + 0.4 + 0.375 + 0.3529)]$$
$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{12}[13.2077]$$
$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx 1.1006$$

Finalmente,

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)[1 + 0.3333 + 2(0.8571 + 0.75 + 0.6667 + 0.6$$
$$+0.5454 + 0.5 + 0.4615 + 0.4286 + 0.4 + 0.375 + 0.3529)]$$
$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{12}[13.2077]$$
$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx 1.1006$$

Por lo tanto, $T_{12} = 1.1006$.

Usando el método de Simpson:

Usando el método de Simpson:

$f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$,

Usando el método de Simpson:

$f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$, entonces $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 24$, $\forall x \in [1,3]$, de donde $M_4 = 24$. Luego,

Usando el método de Simpson:

$f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$, entonces $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 24$, $\forall x \in [1,3]$, de donde $M_4 = 24$. Luego,

$$\begin{aligned} |ES_n| &\leq \frac{24(2)^5}{180n^4} < 0.01 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

pero se debe tomar un número par, por lo que $n = 6$.

Usando el método de Simpson:

$f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$, entonces $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 24$, $\forall x \in [1,3]$, de donde $M_4 = 24$. Luego,

$$\begin{aligned} |ES_n| &\leq \frac{24(2)^5}{180n^4} < 0.01 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

pero se debe tomar un número par, por lo que $n = 6$.

Así, $\Delta x = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ y los puntos de partición son:

Usando el método de Simpson:
$f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$, entonces $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq 24,\ \forall x \in [1,3]$, de donde $M_4 = 24$. Luego,

$$\begin{aligned} |ES_n| &\leq \frac{24(2)^5}{180n^4} < 0.01 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

pero se debe tomar un número par, por lo que $n = 6$.
Así, $\Delta x = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ y los puntos de partición son:

$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{5}{3},\ x_3 = \frac{6}{3},\ x_4 = \frac{7}{3},\ x_5 = \frac{8}{3},\ x_6 = 3$$

Luego, $f(x_0) = 1,\ f(x_1) = 0.75,\ f(x_2) = 0.6,\ f(x_3) = 0.5,\ f(x_4) = 0.4286,\ f(x_5) = 0.375,\ f(x_6) = 0.3333$.
Finalmente,

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)[1 + 0.3333 + 4(0.75 + 0.5 + 0.375)$$

Luego, $f(x_0) = 1,\ f(x_1) = 0.75,\ f(x_2) = 0.6,\ f(x_3) = 0.5,\ f(x_4) = 0.4286,\ f(x_5) = 0.375,\ f(x_6) = 0.3333$.
Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{x} &\approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)[1 + 0.3333 + 4(0.75 + 0.5 + 0.375) \\ &\quad +2(0.6 + 0.4286)] \end{aligned}$$

Luego, $f(x_0) = 1,\ f(x_1) = 0.75,\ f(x_2) = 0.6,\ f(x_3) = 0.5,\ f(x_4) = 0.4286,\ f(x_5) = 0.375,\ f(x_6) = 0.3333$.
Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{x} &\approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)[1 + 0.3333 + 4(0.75 + 0.5 + 0.375) \\ &\quad +2(0.6 + 0.4286)] \end{aligned}$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{9}[9.8905]$$

Luego, $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0.75$, $f(x_2) = 0.6$, $f(x_3) = 0.5$, $f(x_4) = 0.4286$, $f(x_5) = 0.375$, $f(x_6) = 0.3333$.
Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{x} &\approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)[1 + 0.3333 + 4(0.75 + 0.5 + 0.375) \\ &\quad +2(0.6 + 0.4286)] \\ \int_1^3 \frac{dx}{x} &\approx \frac{1}{9}[9.8905] \\ \int_1^3 \frac{dx}{x} &\approx 1.0989\end{aligned}$$

Luego, $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0.75$, $f(x_2) = 0.6$, $f(x_3) = 0.5$, $f(x_4) = 0.4286$, $f(x_5) = 0.375$, $f(x_6) = 0.3333$.
Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{x} &\approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)[1 + 0.3333 + 4(0.75 + 0.5 + 0.375) \\ &\quad +2(0.6 + 0.4286)] \\ \int_1^3 \frac{dx}{x} &\approx \frac{1}{9}[9.8905] \\ \int_1^3 \frac{dx}{x} &\approx 1.0989\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_6 = 1.0989$.

Pero sabemos,

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln 3$$

Pero sabemos,

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln 3$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx 1.0986$$

Pero sabemos,

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = \ln 3$$
$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \approx 1.0986$$

Observamos que el método de Simpson nos da una precisión de 3 cifras decimales.

Ejemplo

Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ aproximando por Simpson, dentro del intervalo $[0,1]$ con $n=4$ partes iguales.

Ejemplo

Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ aproximando por Simpson, dentro del intervalo $[0,1]$ con $n=4$ partes iguales.

Resolución:

Ejemplo

Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ aproximando por Simpson, dentro del intervalo $[0,1]$ con $n=4$ partes iguales.

Resolución: La longitud de cada intervalo es $\Delta x = \frac{1}{4} = 0.25$

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ aproximando por Simpson, dentro del intervalo $[0,1]$ con $n=4$ partes iguales.

Resolución: La longitud de cada intervalo es $\Delta x = \dfrac{1}{4} = 0.25$ y los puntos de partición son: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$ y $x_4 = 1$.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ aproximando por Simpson, dentro del intervalo $[0,1]$ con $n=4$ partes iguales.

Resolución: La longitud de cada intervalo es $\Delta x = \dfrac{1}{4} = 0.25$ y los puntos de partición son: $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$ y $x_4 = 1$.
Luego, $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 0.9412$, $f(x_2) = 0.8$, $f(x_3) = 0.64$, $f(x_4) = 0.5$.

Finalmente,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)[1+0.5+4(0.9412+0.64)+2(0.8)]$$

Finalmente,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)[1+0.5+4(0.9412+0.64)+2(0.8)]$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{12}[9.4248]$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)[1+0.5+4(0.9412+0.64)+2(0.8)] \\
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{1}{12}[9.4248] \\
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx 0.7854
\end{aligned}$$

Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)[1+0.5+4(0.9412+0.64)+2(0.8)] \\
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{1}{12}[9.4248] \\
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx 0.7854
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_4 = 0.7854$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)[1+0.5+4(0.9412+0.64)+2(0.8)] \\
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx \frac{1}{12}[9.4248] \\
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &\approx 0.7854
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_4 = 0.7854$.

El valor exacto es $\dfrac{\pi}{4} \approx 0.7854$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

Enlace de interés

El siguiente enlace presenta ejemplos sobre el método de los trapecios.

`https://www.geogebra.org/classic/fuqvckjv`

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Enlace de interés

El siguiente enlace presenta ejemplos sobre el método de Simpson.

https://www.geogebra.org/classic/c2upehbm

Sesión 07

Ejercicios

1. Utilice a) la regla del trapecio, b) la regla de Simpson para aproximar las integrales dadas con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales).

   a) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^3-1}\,dx$, $n=10$

   b) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\ln x}\,dx$, $n=6$

   c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x}{1+x^2}\,dx$, $n=10$

   d) $\displaystyle\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\operatorname{sen} x\,dx$, $n=8$

Ejercicios

2. a) Encuentre las aproximaciones T_{10} y S_{10} para la integral $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x$ y los errores correspondientes E_T y E_S.

   b) Compare los errores reales de inciso a) con las estimaciones del error E_T y E_S.

   c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n para que las aproximaciones T_n y S_n para la integral del inciso a) estén dentro de una exactitud de 0.00001?

Ejercicios

3. Demuestre que si f es una función polinomial de grado tres o menor, entonces la regla de Simpson da el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$.

Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

Sesión 07

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 07 | Integración numérica | Regla del trapecio | Regla de Simpson | Cotas para el error | Ejercicios | Referencias

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Septiembre 24, 2021

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Contenido

Sesión 08

Teorema

Supongamos que g tiene una derivada continua g' en un intervalo abierto I. Sea J el conjunto de valores que toma g en I y supongamos que f es continua en J,

Teorema

Supongamos que g tiene una derivada continua g' en un intervalo abierto I. Sea J el conjunto de valores que toma g en I y supongamos que f es continua en J,entonces para cada x y cada c en I, tenemos

$$\int_c^x f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)du$$

Demostración.

Demostración.

Sea $a = g(c)$ y definamos dos nuevas funciones P y Q del siguiente modo

Demostración.

Sea $a = g(c)$ y definamos dos nuevas funciones P y Q del siguiente modo

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_a^x f(u)du \quad \text{si } x \in J \\ Q(x) &= \int_c^x f(g(t))g'(t)dt \quad \text{si } x \in I \end{aligned}$$

Demostración.

Sea $a = g(c)$ y definamos dos nuevas funciones P y Q del siguiente modo

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_a^x f(u)du \quad \text{si } x \in J \\ Q(x) &= \int_c^x f(g(t))g'(t)dt \quad \text{si } x \in I \end{aligned}$$

Puesto que P y Q son integrales definidas de funciones continuas, tiene derivadas dadas por $P'(x) = f(x)$ y $Q'(x) = f(g(x))g'(x)$

Demostración.

Llamamos ahora R a la función compuesta $R(x) = P(g(x))$,

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Demostración.

Llamamos ahora R a la función compuesta $R(x) = P(g(x))$, con la regla de la cadena encontramos

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Demostración.

Llamamos ahora R a la función compuesta $R(x) = P(g(x))$, con la regla de la cadena encontramos

$$R'(x) = P'[g(x)]\,g'(x)$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Demostración.

Llamamos ahora R a la función compuesta $R(x) = P(g(x))$, con la regla de la cadena encontramos

$$\begin{aligned} R'(x) &= P'[g(x)]\,g'(x) \\ R'(x) &= f[g(x)]\,g'(x) \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración.

Llamamos ahora R a la función compuesta $R(x) = P(g(x))$, con la regla de la cadena encontramos

$$\begin{aligned} R'(x) &= P'[g(x)]\,g'(x) \\ R'(x) &= f[g(x)]\,g'(x) \\ R'(x) &= Q'(x) \end{aligned}$$

Demostración.

Aplicando dos veces el segundo teorema fundamental del cálculo,

Demostración.

Aplicando dos veces el segundo teorema fundamental del cálculo, obtenemos

Demostración.

Aplicando dos veces el segundo teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\int_{g(c)}^{g(x)} f(u)du = \int_{g(c)}^{g(x)} P'(u)du$$

Demostración.

Aplicando dos veces el segundo teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{g(c)}^{g(x)} f(u)du &= \int_{g(c)}^{g(x)} P'(u)du \\ \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)du &= P\left[g(x)\right] - P[g(c)]\end{aligned}$$

Demostración.

Aplicando dos veces el segundo teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{g(c)}^{g(x)} f(u)du &= \int_{g(c)}^{g(x)} P'(u)du \\ \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)du &= P\left[g(x)\right] - P[g(c)] \\ \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)du &= R(x) - R(c)\end{aligned}$$

Demostración.

Finalmente,

□

Demostración.

Finalmente,

$$\int_{c}^{x} f[g(t)]g'(t)dt = \int_{c}^{x} Q'(t)dt$$

□

Demostración.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_c^x f[g(t)]g'(t)dt &= \int_c^x Q'(t)dt \\ \int_c^x f[g(t)]g'(t)dt &= \int_c^x R'(t)dt\end{aligned}$$

□

Demostración.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_c^x f[g(t)]g'(t)dt &= \int_c^x Q'(t)dt \\ \int_c^x f[g(t)]g'(t)dt &= \int_c^x R'(t)dt \\ \int_c^x f[g(t)]g'(t)dt &= R(x) - R(c)\end{aligned}$$

□

Demostración.

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int_c^x f[g(t)]g'(t)dt &= \int_c^x Q'(t)dt \\ \int_c^x f[g(t)]g'(t)dt &= \int_c^x R'(t)dt \\ \int_c^x f[g(t)]g'(t)dt &= R(x) - R(c) \\ \therefore \int_c^x f(g(t))g'(t)dt &= \int_{g(c)}^{g(x)} f(u)du\end{aligned}$$

□

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Resolución:

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Resolución: Sea $u = x^2 + 2x + 3$,

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Resolución: Sea $u = x^2 + 2x + 3$, entonces $du = (2x+2)dx$ y por tanto

$$\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Resolución: Sea $u = x^2 + 2x + 3$, entonces $du = (2x+2)dx$ y por tanto

$$\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

luego, $u = 11$ si $x = 2$ y $u = 18$ si $x = 3$.

Aplicando el teorema anterior

$$I = \int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Aplicando el teorema anterior

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} \\ I &= \frac{1}{2}\int_{11}^{18} u^{-1/2}du \end{aligned}$$

Aplicando el teorema anterior

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} \\ I &= \frac{1}{2}\int_{11}^{18} u^{-1/2}du \\ I &= \left[\sqrt{u}\right]_{11}^{18} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema anterior

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} \\ I &= \frac{1}{2}\int_{11}^{18} u^{-1/2}du \\ I &= \left[\sqrt{u}\right]_{11}^{18} \\ I &= \sqrt{18}-\sqrt{11} \end{aligned}$$

Sesión 08

Introducción

Deseamos calcular la integral indefinida para la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^n$, para todo $n\in\mathbb{Z}$ y $x>0$.

Introducción

Deseamos calcular la integral indefinida para la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^n$, para todo $n\in\mathbb{Z}$ y $x>0$. Es decir se desea calcular, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que $F'(x)=f(x)=x^n$, para todo $n\in\mathbb{Z}$ y $x>0$.

Introducción

Deseamos calcular la integral indefinida para la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^n$, para todo $n\in\mathbb{Z}$ y $x>0$. Es decir se desea calcular, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que $F'(x)=f(x)=x^n$, para todo $n\in\mathbb{Z}$ y $x>0$.
Para $n\neq -1$, tenemos

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

Introducción

Deseamos calcular la integral indefinida para la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^n$, para todo $n\in\mathbb{Z}$ y $x>0$. Es decir se desea calcular, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que $F'(x)=f(x)=x^n$, para todo $n\in\mathbb{Z}$ y $x>0$.
Para $n\neq -1$, tenemos

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

entonces $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$ es la antiderivada general de f tal que $f(x)=x^n$ con $n\neq -1$ y $x>0$.

Introducción

Para $n=-1$ no es posible usar la ecuación anterior puesto que $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ es indeterminado.

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Introducción

Para $n=-1$ no es posible usar la ecuación anterior puesto que $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ es indeterminado.

Sin embargo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\dfrac{1}{x}$ esta bien definida en $]0,1]$ y $[1,\infty[$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Introducción

Para $n=-1$ no es posible usar la ecuación anterior puesto que $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ es indeterminado.

Sin embargo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\dfrac{1}{x}$ esta bien definida en $]0,1]$ y $[1,\infty[$.

Analicemos f en $[x,1]$ y $[1,x]$, para $x>0$, entonces $f(t)=\dfrac{1}{t}$ es continua en $[x,1]$ y $[1,x]$ para $x>0$, por lo que f es acotada en $[x,1]$ y $[1,x]$ para $x>0$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Introducción

Para $n=-1$ no es posible usar la ecuación anterior puesto que $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ es indeterminado.

Sin embargo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\dfrac{1}{x}$ esta bien definida en $]0,1]$ y $[1,\infty[$.

Analicemos f en $[x,1]$ y $[1,x]$, para $x>0$, entonces $f(t)=\dfrac{1}{t}$ es continua en $[x,1]$ y $[1,x]$ para $x>0$, por lo que f es acotada en $[x,1]$ y $[1,x]$ para $x>0$.

Así la antiderivada de f tal que $f(t)=\dfrac{1}{t}$, existe sobre $[x,1]$ y $[1,x]$, para $x>0$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Introducción

Consideremos F tal que $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$, $x > 0$,

Introducción

Consideremos F tal que $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$, $x > 0$, entonces por el primer teorema fundamental del cálculo, F es diferenciable para $x > 0$ y $F'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

Introducción

Consideremos F tal que $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$, $x > 0$, entonces por el primer teorema fundamental del cálculo, F es diferenciable para $x > 0$ y $F'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$.

Por lo tanto, la función F tal que $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ es una antiderivada de f tal que $f(t) = \frac{1}{t}$, para todo $x > 0$.

Logaritmo natural

Definición

Sea $F\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, entonces F define a la función logaritmo natural (logaritmo neperiano).

Logaritmo natural

Definición

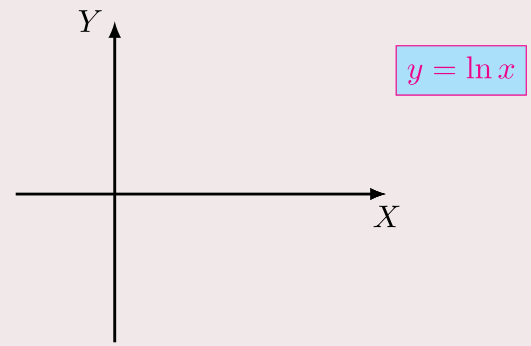
Sea $F\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, entonces F define a la función logaritmo natural (logaritmo neperiano).

Notación:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x > 0$$

Sesión 08 | Cambio de variable de una integral definida | El logaritmo natural | Ejercicios | Referencias

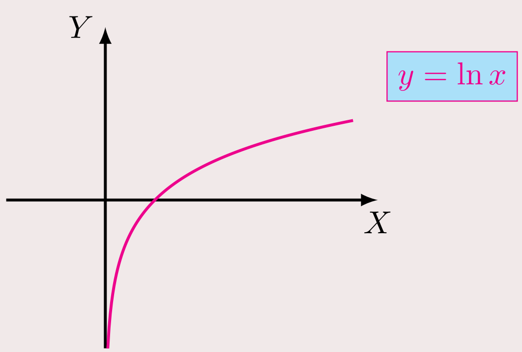
Gráfica de la función logaritmo natural



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 | Cambio de variable de una integral definida | El logaritmo natural | Ejercicios | Referencias

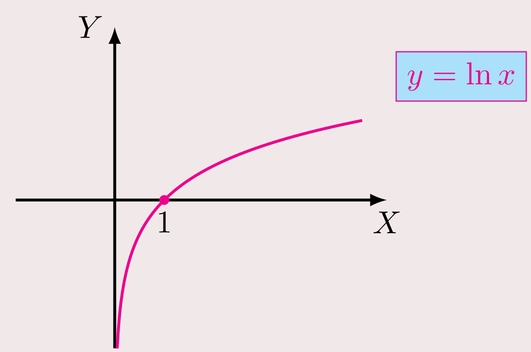
Gráfica de la función logaritmo natural



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 | Cambio de variable de una integral definida | El logaritmo natural | Ejercicios | Referencias

Gráfica de la función logaritmo natural



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Observación

Consecuencias de la definición:

Observación

Consecuencias de la definición:

1. La función f tal que $f(x) = \ln(x)$ esta definida para $]0, \infty[$.

Observación

Consecuencias de la definición:

1. La función f tal que $f(x) = \ln(x)$ esta definida para $]0, \infty[$.
2. Si $x = 1$, entonces $\ln(1) = 0$.

Observación

Consecuencias de la definición:

1. La función f tal que $f(x) = \ln(x)$ esta definida para $]0, \infty[$.
2. Si $x = 1$, entonces $\ln(1) = 0$.
3. Si $x > 1$, entonces $\ln(x) > 0$.

Observación

Consecuencias de la definición:

1. La función f tal que $f(x) = \ln(x)$ esta definida para $]0, \infty[$.
2. Si $x = 1$, entonces $\ln(1) = 0$.
3. Si $x > 1$, entonces $\ln(x) > 0$.
4. Si $0 < x < 1$, entonces $\ln(x) < 0$.

Observación

Consecuencias de la definición:

1. La función f tal que $f(x) = \ln(x)$ esta definida para $]0, \infty[$.
2. Si $x = 1$, entonces $\ln(1) = 0$.
3. Si $x > 1$, entonces $\ln(x) > 0$.
4. Si $0 < x < 1$, entonces $\ln(x) < 0$.
5. Si f es tal que $f(x) = \ln(x)$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, luego f es estrictamente creciente.

Observación

Consecuencias de la definición:

1. La función f tal que $f(x) = \ln(x)$ esta definida para $]0, \infty[$.
2. Si $x = 1$, entonces $\ln(1) = 0$.
3. Si $x > 1$, entonces $\ln(x) > 0$.
4. Si $0 < x < 1$, entonces $\ln(x) < 0$.
5. Si f es tal que $f(x) = \ln(x)$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, luego f es estrictamente creciente.
6. Si f es tal que $f(x) = \ln(x)$, entonces $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, luego f es no convexa.

Consideremos $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función positiva y diferenciable, Consideremos $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función positiva y diferenciable, entonces $u(x) > 0$ para cada $x \in$ dom(u), así $\ln[u(x)]$ esta bien definido.

Consideremos $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función positiva y diferenciable, entonces $u(x) > 0$ para cada $x \in$ dom(u), así $\ln[u(x)]$ esta bien definido.
Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $g(y) = \ln(y)$ para $y > 0$,

Consideremos $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función positiva y diferenciable, entonces $u(x) > 0$ para cada $x \in$ dom(u), así $\ln[u(x)]$ esta bien definido.
Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $g(y) = \ln(y)$ para $y > 0$, entonces $g'(y) = \dfrac{1}{y}$

Consideremos $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función positiva y diferenciable, entonces $u(x) > 0$ para cada $x \in$ dom(u), así $\ln[u(x)]$ esta bien definido.
Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $g(y) = \ln(y)$ para $y > 0$, entonces $g'(y) = \dfrac{1}{y}$ y si hacemos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h = g \circ u$,

Consideremos $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función positiva y diferenciable, entonces $u(x) > 0$ para cada $x \in \text{dom}(u)$, así $\ln[u(x)]$ esta bien definido.
Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $g(y) = \ln(y)$ para $y > 0$, entonces $g'(y) = \dfrac{1}{y}$ y si hacemos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h = g \circ u$, entonces $h(x) = g(u(x))$ y $h'(x) = g'[u(x)]u'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$.

Sesión 08 | Cambio de variable de una integral definida | El logaritmo natural | Ejercicios | Referencias

Consideremos $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función positiva y diferenciable, entonces $u(x) > 0$ para cada $x \in \text{dom}(u)$, así $\ln[u(x)]$ esta bien definido.
Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $g(y) = \ln(y)$ para $y > 0$, entonces $g'(y) = \dfrac{1}{y}$ y si hacemos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h = g \circ u$, entonces $h(x) = g(u(x))$ y $h'(x) = g'[u(x)]u'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$.
Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}[\ln(u(x))] = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 | Cambio de variable de una integral definida | El logaritmo natural | Ejercicios | Referencias

Consideremos u tal que $u(x) = |x|$ para $x \neq 0$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 | Cambio de variable de una integral definida | El logaritmo natural | Ejercicios | Referencias

Consideremos u tal que $u(x) = |x|$ para $x \neq 0$.
Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y $u'(x) = 1$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Consideremos u tal que $u(x) = |x|$ para $x \neq 0$.
Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y $u'(x) = 1$.
Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $u'(x) = -1$

Consideremos u tal que $u(x) = |x|$ para $x \neq 0$.
Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y $u'(x) = 1$.
Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $u'(x) = -1$
Luego,

$$\frac{d}{dx}[\ln(u(x))] = \frac{u'(x)}{u(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}\cdot(1) = \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Consideremos u tal que $u(x) = |x|$ para $x \neq 0$.
Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y $u'(x) = 1$.
Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $u'(x) = -1$
Luego,

$$\frac{d}{dx}[\ln(u(x))] = \frac{u'(x)}{u(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}\cdot(1) = \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Así, $\frac{d}{dx}[\ln|x|] = \frac{1}{x}$.

Por lo tanto, la integral indefinida para f tal que $f(x) = \frac{1}{x}$ con $x \neq 0$ es $\ln|x| + c$, Por lo tanto, la integral indefinida para f tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ con $x \neq 0$ es $\ln|x| + c$, es decir

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, \quad \forall x \neq 0$$

Propiedades del logaritmo natural

P1. Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $u(x) \neq 0$ para todo $x \in$ dom(u), entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(u(x))\right] = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Propiedades del logaritmo natural

P1. Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $u(x) \neq 0$ para todo $x \in$ dom(u), entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(u(x))\right] = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

P2. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

Propiedades del logaritmo natural

P3. Si $n \in \mathbb{Z}$ y $a > 0$, entonces

$$\ln(a^n) = n\ln(a)$$

Propiedades del logaritmo natural

P3. Si $n \in \mathbb{Z}$ y $a > 0$, entonces

$$\ln(a^n) = n\ln(a)$$

P4. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Propiedades del logaritmo natural

P3. Si $n \in \mathbb{Z}$ y $a > 0$, entonces

$$\ln(a^n) = n\ln(a)$$

P4. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

P5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Demostración P1.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Demostración P1.

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(y) = \ln|y|$,

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración P1.

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(y)=\ln|y|$, entonces $g'(y)=\dfrac{1}{y}$, $y\neq 0$ y $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h=g\circ u$,

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Demostración P1.

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(y)=\ln|y|$, entonces $g'(y)=\dfrac{1}{y}$, $y\neq 0$ y $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h=g\circ u$, luego $h(x)=g(u(x))=\ln|u(x)|$ y $h'(x)=g'(u(x))u'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Demostración P1.

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(y)=\ln|y|$, entonces $g'(y)=\dfrac{1}{y}$, $y\neq 0$ y $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $h=g\circ u$, luego $h(x)=g(u(x))=\ln|u(x)|$ y $h'(x)=g'(u(x))u'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}\left[\ln(u(x))\right]=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

□

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

Demostración P2.

Por definición

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración P2.

Por definición

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dx}{x}$$

Demostración P2.

Por definición

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dx}{x}$$

$$\ln(ab) = \int_1^{b} \frac{dx}{x} + \int_b^{ab} \frac{dx}{x}$$

Demostración P2.

Por definición

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dx}{x}$$

$$\ln(ab) = \int_1^{b} \frac{dx}{x} + \int_b^{ab} \frac{dx}{x}$$

$$\ln(ab) = \int_b^{ab} \frac{dx}{x} + \ln(b)$$

Demostración P2.

Por definición

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dx}{x}$$

$$\ln(ab) = \int_1^{b} \frac{dx}{x} + \int_b^{ab} \frac{dx}{x}$$

$$\ln(ab) = \int_b^{ab} \frac{dx}{x} + \ln(b)$$

Haciendo $y = \frac{x}{b}$ entonces $dy = \frac{dx}{b}$, además para $x = ab$ se tiene $y = a$ y para $x = b$ se tiene $y = 1$.

Demostración P2.

Luego

$$\int_b^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{bdy}{by}$$

Demostración P2.

Luego

$$\begin{aligned}\int_b^{ab} \frac{dx}{x} &= \int_1^a \frac{bdy}{by}\\ \int_b^{ab} \frac{dx}{x} &= \int_1^a \frac{dy}{y}\end{aligned}$$

Demostración P2.

Luego

$$\begin{aligned}\int_b^{ab} \frac{dx}{x} &= \int_1^a \frac{bdy}{by}\\ \int_b^{ab} \frac{dx}{x} &= \int_1^a \frac{dy}{y}\\ \int_b^{ab} \frac{dx}{x} &= \ln(a)\end{aligned}$$

Demostración P2.

Reemplazando en la ecuación,

$$\ln(ab) = \int_b^{ab} \frac{dx}{x} + \ln(b)$$

□

Demostración P2.

Reemplazando en la ecuación,

$$\ln(ab) = \int_b^{ab} \frac{dx}{x} + \ln(b)$$

se tiene por lo tanto

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$\square$

Demostración P3.

Por inducción matemática:

i. Para $m = 1$: $\ln(a^1) = 1 \cdot \ln(a)$

$\square$

Demostración P3.

Por inducción matemática:

i. Para $m = 1$: $\ln(a^1) = 1 \cdot \ln(a)$
ii. Para $m = n$: $\ln(a^n) = n\ln(a)$

$\square$

Demostración P3.

Por inducción matemática:

i. Para $m = 1$: $\ln(a^1) = 1 \cdot \ln(a)$
ii. Para $m = n$: $\ln(a^n) = n\ln(a)$
   Veamos para $m = n + 1$:

$$\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \cdot a)$$

$\square$

Demostración P3.

Por inducción matemática:

i. Para $m = 1$: $\ln\left(a^1\right) = 1 \cdot \ln(a)$

ii. Para $m = n$: $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

Veamos para $m = n + 1$:

$$\begin{aligned} \ln\left(a^{n+1}\right) &= \ln\left(a^n \cdot a\right) \\ \ln\left(a^{n+1}\right) &= \ln\left(a^n\right) + \ln(a) \end{aligned}$$

$\square$

Demostración P3.

Por inducción matemática:

i. Para $m = 1$: $\ln\left(a^1\right) = 1 \cdot \ln(a)$

ii. Para $m = n$: $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

Veamos para $m = n + 1$:

$$\begin{aligned} \ln\left(a^{n+1}\right) &= \ln\left(a^n \cdot a\right) \\ \ln\left(a^{n+1}\right) &= \ln\left(a^n\right) + \ln(a) \\ \ln\left(a^{n+1}\right) &= n\ln(a) + \ln(a) \end{aligned}$$

$\square$

Demostración P3.

Por inducción matemática:

i. Para $m = 1$: $\ln\left(a^1\right) = 1 \cdot \ln(a)$

ii. Para $m = n$: $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

Veamos para $m = n + 1$:

$$\begin{aligned} \ln\left(a^{n+1}\right) &= \ln\left(a^n \cdot a\right) \\ \ln\left(a^{n+1}\right) &= \ln\left(a^n\right) + \ln(a) \\ \ln\left(a^{n+1}\right) &= n\ln(a) + \ln(a) \\ \ln\left(a^{n+1}\right) &= (n+1)\ln(a) \end{aligned}$$

$\square$

Demostración P4.

Por definición

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \int_1^{\frac{a}{b}} \frac{dx}{x} \tag{1}$$

Demostración P4.

Por definición

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \int_1^{\frac{a}{b}} \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{dx}{x} + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a}{b}} \frac{dx}{x} \qquad (1)$$

Demostración P4.

Por definición

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \int_1^{\frac{a}{b}} \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{dx}{x} + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a}{b}} \frac{dx}{x} \qquad (1)$$

Utilizando:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = c\int_{\frac{\alpha}{c}}^{\frac{\beta}{c}} f(cx)dx$$

Demostración P4.

Si $\alpha = b$, $\beta = 1$ y $c = b$, entonces

(2)

Demostración P4.

Si $\alpha = b$, $\beta = 1$ y $c = b$, entonces

$$b\int_1^{\frac{1}{b}} f(bx)dx = \int_b^1 f(x)dx \qquad (2)$$

Demostración P4.

Si $\alpha = b$, $\beta = 1$ y $c = b$, entonces

$$\begin{aligned} b\int_1^{\frac{1}{b}} f(bx)dx &= \int_b^1 f(x)dx \\ \int_1^{\frac{1}{b}} bf(bx)dx &= -\int_1^b f(x)dx \qquad (2) \end{aligned}$$

Demostración P4.

Si $\alpha = b$, $\beta = 1$ y $c = b$, entonces

$$\begin{aligned} b\int_1^{\frac{1}{b}} f(bx)dx &= \int_b^1 f(x)dx \\ \int_1^{\frac{1}{b}} bf(bx)dx &= -\int_1^b f(x)dx \qquad (2) \end{aligned}$$

Si hacemos $bf(bx) = \dfrac{1}{x}$, entonces $f(bx) = \dfrac{1}{bx}$ y así $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demostración P4.

reemplazando en (2)

$$\int_1^{\frac{1}{b}} \frac{dx}{x} = -\int_1^b \frac{dx}{x}$$

Demostración P4.

reemplazando en (2)

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{dx}{x} &= -\int_1^b \frac{dx}{x} \\ \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{dx}{x} &= -\ln(b) \end{aligned}$$

Demostración P4.

Si $\alpha = 1$, $\beta = a$ y $c = b$, entonces

$$b\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a}{b}} f(bx)dx = \int_1^a f(x)dx$$

Demostración P4.

Si $\alpha = 1$, $\beta = a$ y $c = b$, entonces

$$\begin{aligned} b\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a}{b}} f(bx)dx &= \int_1^a f(x)dx \\ \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a}{b}} \frac{dx}{x}dx &= \ln(a) \end{aligned}$$

Demostración P4.

Reemplazando en la ecuación

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{dx}{x} + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a}{b}} \frac{dx}{x}$$

$\square$

Demostración P4.

Reemplazando en la ecuación

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{dx}{x} + \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{a}{b}} \frac{dx}{x}$$

se tiene por lo tanto

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$\square$

Demostración P5.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 2^n > 1$, por lo que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{n\to+\infty} \ln(2^n)$$

Demostración P5.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 2^n > 1$, por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \ln(x) &= \lim_{n\to+\infty} \ln(2^n)\\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x) &= \lim_{n\to+\infty} [n\ln(2)]\end{aligned}$$

Demostración P5.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = 2^n > 1$, por lo que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \ln(x) &= \lim_{n\to+\infty} \ln(2^n)\\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x) &= \lim_{n\to+\infty} [n\ln(2)]\\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x) &= +\infty\end{aligned}$$

Demostración P5.

haciendo $x = \dfrac{1}{2^n} > 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$\square$

Demostración P5.

haciendo $x = \dfrac{1}{2^n} > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \ln(x) &= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ \lim_{x\to 0^+} \ln(x) &= \lim_{n\to+\infty} \left[-n\ln(2)\right] \end{aligned}$$

□

Demostración P5.

haciendo $x = \dfrac{1}{2^n} > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \ln(x) &= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ \lim_{x\to 0^+} \ln(x) &= \lim_{n\to+\infty} \left[-n\ln(2)\right] \\ \lim_{x\to 0^+} \ln(x) &= -\infty \end{aligned}$$

□

Ejemplo

Demuestre que

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] = 1$$

Resolución: Por definición:

Ejemplo

Demuestre que

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] = 1$$

Resolución: Por definición:

$$\ln(x+1) = \int_1^{x+1} \frac{dt}{t}$$

Ejemplo

Demuestre que

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] = 1$$

Resolución: Por definición:

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \int_1^{x+1}\frac{dt}{t} \\ \frac{\ln(x+1)}{x} &= \frac{1}{x}\int_1^{x+1}\frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Tomando límites

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\int_1^{x+1}\frac{dt}{t}\right]$$

Tomando límites

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\int_1^{x+1}\frac{dt}{t}\right] \\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] &= 1 \end{aligned}$$

Tomando límites

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\int_1^{x+1}\frac{dt}{t}\right] \\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right] &= 1 \end{aligned}$$

Recuerde que:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)dt\right] = f(c)$$

Ejemplo

Calcule
$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\ln(x)\right]$$

Resolución: Haciendo $y=\dfrac{1}{x}$, si $x\to 0^+$, entonces $y\to +\infty$, luego

Sesión 08 | Cambio de variable de una integral definida | El logaritmo natural | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Calcule
$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\ln(x)\right]$$

Resolución: Haciendo $y=\dfrac{1}{x}$, si $x\to 0^+$, entonces $y\to +\infty$, luego

$$x\ln(x) = \frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)$$

Sesión 08 | Cambio de variable de una integral definida | El logaritmo natural | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Calcule
$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\ln(x)\right]$$

Resolución: Haciendo $y=\dfrac{1}{x}$, si $x\to 0^+$, entonces $y\to +\infty$, luego

$$x\ln(x) = \frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$x\ln(x) = \frac{1}{y}\left[-\ln(y)\right]$$

Sesión 08 | Cambio de variable de una integral definida | El logaritmo natural | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Calcule
$$\lim_{x\to 0^+}\left[x\ln(x)\right]$$

Resolución: Haciendo $y=\dfrac{1}{x}$, si $x\to 0^+$, entonces $y\to +\infty$, luego

$$x\ln(x) = \frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$x\ln(x) = \frac{1}{y}\left[-\ln(y)\right]$$

$$x\ln(x) = -\frac{\ln(y)}{y}$$

Tomando limites ambos lados

$$\lim_{x\to 0^+}[x\ln(x)] = \lim_{y\to+\infty}\left[-\frac{\ln(y)}{y}\right]$$

Tomando limites ambos lados

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}[x\ln(x)] &= \lim_{y\to+\infty}\left[-\frac{\ln(y)}{y}\right]\\ \lim_{x\to 0^+}[x\ln(x)] &= 0\end{aligned}$$

Ejemplo

Demuestre que

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right] = 0$$

Resolución: Sea $x > t > 1$, entonces $\sqrt{t} > 1 > 0$, de donde , $0 < \dfrac{1}{t} < \dfrac{\sqrt{t}}{t} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, luego

Ejemplo

Demuestre que

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right] = 0$$

Resolución: Sea $x > t > 1$, entonces $\sqrt{t} > 1 > 0$, de donde , $0 < \dfrac{1}{t} < \dfrac{\sqrt{t}}{t} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, luego

$$0 \leq \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

Ejemplo

Demuestre que

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]=0$$

Resolución: Sea $x>t>1$, entonces $\sqrt{t}>1>0$, de donde , $0<\frac{1}{t}<\frac{\sqrt{t}}{t}=\frac{1}{\sqrt{t}}$, luego

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}\\ 0 &\leq \ln(x) \leq \left[2\sqrt{t}\right]_1^x\end{aligned}$$

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

$$0 \leq \ln(x) \leq 2(\sqrt{x}-1) \leq 2\sqrt{x}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

$$\begin{aligned}0 &\leq \ln(x) \leq 2(\sqrt{x}-1) \leq 2\sqrt{x}\\ 0 &\leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x}\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 08 Cambio de variable de una integral definida El logaritmo natural Ejercicios Referencias

$$\begin{aligned}0 &\leq \ln(x) \leq 2(\sqrt{x}-1) \leq 2\sqrt{x}\\ 0 &\leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x}\end{aligned}$$

Tomando límites

$$0\leq \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right]\leq \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

$$0 \leq \ln(x) \leq 2(\sqrt{x}-1) \leq 2\sqrt{x}$$
$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

Tomando límites

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right] \leq \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x}\right] = 0$$

Sesión 08

Ejercicios

1. Demuestre que

$$\int_0^{\pi} x f(\operatorname{sen} x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{sen} x)dx$$

2. Aplique el ejercicio anterior para demostrar que

$$\int_0^{\pi} \frac{x\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}dx = \pi\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Ejercicios

3. Demuestre que si m y n son enteros positivos:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$$

Sesión 08

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Michael Spivak
  Calculus. 3ra edición.
  Editorial Reverté

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Octubre 1, 2021

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 09

Función exponencial

Definición

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se define la función exponencial como la inversa de la función logaritmo natural.

Función exponencial

Definición

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se define la función exponencial como la inversa de la función logaritmo natural.

Notación:

$$\exp(x) = e^x = \ln^{-1}(x)$$

Observación

Consecuencias de la definición:

Observación

Consecuencias de la definición:

1. $\ln[\exp(x)] = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Observación

Consecuencias de la definición:

1. $\ln[\exp(x)] = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
2. $\exp[\ln(x)] = x, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Observación

Consecuencias de la definición:

1. $\ln[\exp(x)] = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
2. $\exp[\ln(x)] = x, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$
3. La función f tal que $f(x) = \exp(x)$ esta definida en $\mathbb{R}$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Observación

Consecuencias de la definición:

1. $\ln[\exp(x)] = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
2. $\exp[\ln(x)] = x, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$
3. La función f tal que $f(x) = \exp(x)$ esta definida en $\mathbb{R}$.
4. $\exp(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Propiedades de la exponencial

P1. $\dfrac{d}{dx}[\exp(x)] = \exp(x)$

Demostración.

Demostración.

Sean f tal que $f(x) = \ln(x) = y,\ x \in]0, +\infty[$, g tal que $g(y) = \exp(y) = x,\ y \in]-\infty, +\infty[$, y h tal que $h = g \circ f$,

Demostración.

Sean f tal que $f(x) = \ln(x) = y,\ x \in]0, +\infty[$, g tal que $g(y) = \exp(y) = x,\ y \in]-\infty, +\infty[$, y h tal que $h = g \circ f$, entonces

$$h(x) = (g \circ f)(x)$$

Demostración.

Sean f tal que $f(x)=\ln(x)=y,\ x\in]0,+\infty[$, g tal que $g(y)=\exp(y)=x,\ y\in]-\infty,+\infty[$, y h tal que $h=g\circ f$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= (g\circ f)(x)\\ h(x) &= g(f(x)) \end{aligned}$$

Demostración.

Sean f tal que $f(x)=\ln(x)=y,\ x\in]0,+\infty[$, g tal que $g(y)=\exp(y)=x,\ y\in]-\infty,+\infty[$, y h tal que $h=g\circ f$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= (g\circ f)(x)\\ h(x) &= g(f(x))\\ h(x) &= g(\ln(x)) \end{aligned}$$

Demostración.

Sean f tal que $f(x)=\ln(x)=y,\ x\in]0,+\infty[$, g tal que $g(y)=\exp(y)=x,\ y\in]-\infty,+\infty[$, y h tal que $h=g\circ f$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= (g\circ f)(x)\\ h(x) &= g(f(x))\\ h(x) &= g(\ln(x))\\ h(x) &= \exp[\ln(x)]=x \end{aligned}$$

Demostración.

Sean f tal que $f(x)=\ln(x)=y,\ x\in]0,+\infty[$, g tal que $g(y)=\exp(y)=x,\ y\in]-\infty,+\infty[$, y h tal que $h=g\circ f$, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= (g\circ f)(x)\\ h(x) &= g(f(x))\\ h(x) &= g(\ln(x))\\ h(x) &= \exp[\ln(x)]=x \end{aligned}$$

Luego $h'(x)=1$.

Demostración.

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Demostración.

Finalmente, aplicando la regla de la cadena

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Demostración.

Finalmente, aplicando la regla de la cadena

$$\frac{d}{d(f(x))}[g(f(x))] \cdot \frac{d}{dx}[f(x)] = 1$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Demostración.

Finalmente, aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d}{d(f(x))}[g(f(x))] \cdot \frac{d}{dx}[f(x)] &= 1 \\ \frac{d}{dy}[g(y)] \cdot \frac{1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración.

Finalmente, aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d(f(x))}[g(f(x))] \cdot \frac{d}{dx}[f(x)] &= 1 \\
\frac{d}{dy}[g(y)] \cdot \frac{1}{x} &= 1 \\
\frac{d}{dy}[g(y)] &= x
\end{aligned}$$

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Demostración.

Finalmente, aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d(f(x))}[g(f(x))] \cdot \frac{d}{dx}[f(x)] &= 1 \\
\frac{d}{dy}[g(y)] \cdot \frac{1}{x} &= 1 \\
\frac{d}{dy}[g(y)] &= x \\
\frac{d}{dy}[\exp(y)] &= \exp(y)
\end{aligned}$$

□

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Propiedades de la exponencial

P2. $\dfrac{d}{dx}[\exp(g(x))] = \exp(g(x))g'(x)$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Demostración.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración.

Por la regla de la cadena

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Demostración.

Por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}[\exp(g(x))] = \exp'(g(x))g'(x)$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Demostración.

Por la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\exp(g(x))] &= \exp'(g(x))g'(x) \\ \frac{d}{dx}[\exp(g(x))] &= \exp(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

$\square$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Observación

De las propiedades P1 y P2 se deduce que

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Observación

De las propiedades P1 y P2 se deduce que

i. Como $\frac{d}{dx}[\exp(x)] = \exp(x) > 0$, se tiene que la función exponencial es estrictamente creciente.

Observación

De las propiedades P1 y P2 se deduce que

i. Como $\frac{d}{dx}[\exp(x)] = \exp(x) > 0$, se tiene que la función exponencial es estrictamente creciente.

ii. Como $\frac{d^2}{dx^2}[\exp(x)] = \frac{d}{dx}[\exp(x)] = \exp(x) > 0$, se tiene que la función exponencial es convexa.

Sesión 09

Definición

Se define y se denota a e como un número real tal que $\ln(e) = 1$.

Teorema

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Demostración.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Demostración.

Sabemos que

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln(h+1)}{h}\right] = 1$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Demostración.

Sabemos que

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln(h+1)}{h}\right] = 1$$

Además la función exponencial es continua, entonces

$$(1+h)^{\frac{1}{h}} = \exp\left(\ln\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]\right)$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Demostración.

Sabemos que

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln(h+1)}{h}\right]=1$$

Además la función exponencial es continua, entonces

$$\begin{aligned}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \exp\left(\ln\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]\right)\\ (1+h)^{\frac{1}{h}} &= \exp\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right]\end{aligned}$$

Demostración.

Finalmente, tomando límites a ambos lados

$\square$

Demostración.

Finalmente, tomando límites a ambos lados

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0}\exp\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right]$$

$\square$

Demostración.

Finalmente, tomando límites a ambos lados

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{h\to 0}\exp\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right]\\ \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \exp\left(\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right]\right)\end{aligned}$$

$\square$

Demostración.

Finalmente, tomando límites a ambos lados

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{h\to 0}\exp\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right] \\
\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \exp\left(\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right]\right) \\
\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \exp(1)
\end{aligned}$$

□

Demostración.

Finalmente, tomando límites a ambos lados

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \lim_{h\to 0}\exp\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right] \\
\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \exp\left(\lim_{h\to 0}\left[\frac{\ln(1+h)}{h}\right]\right) \\
\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= \exp(1) \\
\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} &= e
\end{aligned}$$

□

Corolario

$$\lim_{h\to\infty}\left[\frac{1+h}{h}\right]^h = e$$

Observación

$$e^x = \lim_{h\to\infty}\left[1+\frac{x}{h}\right]^h$$

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

En efecto,

$$\frac{1}{t} = \frac{d}{dt}[\ln(t)]$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} &= \frac{d}{dt}[\ln(t)] \\
\frac{1}{t} &= \lim_{n\to 0}\frac{\ln(t+n)-\ln(t)}{n}
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} &= \frac{d}{dt}[\ln(t)] \\
\frac{1}{t} &= \lim_{n\to 0}\frac{\ln(t+n)-\ln(t)}{n} \\
\frac{1}{t} &= \lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\ln\left[\frac{t+n}{t}\right]
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t} &= \frac{d}{dt}[\ln(t)] \\
\frac{1}{t} &= \lim_{n\to 0}\frac{\ln(t+n)-\ln(t)}{n} \\
\frac{1}{t} &= \lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\ln\left[\frac{t+n}{t}\right] \\
\frac{1}{t} &= \lim_{n\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{n}{t}\right)^{\frac{1}{n}}\right]
\end{aligned}
$$

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t} &= \frac{d}{dt}[\ln(t)] \\
\frac{1}{t} &= \lim_{n\to 0}\frac{\ln(t+n)-\ln(t)}{n} \\
\frac{1}{t} &= \lim_{n\to 0}\frac{1}{n}\ln\left[\frac{t+n}{t}\right] \\
\frac{1}{t} &= \lim_{n\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{n}{t}\right)^{\frac{1}{n}}\right] \\
\frac{1}{t} &= \ln\left[\lim_{n\to 0}\left(1+\frac{n}{t}\right)^{\frac{1}{n}}\right]
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Haciendo $h = \dfrac{1}{n}$, se tiene

$$
\frac{1}{t} = \ln\left[\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{ht}\right)^{h}\right]
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Haciendo $h = \frac{1}{n}$, se tiene

$$\frac{1}{t} = \ln\left[\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{ht}\right)^h\right]$$

sustituyendo $x = \frac{1}{t}$:

$$x = \ln\left[\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{x}{h}\right)^h\right]$$

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Haciendo $h = \frac{1}{n}$, se tiene

$$\frac{1}{t} = \ln\left[\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{ht}\right)^h\right]$$

sustituyendo $x = \frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned} x &= \ln\left[\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{x}{h}\right)^h\right] \\ \exp(x) &= \exp\left(\ln\left[\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{x}{h}\right)^h\right]\right) \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Haciendo $h = \frac{1}{n}$, se tiene

$$\frac{1}{t} = \ln\left[\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{ht}\right)^h\right]$$

sustituyendo $x = \frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned} x &= \ln\left[\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{x}{h}\right)^h\right] \\ \exp(x) &= \exp\left(\ln\left[\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{x}{h}\right)^h\right]\right) \\ e^x &= \lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{x}{h}\right)^h \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Sesión 09

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Definición

Se define y se denota la función exponencial en base "a", con $a > 0$ y $a \neq 1$ como

$$\exp_a(x) = e^{x \ln(a)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Definición

Se define y se denota la función exponencial en base "a", con $a > 0$ y $a \neq 1$ como

$$\exp_a(x) = e^{x \ln(a)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Observación

A esta función exponencial se le llama también antilogaritmo en base a

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Propiedades

P1. $\exp_a(1) = a$ y $\exp_a(0) = 1$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 La exponencial El número e Funciones logaritmo y exponencial en otras bases Ejercicios Referencias

Propiedades

P1. $\exp_a(1) = a$ y $\exp_a(0) = 1$.

P2. $\dfrac{d}{dx}\left[\exp_a(x)\right] = \exp_a(x) \cdot \ln(a)$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Propiedades

P1. $\exp_a(1) = a$ y $\exp_a(0) = 1$.

P2. $\dfrac{d}{dx}[\exp_a(x)] = \exp_a(x) \cdot \ln(a)$.

P3. $\dfrac{d^2}{dx^2}[\exp_a(x)] = \exp_a(x) \cdot [\ln(a)]^2$.

Propiedades

P1. $\exp_a(1) = a$ y $\exp_a(0) = 1$.

P2. $\dfrac{d}{dx}[\exp_a(x)] = \exp_a(x) \cdot \ln(a)$.

P3. $\dfrac{d^2}{dx^2}[\exp_a(x)] = \exp_a(x) \cdot [\ln(a)]^2$.

P4. La función $f(x) = \exp_a(x)$ es creciente si $1 < a$ y es decreciente si $0 < a < 1$.

Propiedades

P1. $\exp_a(1) = a$ y $\exp_a(0) = 1$.

P2. $\dfrac{d}{dx}[\exp_a(x)] = \exp_a(x) \cdot \ln(a)$.

P3. $\dfrac{d^2}{dx^2}[\exp_a(x)] = \exp_a(x) \cdot [\ln(a)]^2$.

P4. La función $f(x) = \exp_a(x)$ es creciente si $1 < a$ y es decreciente si $0 < a < 1$.

P5. La función $f(x) = \exp_a(x)$ es no convexa.

Propiedades

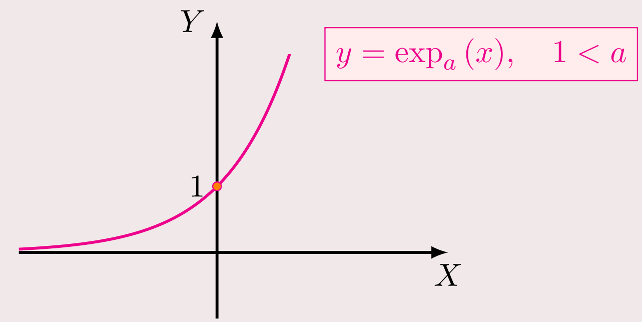
P6. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } 1 < a \\ 0, & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$

Propiedades

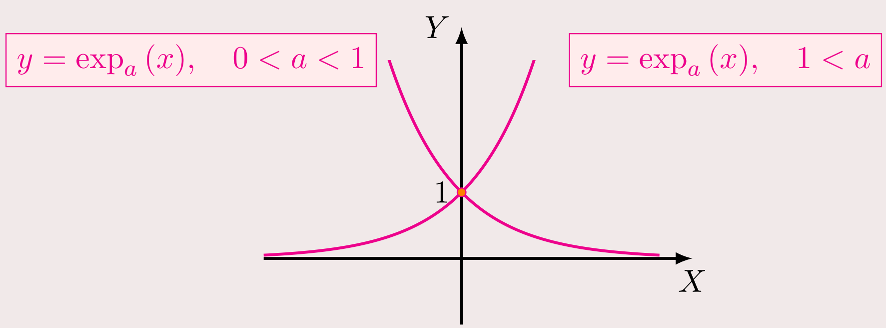
P6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } 1 < a \\ 0, & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$

P7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 1 < a \\ +\infty, & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$

Propiedades



Propiedades



Propiedades

P8. $\displaystyle\int \exp_a(x)dx = \frac{\exp_a(x)}{\ln(a)} + c, \quad a > 0$

Propiedades

P8. $$\int \exp_a(x)dx = \frac{\exp_a(x)}{\ln(a)} + c, \quad a > 0$$

P9. $$\int \exp_a[f(x)]f'(x)dx = \frac{\exp_a[f(x)]}{\ln(a)} + c, \quad a > 0$$

Sesión 09 | La exponencial | El número e | Funciones logaritmo y exponencial en otras bases | Ejercicios | Referencias

Definición

Se define la función inversa de $\exp_a$ como la función logaritmo en base a.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 | La exponencial | El número e | Funciones logaritmo y exponencial en otras bases | Ejercicios | Referencias

Definición

Se define la función inversa de $\exp_a$ como la función logaritmo en base a.

Notación:

$$y = \log_a(x) = \exp_a^{-1}(x) \Leftrightarrow x = a^y, \quad a > 0, \ a \neq 1$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 | La exponencial | El número e | Funciones logaritmo y exponencial en otras bases | Ejercicios | Referencias

Observación

$$\exp_a[\log_a(x)] = x$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Propiedades

P1. $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$.

Sesión 09 | La exponencial | El número e | Funciones logaritmo y exponencial en otras bases | Ejercicios | Referencias

Propiedades

P1. $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$.

P2. $\dfrac{d}{dx}\left[\log_a(x)\right] = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 | La exponencial | El número e | Funciones logaritmo y exponencial en otras bases | Ejercicios | Referencias

Propiedades

P1. $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$.

P2. $\dfrac{d}{dx}\left[\log_a(x)\right] = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.

P3. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left[\log_a(x)\right] = -\dfrac{1}{x^2\ln(a)}$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 09 | La exponencial | El número e | Funciones logaritmo y exponencial en otras bases | Ejercicios | Referencias

Propiedades

P1. $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$.

P2. $\dfrac{d}{dx}\left[\log_a(x)\right] = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.

P3. $\dfrac{d^2}{dx^2}\left[\log_a(x)\right] = -\dfrac{1}{x^2\ln(a)}$.

P4. La función $f(x) = \log_a(x)$ es creciente si $1 < a$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Propiedades

P1. $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$.

P2. $\dfrac{d}{dx}[\log_a(x)] = \dfrac{1}{x\ln(a)}$.

P3. $\dfrac{d^2}{dx^2}[\log_a(x)] = -\dfrac{1}{x^2\ln(a)}$.

P4. La función $f(x) = \log_a(x)$ es creciente si $1 < a$.

P5. La función $f(x) = \log_a(x)$ es decreciente si $0 < a < 1$.

Propiedades

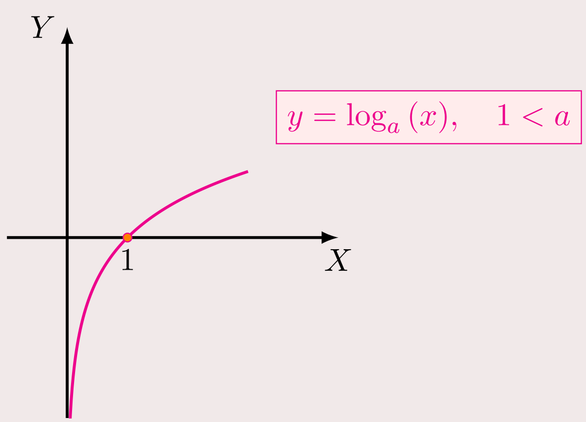
P6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } 1 < a \\ -\infty, & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$

Propiedades

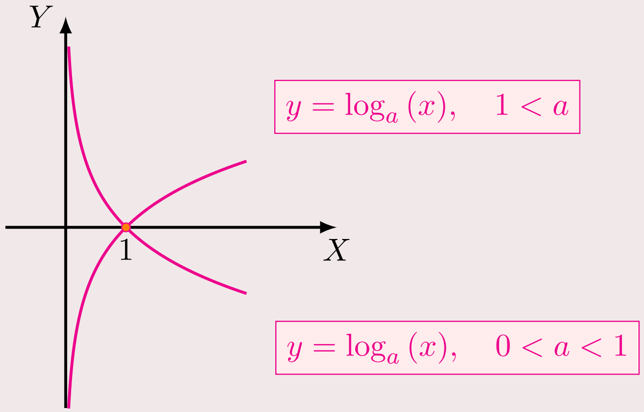
P6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } 1 < a \\ -\infty, & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases}$

P7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } 0 < a < 1 \\ -\infty, & \text{si } 1 < a. \end{cases}$

Propiedades



Propiedades



Propiedades

P8. $\displaystyle\int \log_a(x)dx = \frac{1}{\ln(a)}[x\ln(x) - x] + c.$

Propiedades

P8. $\displaystyle\int \log_a(x)dx = \frac{1}{\ln(a)}[x\ln(x) - x] + c.$

P9. $\displaystyle\int \log_a[f(x)]f'(x)dx = \frac{1}{\ln(a)}[f(x)\ln[f(x)] - f(x)] + c.$

Observación

- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}, \quad a > 0$

Observación

- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}, \quad a > 0$
- $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a}, \quad a > 0, c > 0$

Sesión 09

Ejercicios

1. Derive cada una de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = e^{e^{e^{e^x}}}$
   b) $f(x) = \ln(1 + \ln(1 + \ln(1 + e^{1+e^{1-x}})))$
   c) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$
   d) $f(x) = e^{\int_0^x e^{-t^2}\, dt}$

Ejercicios

2. Use la derivación logarítmica para encontrar $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = (1 + x)(1 + e^{x^2})$
   b) $f(x) = \dfrac{(3 - x)^{1/3} x^2}{(1 - x)(3 + x)^{2/3}}$
   c) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} + (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$
   d) $f(x) = \dfrac{e^x - e - x}{e^{2x}(1 + x^3)}$

Ejercicios

3. Halle todas las funciones continuas f que satisfacen.
   a) $\int_0^x f(t)\,dt = e^x$
   b) $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = 1 - e^{2x^2}$
4. Demuestre que si $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, entonces $f = 0$.

Sesión 09

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Octubre 1, 2021

Contenido

Sesión 10

Función seno hiperbólico y coseno hiperbólico

Definición

Definimos dos funciones reales de variable real, el seno hiperbólico y coseno hiperbólico tal que sus reglas de correspondencia son $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ respectivamente.

Función seno hiperbólico y coseno hiperbólico

Definición

Definimos dos funciones reales de variable real, el seno hiperbólico y coseno hiperbólico tal que sus reglas de correspondencia son $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ respectivamente.

Notación:

- $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Propiedades

P1. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$

Propiedades

P1. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$

P2. $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$

Propiedades

P1. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$

P2. $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$

P3. La función seno hiperbólico es una función estrictamente creciente.

Propiedades

P1. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$

P2. $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$

P3. La función seno hiperbólico es una función estrictamente creciente.

P4. La función coseno hiperbólico es una función cóncava hacia arriba.

Propiedades

P5.
- dom$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$

Propiedades

P5.
- dom$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$
- rang$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$

Propiedades

P5.
- dom$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$
- rang$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$
- dom$[\cosh x] = \mathbb{R}$

Propiedades

P5.
- dom$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$
- rang$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$
- dom$[\cosh x] = \mathbb{R}$
- rang$[\cosh x] = [1, +\infty[$

Propiedades

P5.
- dom$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$
- rang$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$
- dom$[\cosh x] = \mathbb{R}$
- rang$[\cosh x] = [1, +\infty[$

P6. $e^x = \operatorname{senh} x + \cosh x$

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Propiedades

P5.
- dom$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$
- rang$[\operatorname{senh} x] = \mathbb{R}$
- dom$[\cosh x] = \mathbb{R}$
- rang$[\cosh x] = [1, +\infty[$

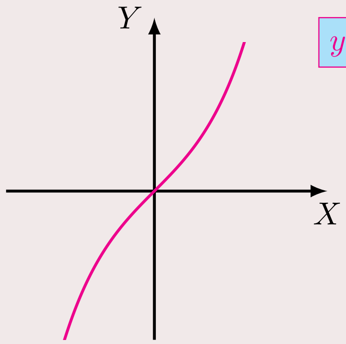
P6. $e^x = \operatorname{senh} x + \cosh x$

P7. $e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Gráfica de la función seno hiperbólico

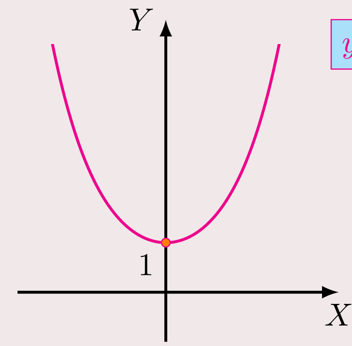


$y = \operatorname{senh} x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Gráfica de la función coseno hiperbólico



$y = \cosh x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Funciones tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica

Definición

Definimos y denotamos:

- Tangente hiperbólica

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Funciones tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica

Definición

Definimos y denotamos:

- Tangente hiperbólica

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

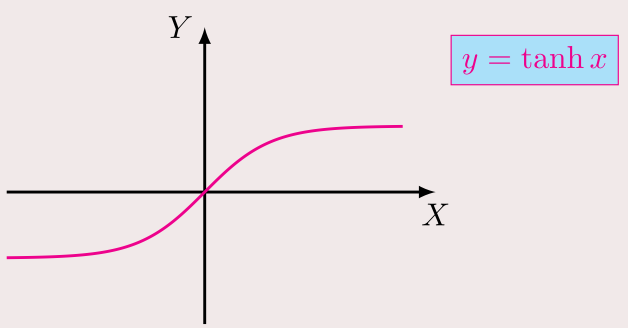
- Cotangente hiperbólica

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

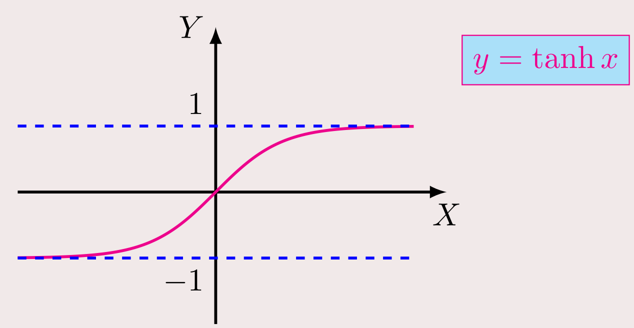
Gráfica de la función tangente hiperbólico



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

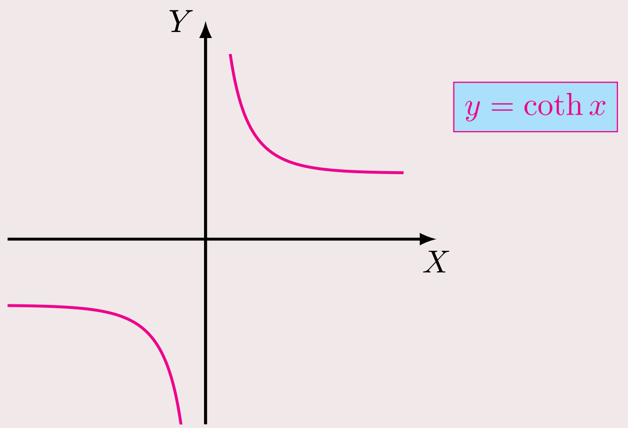
Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Gráfica de la función tangente hiperbólico



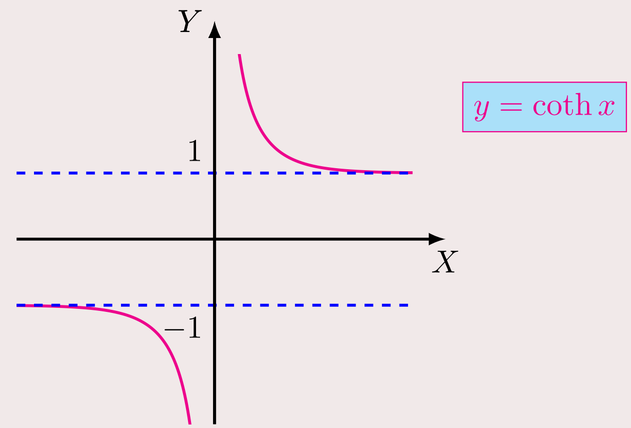
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Gráfica de la función cotangente hiperbólico



Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Gráfica de la función cotangente hiperbólico



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Funciones secante hiperbólica y cosecante hiperbólica

Definición

Definimos y denotamos:

- Secante hiperbólica

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Funciones secante hiperbólica y cosecante hiperbólica

Definición

Definimos y denotamos:

- Secante hiperbólica

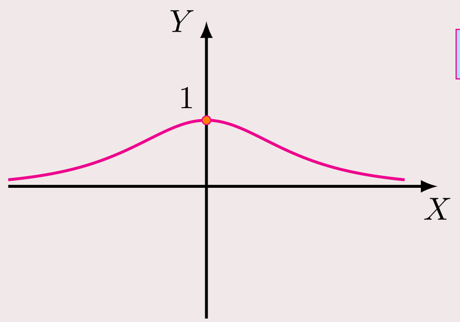
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Cosecante hiperbólica

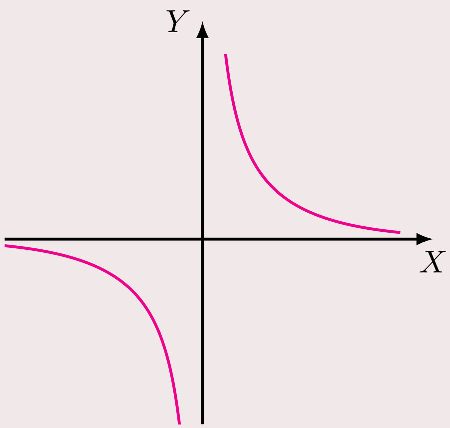
$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Gráfica de la función secante hiperbólico



Gráfica de la función cosecante hiperbólico



Propiedades

P1. $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

Propiedades

P1. $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

P2. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

Propiedades

P1. $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

P2. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

P3. $\operatorname{senh} x \pm \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh}\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$

Propiedades

P1. $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

P2. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

P3. $\operatorname{senh} x \pm \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh}\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$

P4. $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh\left(\frac{x + y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x - y}{2}\right)$

Propiedades

P1. $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

P2. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

P3. $\operatorname{senh} x \pm \operatorname{senh} y = 2 \operatorname{senh}\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$

P4. $\cosh x + \cosh y = 2 \cosh\left(\frac{x + y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x - y}{2}\right)$

P5. $\cosh x - \cosh y = 2 \operatorname{senh}\left(\frac{x + y}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{x - y}{2}\right)$

Propiedades

P6. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

Propiedades

P6. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

P7. $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Propiedades

P6. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

P7. $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$

P8. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Propiedades

P6. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

P7. $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$

P8. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

P9. $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh}(2x)}{1 + \cosh(2x)}$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Propiedades

P6. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

P7. $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$

P8. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

P9. $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh}(2x)}{1 + \cosh(2x)}$

P10. $\coth x = \dfrac{\operatorname{senh}(2x)}{\cosh(2x) - 1}$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Propiedades

P6. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

P7. $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$

P8. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

P9. $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh}(2x)}{1+\cosh(2x)}$

P10. $\coth x = \dfrac{\operatorname{senh}(2x)}{\cosh(2x)-1}$

P11. $\tanh x \pm \tanh y = \dfrac{\operatorname{senh}(x \pm y)}{\cosh x \cosh y}$

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Sesión 10

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Derivadas de las funciones hiperbólicas

1. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Derivadas de las funciones hiperbólicas

1. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Derivadas de las funciones hiperbólicas

1. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$
3. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Derivadas de las funciones hiperbólicas

1. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$
3. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
4. $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x, \quad x \neq 0$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Derivadas de las funciones hiperbólicas

1. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$
3. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
4. $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x, \quad x \neq 0$
5. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\tanh x \operatorname{sech} x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Derivadas de las funciones hiperbólicas

1. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$
3. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$
4. $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x, \quad x \neq 0$
5. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\tanh x \operatorname{sech} x$
6. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\coth x \operatorname{csch} x, \quad x \neq 0$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Integrales de las funciones hiperbólicas

1. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + c$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Integrales de las funciones hiperbólicas

1. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + c$
2. $\displaystyle\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + c$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Integrales de las funciones hiperbólicas

1. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + c$
2. $\displaystyle\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + c$
3. $\displaystyle\int \tanh x \, dx = \ln(\cosh x) + c$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Integrales de las funciones hiperbólicas

4. $\displaystyle\int \coth x \, dx = \ln|\operatorname{senh} x| + c$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Integrales de las funciones hiperbólicas

4. $\displaystyle\int \coth x\, dx = \ln|\operatorname{senh} x| + c$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x\, dx = 2\arctan\left(e^x\right) + c$

Integrales de las funciones hiperbólicas

4. $\displaystyle\int \coth x\, dx = \ln|\operatorname{senh} x| + c$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sech} x\, dx = 2\arctan\left(e^x\right) + c$
6. $\displaystyle\int \operatorname{csch} x\, dx = \ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$

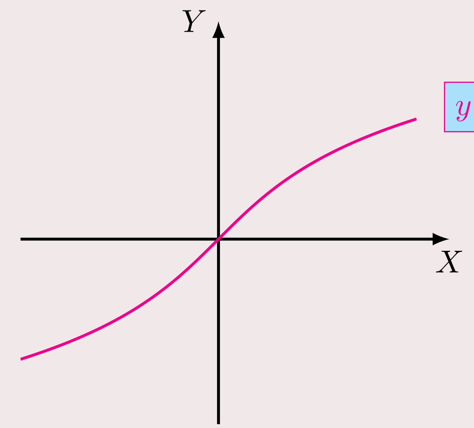
Sesión 10

Función arco seno hiperbólico

Definición

Sea $f(x) = \operatorname{senh} x$ con dom$(f) = \mathbb{R}$ y rang$(f) = \mathbb{R}$, entonces definimos la inversa del seno hiperbólico $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsenh} x$ donde dom$(f^{-1}) = \mathbb{R}$ y rang$(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

Gráfica de la función arco seno hiperbólico

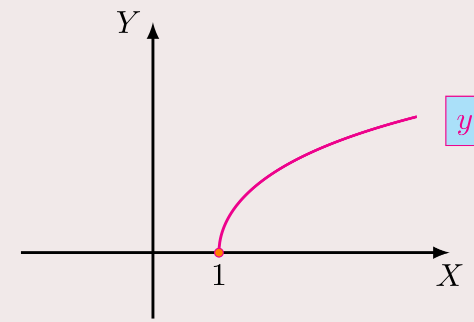


Función arco coseno hiperbólico

Definición

Sea $f(x) = \cosh x$ con dom$(f) = \mathbb{R}$ y rang$(f) = [1, +\infty[$, entonces definimos la inversa del coseno hiperbólico $f^{-1}(x) = \operatorname{arccosh} x$ donde dom$(f^{-1}) = [1, +\infty[$ y rang$(f^{-1}) = [0, +\infty[$.

Gráfica de la función arco coseno hiperbólico

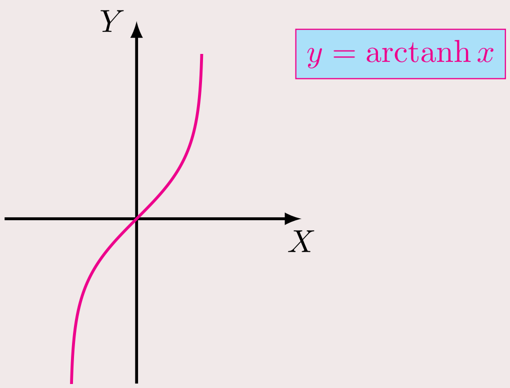


Función arco tangente hiperbólico

Definición

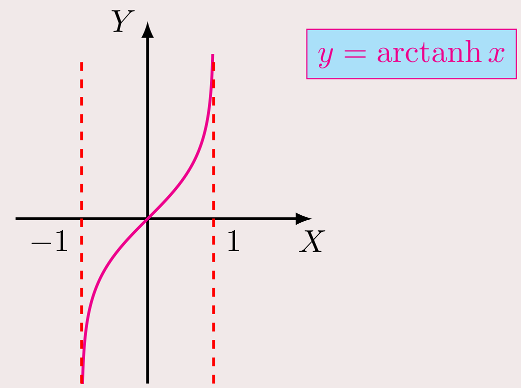
Sea $f(x) = \tanh x$ con dom$(f) = \mathbb{R}$ y rang$(f) =]-1, 1[$, entonces definimos la inversa de la tangente hiperbólico $f^{-1}(x) = \operatorname{arctanh} x$ donde dom$(f^{-1}) =]-1, 1[$ y rang$(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

Gráfica de la función arco tangente hiperbólico



Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Gráfica de la función arco tangente hiperbólico



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Integración de funciones trigonométricas inversas

1. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Integración de funciones trigonométricas inversas

1. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c$
2. $\displaystyle\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Integración de funciones trigonométricas inversas

1. $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c$
2. $\displaystyle\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$
3. $\displaystyle\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + c$

Integración de funciones trigonométricas inversas

4. $\displaystyle\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + c$

Integración de funciones trigonométricas inversas

4. $\displaystyle\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + c$
5. $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} x \, dx = x \operatorname{arcsec} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$

Integración de funciones trigonométricas inversas

4. $\displaystyle\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + c$
5. $\displaystyle\int \operatorname{arcsec} x \, dx = x \operatorname{arcsec} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$
6. $\displaystyle\int \operatorname{arccsc} x \, dx = x \operatorname{arccsc} x + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$

Integración de funciones que dan como resultado funciones trigonométricas inversas

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + c = -\arccos x + c$

Integración de funciones que dan como resultado funciones trigonométricas inversas

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + c = -\arccos x + c$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c$

Integración de funciones que dan como resultado funciones trigonométricas inversas

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + c = -\arccos x + c$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\operatorname{arccot} x + c$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + c = -\operatorname{arccsc} x + c$

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

1. $\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \forall x \in \mathbb{R}$

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

1. $\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsenh} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

1. $\operatorname{arcsenh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsenh} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsenh} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

2. $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \forall x \geq 1$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejerci

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

2. $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \forall x \geq 1$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arccosh} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \forall x > 1$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

2. $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ \forall x \geq 1$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arccosh} x] = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ \forall x > 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x + c = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c$$

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

3. $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \forall x \in]-1,1[$

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

3. $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \forall x \in]-1,1[$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arctanh} x] = \frac{1}{1-x^2},\ \forall x \in]-1,1[$$

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

3. $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ \forall x \in]-1,1[$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arctanh} x] = \frac{1}{1-x^2},\ \forall x \in]-1,1[$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arctanh} x + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$$

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

4. $\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \ \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

4. $\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \ \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arccoth} x] = \frac{1}{1-x^2}, \ \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

4. $\operatorname{arccoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \ \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arccoth} x] = \frac{1}{1-x^2}, \ \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{arccoth} x + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + c$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

5. $\operatorname{arcsech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \operatorname{arccosh}\left(\frac{1}{x}\right), \ \forall x \in]0,1]$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

5. $\operatorname{arcsech} x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \operatorname{arccosh}\left(\dfrac{1}{x}\right),\ \forall x \in]0,1]$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsech} x] = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in]0,1]$$

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

5. $\operatorname{arcsech} x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \operatorname{arccosh}\left(\dfrac{1}{x}\right),\ \forall x \in]0,1]$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsech} x] = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in]0,1]$$

$$\int \frac{-dx}{1-x^2} = \operatorname{arcsech} x + c = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

6. $\operatorname{arccsch} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}\right) = \operatorname{arcsenh}\left(\dfrac{1}{x}\right),\ \forall x \in]0,1[$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 10 Funciones Hiperbólicas Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas Inversas de las funciones hiperbólicas Ejercicios

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

6. $\operatorname{arccsch} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}\right) = \operatorname{arcsenh}\left(\dfrac{1}{x}\right),\ \forall x \in]0,1[$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsch} x] = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}\ \forall x \in]0,1[$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Derivadas e integrales de funciones hiperbólicas inversas

6. $\operatorname{arccsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}\right) = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{x}\right), \ \forall x \in]0,1[$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsch} x] = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \ \forall x \in]0,1[$$

$$\int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arccsch} x + c = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}\right)$$

Sesión 10

Ejercicios

1. Encuentre la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplifique tanto como sea posible.
   a) $f(x) = \tanh 1 + e^{2x}$
   b) $f(x) = x \operatorname{senh} x - \cosh x$
   c) $f(x) = \cosh \ln x$
   d) $f(x) = \ln \cosh x$
   e) $f(x) = \operatorname{arcsenh}(\tan x)$
   f) $f(x) = \operatorname{arccosh} \sqrt{x}$

Ejercicios

2. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\sqrt[4]{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}} = \frac{1}{2}e^{x/2}$$

3. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\arctan(\tanh x) = \operatorname{sech} 2x$$

Sesión 10

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Michael Spivak
  Calculus. 3ra edición.
  Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Octubre 11, 2021

Contenido

Sesión 11

Integración por partes

Para integrales definidas, se tiene

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

donde u y v son funciones definidas y derivables en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int_1^e \frac{e^x(1 + x\ln x)}{x}\,dx$$

Resolución:

Resolución: Aplicando propiedades de integrales

$$I = \int_1^e \frac{e^x}{x}\, dx + \underbrace{\int_1^e e^x \ln x \, dx}_{I_1} \tag{1}$$

Resolución: Aplicando propiedades de integrales

$$I = \int_1^e \frac{e^x}{x}\, dx + \underbrace{\int_1^e e^x \ln x \, dx}_{I_1} \tag{1}$$

Para la integral I_1, aplicamos integración por partes

Resolución: Aplicando propiedades de integrales

$$I = \int_1^e \frac{e^x}{x}\, dx + \underbrace{\int_1^e e^x \ln x \, dx}_{I_1} \tag{1}$$

Para la integral I_1, aplicamos integración por partes

$$u = \ln x$$

Resolución: Aplicando propiedades de integrales

$$I = \int_1^e \frac{e^x}{x}\, dx + \underbrace{\int_1^e e^x \ln x \, dx}_{I_1} \tag{1}$$

Para la integral I_1, aplicamos integración por partes

$$u = \ln x \qquad dv = e^x \, dx$$

Resolución: Aplicando propiedades de integrales

$$I = \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx + \underbrace{\int_1^e e^x \ln x\,dx}_{I_1} \qquad (1)$$

Para la integral I_1, aplicamos integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \ln x \\ du &= \frac{1}{x}\,dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dv &= e^x\,dx \end{aligned}$$

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Aplicando propiedades de integrales

$$I = \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx + \underbrace{\int_1^e e^x \ln x\,dx}_{I_1} \qquad (1)$$

Para la integral I_1, aplicamos integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \ln x \\ du &= \frac{1}{x}\,dx \end{aligned} \qquad \begin{aligned} dv &= e^x\,dx \\ v &= e^x \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Luego,

$$I_1 = [(\ln x)e^x]_1^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Luego,

$$\begin{aligned} I_1 &= [(\ln x)e^x]_1^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx \\ I_1 &= e^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Luego,

$$\begin{aligned} I_1 &= [(\ln x)e^x]_1^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx \\ I_1 &= e^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en (1)

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Luego,

$$\begin{aligned} I_1 &= [(\ln x)e^x]_1^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx \\ I_1 &= e^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en (1)

$$I = \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx + e^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Luego,

$$\begin{aligned} I_1 &= [(\ln x)e^x]_1^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx \\ I_1 &= e^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en (1)

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx + e^e - \int_1^e \frac{e^x}{x}\,dx \\ I &= e^e \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Calcule

$$I = \int_0^1 (x^2+3x-2)e^{2x}\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 (x^2+3x-2)e^{2x}\,dx$$

(2)

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 (x^2+3x-2)e^{2x}\,dx$$

Aplicando integración por partes

(2)

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 (x^2+3x-2)e^{2x}\,dx$$

Aplicando integración por partes

$$u = x^2+3x-1$$

(2)

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 (x^2+3x-2)e^{2x}\,dx$$

Aplicando integración por partes

$$u = x^2+3x-1 \qquad dv = e^{2x}\,dx$$

(2)

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 (x^2 + 3x - 2)e^{2x}\, dx$$

Aplicando integración por partes

$$u = x^2 + 3x - 1 \qquad dv = e^{2x}\, dx$$
$$du = (2x+3)\, dx$$

(2)

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 (x^2 + 3x - 2)e^{2x}\, dx$$

Aplicando integración por partes

$$u = x^2 + 3x - 1 \qquad dv = e^{2x}\, dx$$
$$du = (2x+3)\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

(2)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 (x^2 + 3x - 2)e^{2x}\, dx$$

Aplicando integración por partes

$$u = x^2 + 3x - 1 \qquad dv = e^{2x}\, dx$$
$$du = (2x+3)\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Luego,

(2)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 (x^2 + 3x - 2)e^{2x}\, dx$$

Aplicando integración por partes

$$u = x^2 + 3x - 1 \qquad dv = e^{2x}\, dx$$
$$du = (2x+3)\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Luego,

$$I = \left[\frac{1}{2}(x^2 + 3x - 1)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 (x + \frac{3}{2})e^{2x}\, dx$$

(2)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 (x^2 + 3x - 2)e^{2x}\, dx$$

Aplicando integración por partes

$$u = x^2 + 3x - 1 \qquad dv = e^{2x}\, dx$$

$$du = (2x+3)\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Luego,

$$I = \left[\frac{1}{2}(x^2 + 3x - 1)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 (x + \frac{3}{2})e^{2x}\, dx$$

$$I = \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{2} - \underbrace{\int_0^1 (x + \frac{3}{2})e^{2x}\, dx}_{I_1} \qquad (2)$$

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Aplicando integración por partes para la integral I_1

$$u = x + \frac{3}{2}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Aplicando integración por partes para la integral I_1

$$u = x + \frac{3}{2} \qquad dv = e^{2x}\, dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Aplicando integración por partes para la integral I_1

$$u = x + \frac{3}{2} \qquad dv = e^{2x}\, dx$$

$$du = dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Aplicando integración por partes para la integral I_1

$$u = x + \frac{3}{2} \qquad dv = e^{2x}\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Aplicando integración por partes para la integral I_1

$$u = x + \frac{3}{2} \qquad dv = e^{2x}\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Luego,

$$I_1 = \left[\frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Aplicando integración por partes para la integral I_1

$$u = x + \frac{3}{2} \qquad dv = e^{2x}\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Luego,

$$I_1 = \left[\frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

$$I_1 = \frac{5}{4}e^2 - \frac{3}{4} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Aplicando integración por partes para la integral I_1

$$u = x + \frac{3}{2} \qquad dv = e^{2x}\,dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Luego,

$$I_1 = \left[\frac{1}{2}(x+\frac{3}{2})e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

$$I_1 = \frac{5}{4}e^2 - \frac{3}{4} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$$

$$I_1 = e^2 - \frac{1}{2}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Finalmente, reemplazando en (2)

$$I = \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{2} - \left(e^2 - \frac{1}{2}\right)$$

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Finalmente, reemplazando en (2)

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{2} - \left(e^2 - \frac{1}{2}\right) \\ I &= \frac{1}{2}e^2 + 1 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx \tag{3}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

Aplicando integración por partes

(3)

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

Aplicando integración por partes

$$u = \arctan x$$

(3)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

Aplicando integración por partes

$$u = \arctan x \qquad dv = x \, dx$$

(3)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \arctan x \qquad & dv &= x \, dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2} \, dx \end{aligned}$$

(3)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \arctan x & dv &= x\,dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2}\,dx & v &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

(3)

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \arctan x & dv &= x\,dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2}\,dx & v &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Luego,

(3)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \arctan x & dv &= x\,dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2}\,dx & v &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Luego,

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

(3)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Sea

$$I = \int_0^1 x \arctan x \, dx$$

Aplicando integración por partes

$$\begin{aligned} u &= \arctan x & dv &= x\,dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2}\,dx & v &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Luego,

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx}_{I_1}$$

(3)

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Evaluamos la integral I_1

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx$$

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Evaluamos la integral I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Evaluamos la integral I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= 1 - [\arctan x]_0^1 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Evaluamos la integral I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= 1 - [\arctan x]_0^1 \\ I_1 &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Evaluamos la integral I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= 1 - [\arctan x]_0^1 \\ I_1 &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en (3)

Evaluamos la integral I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= 1 - [\arctan x]_0^1 \\ I_1 &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en (3)

$$I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Evaluamos la integral I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ I_1 &= 1 - [\arctan x]_0^1 \\ I_1 &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en (3)

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ I &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sesión 11

Identidades de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$

Identidades de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$
2. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$

Identidades de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$
2. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$
3. $\csc^2 u - \cot^2 u = 1$

Identidades de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$
2. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$
3. $\csc^2 u - \cot^2 u = 1$
4. $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$

Identidades de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$
2. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$
3. $\csc^2 u - \cot^2 u = 1$
4. $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$
5. $\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Identidades de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$
2. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$
3. $\csc^2 u - \cot^2 u = 1$
4. $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$
5. $\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$

6. $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Identidades de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$
2. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$
3. $\csc^2 u - \cot^2 u = 1$
4. $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$
5. $\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$
6. $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$

7. $\operatorname{sech}^2 u + \tanh^2 u = 1$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Identidades de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$
2. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$
3. $\csc^2 u - \cot^2 u = 1$
4. $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1 - \cos 2u}{2}$
5. $\cos^2 u = \dfrac{1 + \cos 2u}{2}$
6. $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$
7. $\operatorname{sech}^2 u + \tanh^2 u = 1$

8. $\coth^2 u - \operatorname{csch}^2 u = 1$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Identidades de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$
2. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$
3. $\csc^2 u - \cot^2 u = 1$
4. $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1-\cos 2u}{2}$
5. $\cos^2 u = \dfrac{1+\cos 2u}{2}$
6. $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$
7. $\operatorname{sech}^2 u + \tanh^2 u = 1$
8. $\coth^2 u - \operatorname{csch}^2 u = 1$
9. $\operatorname{senh}^2 u = \dfrac{\cosh 2u - 1}{2}$

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Identidades de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$
2. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$
3. $\csc^2 u - \cot^2 u = 1$
4. $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1-\cos 2u}{2}$
5. $\cos^2 u = \dfrac{1+\cos 2u}{2}$
6. $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$
7. $\operatorname{sech}^2 u + \tanh^2 u = 1$
8. $\coth^2 u - \operatorname{csch}^2 u = 1$
9. $\operatorname{senh}^2 u = \dfrac{\cosh 2u - 1}{2}$
10. $\cosh^2 u = \dfrac{\cosh 2u + 1}{2}$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx \quad \text{y} \quad \int \operatorname{senh}^m x \cosh^n x \, dx$$

Caso 1

Uno de los exponentes m o n es un entero impar

i. Si m es entero impar positivo, se factoriza $\operatorname{sen} x \, dx$ y se expresa los senos restantes en función de cosenos, usando la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ o $\operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x - 1$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe
$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$$

Resolución: Se tiene que $m = 3$ es impar, luego

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$$

Resolución: Se tiene que $m = 3$ es impar, luego

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$$

Resolución: Se tiene que $m = 3$ es impar, luego

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$I = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$$

Resolución: Se tiene que $m = 3$ es impar, luego

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$I = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$I = \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx$$

Resolución: Se tiene que $m = 3$ es impar, luego

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$I = \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$I = \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$I = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Caso 1

Uno de los exponentes m o n es un entero impar.

ii. Si n es entero impar positivo, se factoriza $\cos x\,dx$ y se expresa los cosenos restantes en función de senos, usando la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ o $\cosh^2 x = 1 + \operatorname{senh}^2 x$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \cos^3 x\,dx$$

Resolución: Se tiene que $n = 3$ es impar, luego

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \cos^3 x\,dx$$

Resolución: Se tiene que $n = 3$ es impar, luego

$$I = \int \cos^2 x \cos x\,dx$$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \cos^3 x\,dx$$

Resolución: Se tiene que $n = 3$ es impar, luego

$$I = \int \cos^2 x \cos x\,dx$$

$$I = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\,dx$$

Ejemplo

Evalúe
$$I = \int \cos^3 x\, dx$$

Resolución: Se tiene que $n = 3$ es impar, luego

$$I = \int \cos^2 x \cos x\, dx$$
$$I = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx$$
$$I = \int \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$$

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe
$$I = \int \cos^3 x\, dx$$

Resolución: Se tiene que $n = 3$ es impar, luego

$$I = \int \cos^2 x \cos x\, dx$$
$$I = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx$$
$$I = \int \cos x\, dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$$
$$I = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Caso 2

Ambos exponentes m y n son enteros pares y mayores o iguales a cero.
Se usaran las identidades $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ y $\cos^2 2x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe
$$I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx$$

Resolución: Se tiene que $m = 4$ y $n = 2$, luego

$$I = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx$$

Resolución: Se tiene que $m = 4$ y $n = 2$, luego

$$I = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$I = \int \frac{1}{8}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) \, dx$$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x \, dx$$

Resolución: Se tiene que $m = 4$ y $n = 2$, luego

$$I = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$I = \int \frac{1}{8}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) \, dx$$

$$I = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx$$

$$I = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C_1\right) - \frac{1}{8}\underbrace{\int \cos^2 2x \, dx}_{I_1} + \frac{1}{8}\underbrace{\int \cos^3 2x \, dx}_{I_2} \qquad (4)$$

$$I = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C_1\right) - \frac{1}{8}\underbrace{\int \cos^2 2x\, dx}_{I_1} + \frac{1}{8}\underbrace{\int \cos^3 2x\, dx}_{I_2} \tag{4}$$

- Calculando I_1

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

$$I = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C_1\right) - \frac{1}{8}\underbrace{\int \cos^2 2x\, dx}_{I_1} + \frac{1}{8}\underbrace{\int \cos^3 2x\, dx}_{I_2} \tag{4}$$

- Calculando I_1

$$I_1 = \int \cos^2 2x\, dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

$$I = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C_1\right) - \frac{1}{8}\underbrace{\int \cos^2 2x\, dx}_{I_1} + \frac{1}{8}\underbrace{\int \cos^3 2x\, dx}_{I_2} \tag{4}$$

- Calculando I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \cos^2 2x\, dx \\ I_1 &= \int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

$$I = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C_1\right) - \frac{1}{8}\underbrace{\int \cos^2 2x\, dx}_{I_1} + \frac{1}{8}\underbrace{\int \cos^3 2x\, dx}_{I_2} \tag{4}$$

- Calculando I_1

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \cos^2 2x\, dx \\ I_1 &= \int \frac{1+\cos 4x}{2}\, dx \\ I_1 &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + C_2 \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

- Calculando I_2

- Calculando I_2

$$I_2 = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \, dx$$

- Calculando I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \, dx \\ I_2 &= \int \cos 2x \, dx - \int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

- Calculando I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \, dx \\ I_2 &= \int \cos 2x \, dx - \int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x \, dx \\ I_2 &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{6} \operatorname{sen}^3 2x + C_3 \end{aligned}$$

- Calculando I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int (1-\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\,dx \\ I_2 &= \int \cos 2x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx \\ I_2 &= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x + C_3 \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en (4)

- Calculando I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int (1-\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\,dx \\ I_2 &= \int \cos 2x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx \\ I_2 &= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x + C_3 \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en (4)

$$I = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C_1\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + C_2\right)$$

- Calculando I_2

$$\begin{aligned} I_2 &= \int (1-\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\,dx \\ I_2 &= \int \cos 2x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx \\ I_2 &= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x + C_3 \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en (4)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C_1\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + C_2\right) \\ &\quad + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x + C_3\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C$$

Integrales de la forma

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx \quad \text{y} \quad \int \tanh^m x \,\mathrm{sech}^n x \, dx$$

Caso 1

Si m es entero impar positivo, se factoriza $\tan x \sec x \, dx$ y se expresa los tangentes restantes en términos de secantes, mediante la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ o $\tanh^2 x = 1 - \mathrm{sech}^2 x$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \frac{\tan^3 x}{\sec^2 x} \, dx$$

Resolución: Factorizando $\sec x \tan x \, dx$, luego

Resolución: Factorizando $\sec x \tan x \, dx$, luego

$$I = \int \tan^2 x \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx$$

Resolución: Factorizando $\sec x \tan x \, dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^2 x \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx \\ I &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx \end{aligned}$$

Resolución: Factorizando $\sec x \tan x \, dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^2 x \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx \\ I &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx \\ I &= \int (\sec^{-1} x - \sec^{-3} x) \tan x \sec x \, dx \end{aligned}$$

Resolución: Factorizando $\sec x \tan x \, dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^2 x \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx \\ I &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx \\ I &= \int (\sec^{-1} x - \sec^{-3} x) \tan x \sec x \, dx \\ I &= \int \tan x \, dx - \int \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx \end{aligned}$$

Resolución: Factorizando $\sec x \tan x \, dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^2 x \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx \\ I &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx \\ I &= \int (\sec^{-1} x - \sec^{-3} x) \tan x \sec x \, dx \\ I &= \int \tan x \, dx - \int \sec^{-3} x \tan x \sec x \, dx \\ I &= -\ln|\cos x| + \frac{1}{2} \sec^{-2} x + C \end{aligned}$$

Caso 2

Si n es entero par positivo, se factoriza $\sec^2 x\,dx$ y el resto de las secantes se transforma en términos de tangentes usando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \tan^{1/2} x \sec^4 x\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \tan^{1/2} x \sec^4 x\,dx$$

Resolución: Factorizando $\sec^2 x\,dx$, luego

$$I = \int \tan^{1/2} x(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \tan^{1/2} x \sec^4 x\,dx$$

Resolución: Factorizando $\sec^2 x\,dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^{1/2} x(1 + \tan^2 x)\sec^2 x\,dx \\ I &= \int (\tan^{1/2} x + \tan^{5/2} x)\sec^2 x\,dx \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \tan^{1/2} x \sec^4 x \, dx$$

Resolución: Factorizando $\sec^2 x \, dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^{1/2} x(1+\tan^2 x)\sec^2 x \, dx \\ I &= \int (\tan^{1/2} x + \tan^{5/2} x)\sec^2 x \, dx \\ I &= \int \tan^{1/2} x \sec^2 x \, dx + \int \tan^{5/2} \sec^2 x \, dx \end{aligned}$$

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \tan^{1/2} x \sec^4 x \, dx$$

Resolución: Factorizando $\sec^2 x \, dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \tan^{1/2} x(1+\tan^2 x)\sec^2 x \, dx \\ I &= \int (\tan^{1/2} x + \tan^{5/2} x)\sec^2 x \, dx \\ I &= \int \tan^{1/2} x \sec^2 x \, dx + \int \tan^{5/2} \sec^2 x \, dx \\ I &= \frac{2}{3}\tan^{3/2} x + \frac{2}{7}\tan^{7/2} x + C \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \csc^6 x \, dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Resolución: Factorizando $\csc^2 x \, dx$, luego

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Factorizando $\csc^2 x\,dx$, luego

$$I = \int \csc^4 x \csc^2 x\,dx$$

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Factorizando $\csc^2 x\,dx$, luego

$$I = \int \csc^4 x \csc^2 x\,dx$$

$$I = \int (1+\cot^2 x)^2 \csc^2 x\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Factorizando $\csc^2 x\,dx$, luego

$$I = \int \csc^4 x \csc^2 x\,dx$$

$$I = \int (1+\cot^2 x)^2 \csc^2 x\,dx$$

$$I = \int (1+2\cot^2 x+\cot^4 x) \csc^2 x\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Factorizando $\csc^2 x\,dx$, luego

$$I = \int \csc^4 x \csc^2 x\,dx$$

$$I = \int (1+\cot^2 x)^2 \csc^2 x\,dx$$

$$I = \int (1+2\cot^2 x+\cot^4 x) \csc^2 x\,dx$$

$$I = \int \csc^2 x\,dx + 2\int \cot^2 x \csc^2 x\,dx + \int \cot^4 x \csc^2 x\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Factorizando $\csc^2 x\,dx$, luego

$$
\begin{aligned}
I &= \int \csc^4 x \csc^2 x\, dx\\
I &= \int (1+\cot^2 x)^2 \csc^2 x\, dx\\
I &= \int (1+2\cot^2 x+\cot^4 x)\csc^2 x\, dx\\
I &= \int \csc^2 x\, dx + 2\int \cot^2 x \csc^2 x\, dx + \int \cot^4 x\csc^2 x\, dx\\
I &= -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + C
\end{aligned}
$$

Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx,\ \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx,\ \int \cos mx \cos nx\, dx$$

Identidades a utilizar

Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx,\ \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx,\ \int \cos mx \cos nx\, dx$$

Identidades a utilizar

a) $2\operatorname{sen} mx \cos nx = \operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x$

Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx,\ \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx,\ \int \cos mx \cos nx\, dx$$

Identidades a utilizar

a) $2\operatorname{sen} mx \cos nx = \operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x$

b) $2\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \cos(m-n)x - \cos(m+n)x$

Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx, \int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx, \int \cos mx \cos nx \, dx$$

Identidades a utilizar

a) $2 \operatorname{sen} mx \cos nx = \operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x$

b) $2 \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \cos(m-n)x - \cos(m+n)x$

c) $2 \cos mx \cos nx = \cos(m-n)x + \cos(m+n)x$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx$$

Resolución:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(2+3)x + \operatorname{sen}(2-3)x] \, dx \\ I &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x) \, dx \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx$$

Resolución:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen}(2+3)x + \operatorname{sen}(2-3)x] \, dx \\ I &= \frac{1}{2}\int (\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} x) \, dx \\ I &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 5x \, dx - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x \, dx \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Evalúe
$$I=\int \operatorname{sen} 2x\cos 3x\,dx$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int[\operatorname{sen}(2+3)x+\operatorname{sen}(2-3)x]\,dx\\
I &= \frac{1}{2}\int(\operatorname{sen}5x-\operatorname{sen}x)\,dx\\
I &= \frac{1}{2}\int\operatorname{sen}5x\,dx-\frac{1}{2}\int\operatorname{sen}x\,dx\\
I &= -\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C
\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \operatorname{senh} mx\cosh nx\,dx$,

$$\int \operatorname{senh} mx\operatorname{senh} nx\,dx,\ \int\cosh mx\cosh nx\,dx$$

Identidades a utilizar

Integrales de la forma $\int \operatorname{senh} mx\cosh nx\,dx$,

$$\int \operatorname{senh} mx\operatorname{senh} nx\,dx,\ \int\cosh mx\cosh nx\,dx$$

Identidades a utilizar

a) $2\operatorname{senh} mx\cosh nx=\operatorname{senh}(m+n)x+\operatorname{senh}(m-n)x$

Integrales de la forma $\int \operatorname{senh} mx\cosh nx\,dx$,

$$\int \operatorname{senh} mx\operatorname{senh} nx\,dx,\ \int\cosh mx\cosh nx\,dx$$

Identidades a utilizar

a) $2\operatorname{senh} mx\cosh nx=\operatorname{senh}(m+n)x+\operatorname{senh}(m-n)x$

b) $2\operatorname{senh} mx\operatorname{senh} nx=\cosh(m+n)x-\cosh(m-n)x$

Integrales de la forma $\int \operatorname{senh} mx \cosh nx \, dx$,

$$\int \operatorname{senh} mx \operatorname{senh} nx \, dx, \int \cosh mx \cosh nx \, dx$$

Identidades a utilizar

a) $2 \operatorname{senh} mx \cosh nx = \operatorname{senh}(m+n)x + \operatorname{senh}(m-n)x$

b) $2 \operatorname{senh} mx \operatorname{senh} nx = \cosh(m+n)x - \cosh(m-n)x$

c) $2 \cosh mx \cosh nx = \cosh(m+n)x + \cosh(m-n)x$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{senh} 3x \operatorname{senh} 4x \, dx$$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{senh} 3x \operatorname{senh} 4x \, dx$$

Resolución:

$$I = \frac{1}{2}\int [\cosh(3+4)x - \cosh(3-4)x] \, dx$$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{senh} 3x \operatorname{senh} 4x \, dx$$

Resolución:

$$I = \frac{1}{2}\int [\cosh(3+4)x - \cosh(3-4)x] \, dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int (\cosh 7x - \cosh x) \, dx$$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{senh} 3x \operatorname{senh} 4x \, dx$$

Resolución:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int [\cosh(3+4)x - \cosh(3-4)x] \, dx \\ I &= \frac{1}{2}\int (\cosh 7x - \cosh x) \, dx \\ I &= \frac{1}{2}\int \cosh 7x \, dx - \frac{1}{2}\int \cosh x \, dx \end{aligned}$$

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \operatorname{senh} 3x \operatorname{senh} 4x \, dx$$

Resolución:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int [\cosh(3+4)x - \cosh(3-4)x] \, dx \\ I &= \frac{1}{2}\int (\cosh 7x - \cosh x) \, dx \\ I &= \frac{1}{2}\int \cosh 7x \, dx - \frac{1}{2}\int \cosh x \, dx \\ I &= \frac{1}{14}\operatorname{senh} 7x - \frac{1}{2}\operatorname{senh} x + C \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Integración por sustitución trigonométrica

Las integrales de la forma $\int R\left(x, \sqrt{px^2+qx+r}\right) dx$, donde R es una función racional en las variables x y $\sqrt{px^2+qx+r}$, se puede simplificar por medio de una sustitución trigonométrica adecuada. El trinomio px^2+qx+r, completando cuadrado puede ser escrito como: u^2+a^2, ó u^2-a^2 ó a^2-u^2 donde a es una constante.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

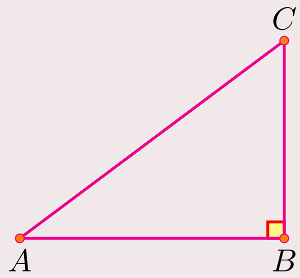
Caso 1

Si el trinomio tiene la forma a^2-u^2, mediante la sustitución $u = a\operatorname{sen}\theta$, $a>0$ se tiene $\sqrt{a^2-u^2} = a\cos\theta$ y $du = a\cos\theta d\theta$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Caso 1

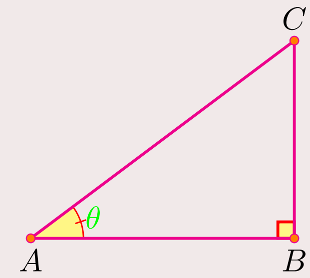
Si el trinomio tiene la forma $a^2 - u^2$, mediante la sustitución $u = a \operatorname{sen} \theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$ y $du = a \cos \theta d\theta$.



Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Caso 1

Si el trinomio tiene la forma $a^2 - u^2$, mediante la sustitución $u = a \operatorname{sen} \theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$ y $du = a \cos \theta d\theta$.



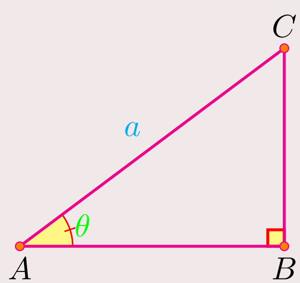
$$\theta = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Caso 1

Si el trinomio tiene la forma $a^2 - u^2$, mediante la sustitución $u = a \operatorname{sen} \theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$ y $du = a \cos \theta d\theta$.



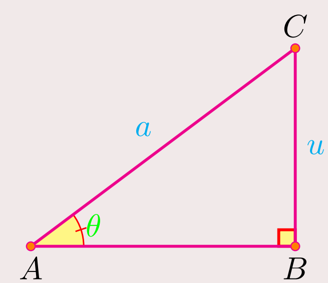
$$\theta = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Caso 1

Si el trinomio tiene la forma $a^2 - u^2$, mediante la sustitución $u = a \operatorname{sen} \theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$ y $du = a \cos \theta d\theta$.

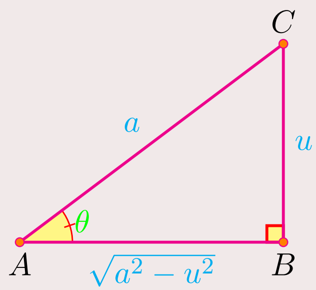


$$\theta = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Caso 1

Si el trinomio tiene la forma $a^2 - u^2$, mediante la sustitución $u = a\operatorname{sen}\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$ y $du = a\cos\theta d\theta$.



$$\boxed{\theta = \operatorname{arcsen}\frac{u}{a}}$$

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \sqrt{16 - x^2}\, dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

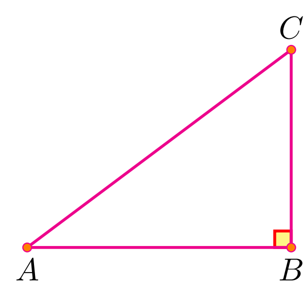
Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\operatorname{sen}\theta$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

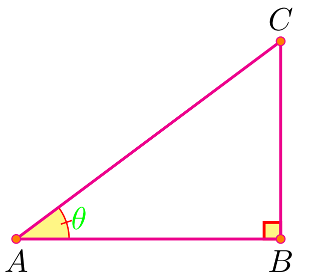
Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\operatorname{sen}\theta$



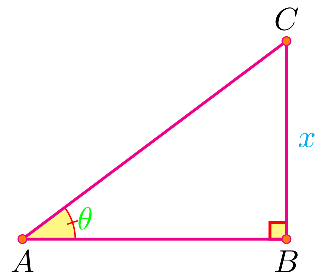
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$



Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

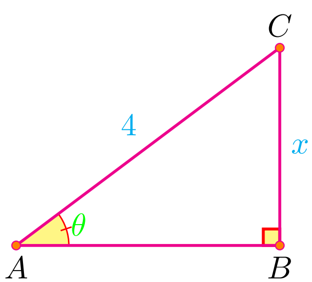
Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

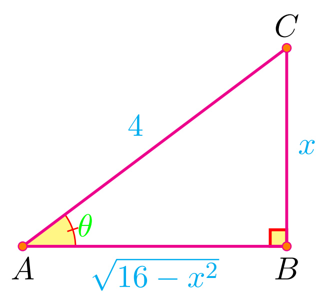
Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

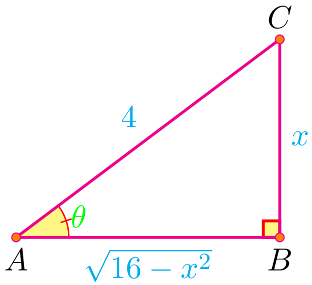
Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$



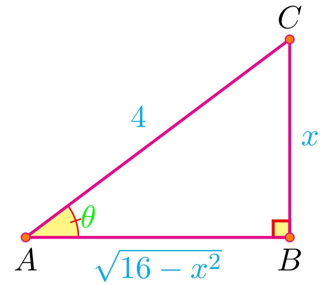
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\operatorname{sen}\theta$



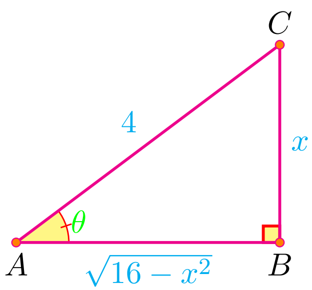
$$I = \int \sqrt{16-(4\operatorname{sen}\theta)^2}\,4\cos\theta\,d\theta$$

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\operatorname{sen}\theta$



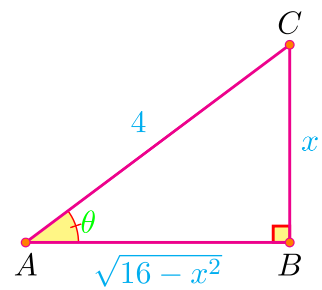
$$I = \int \sqrt{16-(4\operatorname{sen}\theta)^2}\,4\cos\theta\,d\theta$$
$$I = 16\int \cos^2\theta\,d\theta$$

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\operatorname{sen}\theta$



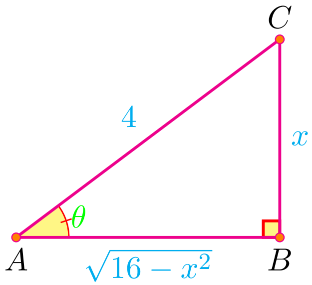
$$I = \int \sqrt{16-(4\operatorname{sen}\theta)^2}\,4\cos\theta\,d\theta$$
$$I = 16\int \cos^2\theta\,d\theta$$
$$I = 8\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\operatorname{sen}\theta$



$$I = \int \sqrt{16-(4\operatorname{sen}\theta)^2}\,4\cos\theta\,d\theta$$
$$I = 16\int \cos^2\theta\,d\theta$$
$$I = 8\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$I = 8(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + C$$

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$



$$
\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{16-(4\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}\,4\cos\theta\,d\theta \\
I &= 16\int \cos^2\theta\,d\theta \\
I &= 8\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
I &= 8(\theta + \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta) + C \\
I &= 8\left(\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{4} + \frac{x\sqrt{16-x^2}}{16}\right) + C
\end{aligned}
$$

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Caso 2

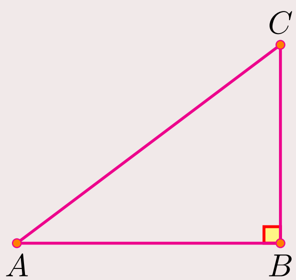
Si el trinomio tiene la forma $a^2 + u^2$, mediante la sustitución $u = a\tan\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta$ y $du = a\sec^2\theta d\theta$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Caso 2

Si el trinomio tiene la forma $a^2 + u^2$, mediante la sustitución $u = a\tan\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta$ y $du = a\sec^2\theta d\theta$.

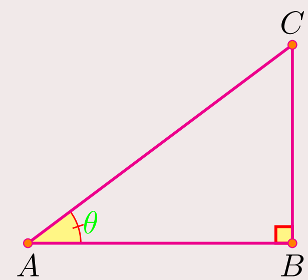


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Caso 2

Si el trinomio tiene la forma $a^2 + u^2$, mediante la sustitución $u = a\tan\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta$ y $du = a\sec^2\theta d\theta$.

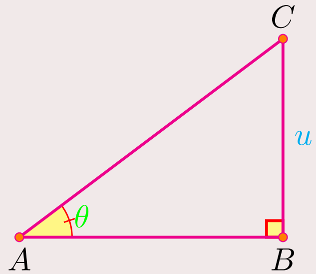


$$\boxed{\theta = \arctan\frac{u}{a}}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Caso 2

Si el trinomio tiene la forma $a^2 + u^2$, mediante la sustitución $u = a\tan\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta$ y $du = a\sec^2\theta d\theta$.

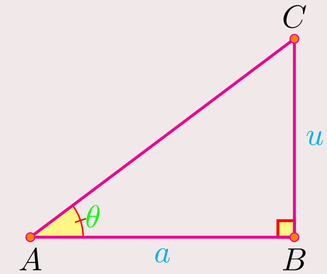


$$\theta = \arctan\frac{u}{a}$$

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Caso 2

Si el trinomio tiene la forma $a^2 + u^2$, mediante la sustitución $u = a\tan\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta$ y $du = a\sec^2\theta d\theta$.



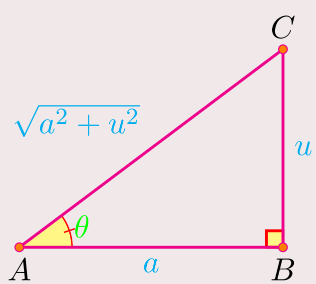
$$\theta = \arctan\frac{u}{a}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Caso 2

Si el trinomio tiene la forma $a^2 + u^2$, mediante la sustitución $u = a\tan\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta$ y $du = a\sec^2\theta d\theta$.



$$\theta = \arctan\frac{u}{a}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Ejemplo

Evalúe

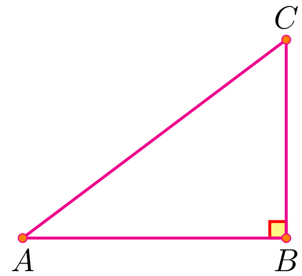
$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{4+9x^2}}\,dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

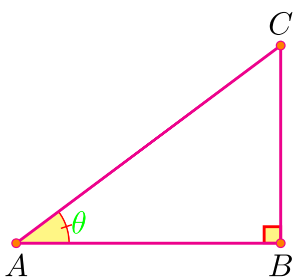
Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

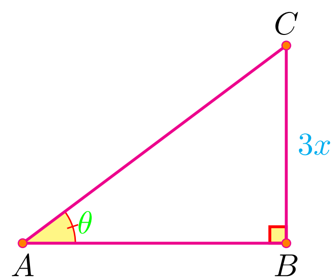
Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

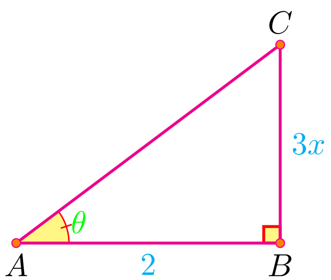
Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$



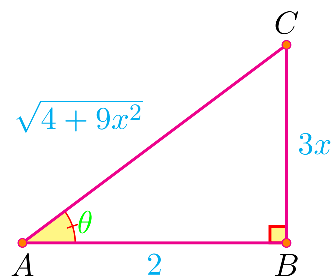
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$



Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$

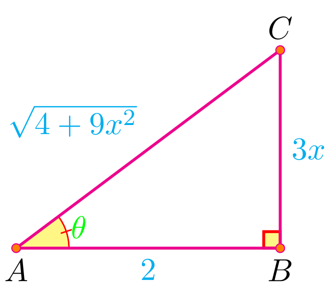


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$

$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{2^2+(3x)^2}}\,dx$$



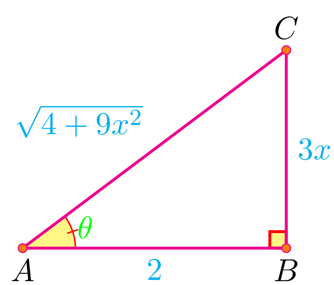
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$

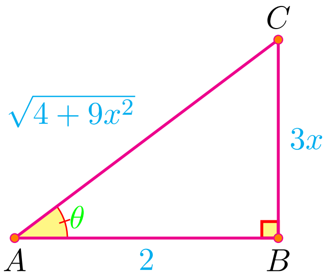
$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{2^2+(3x)^2}}\,dx$$

$$I = \int \frac{1}{\frac{4}{9}\tan^2\theta\sqrt{4+4\tan^2\theta}}\,\frac{2}{3}\sec^2\theta\,d\theta$$



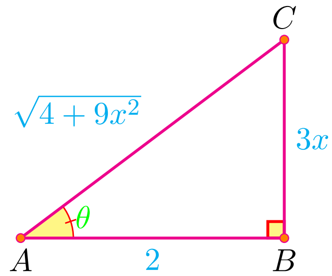
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$



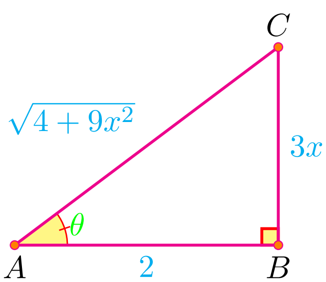
$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x^2\sqrt{2^2+(3x)^2}}\,dx \\
I &= \int \frac{1}{\frac{4}{9}\tan^2\theta\sqrt{4+4\tan^2\theta}}\,\frac{2}{3}\sec^2\theta\,d\theta \\
I &= \frac{3}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta
\end{aligned}$$

Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$



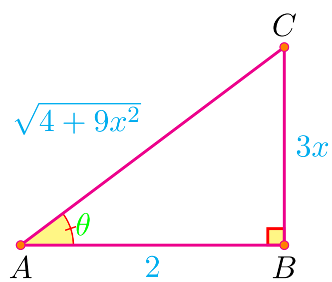
$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x^2\sqrt{2^2+(3x)^2}}\,dx \\
I &= \int \frac{1}{\frac{4}{9}\tan^2\theta\sqrt{4+4\tan^2\theta}}\,\frac{2}{3}\sec^2\theta\,d\theta \\
I &= \frac{3}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta \\
I &= \frac{3}{4}\int \cos\theta\,\mathrm{sen}^{-2}\,\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$



$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x^2\sqrt{2^2+(3x)^2}}\,dx \\
I &= \int \frac{1}{\frac{4}{9}\tan^2\theta\sqrt{4+4\tan^2\theta}}\,\frac{2}{3}\sec^2\theta\,d\theta \\
I &= \frac{3}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta \\
I &= \frac{3}{4}\int \cos\theta\,\mathrm{sen}^{-2}\,\theta\,d\theta \\
I &= -\frac{3}{4}\csc\theta + C
\end{aligned}$$

Resolución: Haciendo la sustitución $3x = 2\tan\theta$



$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{x^2\sqrt{2^2+(3x)^2}}\,dx \\
I &= \int \frac{1}{\frac{4}{9}\tan^2\theta\sqrt{4+4\tan^2\theta}}\,\frac{2}{3}\sec^2\theta\,d\theta \\
I &= \frac{3}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta \\
I &= \frac{3}{4}\int \cos\theta\,\mathrm{sen}^{-2}\,\theta\,d\theta \\
I &= -\frac{3}{4}\csc\theta + C \\
I &= -\frac{\sqrt{4+9x^2}}{4x} + C
\end{aligned}$$

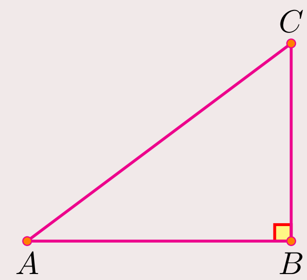
Caso 3

Si el trinomio tiene la forma $u^2 - a^2$, mediante la sustitución $u = a\sec\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan\theta$ y $du = a\sec\theta\tan\theta d\theta$.

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Caso 3

Si el trinomio tiene la forma $u^2 - a^2$, mediante la sustitución $u = a\sec\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan\theta$ y $du = a\sec\theta\tan\theta d\theta$.

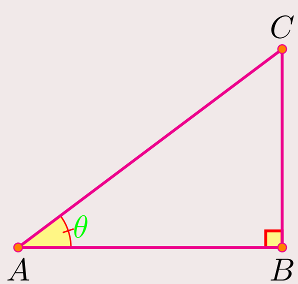


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Caso 3

Si el trinomio tiene la forma $u^2 - a^2$, mediante la sustitución $u = a\sec\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan\theta$ y $du = a\sec\theta\tan\theta d\theta$.



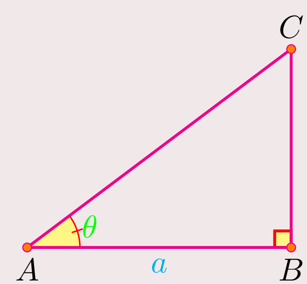
$$\boxed{\theta = \operatorname{arcsec}\frac{u}{a}}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Caso 3

Si el trinomio tiene la forma $u^2 - a^2$, mediante la sustitución $u = a\sec\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan\theta$ y $du = a\sec\theta\tan\theta d\theta$.

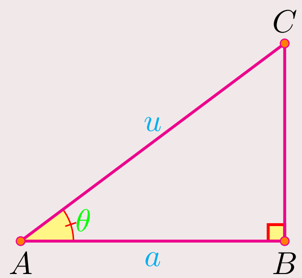


$$\boxed{\theta = \operatorname{arcsec}\frac{u}{a}}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Caso 3

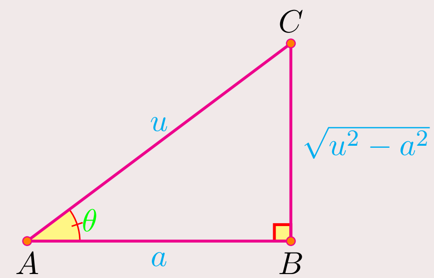
Si el trinomio tiene la forma $u^2 - a^2$, mediante la sustitución $u = a\sec\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan\theta$ y $du = a\sec\theta\tan\theta d\theta$.



$$\boxed{\theta = \operatorname{arcsec}\frac{u}{a}}$$

Caso 3

Si el trinomio tiene la forma $u^2 - a^2$, mediante la sustitución $u = a\sec\theta$, $a > 0$ se tiene $\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan\theta$ y $du = a\sec\theta\tan\theta d\theta$.



$$\boxed{\theta = \operatorname{arcsec}\frac{u}{a}}$$

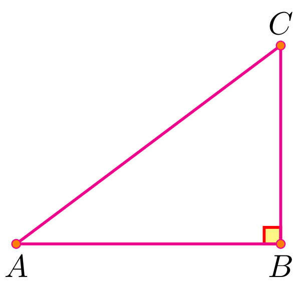
Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}}\, dx$$

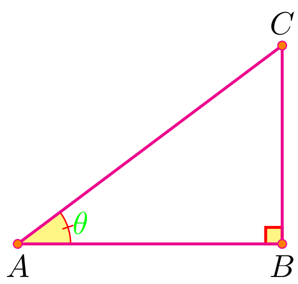
Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$



Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

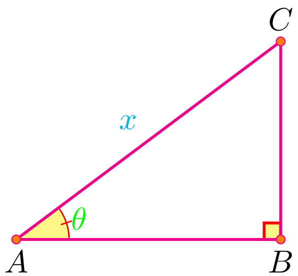
Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

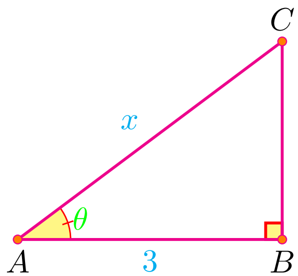
Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

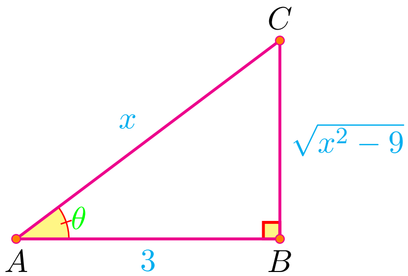
Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$



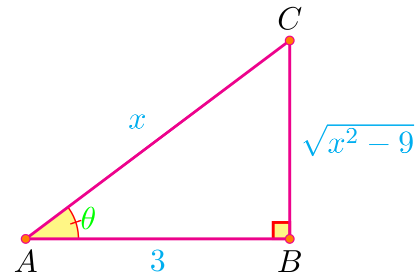
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$



Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$

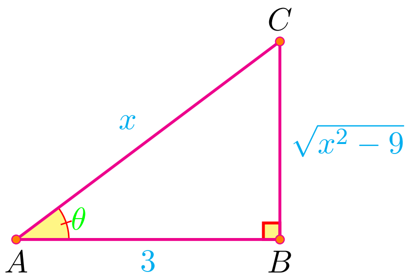
$$I = \int \frac{27\sec^3\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta - 9}} 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$



Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$

$$I = \int \frac{27\sec^3\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta - 9}} 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$I = 27\int \sec^4\theta\, d\theta$$

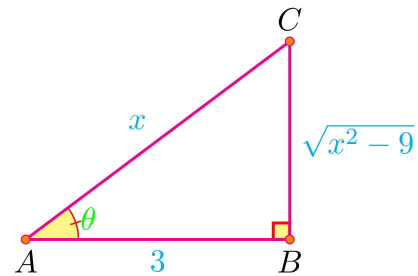


Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$

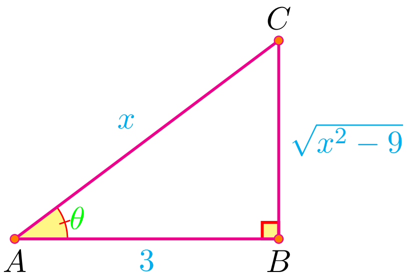
$$I = \int \frac{27\sec^3\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta - 9}} 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$I = 27\int \sec^4\theta\, d\theta$$

$$I = 27\int (1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\, d\theta$$

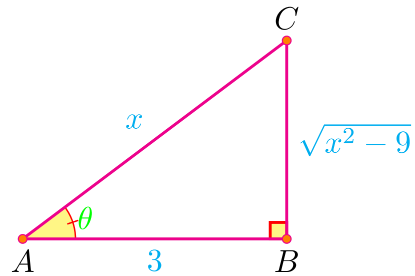


Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$



$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{27\sec^3\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta - 9}} 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta \\
I &= 27\int \sec^4\theta\, d\theta \\
I &= 27\int (1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\, d\theta \\
I &= 27\left(\tan\theta + \frac{1}{3}\tan^3\theta\right) + C
\end{aligned}
$$

Resolución: Haciendo la sustitución $x = 3\sec\theta$



$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{27\sec^3\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta - 9}} 3\sec\theta\tan\theta\, d\theta \\
I &= 27\int \sec^4\theta\, d\theta \\
I &= 27\int (1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\, d\theta \\
I &= 27\left(\tan\theta + \frac{1}{3}\tan^3\theta\right) + C \\
I &= 9\sqrt{x^2-9} + \frac{1}{3}\sqrt{x^2-9}^{\,3} + C
\end{aligned}
$$

Observación: En el ejemplo anterior, si hacemos $t^2 = x^2 - 9$, entonces $t\,dt = x\,dx$, luego

Observación: En el ejemplo anterior, si hacemos $t^2 = x^2 - 9$, entonces $t\,dt = x\,dx$, luego

$$
I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} x\, dx
$$

Observación: En el ejemplo anterior, si hacemos $t^2 = x^2 - 9$, entonces $t\,dt = x\,dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} x\,dx \\ I &= \int \frac{t^2+9}{t} t\,dt \end{aligned}$$

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Observación: En el ejemplo anterior, si hacemos $t^2 = x^2 - 9$, entonces $t\,dt = x\,dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} x\,dx \\ I &= \int \frac{t^2+9}{t} t\,dt \\ I &= \int (t^2+9)\,dt \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Observación: En el ejemplo anterior, si hacemos $t^2 = x^2 - 9$, entonces $t\,dt = x\,dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} x\,dx \\ I &= \int \frac{t^2+9}{t} t\,dt \\ I &= \int (t^2+9)\,dt \\ I &= \frac{1}{3}t^3 + 9t + C \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Observación: En el ejemplo anterior, si hacemos $t^2 = x^2 - 9$, entonces $t\,dt = x\,dx$, luego

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} x\,dx \\ I &= \int \frac{t^2+9}{t} t\,dt \\ I &= \int (t^2+9)\,dt \\ I &= \frac{1}{3}t^3 + 9t + C \\ I &= \frac{1}{3}(x^2-9)^{3/2} + 9\sqrt{x^2-9} + C \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}\, dx$$

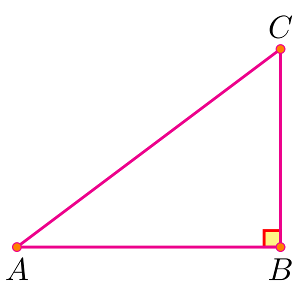
Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $x + 1 = 2\tan\theta$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

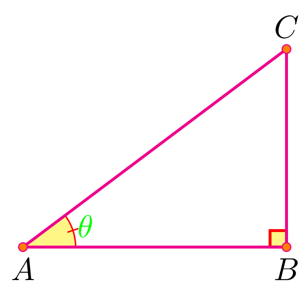
Resolución: Haciendo la sustitución $x + 1 = 2\tan\theta$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

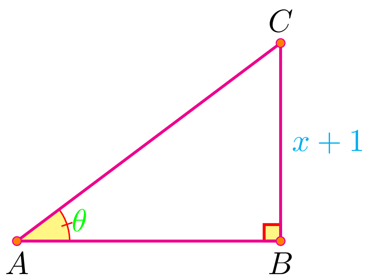
Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $x + 1 = 2\tan\theta$



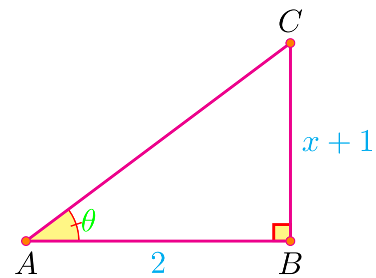
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Haciendo la sustitución $x+1 = 2\tan\theta$



Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

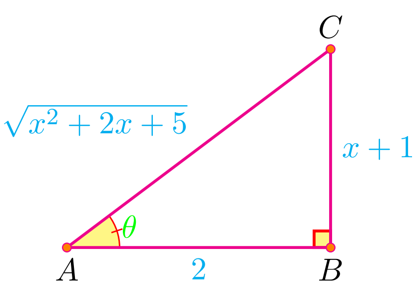
Resolución: Haciendo la sustitución $x+1 = 2\tan\theta$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

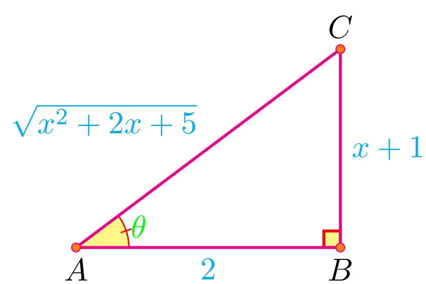
Resolución: Haciendo la sustitución $x+1 = 2\tan\theta$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 Técnicas de integración Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas Ejercicios Referencias

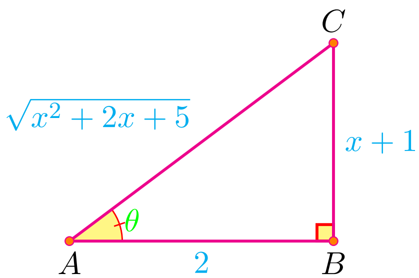
Resolución: Haciendo la sustitución $x+1 = 2\tan\theta$



$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\,dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Haciendo la sustitución $x+1=2\tan\theta$

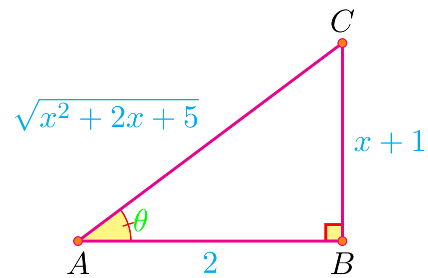


$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\,dx$$

$$I = \int \frac{(2\tan\theta-1)^3}{2\sec\theta}2\sec^2\theta\,d\theta$$

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $x+1=2\tan\theta$



$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\,dx$$

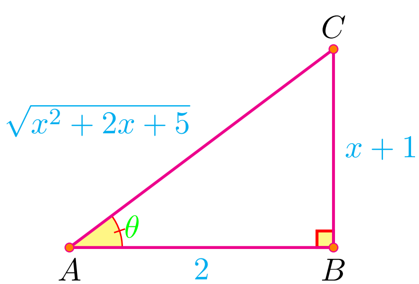
$$I = \int \frac{(2\tan\theta-1)^3}{2\sec\theta}2\sec^2\theta\,d\theta$$

$$I = \int (2\tan\theta-1)^3\sec\theta\,d\theta$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Resolución: Haciendo la sustitución $x+1=2\tan\theta$



$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\,dx$$

$$I = \int \frac{(2\tan\theta-1)^3}{2\sec\theta}2\sec^2\theta\,d\theta$$

$$I = \int (2\tan\theta-1)^3\sec\theta\,d\theta$$

$$I = \int (8\tan^3\theta\sec\theta - 6\tan^2\theta\sec\theta + 6\tan\theta\sec\theta - \sec\theta)\,d\theta$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

$$I = \frac{8}{3}\sec^3\theta - 3\sec\theta\tan\theta + 2\ln|\sec\theta+\tan\theta| - 2\sec\theta + C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{8}{3}\sec^3\theta - 3\sec\theta\tan\theta + 2\ln|\sec\theta+\tan\theta| - 2\sec\theta + C \\
I &= \frac{1}{3}(x^2+2x+5)^{3/2} - \frac{3}{4}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} \\
&\quad +2\ln\left|\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+5}}{2}\right| - \sqrt{x^2+2x+5} + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{8}{3}\sec^3\theta - 3\sec\theta\tan\theta + 2\ln|\sec\theta+\tan\theta| - 2\sec\theta + C \\
I &= \frac{1}{3}(x^2+2x+5)^{3/2} - \frac{3}{4}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} \\
&\quad +2\ln\left|\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+5}}{2}\right| - \sqrt{x^2+2x+5} + C \\
I &= \sqrt{x^2+2x+5}\left(\frac{x^2-16x-37}{24}\right) + 2\ln\left|\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x+5}}{2}\right| \\
&\quad +C
\end{aligned}
$$

Sesión 11

Ejercicios

1. Evalúe las siguiente integrales

a) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx$

b) $\displaystyle\int x\operatorname{senh} mx\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{1/2} x\cos\pi x\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^{1} (x^2+1)e^{-x}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \arctan\frac{1}{x}\,dx$

h) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

Ejercicios

2. Evalúe las siguiente integrales

a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\, dx$

c) $\displaystyle\int \cos^2 x \tan^3 x\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^3 x\, dx$

f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^5 x \csc^3 x\, dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - \cos 4x}\, dx$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^5 x \sec^4 x\, dx$

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Ejercicios

3. Evalúe las siguiente integrales

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-16}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{x^5\sqrt{9x^2-1}}\, dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{5}} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}\, dx$

h) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\, dx$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Sesión 11

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 11 | Técnicas de integración | Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas | Ejercicios | Referencias

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto

David Caytuiro

Octubre 11, 2021

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 12

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Método de fracciones parciales

Toda función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en que $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, siendo el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, se puede escribir como una suma de funciones racionales de la forma $\dfrac{A}{(ax+b)^r}$, $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}$ donde $r = 1, 2, 3, \dots$ y $ax+b$, ax^2+bx+c son irreducibles en $\mathbb{R}$. Siempre se pueden integrar por funciones elementales.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejemplo

$$\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{(2x+5)^3} + \frac{C}{(2x+5)^2} + \frac{D}{2x+5}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejemplo

$$\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{(2x+5)^3} + \frac{C}{(2x+5)^2} + \frac{D}{2x+5}$$

Ejemplo

$$\frac{5x^2-x+2}{(x^2+2x+4)^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+4} + \frac{E}{2x+5}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejemplo

$$\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{(2x+5)^3} + \frac{C}{(2x+5)^2} + \frac{D}{2x+5}$$

Ejemplo

$$\frac{5x^2-x+2}{(x^2+2x+4)^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+4} + \frac{E}{2x+5}$$

Las constantes A, B, C, D y E se pueden hallar quitando denominadores e igualando los coeficientes de iguales potencias de x en ambos miembros de la ecuación.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\, dx$$

Resolución:

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

Método 1: Para determinar las constantes A y B multiplicamos ambos miembros por $(x-3)(2x+5)$ para obtener

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

Método 1: Para determinar las constantes A y B multiplicamos ambos miembros por $(x-3)(2x+5)$ para obtener

$$6-x = A(2x+5)+B(x-3)$$

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

Método 1: Para determinar las constantes A y B multiplicamos ambos miembros por $(x-3)(2x+5)$ para obtener

$$\begin{aligned} 6-x &= A(2x+5)+B(x-3) \\ 6-x &= 5A-3B+(2A+B)x \end{aligned}$$

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

Método 1: Para determinar las constantes A y B multiplicamos ambos miembros por $(x-3)(2x+5)$ para obtener

$$\begin{aligned} 6-x &= A(2x+5)+B(x-3) \\ 6-x &= 5A-3B+(2A+B)x \end{aligned}$$

Luego,

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

Método 1: Para determinar las constantes A y B multiplicamos ambos miembros por $(x-3)(2x+5)$ para obtener

$$\begin{aligned} 6-x &= A(2x+5)+B(x-3) \\ 6-x &= 5A-3B+(2A+B)x \end{aligned}$$

Luego,

$$5A-3B = 6$$

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

Método 1: Para determinar las constantes A y B multiplicamos ambos miembros por $(x-3)(2x+5)$ para obtener

$$\begin{aligned} 6-x &= A(2x+5) + B(x-3) \\ 6-x &= 5A-3B+(2A+B)x \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 5A-3B &= 6 \\ 2A+B &= -1 \end{aligned}$$

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

Método 1: Para determinar las constantes A y B multiplicamos ambos miembros por $(x-3)(2x+5)$ para obtener

$$\begin{aligned} 6-x &= A(2x+5) + B(x-3) \\ 6-x &= 5A-3B+(2A+B)x \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 5A-3B &= 6 \\ 2A+B &= -1 \end{aligned}$$

Así, $A = \frac{3}{11}$ y $B = -\frac{17}{11}$.

Método 2: Le damos a x valores apropiados. Por ejemplo, haciendo $x = 3$ y $x = -\frac{5}{2}$, se tiene inmediatamente $A = \frac{3}{11}$ y $B = -\frac{17}{11}$.

Método 2: Le damos a x valores apropiados. Por ejemplo, haciendo $x = 3$ y $x = -\frac{5}{2}$, se tiene inmediatamente $A = \frac{3}{11}$ y $B = -\frac{17}{11}$.

Finalmente,

Método 2: Le damos a x valores apropiados. Por ejemplo, haciendo $x = 3$ y $x = -\frac{5}{2}$, se tiene inmediatamente $A = \frac{3}{11}$ y $B = -\frac{17}{11}$. Finalmente,

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx = \int \frac{\frac{3}{11}}{x-3}\,dx + \int \frac{-\frac{17}{11}}{2x+5}\,dx$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Método 2: Le damos a x valores apropiados. Por ejemplo, haciendo $x = 3$ y $x = -\frac{5}{2}$, se tiene inmediatamente $A = \frac{3}{11}$ y $B = -\frac{17}{11}$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx &= \int \frac{\frac{3}{11}}{x-3}\,dx + \int \frac{-\frac{17}{11}}{2x+5}\,dx \\
\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx &= \frac{3}{11}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{17}{11}\int \frac{1}{2x+5}\,dx
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Método 2: Le damos a x valores apropiados. Por ejemplo, haciendo $x = 3$ y $x = -\frac{5}{2}$, se tiene inmediatamente $A = \frac{3}{11}$ y $B = -\frac{17}{11}$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx &= \int \frac{\frac{3}{11}}{x-3}\,dx + \int \frac{-\frac{17}{11}}{2x+5}\,dx \\
\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx &= \frac{3}{11}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{17}{11}\int \frac{1}{2x+5}\,dx \\
\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\,dx &= \frac{3}{11}\ln|x-3| - \frac{17}{22}\ln|2x+5| + C
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución:

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución: Por fracciones parciales

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Eliminando denominadores:

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Eliminando denominadores:

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Eliminando denominadores:

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$1 = (A+B)x^2 + (B+C-A)x + A + C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución: Por fracciones parciales

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Eliminando denominadores:

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$
$$1 = (A+B)x^2 + (B+C-A)x + A + C$$

Luego,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Por fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ \frac{1}{x^3+1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Eliminando denominadores:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \\ 1 &= (A+B)x^2 + (B+C-A)x + A + C \end{aligned}$$

Luego,

$$A + B = 0$$

Resolución: Por fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ \frac{1}{x^3+1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Eliminando denominadores:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \\ 1 &= (A+B)x^2 + (B+C-A)x + A + C \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ B + C - A &= 0 \end{aligned}$$

Resolución: Por fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3+1} &= \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ \frac{1}{x^3+1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Eliminando denominadores:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \\ 1 &= (A+B)x^2 + (B+C-A)x + A + C \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ B + C - A &= 0 \\ A + C &= 1 \end{aligned}$$

Así, $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ y $C = \frac{2}{3}$.

Así, $A = \dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{1}{3}$ y $C = \dfrac{2}{3}$.

Antes de continuar con la solución, la fracción simple $\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$, esto es

$$\frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{m(2x-1)+n}{x^2-x+1}$$

Así, $A = \dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{1}{3}$ y $C = \dfrac{2}{3}$.

Antes de continuar con la solución, la fracción simple $\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$, esto es

$$\frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{m(2x-1)+n}{x^2-x+1}$$

Dando valores adecuados se obtiene $m = -\dfrac{1}{6}$ y $n = \dfrac{1}{2}$.

Finalmente,

Finalmente,

$$I = \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{6}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,dx$$

Finalmente,

$$I = \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{6}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,dx$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Finalmente,

$$I = \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{6}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\,dx$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$I = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{\cos x}\,dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución:

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución:

$$I = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

Resolución:

$$I = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$I = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$

Resolución:

$$I = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$I = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$

Hacemos $u = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, se tiene $\cos x\,dx = 2u\,du$. Luego,

Resolución:

$$I = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$I = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx$$

Hacemos $u = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, se tiene $\cos x\,dx = 2u\,du$. Luego,

$$I = \int \frac{2u^2}{1-u^4}\,du$$

Resolución:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{\cos^2 x}\,dx \\
I &= \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx
\end{aligned}
$$

Hacemos $u=\sqrt{\operatorname{sen} x}$, se tiene $\cos x\,dx = 2u\,du$. Luego,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{2u^2}{1-u^4}\,du \\
I &= \int \frac{2u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\,du
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{\cos^2 x}\,dx \\
I &= \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx
\end{aligned}
$$

Hacemos $u=\sqrt{\operatorname{sen} x}$, se tiene $\cos x\,dx = 2u\,du$. Luego,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{2u^2}{1-u^4}\,du \\
I &= \int \frac{2u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\,du \\
I &= \int \left[\frac{1}{1-u^2} - \frac{1}{1+u^2}\right]du
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Aplicando fracciones parciales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Aplicando fracciones parciales

$$
I = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1+u^2}\right]du
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Aplicando fracciones parciales

$$I = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1+u^2}\right] du$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,du - \int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Aplicando fracciones parciales

$$I = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1+u^2}\right] du$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,du - \int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$I = -\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| - \arctan u + C$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Aplicando fracciones parciales

$$I = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1+u^2}\right] du$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,du - \int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$I = -\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| - \arctan u + C$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \arctan u + C$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Aplicando fracciones parciales

$$I = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u} - \frac{1}{1+u^2}\right] du$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-u}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u}\,du - \int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$I = -\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| - \arctan u + C$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \arctan u + C$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}}\right| - \arctan\sqrt{\operatorname{sen} x} + C$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12

Integración de funciones racionales trigonométricas

Son integrales de la forma $\int R(\cos x, \operatorname{sen} x)\,dx$ donde R es una función racional en las variables $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

Integración de funciones racionales trigonométricas

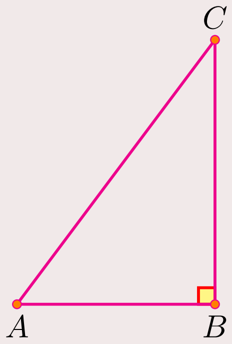
Son integrales de la forma $\int R(\cos x, \operatorname{sen} x)\,dx$ donde R es una función racional en las variables $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.
Utilizamos la sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (Sustitución trigonométrica universal) de donde

Integración de funciones racionales trigonométricas

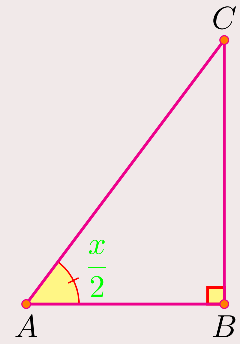
Son integrales de la forma $\int R(\cos x, \operatorname{sen} x)\,dx$ donde R es una función racional en las variables $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.
Utilizamos la sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (Sustitución trigonométrica universal) de donde

$$x = 2\arctan z, \quad dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz$$

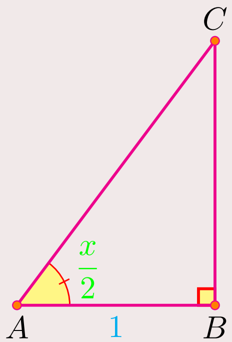
Integración de funciones racionales trigonométricas



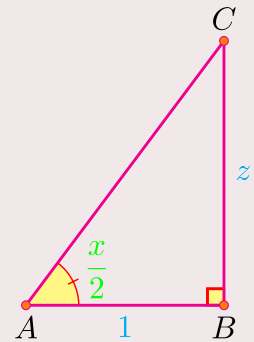
Integración de funciones racionales trigonométricas



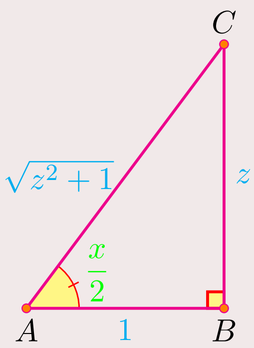
Integración de funciones racionales trigonométricas



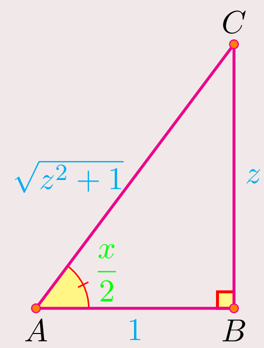
Integración de funciones racionales trigonométricas



Integración de funciones racionales trigonométricas

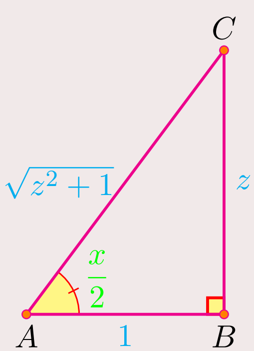


Integración de funciones racionales trigonométricas



$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Integración de funciones racionales trigonométricas



$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$
$$\operatorname{sen} x = \frac{2z}{1+z^2}$$

Integración de funciones racionales trigonométricas

Por lo tanto,

$$\int R(\cos x, \operatorname{sen} x)\, dx = \int R\left[\frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1+z^2}\right] \frac{2}{1+z^2}\, dz$$

Integración de funciones racionales trigonométricas

Por lo tanto,

$$\int R(\cos x, \operatorname{sen} x)\, dx = \int R\left[\frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1+z^2}\right] \frac{2}{1+z^2}\, dz$$

donde la integral del segundo miembro es la integral de una función racional en la variable z.

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \frac{1}{3+\cos^2 x}\, dx$$

Resolución:

Resolución:

$$I = \int \frac{2}{6+2\cos^2 x}\, dx$$

Resolución:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{6+2\cos^2 x}\,dx \\ I &= \int \frac{2}{6+1+\cos 2x}\,dx \end{aligned}$$

Resolución:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{6+2\cos^2 x}\,dx \\ I &= \int \frac{2}{6+1+\cos 2x}\,dx \\ I &= \int \frac{2}{7+\cos 2x}\,dx \end{aligned}$$

Resolución:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2}{6+2\cos^2 x}\,dx \\ I &= \int \frac{2}{6+1+\cos 2x}\,dx \\ I &= \int \frac{2}{7+\cos 2x}\,dx \end{aligned}$$

Haciendo $y = 2x$, se tiene

$$I = \int \frac{1}{7+\cos y}\,dy$$

Haciendo la sustitución $z = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$

Haciendo la sustitución $z = \tan\left(\dfrac{y}{2}\right)$

$$I = \int \frac{1}{7 + \dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}\,dz$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Haciendo la sustitución $z = \tan\left(\dfrac{y}{2}\right)$

$$I = \int \frac{1}{7 + \dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}\,dz$$

$$I = \int \frac{1}{4+3z^2}\,dz$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Haciendo la sustitución $z = \tan\left(\dfrac{y}{2}\right)$

$$I = \int \frac{1}{7 + \dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}\,dz$$

$$I = \int \frac{1}{4+3z^2}\,dz$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{2^2 + (\sqrt{3}z)^2}\,dz$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Haciendo la sustitución $z = \tan\left(\dfrac{y}{2}\right)$

$$I = \int \frac{1}{7 + \dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}\,dz$$

$$I = \int \frac{1}{4+3z^2}\,dz$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{2^2 + (\sqrt{3}z)^2}\,dz$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right) + C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Haciendo la sustitución $z = \tan\left(\dfrac{y}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{7 + \dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}\, dz \\
I &= \int \frac{1}{4+3z^2}\, dz \\
I &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{2^2 + (\sqrt{3}z)^2}\, dz \\
I &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}z}{2}\right) + C \\
I &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \frac{2+3\cos x}{\cos x + 4\cos^2 x}\, dx$$

Resolución:

$$I = \int \frac{2+3\cos x}{\cos x(1+4\cos x)}\, dx$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2+3\cos x}{\cos x(1+4\cos x)}\, dx \\
I &= \int \left(\frac{2}{\cos x} - \frac{5}{1+4\cos x}\right) dx
\end{aligned}$$

Resolución:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2+3\cos x}{\cos x(1+4\cos x)}\,dx \\ I &= \int \left(\frac{2}{\cos x} - \frac{5}{1+4\cos x}\right)dx \\ I &= 2\int \sec x\,dx - \int \frac{5}{1+4\cos x}\,dx \end{aligned}$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2+3\cos x}{\cos x(1+4\cos x)}\,dx \\ I &= \int \left(\frac{2}{\cos x} - \frac{5}{1+4\cos x}\right)dx \\ I &= 2\int \sec x\,dx - \int \frac{5}{1+4\cos x}\,dx \\ I &= 2\ln|\sec x+\tan x| - \underbrace{\int \frac{5}{1+4\cos x}\,dx}_{I_1} \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Para evaluar I_1, utilizamos la sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Para evaluar I_1, utilizamos la sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$I_1 = \int \frac{5}{1+4\cdot\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} \cdot \frac{2}{1+z^2}\,dz$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Para evaluar I_1, utilizamos la sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$I_1 = \int \frac{5}{1 + 4 \cdot \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}} \cdot \frac{2}{1 + z^2}\, dz$$

$$I_1 = \frac{10}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{5 - 3z^2}\, dz$$

Para evaluar I_1, utilizamos la sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$I_1 = \int \frac{5}{1 + 4 \cdot \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}} \cdot \frac{2}{1 + z^2}\, dz$$

$$I_1 = \frac{10}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{5 - 3z^2}\, dz$$

$$I_1 = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\sqrt{3}z + \sqrt{5}\right| \left|\sqrt{3}z - \sqrt{5}\right| + C$$

Para evaluar I_1, utilizamos la sustitución $z = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$I_1 = \int \frac{5}{1 + 4 \cdot \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}} \cdot \frac{2}{1 + z^2}\, dz$$

$$I_1 = \frac{10}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}}{5 - 3z^2}\, dz$$

$$I_1 = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{3}} \ln\left|\sqrt{3}z + \sqrt{5}\right| \left|\sqrt{3}z - \sqrt{5}\right| + C$$

$$I_1 = -\frac{5}{3} \ln\left|3\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 5\right| + C$$

Binomio diferencial

Son integrales de la forma

$$\int x^m (a + bx^n)^p\, dx \tag{1}$$

Binomio diferencial

Son integrales de la forma

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx \tag{1}$$

donde m, n y p son números racionales, a y b son constantes reales no nulas.

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Binomio diferencial

Son integrales de la forma

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx \tag{1}$$

donde m, n y p son números racionales, a y b son constantes reales no nulas.
La integral (1), con exponentes racionales puede expresarse mediante funciones elementales solamente en los casos siguientes,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Caso I

Si p es un número entero la sustitución es $x = z^r$, donde r es el m.c.m. de los denominadores de las fracciones m y n.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} \, dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución:

,

Resolución:

$$I = \int x(1 + x^{1/2})^{-1}\, dx$$

,

Resolución:

$$I = \int x(1 + x^{1/2})^{-1}\, dx$$

Identificando, $m = 1$, $n = \dfrac{1}{2}$, $p = -1$, luego $r = \text{mcm}(1, 2) = 2$,

Resolución:

$$I = \int x(1 + x^{1/2})^{-1}\, dx$$

Identificando, $m = 1$, $n = \dfrac{1}{2}$, $p = -1$, luego $r = \text{mcm}(1, 2) = 2$,
hacemos la sustitución $x = z^2$, $dx = 2z\, dz$

Resolución:

$$I = \int x(1+x^{1/2})^{-1}\,dx$$

Identificando, $m=1$, $n=\dfrac{1}{2}$, $p=-1$, luego $r=\text{mcm}(1,2)=2$, hacemos la sustitución $x=z^2$, $dx=2z\,dz$

$$I = \int z^2(1+z)^{-1}(2z\,dz)$$

Resolución:

$$I = \int x(1+x^{1/2})^{-1}\,dx$$

Identificando, $m=1$, $n=\dfrac{1}{2}$, $p=-1$, luego $r=\text{mcm}(1,2)=2$, hacemos la sustitución $x=z^2$, $dx=2z\,dz$

$$\begin{aligned} I &= \int z^2(1+z)^{-1}(2z\,dz) \\ I &= 2\int z^3(1+z)^{-1}\,dz \end{aligned}$$

Resolución:

$$I = \int x(1+x^{1/2})^{-1}\,dx$$

Identificando, $m=1$, $n=\dfrac{1}{2}$, $p=-1$, luego $r=\text{mcm}(1,2)=2$, hacemos la sustitución $x=z^2$, $dx=2z\,dz$

$$\begin{aligned} I &= \int z^2(1+z)^{-1}(2z\,dz) \\ I &= 2\int z^3(1+z)^{-1}\,dz \\ I &= 2\int \left(z^2-z+1-\frac{1}{z+1}\right)\,dz \end{aligned}$$

$$I = 2\int (z^2-z+1)\,dz - 2\int \frac{1}{z+1}\,dz$$

$$I = 2\int (z^2 - z + 1)\,dz - 2\int \frac{1}{z+1}\,dz$$

$$I = 2(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + z) - 2\ln|z+1| + C$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

$$I = 2\int (z^2 - z + 1)\,dz - 2\int \frac{1}{z+1}\,dz$$

$$I = 2(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^2 + z) - 2\ln|z+1| + C$$

$$I = \frac{2}{3}x^{3/2} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln\left(x^{1/2} + 1\right) + C$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Caso II

Si $\dfrac{m+1}{n}$ es un número entero, la sustitución es $a + bx^n = z^s$, donde s es el denominador de la fracción p.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int x^{1/3}\sqrt{1 + x^{2/3}}\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución:

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución:

$$I = \int x^{1/3}(1+x^{2/3})^{1/2}\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución:

$$I = \int x^{1/3}(1+x^{2/3})^{1/2}\,dx$$

Identificando, $m = \dfrac{1}{3}$, $n = \dfrac{2}{3}$, $p = \dfrac{1}{2}$,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución:

$$I = \int x^{1/3}(1+x^{2/3})^{1/2}\,dx$$

Identificando, $m = \dfrac{1}{3}$, $n = \dfrac{2}{3}$, $p = \dfrac{1}{2}$, luego $\dfrac{m+1}{n} = 2$, hacemos la sustitución $1 + x^{2/3} = z^2$, se tiene

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución:

$$I = \int x^{1/3}(1+x^{2/3})^{1/2}\,dx$$

Identificando, $m = \dfrac{1}{3}$, $n = \dfrac{2}{3}$, $p = \dfrac{1}{2}$, luego $\dfrac{m+1}{n} = 2$, hacemos la sustitución $1 + x^{2/3} = z^2$, se tiene

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}\,dx = 2z\,dz$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Resolución:

$$I = \int x^{1/3}(1+x^{2/3})^{1/2}\,dx$$

Identificando, $m = \dfrac{1}{3}$, $n = \dfrac{2}{3}$, $p = \dfrac{1}{2}$, luego $\dfrac{m+1}{n} = 2$, hacemos la sustitución $1 + x^{2/3} = z^2$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x^{-1/3}\,dx &= 2z\,dz \\ x^{-1/3}\,dx &= 3z\,dz \end{aligned}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Finalmente,

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Finalmente,

$$I = \int x^{2/3}(1+x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}\,dx$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
I &= \int x^{2/3}(1+x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}\,dx \\
I &= \int (z^2-1)z(3z\,dz)
\end{aligned}
$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
I &= \int x^{2/3}(1+x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}\,dx \\
I &= \int (z^2-1)z(3z\,dz) \\
I &= 3\int (z^4-z^2)\,dz
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
I &= \int x^{2/3}(1+x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}\,dx \\
I &= \int (z^2-1)z(3z\,dz) \\
I &= 3\int (z^4-z^2)\,dz \\
I &= \frac{3}{5}z^5 - z^3 + C
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
I &= \int x^{2/3}(1+x^{2/3})^{1/2}x^{-1/3}\,dx \\
I &= \int (z^2-1)z(3z\,dz) \\
I &= 3\int (z^4-z^2)\,dz \\
I &= \frac{3}{5}z^5 - z^3 + C \\
I &= \frac{3}{5}(1+x^{2/3})^{5/2} - (1+x^{2/3})^{3/2} + C
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Caso III

Si $\dfrac{m+1}{n}+p$ es un número entero, la sustitución es $a+bx^n=z^s x^n$, donde s es el denominador de la fracción p.

Ejemplo

Evalúe

$$I=\int\frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x}\,dx$$

Resolución:

Resolución: Haciendo $e^x=t$, se tiene $e^x\,dx=dt$

Resolución: Haciendo $e^x = t$, se tiene $e^x\,dx = dt$

$$I = \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,dt$$

Resolución: Haciendo $e^x = t$, se tiene $e^x\,dx = dt$

$$I = \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,dt$$

$$I = \int t^{-2}(1+t^2)^{1/2}\,dt$$

Identificando, $m = -2$, $n = 2$, $p = \dfrac{1}{2}$,

Resolución: Haciendo $e^x = t$, se tiene $e^x\,dx = dt$

$$I = \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,dt$$

$$I = \int t^{-2}(1+t^2)^{1/2}\,dt$$

Identificando, $m = -2$, $n = 2$, $p = \dfrac{1}{2}$, luego $\dfrac{m+1}{n} + p = 0$, hacemos la sustitución $1 + t^2 = z^2 t^2$, se tiene

Resolución: Haciendo $e^x = t$, se tiene $e^x\,dx = dt$

$$I = \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,dt$$

$$I = \int t^{-2}(1+t^2)^{1/2}\,dt$$

Identificando, $m = -2$, $n = 2$, $p = \dfrac{1}{2}$, luego $\dfrac{m+1}{n} + p = 0$, hacemos la sustitución $1 + t^2 = z^2 t^2$, se tiene

$$t^{-2} + 1 = z^2$$

Resolución: Haciendo $e^x = t$, se tiene $e^x\,dx = dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,dt \\ I &= \int t^{-2}(1+t^2)^{1/2}\,dt \end{aligned}$$

Identificando, $m = -2$, $n = 2$, $p = \dfrac{1}{2}$, luego $\dfrac{m+1}{n} + p = 0$, hacemos la sustitución $1 + t^2 = z^2 t^2$, se tiene

$$\begin{aligned} t^{-2} + 1 &= z^2 \\ t^{-3}\,dt &= -z\,dz \end{aligned}$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Luego,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Luego,

$$I = \int t(1+t^{-2})^{1/2} t(t^{-3}\,dt)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int t(1+t^{-2})^{1/2} t(t^{-3}\,dt) \\ I &= \int \frac{(1+t^{-2})^{1/2}}{t^{-2}}(t^{-3}\,dt) \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int t(1+t^{-2})^{1/2} t(t^{-3}\,dt) \\ I &= \int \frac{(1+t^{-2})^{1/2}}{t^{-2}}(t^{-3}\,dt) \\ I &= \int \frac{z}{z^2-1}(-z\,dz) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int t(1+t^{-2})^{1/2} t(t^{-3}\,dt) \\ I &= \int \frac{(1+t^{-2})^{1/2}}{t^{-2}}(t^{-3}\,dt) \\ I &= \int \frac{z}{z^2-1}(-z\,dz) \\ I &= -\int \frac{z^2}{z^2-1}\,dz \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int t(1+t^{-2})^{1/2} t(t^{-3}\,dt) \\ I &= \int \frac{(1+t^{-2})^{1/2}}{t^{-2}}(t^{-3}\,dt) \\ I &= \int \frac{z}{z^2-1}(-z\,dz) \\ I &= -\int \frac{z^2}{z^2-1}\,dz \\ I &= -\int \frac{z^2-1+1}{z^2-1}\,dz \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int t(1+t^{-2})^{1/2} t(t^{-3}\,dt) \\ I &= \int \frac{(1+t^{-2})^{1/2}}{t^{-2}}(t^{-3}\,dt) \\ I &= \int \frac{z}{z^2-1}(-z\,dz) \\ I &= -\int \frac{z^2}{z^2-1}\,dz \\ I &= -\int \frac{z^2-1+1}{z^2-1}\,dz \\ I &= -\int \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}\right)\,dz \end{aligned}$$

Finalmente,

Finalmente,

$$I = -\int dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1}\,dz$$

Finalmente,

$$I = -\int dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1}\,dz$$

Finalmente,

$$I = -\int dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1}\,dz$$

$$I = -z - \frac{1}{2}\ln|z-1| + \frac{1}{2}\ln|z+1| + C$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} I &= -\int dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1}\,dz \\ I &= -z - \frac{1}{2}\ln|z-1| + \frac{1}{2}\ln|z+1| + C \\ I &= -z + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| + C \end{aligned}$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Finalmente,

$$\begin{aligned} I &= -\int dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1}\,dz \\ I &= -z - \frac{1}{2}\ln|z-1| + \frac{1}{2}\ln|z+1| + C \\ I &= -z + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| + C \\ I &= -(t^{-2}+1)^{1/2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(t^{-2}+1)^{1/2}+1}{(t^{-2}+1)^{1/2}-1}\right| + C \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Finalmente,

$$\begin{aligned} I &= -\int dz - \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{1}{z+1}\,dz \\ I &= -z - \frac{1}{2}\ln|z-1| + \frac{1}{2}\ln|z+1| + C \\ I &= -z + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| + C \\ I &= -(t^{-2}+1)^{1/2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(t^{-2}+1)^{1/2}+1}{(t^{-2}+1)^{1/2}-1}\right| + C \\ I &= -\sqrt{(e^{-2x}+1)} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{e^{-2x}+1}+1}{\sqrt{e^{-2x}+1}-1}\right| + C \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejemplo

Evalúe

$$I = \int \frac{3}{\operatorname{sen} x \cos x \sqrt[3]{1+\tan^3 x}}\,dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución:

Resolución: Haciendo $t = \tan x$, se tiene $dt = \sec^2 x\, dx$

Resolución: Haciendo $t = \tan x$, se tiene $dt = \sec^2 x\, dx$

$$I = \int \frac{3}{t\sqrt[3]{1+t^3}}\, dt$$

Resolución: Haciendo $t = \tan x$, se tiene $dt = \sec^2 x\, dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{t\sqrt[3]{1+t^3}}\, dt \\ I &= \int 3t^{-1}(1+t^3)^{-1/3}\, dt \end{aligned}$$

Resolución: Haciendo $t = \tan x$, se tiene $dt = \sec^2 x\, dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{t\sqrt[3]{1+t^3}}\, dt \\ I &= \int 3t^{-1}(1+t^3)^{-1/3}\, dt \end{aligned}$$

Identificando, $m = -1$, $n = 3$, $p = -\dfrac{1}{3}$,

Resolución: Haciendo $t = \tan x$, se tiene $dt = \sec^2 x\, dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{t\sqrt[3]{1+t^3}}\, dt \\ I &= \int 3t^{-1}(1+t^3)^{-1/3}\, dt \end{aligned}$$

Identificando, $m = -1$, $n = 3$, $p = -\dfrac{1}{3}$, luego $\dfrac{m+1}{n} = 0$, hacemos la sustitución $1 + t^3 = z^3$, se tiene $t^2\, dt = z^2\, dz$.

Luego,

Luego,

$$I = \int \frac{3}{(z^3-1)z} z^2\, dz$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{(z^3-1)z} z^2\, dz \\ I &= \int \frac{3z}{z^3-1}\, dz \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{(z^3-1)z} z^2\, dz \\ I &= \int \frac{3z}{z^3-1}\, dz \\ I &= 3\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{z-1} + \frac{\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}}{z^2+z+1} \right) dz \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{(z^3-1)z} z^2\, dz \\ I &= \int \frac{3z}{z^3-1}\, dz \\ I &= 3\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{z-1} + \frac{\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}}{z^2+z+1} \right) dz \\ I &= \int \left[\frac{1}{z-1} - \frac{z-1}{z^2+z+1} \right] dz \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{(z^3-1)z} z^2\, dz \\ I &= \int \frac{3z}{z^3-1}\, dz \\ I &= 3\int \left(\frac{\frac{1}{3}}{z-1} + \frac{\frac{1}{3}z+\frac{1}{3}}{z^2+z+1} \right) dz \\ I &= \int \left[\frac{1}{z-1} - \frac{z-1}{z^2+z+1} \right] dz \\ I &= \int \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2z+1-3}{z^2+z+1} \right] dz \end{aligned}$$

Luego,

Luego,

$$I = \int \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2z+1}{z^2+z+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \right] dz$$

Luego,

$$I = \int \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2z+1}{z^2+z+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \right] dz$$

$$I = \int \frac{1}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\int \frac{2z+1}{z^2+z+1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{3}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dz$$

Luego,

$$I = \int \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2z+1}{z^2+z+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \right] dz$$

$$I = \int \frac{1}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\int \frac{2z+1}{z^2+z+1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{3}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dz$$

$$I = \ln|z-1| - \frac{1}{2}\ln|z^2+z+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C$$

Luego,

$$\begin{aligned}
I &= \int \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2z+1}{z^2+z+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \right] dz \\
I &= \int \frac{1}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\int \frac{2z+1}{z^2+z+1}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{3}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dz \\
I &= \ln|z-1| - \frac{1}{2}\ln|z^2+z+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C \\
I &= \ln|z-1| - \frac{1}{2}\ln\left(z^2+z+1\right) + \sqrt{3}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Por lo tanto,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
I &= \ln\left|\sqrt[3]{1+t^3}-1\right| - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+t^3}^{\,2} + \sqrt[3]{1+t^3}+1\right) \\
&\qquad + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{1+t^3}+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
I &= \ln\left|\sqrt[3]{1+t^3}-1\right| - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+t^3}^{\,2} + \sqrt[3]{1+t^3}+1\right) \\
&\qquad + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{1+t^3}+1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
I &= \ln\left|\sqrt[3]{1+\tan^3(x)}-1\right| \\
&\qquad - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{1+\tan^3(x)}^{\,2} + \sqrt[3]{1+\tan^3(x)}+1\right) \\
&\qquad + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{1+\tan^3(x)}+1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejercicios

1. Evalúe las siguiente integrales

a) $\displaystyle\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+4)(2x-1)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx$

g) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4x^2-7x-12}{x(x+2)(x-3)}\,dx$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejercicios

2. Evalúe las siguiente integrales

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x+3}+x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x\sqrt{x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x-3\cos x}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan^x +3\tan x+2}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{\operatorname{senh}^2 x+\operatorname{senh}^4 x}\,dx$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12 Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales Integración de funciones racionales trigonométricas Eje

Ejercicios

3. Evalúe las siguiente integrales

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x-4\cos x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2+\cos x}\,dx$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 12

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto

David Caytuiro

Octubre 16, 2021

Contenido

Sesión 13

Áreas de regiones planas

Definición

Sea $\mathscr{R}$ la región acotada por la gráfica de la función continua f sobre $[a,b]$, con $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X,

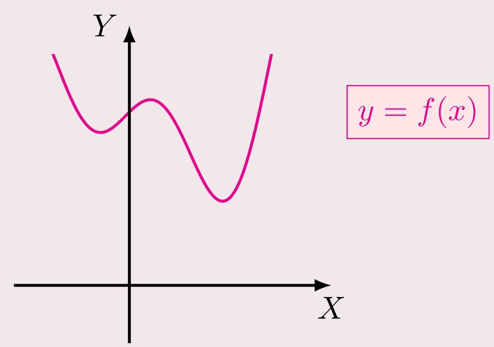
Áreas de regiones planas

Definición

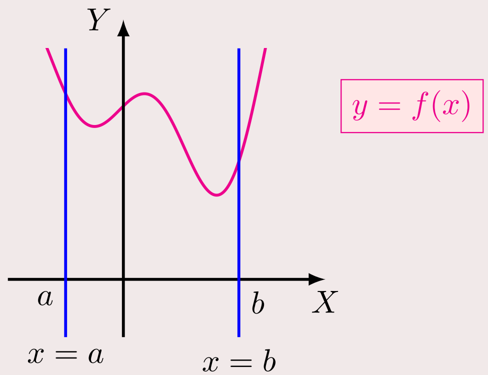
Sea $\mathscr{R}$ la región acotada por la gráfica de la función continua f sobre $[a,b]$, con $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X, se denomina área de la región $\mathscr{R}$ bajo la curva a

$$A(\mathscr{R}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

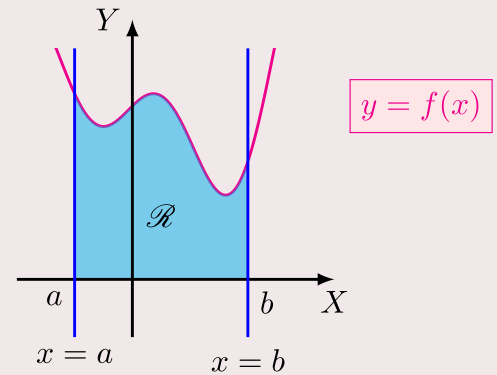
Áreas de regiones planas



Áreas de regiones planas



Áreas de regiones planas



Teorema

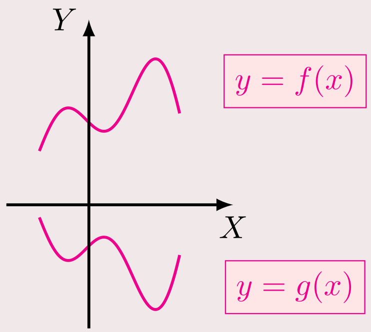
Si $\mathscr{R}$ es la región acotada por la gráfica de las funciones f y g con $f(x) \geq g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$,

Teorema

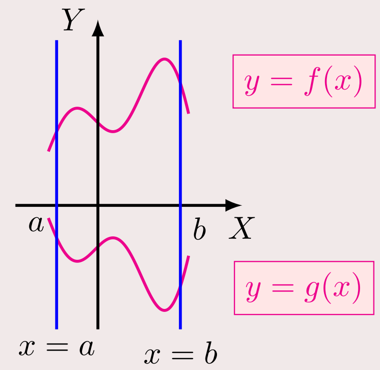
Si $\mathscr{R}$ es la región acotada por la gráfica de las funciones f y g con $f(x) \geq g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, entonces el área de la región $\mathscr{R}$ es

$$A(\mathscr{R}) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

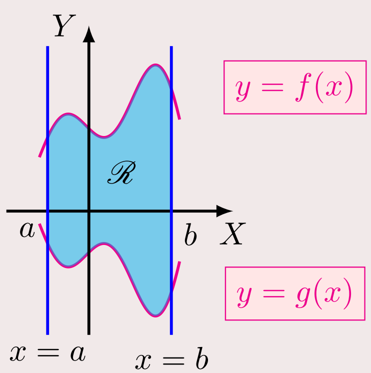
Áreas de regiones planas



Áreas de regiones planas



Áreas de regiones planas



Corolario

Si $\mathscr{R}$ es la región acotada por las curvas de ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$ tales que f y g son continuas sobre $[c, d]$ y $f(y) \geq g(y)$ para todo $y \in [c, d]$,

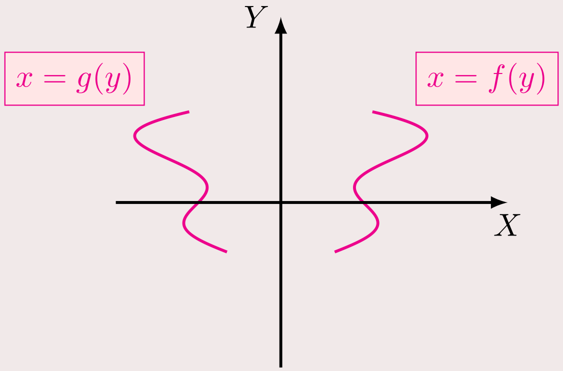
Corolario

Si $\mathscr{R}$ es la región acotada por las curvas de ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$ tales que f y g son continuas sobre $[c, d]$ y $f(y) \geq g(y)$ para todo $y \in [c, d]$, entonces el área de la región $\mathscr{R}$ determinada por las curvas y las rectas $y = c$ y $y = d$, es

$$A(\mathscr{R}) = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy$$

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

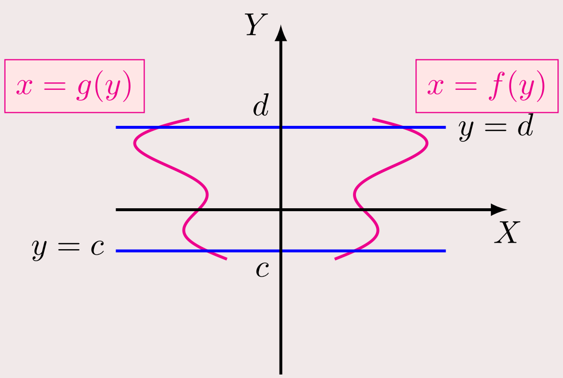
Áreas de regiones planas



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

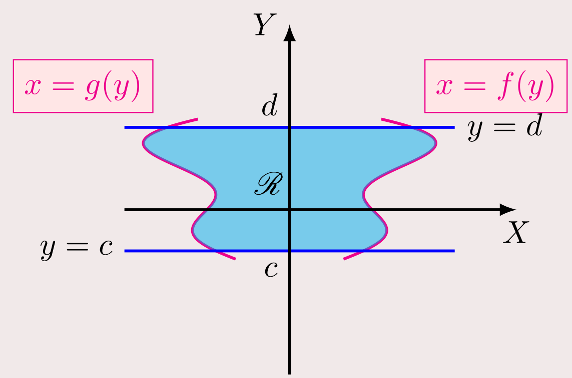
Áreas de regiones planas



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Áreas de regiones planas



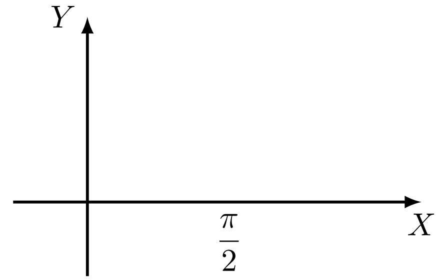
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$.

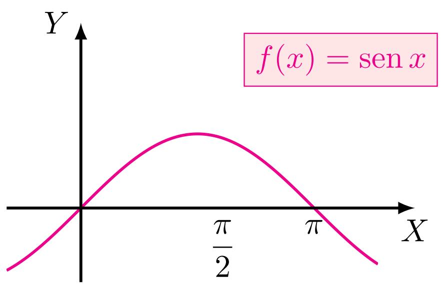
Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada

Luego,



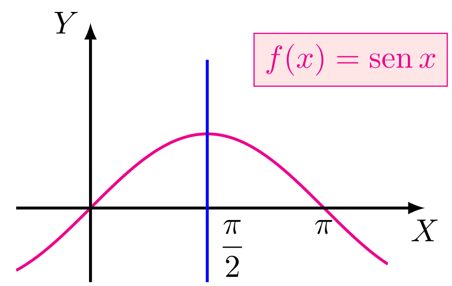
Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada

Luego,



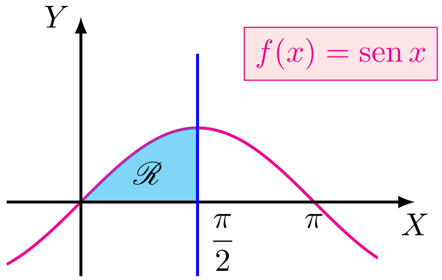
Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada

Luego,



Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada

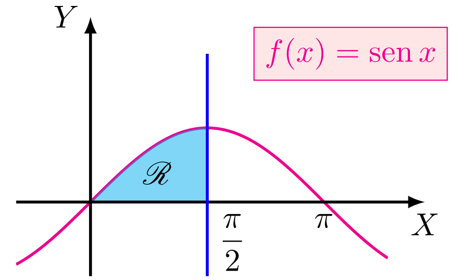
Luego,



Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada

Luego,

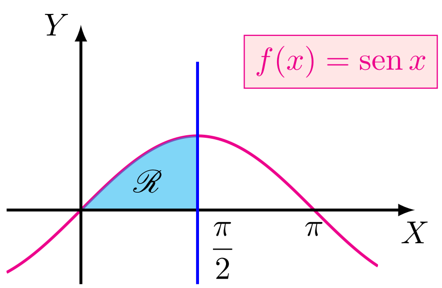
$$A(\mathscr{R}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx$$



Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada

Luego,

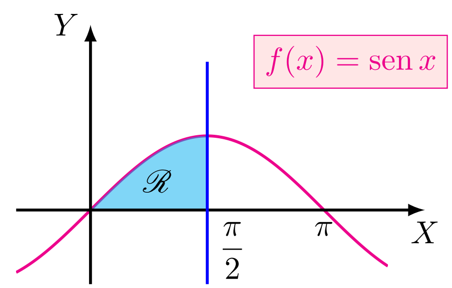
$$\begin{aligned} A(\mathscr{R}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx \\ A(\mathscr{R}) &= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$



Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada

Luego,

$$\begin{aligned} A(\mathscr{R}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \, dx \\ A(\mathscr{R}) &= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ A(\mathscr{R}) &= 1 \end{aligned}$$

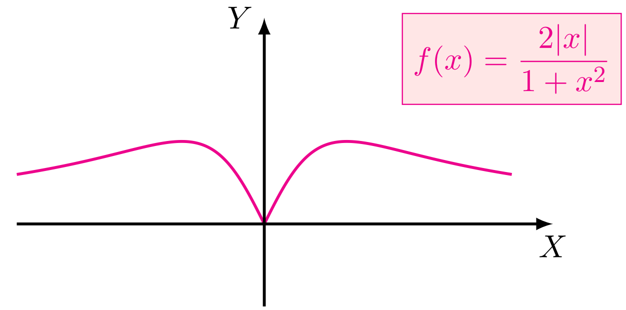


Ejemplo

Calcular el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \dfrac{2|x|}{1+x^2}$, el eje X y las rectas $x=-2$ y $x=1$.

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

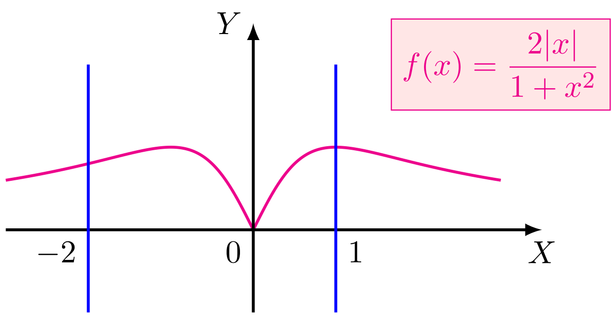
Resolución: El gráfico siguiente nos muestra las regiones determinadas



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

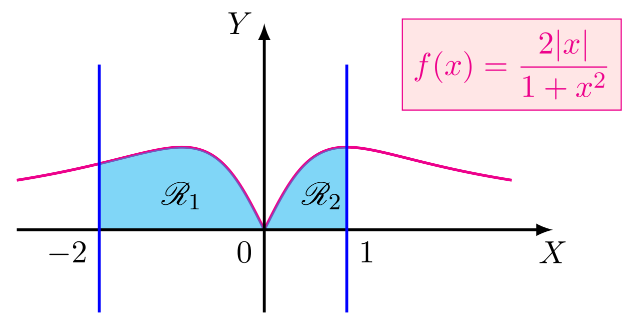
Resolución: El gráfico siguiente nos muestra las regiones determinadas



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Resolución: El gráfico siguiente nos muestra las regiones determinadas



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Luego,

$$A = A(\mathscr{R}_1) + A(\mathscr{R}_2)$$

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Luego,

$$A = A(\mathscr{R}_1) + A(\mathscr{R}_2)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Luego,

$$\begin{aligned} A &= A(\mathscr{R}_1) + A(\mathscr{R}_2) \\ A &= \int_{-2}^{0} \left(-\frac{2x}{1+x^2}\right) dx + \int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\, dx \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A &= A(\mathscr{R}_1) + A(\mathscr{R}_2) \\ A &= \int_{-2}^{0} \left(-\frac{2x}{1+x^2}\right) dx + \int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\, dx \\ A &= -\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-2}^{0} + \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{0}^{1} \end{aligned}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
A &= A(\mathscr{R}_1) + A(\mathscr{R}_2)\\
A &= \int_{-2}^{0}\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right)dx + \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx\\
A &= -\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-2}^{0} + \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1\\
A &= \ln 2 + \ln 5
\end{aligned}
$$

Sesión 13 | Áreas de regiones planas | Ejercicios | Referencias

Luego,

$$
\begin{aligned}
A &= A(\mathscr{R}_1) + A(\mathscr{R}_2)\\
A &= \int_{-2}^{0}\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right)dx + \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx\\
A &= -\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-2}^{0} + \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1\\
A &= \ln 2 + \ln 5\\
A &= \ln 10
\end{aligned}
$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 | Áreas de regiones planas | Ejercicios | Referencias

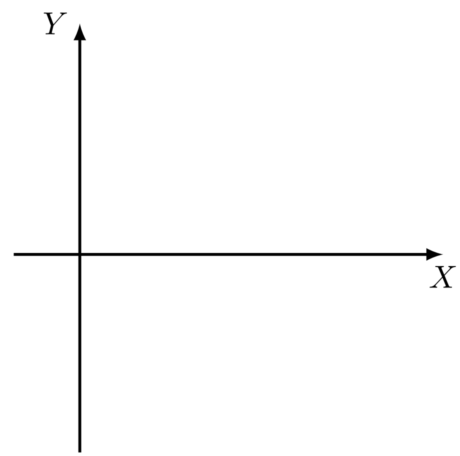
Ejemplo

Calcular el área de la región limitada por las curvas $x = y^2$ y $x - y = 2$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

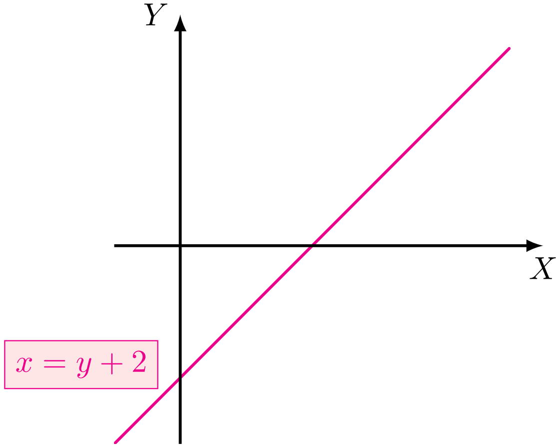
Sesión 13 | Áreas de regiones planas | Ejercicios | Referencias

Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada



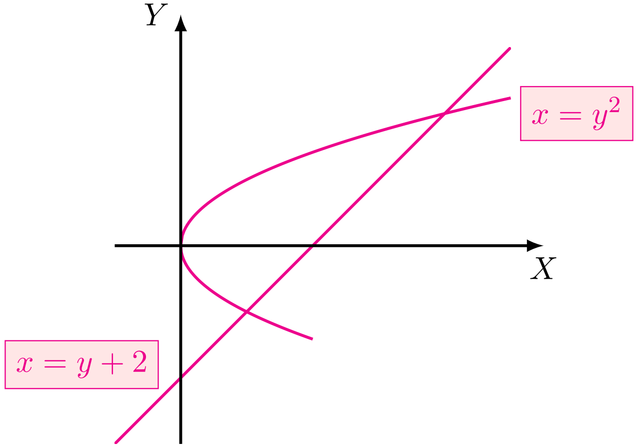
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada



Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

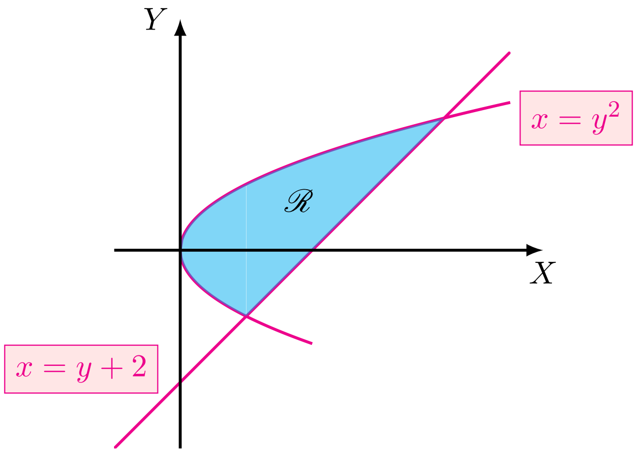
Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

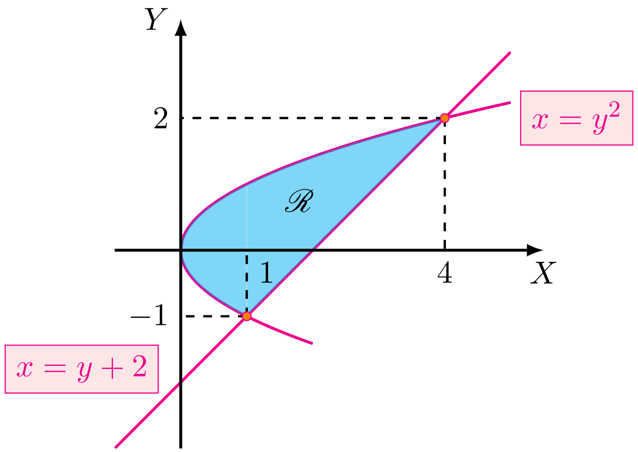
Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Utilizando el corolario, tenemos

$$A(\mathscr{R}) = \int_{-1}^{2} [f(y) - g(y)]\, dy$$

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Utilizando el corolario, tenemos

$$A(\mathscr{R}) = \int_{-1}^{2} [f(y) - g(y)]\, dy$$

$$A(\mathscr{R}) = \int_{-1}^{2} [(y+2) - y^2]\, dy$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Utilizando el corolario, tenemos

$$A(\mathscr{R}) = \int_{-1}^{2} [f(y) - g(y)]\, dy$$

$$A(\mathscr{R}) = \int_{-1}^{2} [(y+2) - y^2]\, dy$$

$$A(\mathscr{R}) = \left[\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Utilizando el corolario, tenemos

$$A(\mathscr{R}) = \int_{-1}^{2} [f(y) - g(y)]\, dy$$

$$A(\mathscr{R}) = \int_{-1}^{2} [(y+2) - y^2]\, dy$$

$$A(\mathscr{R}) = \left[\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{2}$$

$$A(\mathscr{R}) = \frac{9}{2}$$

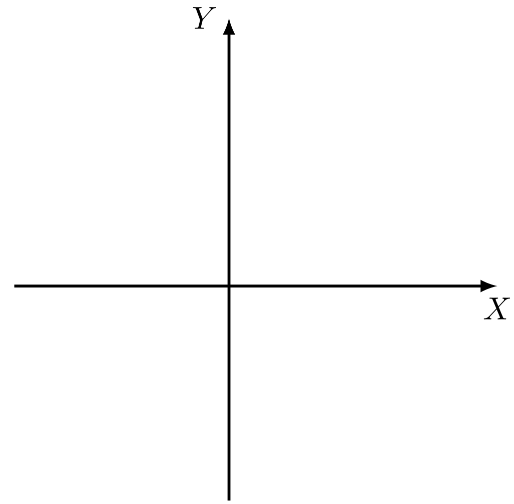
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Determinar el área encerrada entre la parábola $y = x^2$, el eje Y, y la recta tangente a esa parábola en el punto $(1, 1)$

Sesión 13 | Áreas de regiones planas | Ejercicios | Referencias

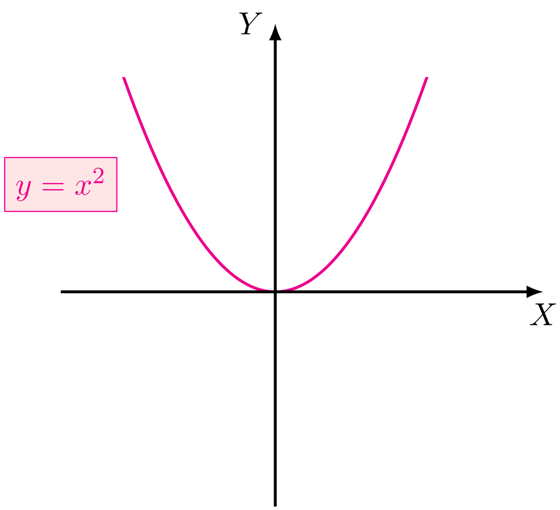
Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 | Áreas de regiones planas | Ejercicios | Referencias

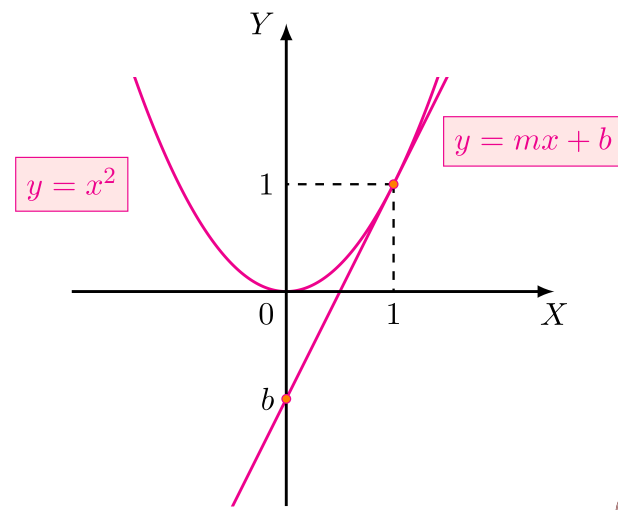
Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

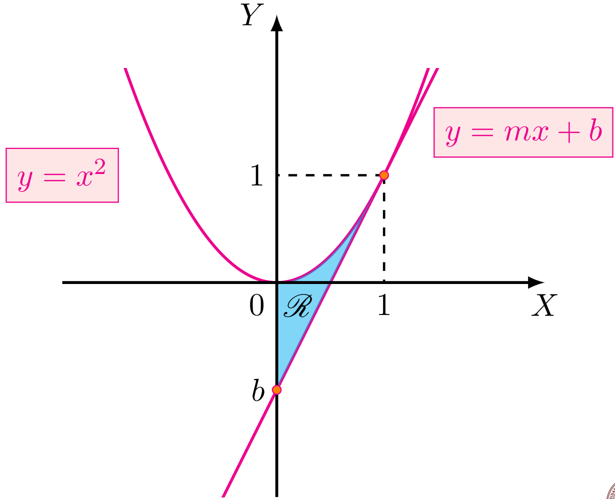
Sesión 13 | Áreas de regiones planas | Ejercicios | Referencias

Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: El gráfico siguiente nos muestra la región determinada



Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Sea $\mathscr{L} : y = mx + b$ la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$.

.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Sea $\mathscr{L} : y = mx + b$ la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$.
Luego, $m = D_x(x^2) = 2x$, en $x = 1$ la pendiente de la recta es $m = 2$

.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Sea $\mathscr{L} : y = mx + b$ la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$.
Luego, $m = D_x(x^2) = 2x$, en $x = 1$ la pendiente de la recta es $m = 2$ y como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta tangente, entonces satisface

.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sea $\mathscr{L}: y = mx + b$ la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$.
Luego, $m = D_x(x^2) = 2x$, en $x = 1$ la pendiente de la recta es $m = 2$ y como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta tangente, entonces satisface

$$1 = 2(1) + b$$

.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Sea $\mathscr{L}: y = mx + b$ la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$.
Luego, $m = D_x(x^2) = 2x$, en $x = 1$ la pendiente de la recta es $m = 2$ y como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta tangente, entonces satisface

$$\begin{aligned} 1 &= 2(1) + b \\ b &= -1 \end{aligned}$$

.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Sea $\mathscr{L}: y = mx + b$ la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$.
Luego, $m = D_x(x^2) = 2x$, en $x = 1$ la pendiente de la recta es $m = 2$ y como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta tangente, entonces satisface

$$\begin{aligned} 1 &= 2(1) + b \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la recta tangente $\mathscr{L} es$ $y = 2x - 1$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 Áreas de regiones planas Ejercicios Referencias

Sea $\mathscr{L}: y = mx + b$ la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$.
Luego, $m = D_x(x^2) = 2x$, en $x = 1$ la pendiente de la recta es $m = 2$ y como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta tangente, entonces satisface

$$\begin{aligned} 1 &= 2(1) + b \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la recta tangente $\mathscr{L} es$ $y = 2x - 1$. Finalmente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sea $\mathscr{L} : y = mx + b$ la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$.
Luego, $m = D_x(x^2) = 2x$, en $x = 1$ la pendiente de la recta es $m = 2$ y como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta tangente, entonces satisface

$$\begin{aligned} 1 &= 2(1) + b \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la recta tangente $\mathscr{L} es$ $y = 2x - 1$. Finalmente,

$$A(\mathscr{R}) = \int_0^1 [x^2 - (2x - 1)]\, dx$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 13 | Áreas de regiones planas | Ejercicios | Referencias

Sea $\mathscr{L} : y = mx + b$ la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$.
Luego, $m = D_x(x^2) = 2x$, en $x = 1$ la pendiente de la recta es $m = 2$ y como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta tangente, entonces satisface

$$\begin{aligned} 1 &= 2(1) + b \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la recta tangente $\mathscr{L} es$ $y = 2x - 1$. Finalmente,

$$\begin{aligned} A(\mathscr{R}) &= \int_0^1 [x^2 - (2x - 1)]\, dx \\ A(\mathscr{R}) &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^1 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 | Áreas de regiones planas | Ejercicios | Referencias

Sea $\mathscr{L} : y = mx + b$ la recta tangente a la parábola en el punto $(1, 1)$.
Luego, $m = D_x(x^2) = 2x$, en $x = 1$ la pendiente de la recta es $m = 2$ y como el punto $(1, 1)$ pertenece a la recta tangente, entonces satisface

$$\begin{aligned} 1 &= 2(1) + b \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la recta tangente $\mathscr{L} es$ $y = 2x - 1$. Finalmente,

$$\begin{aligned} A(\mathscr{R}) &= \int_0^1 [x^2 - (2x - 1)]\, dx \\ A(\mathscr{R}) &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^1 \\ A(\mathscr{R}) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 13 | Áreas de regiones planas | Ejercicios | Referencias

Sesión 13

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejercicios

1. Dibuje las regiones encerradas por cada una de las curvas dadas. Decida si integra respecto a x o y. Trace un rectángulo representativo de aproximación e indique su altura y su ancho. Luego determine el área de la región.
   a) $y = e^x$, $y = x^2 - 1$, $x = -1$, $x = 1$
   b) $y = \operatorname{sen} x$, $y = x$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \pi$
   c) $y = x^2 - 2x$, $y = x + 4$
   d) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 2$
   e) $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$
   f) $4x + y^2 = 12$, $x = y$

Ejercicios

2. Evalúe cada una de las siguientes integrales e interpretarla como el área de una región. Dibuje la región.
   a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\operatorname{sen} x - \cos 2x| \, dx$
   b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |3^x - 2^x| \, , dx$
3. Trace la región en el plano XY definida por las desigualdades $x - 2y^2 \geq 0$, $1 - x - |y| \geq 0$ y determine su área.

Ejercicios

4. La curva cuya ecuación es $y^2 = x^2(x + 3)$ se denomina curva cúbica de Tschirnhausen. Si trazamos la gráfica de esta curva, podremos ver que una parte de ella forma un bucle. Encuentre el área definida por este bucle.
5. Determine el número b tal que la recta $y = b$ divide a la región delimitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de igual área.
6. Calcule los valores de c tales que el área de la región delimitada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ es 576.

Sesión 13

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Michael Spivak
  Calculus. 3ra edición.
  Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

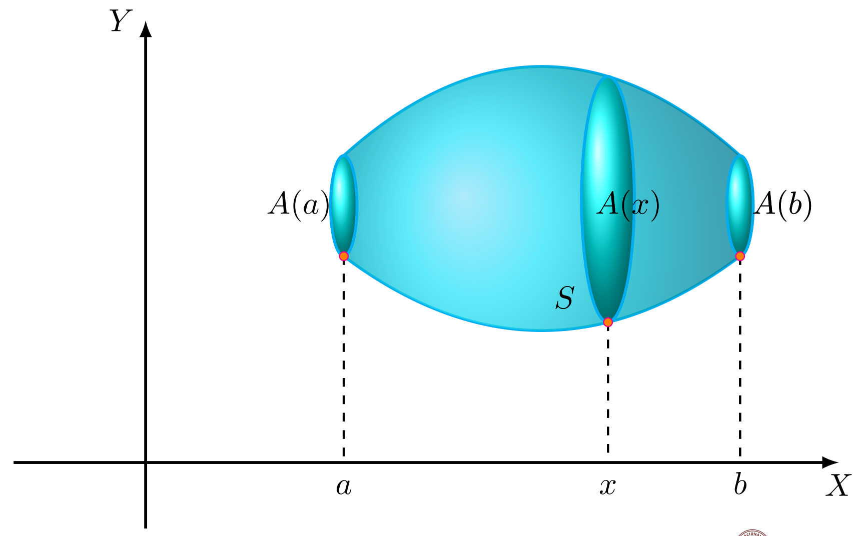
Octubre 16, 2021

Contenido

Sesión 14

Definición

Sea S un sólido limitado del espació. Denotemos con $\mathscr{R}(x)$ la sección plana del sólido S determinado al trazar un plano perpendicular a un eje, por ejemplo al eje X en el punto x



De la figura. suponemos que el sólido S está enteramente situado entre los planos $x = a$ y $x = b$ tal que

$$S = \bigcup_{x\in[a,b]} \mathscr{R}(x), \quad \text{donde } \mathscr{R}(x) \text{ tiene área conocida}$$

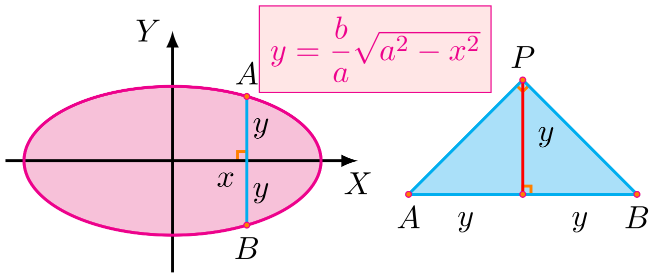
Si el área $A(x)$ de la sección transversal $\mathscr{R}(x)$ varia continuamente con respecto a x, podemos hallar el volumen del sólido mediante la integración de dicha función entre a y b.

$$V(S) = \int_a^b A(x)\,dx$$

Ejemplo

La base de un solido es la región limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Hallar el volumen del solido, suponiendo que las secciones transversales son triángulos rectángulos isósceles cuya hipotenusa es perpendicular al eje X.

Resolución: En la figura se muestran la base del sólido y las secciones transversales perpendiculares al eje x.



$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{(2y)y}{2} \\ A(x) &= y^2 \\ A(x) &= \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) \end{aligned}$$

Ejercicio 8

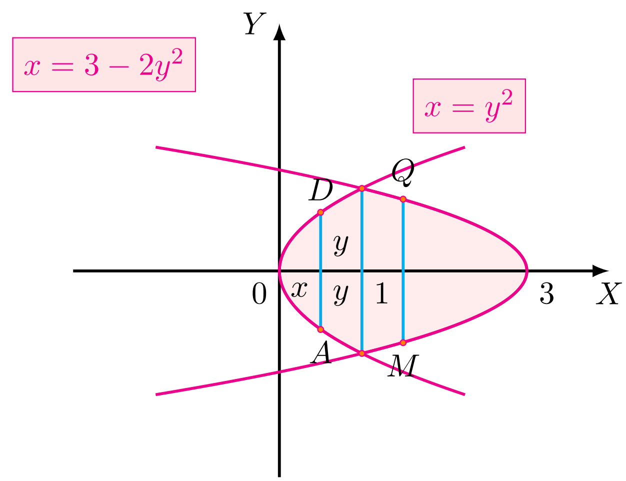
Luego,

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^{a} A(x)\,dx \\ V &= \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx \\ V &= 2\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a \\ V &= \frac{4}{3}ab^2 \end{aligned}$$

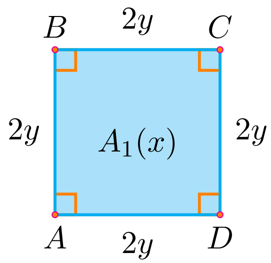
Ejemplo

La base de un solido es la región entre las parábolas $x = y^2$ y $x = 3 - 2y^2$. Halle el volumen del solido sabiendo que las secciones transversales perpendiculares al eje X son regiones cuadradas.

Resolución: Las dos parabolas se cortan en $x = 1$,



Entre $x = 0$ y $x = 1$, la sección transversal al eje X tiene por área

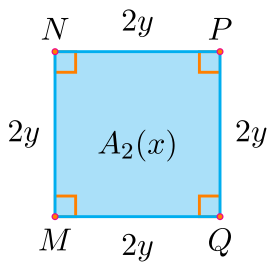


$$\begin{aligned} A_1(x) &= (2y)^2 \\ A_1(x) &= 4y^2 \\ A_1(x) &= 4x \end{aligned}$$

El volumen del sólido entre $x = 0$ y $x = 1$ es

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^1 A_1(x)\,dx \\ V_1 &= \int_0^1 4x\,dx \\ V_1 &= [2x^2]_0^1 \\ V_1 &= 2 \end{aligned}$$

También entre $x = 1$ y $x = 3$, la sección transversal de coordenadas x tiene por área



$$\begin{aligned} A_2(x) &= (2y)^2 \\ A_2(x) &= 4y^2 \\ A_2(x) &= 2(3-x) \end{aligned}$$

El volumen del solido entre $x = 1$ y $x = 3$ es

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_1^3 A_2(x)\,dx \\ V_2 &= \int_1^3 2(3-x)\,dx \\ V_2 &= [6x - x^2]_1^3 \\ V_2 &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen del solido es

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ V &= 2 + 4 \\ V &= 6 \end{aligned}$$

Sesión 14

Ejercicios

1. La base de S es una región elíptica limitada por la curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. Las secciones transversales son perpendiculares al eje X y son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa en la base.
2. La base de S es la región triangular con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Las secciones transversales perpendiculares al eje Y son triángulos equiláteros.
3. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 1 - x^2$ y el eje X. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadradas.

Ejercicios

4. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base son triángulos isósceles de altura h y el lado desigual en la base.
   a) Plantee una integral para el volumen de S
   b) De acuerdo con la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen de S.
5. Calcule el volumen común a dos esferas, cada una de radio r, si el centro de cada esfera está sobre la superficie de la otra esfera.

Sesión 14

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Octubre 31, 2021

Contenido

Sesión 15

Definición

Si una región $\mathscr{R}$ del plano gira alrededor de una recta $\mathscr{L}$, que no interseca a la región (puede coincidir con un contorno de ella o ser tangente), se obtiene un solido llamado solido de revolución generado por $\mathscr{R}$. A la recta se le conoce como eje de giro.

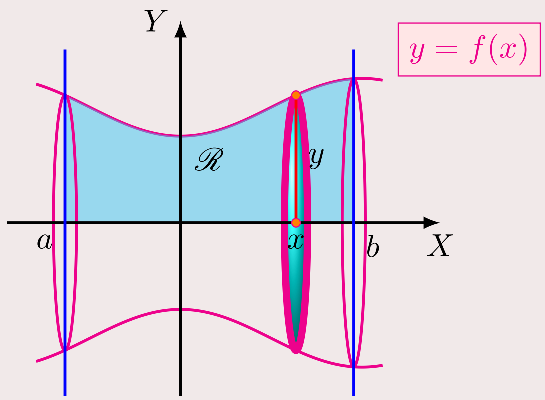
Método del disco

Teorema

Si la región $\mathscr{R}$ acotada por la gráfica de la función continua $f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ ($f(x) < 0$) las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X, gira alrededor del eje X se obtiene un solido de revolución compacto cuyo volumen es

$$V(S) = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Método del disco

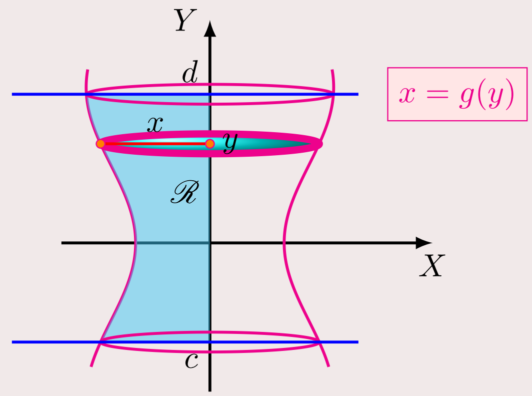


Corolario

Si $\mathscr{R}$ es la región acotada por la gráfica de la ecuación $x = g(y)$, las rectas $y = c$, $y = d$ y el eje Y, entonces el volumen del solido que se obtiene al girar $\mathscr{R}$ alrededor del eje Y es

$$V(S) = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \, dy$$

Método del disco



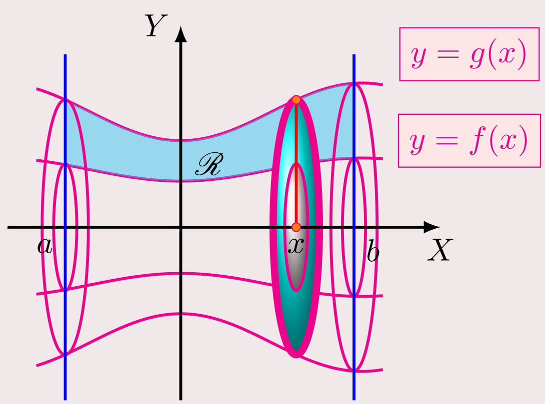
Método del anillo

Teorema

Si $\mathscr{R}$ es la región acotada por la gráfica de las funciones continuas f y g tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, las rectas $x = a$, $x = b$, entonces si $\mathscr{R}$ gira alrededor del eje X se obtiene un solido de revolución hueco cuyo volumen es

$$V(S) = \pi \int_a^b [g^2(x) - f^2(x)]\, dx$$

Método del anillo



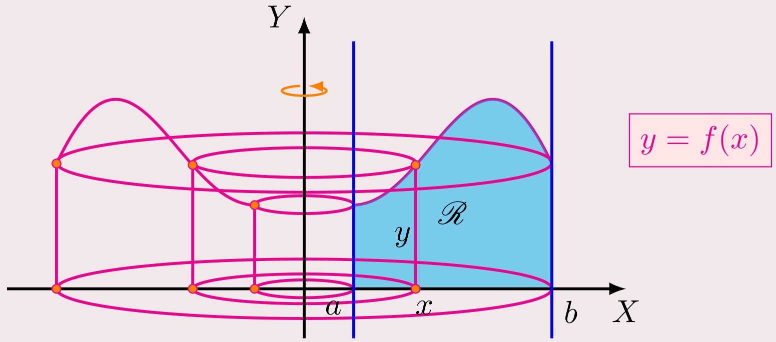
Método de las capas cilíndricas

Teorema

Si $\mathscr{R}$ es la región acotada por la gráfica de la función $y = f(x)$ con $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X, tal que $a \geq 0$, gira alrededor del eje Y se obtiene un solido de revolución cuyo volumen es

$$V(S) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Método de las capas cilíndricas



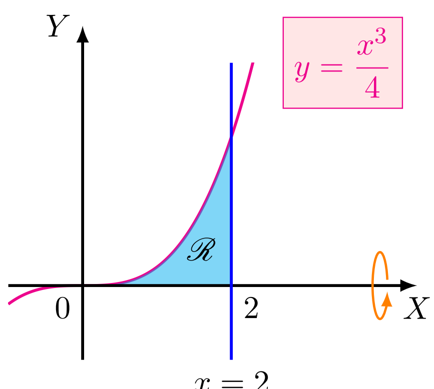
Ejemplo

Hallar el volumen del solido obtenido al hacer girar la región comprendida entre $y = \dfrac{x^3}{4}$, $x = 0$, $x = 2$ alrededor del eje X.

Resolución: $y = f(x) = \dfrac{x^3}{4}$, $0 \leq x \leq 2$

Método 1: Por teorema, tenemos

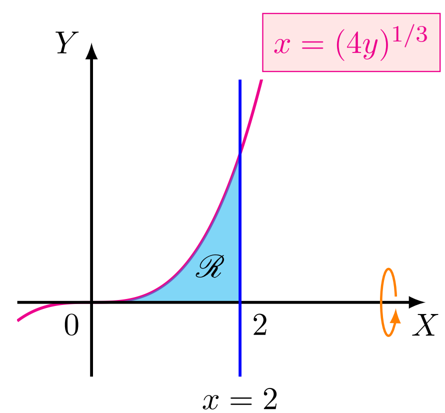
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \left(\frac{x^3}{4}\right)^2 dx \\ V &= \frac{\pi}{16} \int_0^2 x^6\, dx \\ V &= \frac{\pi}{16} \left[\frac{1}{7} x^7\right]_0^2 \\ V &= \frac{8\pi}{7} \end{aligned}$$



$y = f(x) = \dfrac{x^3}{4}$, luego $x = (4y)^{1/3}$

Método 2: Por teorema, tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 2\pi y \overline{x}\, dy \\ V &= \int_0^2 2\pi y[2 - (4y)^{1/3}]\, dy \\ V &= 2\pi \left[y^2 - \frac{3 \cdot 4^{1/3}}{7} y^{7/3}\right]_0^2 \\ V &= \frac{8\pi}{7} \end{aligned}$$



Ejemplo

Hallar el volumen del solido obtenido al hacer girar la región comprendida entre $y = x^2$ y $y = 2x$ alrededor del eje X.

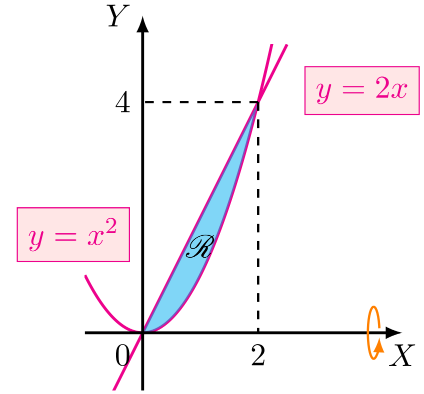
Resolución:

Método 1:
Por teorema, tenemos
$g(x) = 2x,\ f(x) = x^2$

$$V = \pi \int_0^2 \left[(2x)^2 - (x^2)^2\right] dx$$

$$V = \pi \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$V = \frac{64\pi}{15}$$



Método 2: $\overline{x} = \sqrt{y} - \dfrac{y}{2}$,
luego $x = (4y)^{1/3}$
Por teorema, tenemos

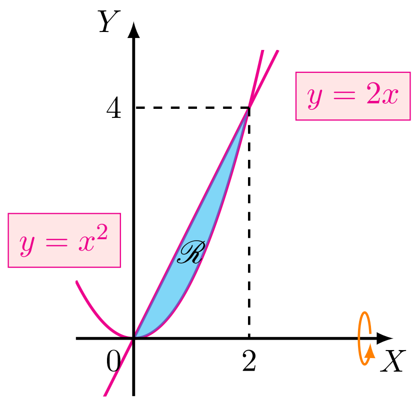
$$V = \int_0^4 2\pi y \overline{x}\, dy$$

$$V = \int_0^4 2\pi y \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2}\right) dy$$

$$V = \int_0^4 2\pi \left(y^{3/2} - \frac{y^2}{2}\right) dy$$

$$V = 2\pi \left[\frac{2}{5}y^{5/2} - \frac{1}{6}y^3\right]_0^4$$

$$V = \frac{64\pi}{15}$$

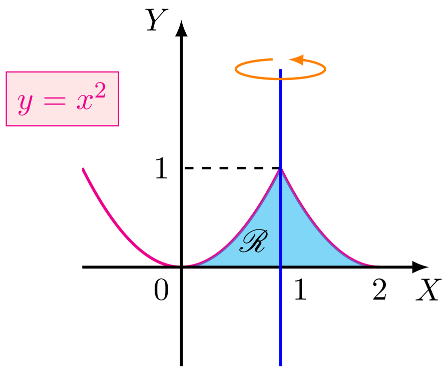


Ejemplo

Sea $\mathscr{C}$ el arco de parábola $y = x^2$, $x \in [0, 1]$. Encuentre el volumen V del solido de revolución obtenido al girar el arco de parábola $\mathscr{C}$ alrededor de la recta $x = 1$.

De la figura $\overline{x} = 1 - \sqrt{y}$, entonces

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \overline{x}^2\, dy \\ V &= \pi \int_0^1 (1-\sqrt{y})^2\, dy \\ V &= \pi \int_0^1 (1 - 2\sqrt{y} + y)\, dy \\ V &= \pi \left[y - \frac{4}{3} y^{3/2} + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 \\ V &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$



Sesión 15

Ejercicios

1. La base de S es una región elíptica limitada por la curva $9x^2 + 4y^2 = 36$. Las secciones transversales son perpendiculares al eje X y son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa en la base.
2. La base de S es la región triangular con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Las secciones transversales perpendiculares al eje Y son triángulos equiláteros.
3. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 1 - x^2$ y el eje X. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadradas.

Ejercicios

4. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales paralelas perpendiculares a la base son triángulos isósceles de altura h y el lado desigual en la base.
   a) Plantee una integral para el volumen de S
   b) De acuerdo con la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen de S.
5. Calcule el volumen común a dos esferas, cada una de radio r, si el centro de cada esfera está sobre la superficie de la otra esfera.

Sesión 15

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

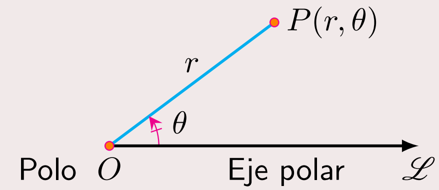
Octubre 31, 2021

Contenido

Sesión 16

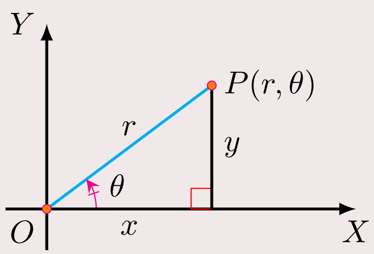
Definición

Sea $\mathscr{L}$ una semirrecta fija, llamada eje polar, de origen O, que se llama polo. Sea r la distancia entre O y P, y θ la medida del ángulo que forman $\mathscr{L}$ y $\overline{OP}$, medido desde $\mathscr{L}$ hacia P en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces decimos que P tiene por coordenadas polares a r y θ y escribimos $P = (r, \theta)$.



Formulas de transformación

Las relaciones (1) y (2), nos permiten cambiar de coordenadas polares a coordenadas rectangulares y viceversa.



$$(1)\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

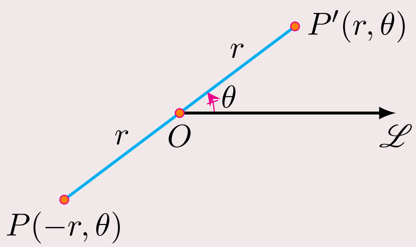
$$(2)\ \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \qquad x \neq 0 \end{cases}$$

Coordenadas polares

Dado un par (r, θ), el punto con coordenadas polares r y θ es único.
Si $r = 0$, θ es indeterminado.
Así el polo O tiene por coordenadas polares $(0, \theta)$, θ arbitrario.

Coordenadas polares

Por ser r una distancia, es positiva, pero a veces es conveniente que r tome valores negativos. Esto se logra definiendo $P = (-r, \theta)$ como el simétrico respecto al origen del punto $P'(r, \theta)$, como se muestra a continuación

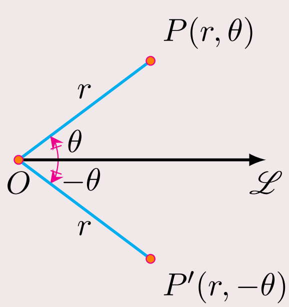


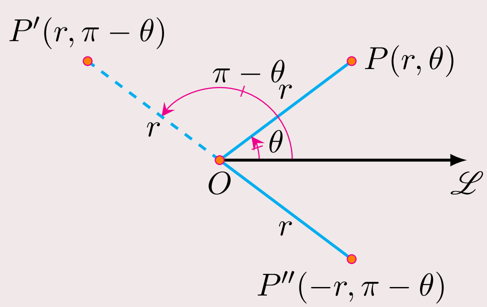
Observación

1. Si P tiene coordenadas polares (r, θ), entonces P también tiene coordenadas polares $(r, \theta \pm 2n\pi)$ y $(-r, \theta \pm (2n-1)\pi)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.
2. Si P no es el polo, existe un solo par de coordenadas polares (r, θ) sujetos a las condiciones $r > 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
3. $(r, \theta) = (-r, \theta + \pi)$

Simetría con respecto al eje polar

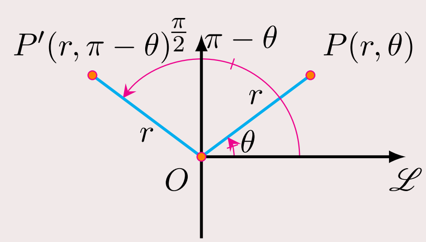
Una curva es simétrica con respecto al eje polar si se cambia (r, θ) por $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta + 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. sin alterar la ecuación polar.

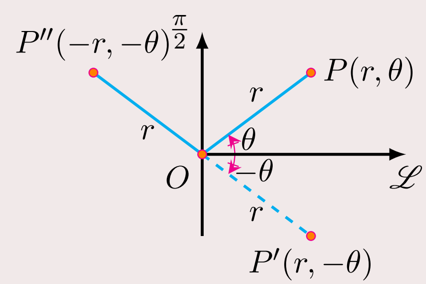




Simetría con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$

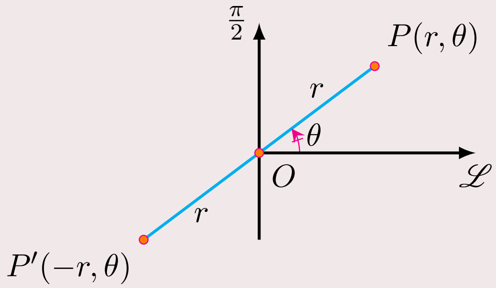
Una curva es simétrica con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$ si se cambia (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ o $(-r, -\theta)$ sin alterarse la ecuación polar.





Simetría con respecto al polo

Una curva es simétrica con respecto al origen si al cambiar (r, θ) por $(r, \pi + \theta)$ la ecuación polar no se altera.



Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares

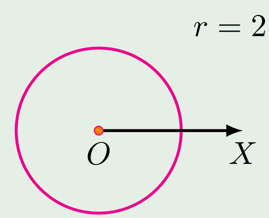
La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$, o de manera más general $F(r, \theta)$, consiste de todos los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Para la simplificación, en la obtención de la curva polar, se recomienda seguir los siguientes pasos.

Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares

1. Intersección con el eje polar. Hacemos $\theta = 0$ y se resuelve la ecuación en función de r, las raíces reales nos dan los radios vectores de los puntos de intersección.
2. Simetrías.
3. Extensión. Se determina la variación de r y θ.
4. Verificar si el polo pertenece al lugar geométrico de la ecuación polar, para ello hacemos $r = 0$.
5. Se determinan los valores de r correspondiente a los valores asignados a θ.

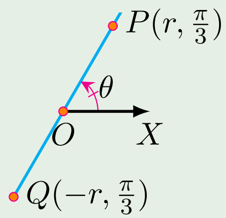
Ejemplo

La curva $r = 2$ está representada por una circunferencia de longitud de radio 2 centrada en el polo, pues la curva consiste de todos los puntos $(2, \theta)$.



Ejemplo

La curva $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ está representada por una recta que pasa por el polo y forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$rad con el eje polar, pues la curva consiste de todos los puntos $\left(r, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

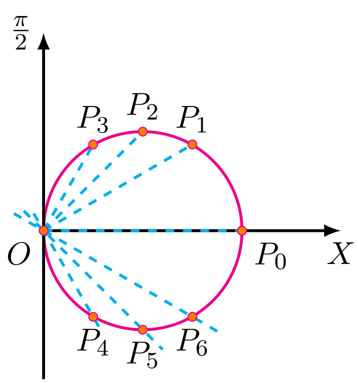


Ejemplo

Trace la curva con ecuación polar $r = 2\cos\theta$ y encuentre una ecuación cartesiana para esta curva.

Resolución: Determinando algunos valores de r para algunos valores convenientes de θ para graficar los puntos (r, θ).

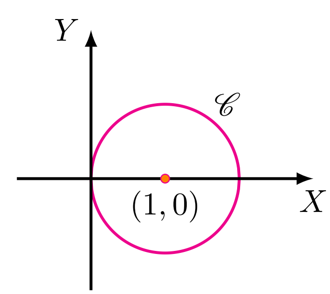
θ	$r = 2\cos\theta$	P_i
0	2	$(2, 0)$
$\pi/6$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \pi/6)$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, \pi/4)$
$\pi/3$	1	$(1, \pi/3)$
$\pi/2$	0	$(0, \pi/2)$
$2\pi/3$	-1	$(-1, 2\pi/3)$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, 3\pi/4)$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 5\pi/6)$
π	-2	$(2, 0)$



Convirtiendo la ecuación polar dada en una ecuación cartesiana, para ello utilizamos

$$(1)\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \qquad x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r &= 2\cos\theta \\ r^2 &= 2r\cos\theta \\ x^2 + y^2 &= 2x \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 1 \\ \mathscr{C} : (x-1)^2 + y^2 &= 1^2 \end{aligned}$$



que es la ecuación de una circunferencia con centro en $(1, 0)$ y longitud de radio 1.

Sesión 16

Ejercicios

1. Grafique los puntos cuyas coordenadas polares están dadas. Después encuentre otros dos pares de coordenadas polares de este punto, uno con $r > 0$ y uno con $r < 0$. en
   a) $(2, \frac{\pi}{3})$
   b) $(1, -\frac{3\pi}{4})$
   c) $(-1, \frac{\pi}{2})$
   d) $(1, \frac{7\pi}{4})$
   e) $(-3, \frac{\pi}{6})$
   f) $(1, -1)$

Ejercicios

2. Bosqueje la región en el plano que consiste de todos los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas
   a) $r \geq 1$
   b) $0 \leq r \leq 2$, $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$
   c) $r \geq 0$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$
   d) $1 \leq r \leq 3$, $\frac{5\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{6}$

Ejercicios

3. Identifique la curva encontrando una ecuación cartesiana para la curva.
   a) $r^2 = 5$
   b) $r = 2 \operatorname{sen} \theta$
   c) $r = 4 \sec \theta$
   d) $r^2 \cos 2\theta = 1$
4. Encuentre una ecuación polar para la curva representada por las ecuaciones cartesianas dadas.
   a) $y = 2$
   b) $y = x$
   c) $y = 1 + 3x$
   d) $4y^2 = x$
   e) $x^2 + y^2 = 2cx$
   f) $xy = 4$

Sesión 16

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Michael Spivak
  Calculus. 3ra edición.
  Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto

David Caytuiro

Noviembre 5, 2021

Contenido

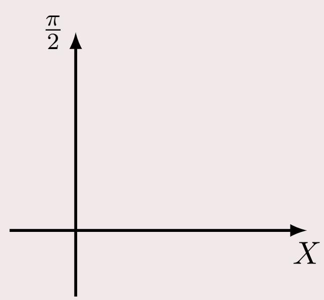
Sesión 17

Puntos de intersección de dos curvas

Sean las curvas $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$, los puntos de intersección se hallan resolviendo el sistema $f_1(\theta) = f_2(\theta)$.

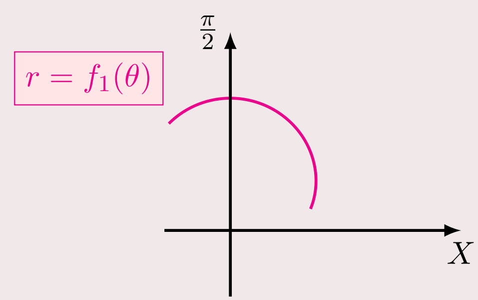
Puntos de intersección de dos curvas

Sean las curvas $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$, los puntos de intersección se hallan resolviendo el sistema $f_1(\theta) = f_2(\theta)$.



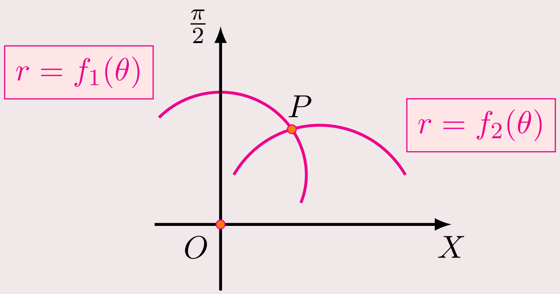
Puntos de intersección de dos curvas

Sean las curvas $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$, los puntos de intersección se hallan resolviendo el sistema $f_1(\theta) = f_2(\theta)$.



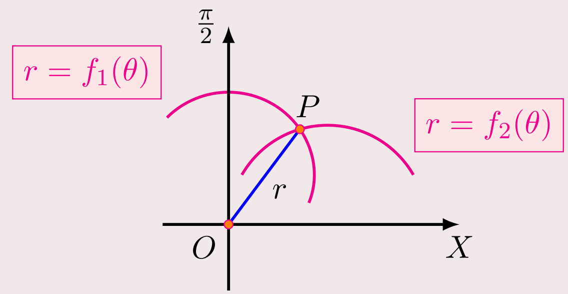
Puntos de intersección de dos curvas

Sean las curvas $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$, los puntos de intersección se hallan resolviendo el sistema $f_1(\theta) = f_2(\theta)$.



Puntos de intersección de dos curvas

Sean las curvas $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$, los puntos de intersección se hallan resolviendo el sistema $f_1(\theta) = f_2(\theta)$.



Ejemplo

Encuentre los puntos de intersección de las curvas $r = \cos 2\theta$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

Resolución:

Resolución: Resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

Resolución: Resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

Resolución: Resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{1}{2} \\ 2\theta &= 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

Resolución: Resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{1}{2} \\ 2\theta &= 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \theta &= k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{1}{2} \\ 2\theta &= 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \theta &= k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Se encuentran cuatro puntos de intersección: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{7\pi}{6}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{11\pi}{6}\right)$.

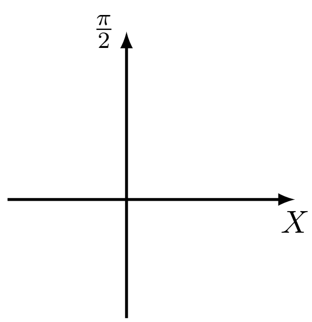
Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

Los otros cuatro puntos de intersección restantes se obtienen por simetría o resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = -\dfrac{1}{2}$, las cuales son: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

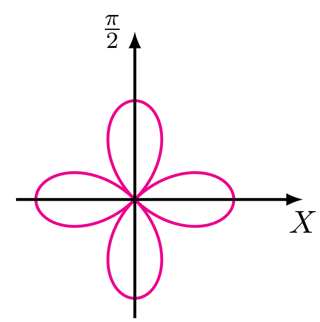
Los otros cuatro puntos de intersección restantes se obtienen por simetría o resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = -\dfrac{1}{2}$, las cuales son: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

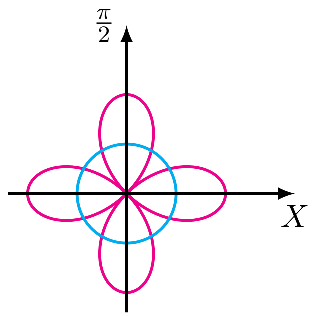
Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

Los otros cuatro puntos de intersección restantes se obtienen por simetría o resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = -\dfrac{1}{2}$, las cuales son: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.

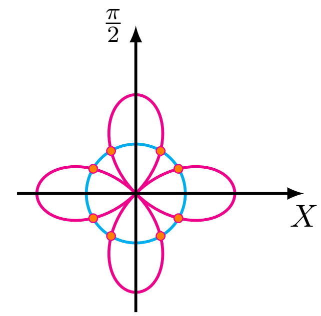


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Los otros cuatro puntos de intersección restantes se obtienen por simetría o resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = -\dfrac{1}{2}$, las cuales son: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.



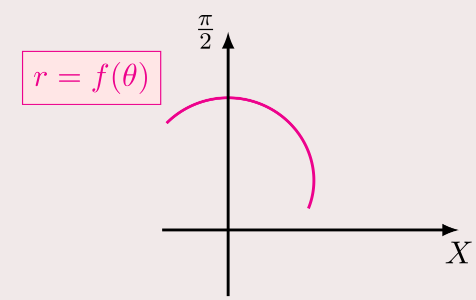
Los otros cuatro puntos de intersección restantes se obtienen por simetría o resolviendo las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = -\dfrac{1}{2}$, las cuales son: $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2\pi}{3}\right), \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{4\pi}{3}\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$.



Sesión 17

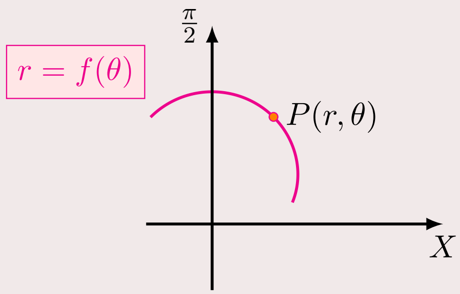
Tangentes a curvas polares

Sea $\mathscr{L}$ la recta tangente a la curva polar $r = f(\theta)$ en el punto $P(r, \theta)$, entonces la pendiente de la recta esta dado por



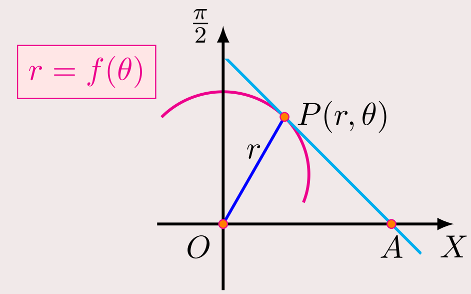
Tangentes a curvas polares

Sea $\mathscr{L}$ la recta tangente a la curva polar $r = f(\theta)$ en el punto $P(r,\theta)$, entonces la pendiente de la recta esta dado por



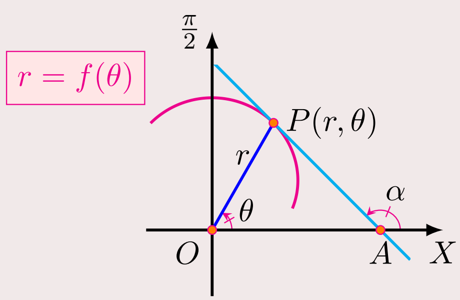
Tangentes a curvas polares

Sea $\mathscr{L}$ la recta tangente a la curva polar $r = f(\theta)$ en el punto $P(r,\theta)$, entonces la pendiente de la recta esta dado por



Tangentes a curvas polares

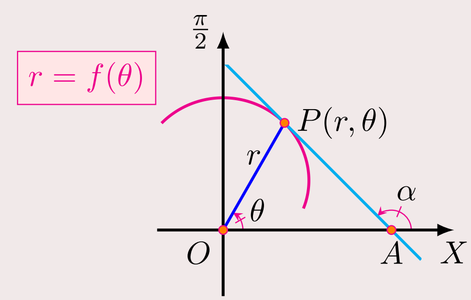
Sea $\mathscr{L}$ la recta tangente a la curva polar $r = f(\theta)$ en el punto $P(r,\theta)$, entonces la pendiente de la recta esta dado por



Tangentes a curvas polares

Sea $\mathscr{L}$ la recta tangente a la curva polar $r = f(\theta)$ en el punto $P(r,\theta)$, entonces la pendiente de la recta esta dado por

$$\tan\alpha = \frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

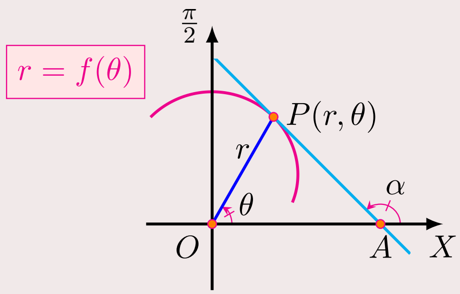


Tangentes a curvas polares

Sea $\mathscr{L}$ la recta tangente a la curva polar $r = f(\theta)$ en el punto $P(r,\theta)$, entonces la pendiente de la recta esta dado por

$$\tan\alpha = \frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

donde $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$



Observación

1. Las rectas tangentes horizontales se localizan al determinar los puntos donde $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$, siempre que $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$.

Observación

1. Las rectas tangentes horizontales se localizan al determinar los puntos donde $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$, siempre que $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$.
2. Las rectas tangentes verticales se localizan en los puntos donde $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ siempre que $\dfrac{dy}{d\theta} \neq 0$.

Observación

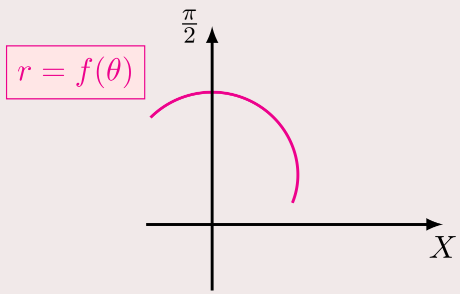
1. Las rectas tangentes horizontales se localizan al determinar los puntos donde $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$, siempre que $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$.
2. Las rectas tangentes verticales se localizan en los puntos donde $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ siempre que $\dfrac{dy}{d\theta} \neq 0$.
3. Las rectas tangentes en el polo, se obtienen cuando $r = 0$, luego la pendiente de la recta es igual a $\tan\theta$ siempre que $\dfrac{dr}{d\theta} \neq 0$.

Ángulo entre la recta tangente y la recta radial

Sea P punto cualquiera (excepto el origen) sobre la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es la medida del ángulo entre la recta tangente en P y la recta radial OP, entonces

$$\tan\psi = \frac{r}{r'}$$

donde $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$



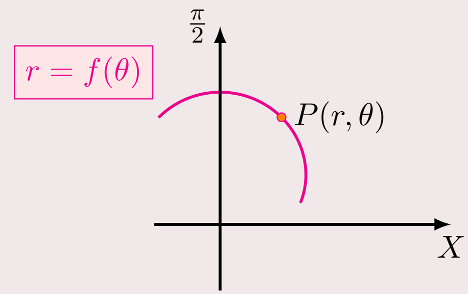
Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

Ángulo entre la recta tangente y la recta radial

Sea P punto cualquiera (excepto el origen) sobre la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es la medida del ángulo entre la recta tangente en P y la recta radial OP, entonces

$$\tan\psi = \frac{r}{r'}$$

donde $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

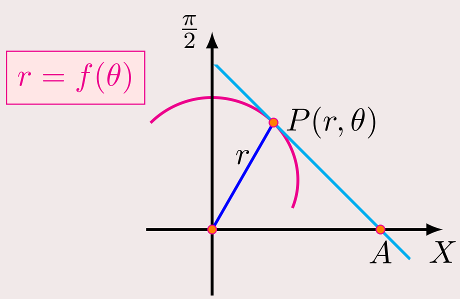
Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

Ángulo entre la recta tangente y la recta radial

Sea P punto cualquiera (excepto el origen) sobre la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es la medida del ángulo entre la recta tangente en P y la recta radial OP, entonces

$$\tan\psi = \frac{r}{r'}$$

donde $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

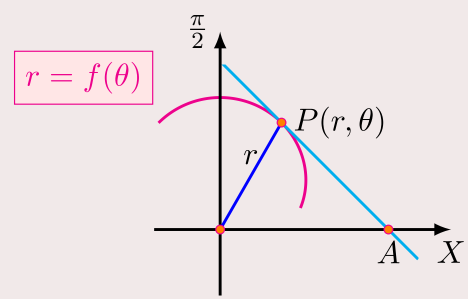
Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

Ángulo entre la recta tangente y la recta radial

Sea P punto cualquiera (excepto el origen) sobre la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es la medida del ángulo entre la recta tangente en P y la recta radial OP, entonces

$$\tan\psi = \frac{r}{r'}$$

donde $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$



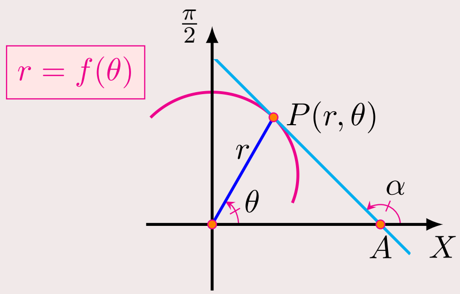
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ángulo entre la recta tangente y la recta radial

Sea P punto cualquiera (excepto el origen) sobre la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es la medida del ángulo entre la recta tangente en P y la recta radial OP, entonces

$$\tan\psi = \frac{r}{r'}$$

donde $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$



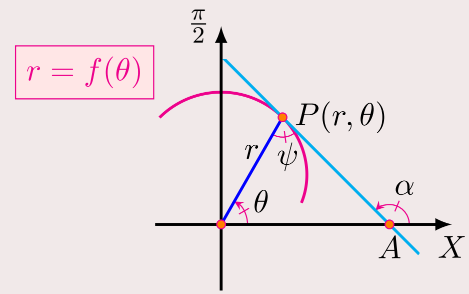
Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Ángulo entre la recta tangente y la recta radial

Sea P punto cualquiera (excepto el origen) sobre la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es la medida del ángulo entre la recta tangente en P y la recta radial OP, entonces

$$\tan\psi = \frac{r}{r'}$$

donde $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Ejemplo

Sea la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la cardioide cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

b) Encuentre los puntos sobre la cardioide donde la recta tangente es horizontal o vertical.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Resolución:

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Determinando la pendiente en cada punto de la curva polar $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

Resolución: Determinando la pendiente en cada punto de la curva polar $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

Resolución: Determinando la pendiente en cada punto de la curva polar $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta + (1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

Resolución: Determinando la pendiente en cada punto de la curva polar $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta + (1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta(1+2\operatorname{sen}\theta)}{1-2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

Resolución: Determinando la pendiente en cada punto de la curva polar $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r' \operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta + (1+\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1+\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta(1+2\operatorname{sen}\theta)}{1-2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\theta(1+2\operatorname{sen}\theta)}{(1+\operatorname{sen}\theta)(1-2\operatorname{sen}\theta)}$$

a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \frac{\pi}{3}$ es

a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \frac{\pi}{3}$ es

$$m = \frac{\cos\frac{\pi}{3}\left(1+2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)}{\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\left(1-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)}$$

a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \frac{\pi}{3}$ es

$$m = \frac{\cos\frac{\pi}{3}\left(1+2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)}{\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\left(1-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)}$$

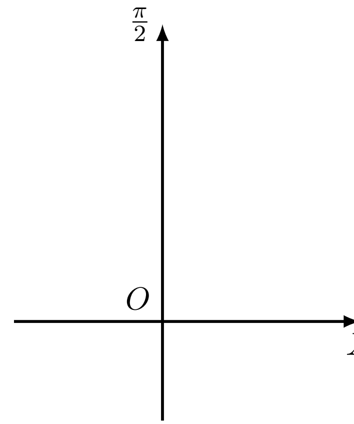
$$m = \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})}{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-\sqrt{3})}$$

a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ es

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\cos\dfrac{\pi}{3}\left(1 + 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)}{\left(1 + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)\left(1 - 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)} \\
m &= \frac{\dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - \sqrt{3})} \\
m &= -1
\end{aligned}
$$

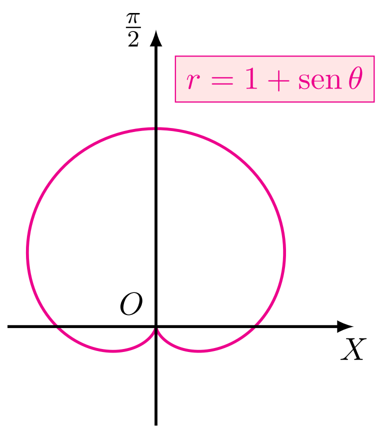
a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ es

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\cos\dfrac{\pi}{3}\left(1 + 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)}{\left(1 + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)\left(1 - 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)} \\
m &= \frac{\dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - \sqrt{3})} \\
m &= -1
\end{aligned}
$$



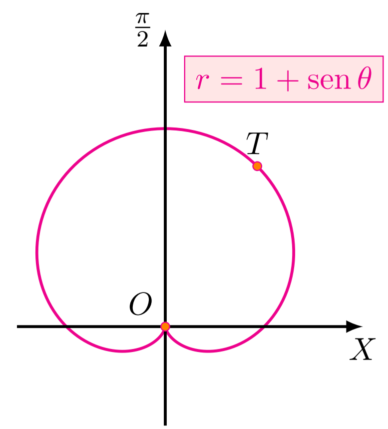
a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ es

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\cos\dfrac{\pi}{3}\left(1 + 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)}{\left(1 + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)\left(1 - 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)} \\
m &= \frac{\dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - \sqrt{3})} \\
m &= -1
\end{aligned}
$$



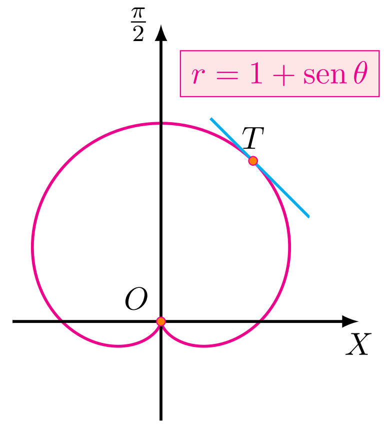
a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ es

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\cos\dfrac{\pi}{3}\left(1 + 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)}{\left(1 + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)\left(1 - 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)} \\
m &= \frac{\dfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - \sqrt{3})} \\
m &= -1
\end{aligned}
$$



a) La pendiente de la recta tangente en el punto donde $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ es

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\cos\frac{\pi}{3}\left(1+2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)}{\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\left(1-2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)}\\
m &= \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})}{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-\sqrt{3})}\\
m &= -1
\end{aligned}
$$



Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

b) Se observa que

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

b) Se observa que

$$
\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta(1+2\operatorname{sen}\theta) = 0, \qquad \text{si } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercici

b) Se observa que

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{d\theta} &= \cos\theta(1+2\operatorname{sen}\theta) = 0, && \text{si } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\\
\frac{dx}{d\theta} &= (1+\operatorname{sen}\theta)(1-2\operatorname{sen}\theta) = 0, && \text{si } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

b) Se observa que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= \cos\theta(1+2\operatorname{sen}\theta)=0, &\text{si } \theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\\ \frac{dx}{d\theta} &= (1+\operatorname{sen}\theta)(1-2\operatorname{sen}\theta)=0, &\text{si } \theta=\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

- Las rectas tangentes horizontales se dan en los puntos $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{7\pi}{6}\right)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{11\pi}{6}\right)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

b) Se observa que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= \cos\theta(1+2\operatorname{sen}\theta)=0, &\text{si } \theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\\ \frac{dx}{d\theta} &= (1+\operatorname{sen}\theta)(1-2\operatorname{sen}\theta)=0, &\text{si } \theta=\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

- Las rectas tangentes horizontales se dan en los puntos $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{7\pi}{6}\right)$ y $\left(\frac{1}{2},\frac{11\pi}{6}\right)$.
- Las rectas tangentes verticales se dan en los puntos $\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(\frac{3}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Cuando $\theta=\frac{3\pi}{2}$, se tiene que $\frac{dy}{d\theta}=0$ y $\frac{dx}{d\theta}=0$.

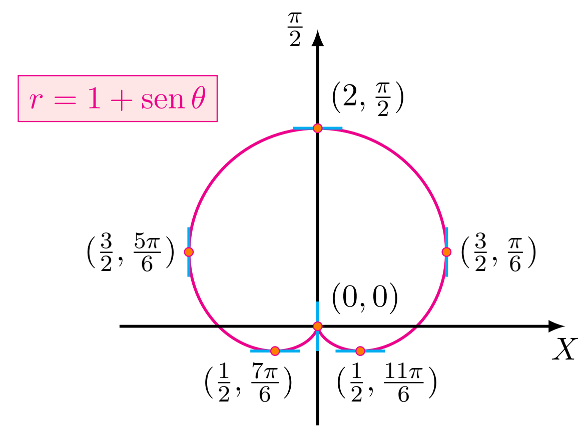
$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{1+2\operatorname{sen}\theta}{1-2\operatorname{sen}\theta}\cdot\lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\\ \lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\\ \lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\\ \lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{dy}{dx} &= +\infty\end{aligned}$$

Del mismo modo,

$$\lim_{\theta\to(\frac{3\pi}{2})^+}\frac{dy}{dx}=-\infty$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Luego, hay una recta tangente vertical en el polo.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

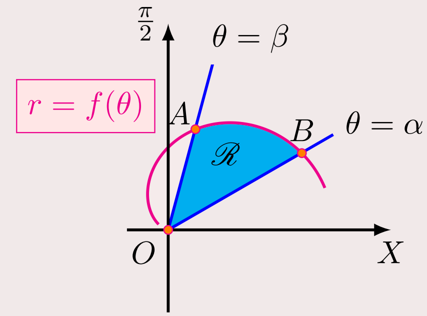
Sesión 17

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Teorema

Sea $\mathscr{R}$ la región del plano acotado por la gráfica de $r = f(\theta)$ tal que f es una función no negativa en $[\alpha, \beta]$, $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$ y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, entonces el área de la región $\mathscr{R}$ esta dado por

$$A(\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta$$



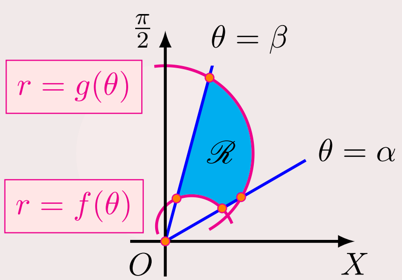
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Teorema

Si $\mathscr{R}$ es la región del plano acotado por la gráfica de $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ donde f y g son continuas en $[\alpha, \beta]$, tal que $0 \leq f(\theta) \leq g(\theta)$ para todo $\theta \in [\alpha, \beta]$ y $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces el área de la región $\mathscr{R}$ esta dado por

$$A(\mathscr{R}) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[g^2(\theta) - f^2(\theta)\right] \, d\theta$$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Ejemplo

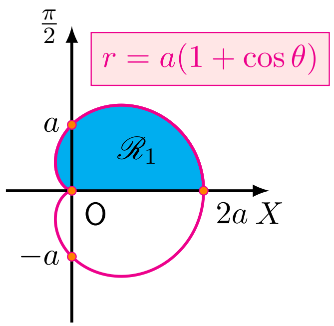
Calcule el área de región determinada por la cardioide

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

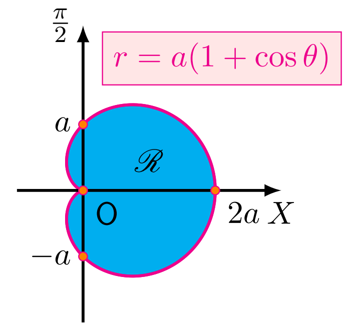
Resolución: Se traza la gráfica de la cardioide y aplicando el teorema

$$
\begin{aligned}
A(\mathscr{R}_1) &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\, d\theta \\
A(\mathscr{R}_1) &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [a(1+\cos\theta)]^2\, d\theta \\
A(\mathscr{R}_1) &= \frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi} [(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)]\, d\theta \\
A(\mathscr{R}_1) &= \frac{1}{2}a^2\left[2\operatorname{sen}\theta+\frac{3}{2}\theta+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{\pi} \\
A(\mathscr{R}_1) &= \frac{3}{4}\pi a^2
\end{aligned}
$$



Finalmente,

$$
\begin{aligned}
A(\mathscr{R}) &= 2A(\mathscr{R}_1) \\
A(\mathscr{R}) &= 2\left(\frac{3}{4}\pi a^2\right) \\
A(\mathscr{R}) &= \frac{3}{2}\pi a^2
\end{aligned}
$$



Ejemplo

Calcule el área de región determinada por la curva

$$(x^2+y^2)^2 - 2xy = 0$$

Resolución: Expresando en coordenadas polares

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\operatorname{sen}\theta
\end{aligned}
$$

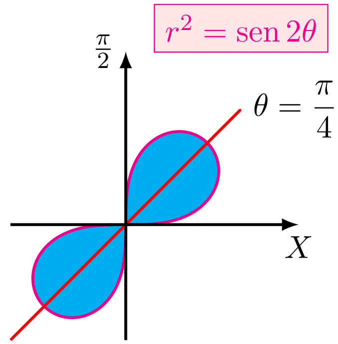
Luego

$$
\begin{aligned}
(x^2+y^2)^2 - 2xy &= 0 \\
(r^2)^2 - 2r\cos\theta\cdot r\operatorname{sen}\theta &= 0 \\
r^2 &= \operatorname{sen}2\theta
\end{aligned}
$$

Se observa que la gráfica sólo es simétrica respecto al polo. También $r^2 \geq 0$, luego $\operatorname{sen}2\theta \geq 0$, así $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ o $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

La figura muestra la gráfica de la curva dada

$$
\begin{aligned}
A(\mathscr{R}) &= 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\,d\theta\\
A(\mathscr{R}) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta\\
A(\mathscr{R}) &= [-\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}\\
A(\mathscr{R}) &= 1
\end{aligned}
$$



Ejemplo

Calcule el área del interior de los lugares geométricos

$$
\begin{aligned}
r_1 &= -4\operatorname{sen}\theta\\
r_2 &= 4(1+\cos\theta)
\end{aligned}
$$

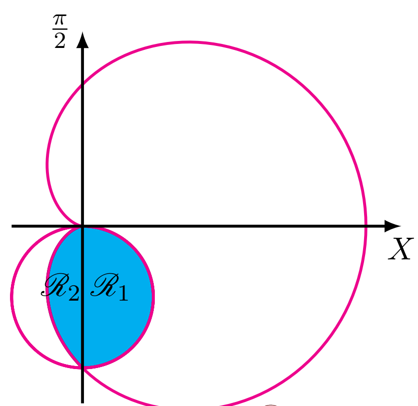
Resolución: La gráfica de $r_1 = -4\operatorname{sen}\theta$ representa la ecuación de una circunferencia de centro $(0,-2)$ y longitud de radio 2.

Determinando lo puntos de intersección de las curvas

$$
\begin{aligned}
r_1 &= r_2\\
-4\operatorname{sen}\theta &= 4(1+\cos\theta)\\
\operatorname{sen}\theta+\cos\theta &= -1\\
\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Luego,

$\theta = k\pi + (-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}, \forall k\in\mathbb{Z}$



Calculo del área de la región $\mathscr{R}_1$

$$
\begin{aligned}
A(\mathscr{R}_1) &= \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r_1^2\,d\theta\\
A(\mathscr{R}_1) &= \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 4^2\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\\
A(\mathscr{R}_1) &= \frac{1}{2}\cdot 4^2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\
A(\mathscr{R}_1) &= 2\pi
\end{aligned}
$$

Calculo del área de la región $\mathscr{R}_2$

$$\begin{aligned} A(\mathscr{R}_2) &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} r_2^2\, d\theta \\ A(\mathscr{R}_2) &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 4^2(1+\cos\theta)^2\, d\theta \\ A(\mathscr{R}_2) &= \frac{1}{2}\cdot 4^2\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta \\ A(\mathscr{R}_2) &= 6\pi-16 \end{aligned}$$

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Finalmente,

$$\begin{aligned} A(\mathscr{R}) &= A(\mathscr{R}_1)+A(\mathscr{R}_2) \\ A(\mathscr{R}) &= 2\pi+6\pi-16 \\ A(\mathscr{R}) &= 8(\pi-2) \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Sesión 17

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Ejercicios

1. Encuentre todos los puntos de intersección de las curvas dadas.
   a) $r = 1+\operatorname{sen}\theta$, $r = 2\operatorname{sen}\theta$
   b) $r = 1-\cos\theta$, $r = 1+\operatorname{sen}\theta$
   c) $r = 2\operatorname{sen}2\theta$, $r = 1$
   d) $r = \cos 3\theta$, $r = \operatorname{sen}3\theta$
   e) $r = \operatorname{sen}\theta$, $r = \operatorname{sen}2\theta$
   f) $r^2 = \operatorname{sen}2\theta$, $r^2 = \cos 2\theta$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejercicios

2. Encuentre la pendiente de la recta tangente para la curva polar dada en el punto especificado por el valor de θ.
   a) $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$
   b) $r = 2\operatorname{sen}\theta$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$
   c) $r = \dfrac{1}{\theta}$, $\theta = \pi$
   d) $r = \cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$, $\theta = \pi$
   e) $r = \cos 2\theta$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$
   f) $r = 1 + 2\cos\theta$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Ejercicios

3. Encuentre los puntos sobre la curva dada donde la recta tangente es horizontal o vertical.
   a) $r = 3\cos\theta$
   b) $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
   c) $r = 1 + \cos\theta$
   d) $r = e^{\theta}$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Ejercicios

4. Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas y que están en el sector especificado.
   a) $r = e^{-\frac{\theta}{4}}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$
   b) $r = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{6}$
   c) $r^2 = 9\operatorname{sen}2\theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$
   d) $r = \tan\theta$, $\dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 17 Intersección de curvas en coordenadas polares Rectas tangentes a curvas polares Áreas en coordenadas polares Ejercicios

Ejercicios

5. Trace la curva y encuentre el área que encierra.
   a) $r = 2\operatorname{sen}\theta$
   b) $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$
   c) $r = 3 + 2\cos\theta$
   d) $r = 4 + 3\operatorname{sen}\theta$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejercicios

6. Encuentre el área de la región que está dentro de la primera curva y fuera de la segunda curva.
   a) $r = 2\cos\theta,\ r = 1$
   b) $r = 1 - \operatorname{sen}\theta,\ r = 1$
   c) $r = 2 + \operatorname{sen}\theta,\ r = 3\operatorname{sen}\theta$
   d) $r = 3\cos\theta,\ r = 1 + \cos\theta$

Sesión 17

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Noviembre 5, 2021

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

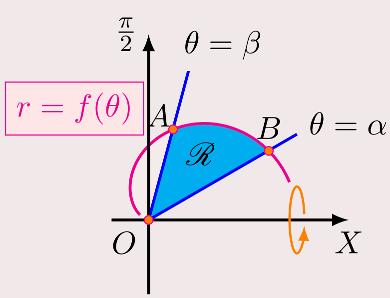
Sesión 18

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

El volumen del sólido S obtenido por la rotación en torno al eje polar de la región plana $\mathscr{R} = \{(r,\theta)\colon 0 \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, donde $r = f(\theta)$ es la ecuación de una curva en coordenadas polares y f es continua en $[\alpha, \beta]$ esta dado por

$$V(S) = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

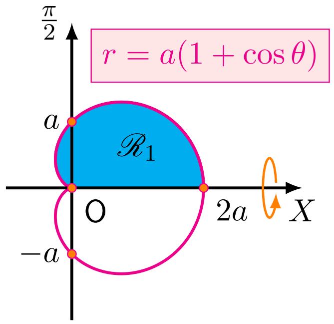
Ejemplo

Calcular el volumen del sólido obtenido al hacer girar la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$ alrededor del eje X.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Se traza la gráfica de la cardioide y aplicando el teorema

$$
\begin{aligned}
V(S) &= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\
V(S) &= \frac{2\pi}{3}a^3\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\
V(S) &= -\frac{2\pi}{3}a^3\left[\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4\right]_0^{\pi} \\
V(S) &= \frac{8}{3}\pi a^3
\end{aligned}
$$



Sesión 18 Volumen de un solido de revolución en coordenadas polares Volumen de un solido de revolución en ecuaciones paramétricas

Sesión 18

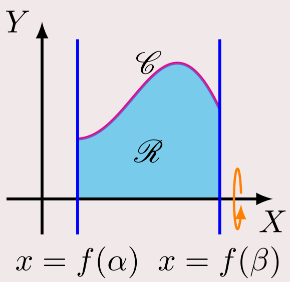
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 18 Volumen de un solido de revolución en coordenadas polares Volumen de un solido de revolución en ecuaciones paramétricas

Teorema

Sea $\mathscr{R}$ la región plana comprendida por la unión $\mathscr{C}$ dada en forma paramétrica, mediante un par de funciones con derivadas continuas, esto es

$$\mathscr{C}:\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t)\end{cases} \quad , t \in [\alpha, \beta]$$



y las rectas $x = f(\alpha)$ y $x = f(\beta)$.

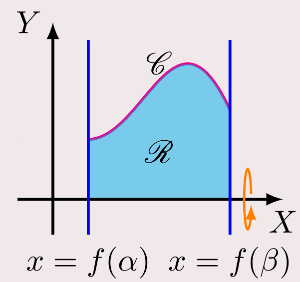
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 18 Volumen de un solido de revolución en coordenadas polares Volumen de un solido de revolución en ecuaciones paramétricas

Teorema

El volumen del sólido S obtenido por la rotación en torno al eje X de la región $\mathscr{R}$ esta dado por

$$V(S) = \pi\int_{\alpha}^{\beta} g^2(t) f'(t)\, dt$$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

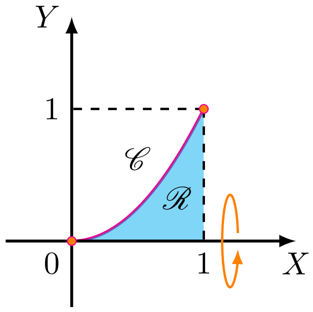
Hallar el volumen del sólido que se obtiene cuando se hace girar en torno del eje X, la región comprendida por la curva

$$\mathscr{C}: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, t \in [0,1]$$

y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Resolución: Se traza la gráfica de la curva $\mathscr{C}$ donde $f(t) = t$, $g(t) = t^2$, $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, luego aplicamos el teorema

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_0^1 g^2(t) f'(t)\, dt \\ V(S) &= \pi \int_0^1 (t^2)^2 (1)\, dt \\ V(S) &= \pi \int_0^1 t^4\, dt \\ V(S) &= \pi \left[\frac{1}{5} t^5\right]_0^1 \\ V(S) &= \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$



Sesión 18

Ejercicios

1. Calcule el volumen del sólido S generado por la rotación de la lemniscata $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, $a > 0$, alrededor
   a) del eje X
   b) del eje Y
   c) del la recta $\mathscr{L}: x - y = 0$

Ejercicios

2. Calcule el volumen del solido generado por la rotación de la figura limitada por las curvas $\theta = \pi r^3$ y $\theta = \pi$, alrededor del eje polar.

Ejercicios

3. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación una arco de la espiral de Arquímedes $r = a\theta$, $a > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, alrededor del eje X.

Ejercicios

4. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación de la región

$$\mathscr{R} = \{(r,\theta) \colon a \leq r \leq a\sqrt{2\operatorname{sen} 2\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, a \geq 0\}$$

alrededor del eje polar.

Ejercicios

5. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por la curva

$$\mathscr{C} \colon \begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad , t \in [0, 2\pi], a > 0$$

alrededor de la recta $x = 2\pi a$

Ejercicios

6. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por la curva

$$\mathscr{C}: \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\text{sen}^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi], a > 0$$

alrededor de la recta $\mathscr{L}: x - y = 0$

Sesión 18

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Noviembre 13, 2021

Contenido

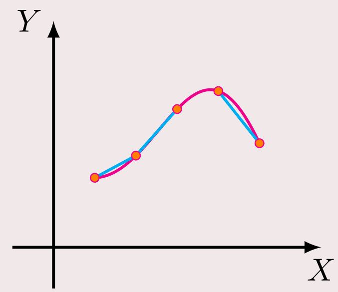
Sesión 19

Definición

Se dice que una función f es suave en un intervalo I, si existe f' y es continua en I.
Si f es una función suave en un intervalo cerrado $[a, b]$, seria posible asignar una longitud a la gráfica de f entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
Sea $P(x)$ el punto $(x, f(x))$ para cada $x \in [a, b]$. Si $P(c)$ y $P(d)$ son dos puntos diferentes en la gráfica de f, denotemos con $P(c)P(d)$ la parte de la gráfica entre $P(c)$ y $P(d)$, que recibe el nombre de arco entre $P(c)$ y $P(d)$.

Longitud de arco

Una manera natural es aproximar la longitud del arco $P(a)P(b)$ mediante pequeños segmentos de recta cuyas longitudes podemos sumar



Longitud de arco

Así, si $\{x_0, x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, esto es

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

Para cada x_i tenemos el punto $P(x_i) = (x_i, f(x_i))$ sobre la curva $y = f(x)$.

Longitud de arco

Trazamos los segmentos de recta entre dos puntos sucesivos la longitud de uno de tale segmentos es la longitud del segmento entre los puntos $P(x_i) = (x_i, f(x_i))$ y $Q(x_{i-1}) = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y es igual a

$$PQ = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \qquad (1)$$

Como f satisface las condiciones del teorema del valor medio, tenemos que existe $c_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f'(c_i) \qquad (2)$$

Longitud de arco

De (2) en (1)

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [(x_i - x_{i-1})f'(c_i)]^2} \\ PQ &= \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

luego la suma de las longitudes de todos los segmentos, esta dado por

$$\sum_{i=1}^{n} PQ = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}(x_i - x_{i-1})$$

Longitud de arco

Finalmente,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} PQ \\ L &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}(x_i - x_{i-1}) \\ L &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \end{aligned}$$

Esta integral existe porque la función $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es continua.

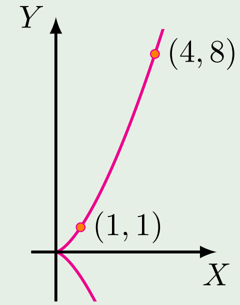
Teorema

Si f' es continua sobre $[a,b]$, entonces la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, esta dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Ejemplo

Calcule la longitud del arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ entre los puntos $(1,1)$ y $(4,8)$.



Resolución: Para la mitad superior de la curva se tiene $y = x^{3/2}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$.
Luego, por teorema

$$\begin{aligned} L &= \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \\ L &= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx \end{aligned}$$

Si sustituimos $u = 1 + \dfrac{9}{2}x$, entonces $du = \dfrac{9}{4}\,dx$,

$$\begin{aligned} x = 1 &\rightarrow u = \frac{13}{4} \\ x = 4 &\rightarrow u = 10 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} L &= \int_{\frac{13}{4}}^{10} \sqrt{u}\left(\frac{4}{9}du\right) \\ L &= \frac{4}{9}\int_{\frac{13}{4}}^{10} \sqrt{u}\, du \\ L &= \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{\frac{13}{4}}^{10} \\ L &= \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) \end{aligned}$$

Función de la longitud de arco

Si una curva suave $\mathscr{C}$ tiene la ecuación $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, sea $s(x)$ la distancia a lo largo de $\mathscr{C}$ del punto inicial $P_0(a, f(a))$ al punto $Q(x, f(x))$. Entonces s es una función, llamada función longitud de arco, definida por

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

Ejemplo

Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = x^2 - \dfrac{1}{8}\ln x$ tomando a $P_0(1,1)$ como el punto de partida

Resolución: Si $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{8}\ln x$, entonces $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{8x}$. Luego, la función de longitud de arco esta dado por

$$\begin{aligned}
s(x) &= \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt \\
s(x) &= \int_1^x \sqrt{1 + [2t - \frac{1}{8t}]^2}\, dt \\
s(x) &= \int_1^x \left(2t + \frac{1}{8t}\right) dt \\
s(x) &= \left[t^2 + \frac{1}{8}\ln t\right]_1^x \\
s(x) &= x^2 + \frac{1}{8}\ln x - 1
\end{aligned}$$

Longitud de arco en coordenadas paramétricas

Teorema

Si $\mathscr{C}$ es una curva suave en ecuaciones paramétricas

$$\mathscr{C} : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad , t \in [a, b]$$

entonces la longitud de arco de $\mathscr{C}$ esta dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Ejemplo

Calcule la longitud de la curva

$$\mathscr{C}:\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, t \in [1,2]$$

Resolución: Si $f(t) = t^2$ y $g(t) = t^3$, entonces $f'(t) = 2t$ y $g'(t) = 3t^2$, además $a = 1$ y $b = 2$.
Luego, la longitud de arco esta dado por

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt \\ L &= \int_1^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\,dt \\ L &= \int_1^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\,dt \\ L &= \left[\frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{3/2}\right]_1^2 \\ L &= \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) \end{aligned}$$

Longitud de arco en coordenadas polares

Teorema

Si $\mathscr{C}$ es una curva con ecuación polar $r = f(\theta)$, donde f es una función con derivada continua, la longitud de la curva desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ esta dado por

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\,d\theta$$

Ejemplo

Calcule la longitud arco de la curva $\mathscr{C} : r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$

Resolución: Sabemos que la curva $\mathscr{C}$ queda descrita para $\theta \in [0, 2\pi]$. Si $f(\theta) = a(1+\cos\theta)$, entonces $f'(\theta) = -a\operatorname{sen}\theta$. Luego, la longitud de arco esta dado por

$$\begin{aligned}
L &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta \\
L &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{(-a\operatorname{sen}\theta)^2 + [a(1+\cos\theta)]^2}\, d\theta \\
L &= 2a\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta \\
L &= 2a\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta
\end{aligned}$$

Sesión 19 | Longitud de arco | Ejercicios | Referencias

Finalmente,

$$\begin{aligned}
L &= 4a\int_0^{\pi} \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| d\theta \\
L &= 4a\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
L &= 8a\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} \\
L &= 8a
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 19 | Longitud de arco | Ejercicios | Referencias

Sesión 19

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 19 | Longitud de arco | Ejercicios | Referencias

Ejercicios

1. Plantee una integral que represente la longitud de las siguientes curvas.
   a) $y = \operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq \pi$
   b) $y = x\operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq 2$
   c) $x = \sqrt{y} - y,\ 1 \leq y \leq 4$
   d) $x = y^2 - 2y,\ 0 \leq y \leq 2$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejercicios

2. Determine la longitud exacta de las siguientes curvas.
   a) $y = 1 + 6x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$
   b) $y^2 = 4(x+4)^3$, $0 \leq x \leq 2$, $y > 0$
   c) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x}$, $1 \leq x \leq 2$
   d) $x = \dfrac{y^4}{8} + \dfrac{1}{4y^2}$, $1 \leq y \leq 2$
   e) $x = \dfrac{1}{3}\sqrt{y}(y-3)$, $1 \leq y \leq 9$
   f) $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x\dfrac{\pi}{3}$

Ejercicios

3. Bosqueje la curva con ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ y emplee la simetría para hallar su longitud.
4. Halle la función longitud de arco para la curva $y = \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$ con punto inicial $(0,1)$.

Ejercicios

5. Calcule la longitud de la espiral hiperbólica $r = \dfrac{1}{\theta}$, desde $\theta = \dfrac{3}{4}$ hasta $\theta = \dfrac{4}{3}$.
6. Si $\mathscr{R}$ es la región exterior a la circunferencia $r = \cos\theta$ e interior a la cardioide $r = 1 - \cos\theta$, calcule su perímetro.

Sesión 19

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Noviembre 13, 2021

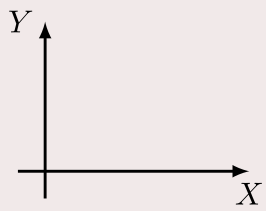
Contenido

Sesión 20

Áreas de superficies en coordenadas rectangulares

Teorema

Sea f una función no negativa, con derivada continua en $[a,b]$, haciendo girar la gráfica de $y=f(x)$ desde $x=a$ hasta $x=b$, alrededor del eje X, se obtienen una superficie de revolución.

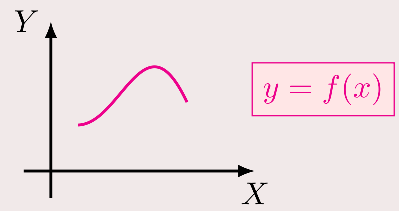


Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

Áreas de superficies en coordenadas rectangulares

Teorema

Sea f una función no negativa, con derivada continua en $[a,b]$, haciendo girar la gráfica de $y=f(x)$ desde $x=a$ hasta $x=b$, alrededor del eje X, se obtienen una superficie de revolución.



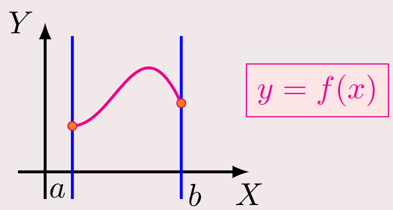
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

Áreas de superficies en coordenadas rectangulares

Teorema

Sea f una función no negativa, con derivada continua en $[a,b]$, haciendo girar la gráfica de $y=f(x)$ desde $x=a$ hasta $x=b$, alrededor del eje X, se obtienen una superficie de revolución.



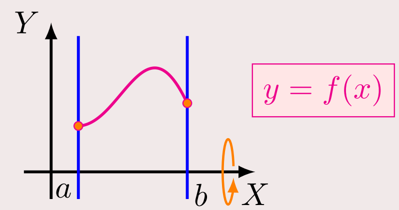
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

Áreas de superficies en coordenadas rectangulares

Teorema

Sea f una función no negativa, con derivada continua en $[a,b]$, haciendo girar la gráfica de $y=f(x)$ desde $x=a$ hasta $x=b$, alrededor del eje X, se obtienen una superficie de revolución.



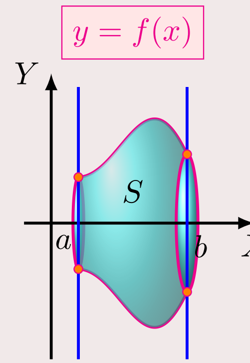
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Teorema

El área de esta superficie esta dado por

Teorema

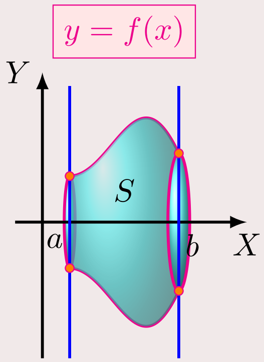
El área de esta superficie esta dado por



Teorema

El área de esta superficie esta dado por

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$



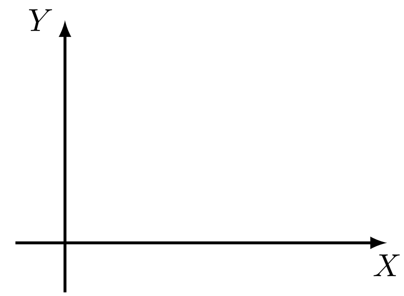
Ejemplo

Calcule el área de la superficie generada al gira la gráfica de $y = \sqrt{x}$, $x \in [1, 3]$ alrededor del eje X.

Resolución: Se tiene que $f(x) = \sqrt{x}$, luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Sesión 20 Áreas de superficies de revolución Ejercicios Referencias

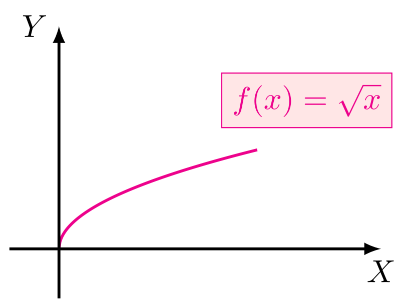
Resolución: Se tiene que $f(x) = \sqrt{x}$, luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 20 Áreas de superficies de revolución Ejercicios Referencias

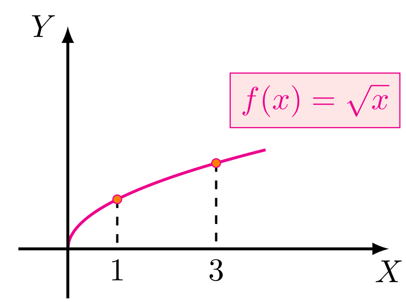
Resolución: Se tiene que $f(x) = \sqrt{x}$, luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

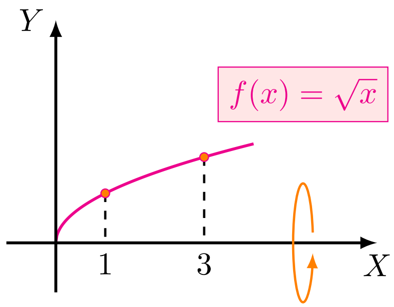
Sesión 20 Áreas de superficies de revolución Ejercicios Referencias

Resolución: Se tiene que $f(x) = \sqrt{x}$, luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Se tiene que $f(x) = \sqrt{x}$, luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

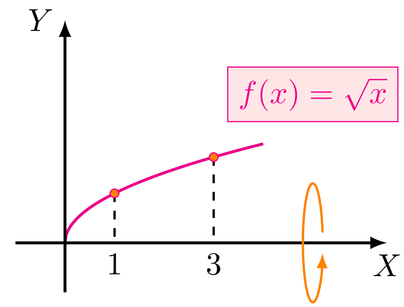


Sesión 20 Áreas de superficies de revolución Ejercicios Referencias

Resolución: Se tiene que $f(x) = \sqrt{x}$, luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Por teorema

$$A(S) = 2\pi \int_1^3 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

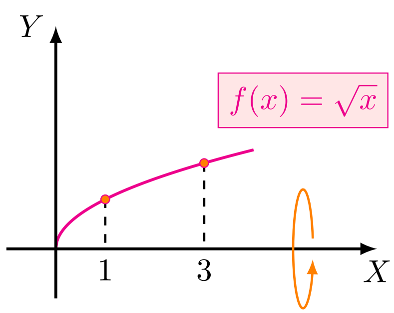
Sesión 20 Áreas de superficies de revolución Ejercicios Referencias

Resolución: Se tiene que $f(x) = \sqrt{x}$, luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Por teorema

$$A(S) = 2\pi \int_1^3 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$

$$A(S) = 2\pi \int_1^3 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 20 Áreas de superficies de revolución Ejercicios Referencias

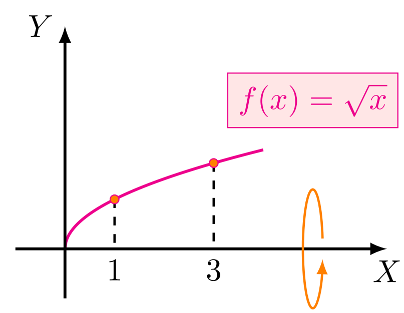
Resolución: Se tiene que $f(x) = \sqrt{x}$, luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Por teorema

$$A(S) = 2\pi \int_1^3 \sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx$$

$$A(S) = 2\pi \int_1^3 \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx$$

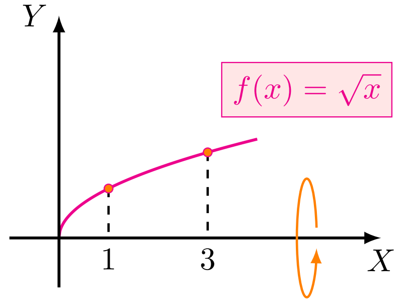
$$A(S) = 2\pi \int_1^3 \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,dx$$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Se tiene que $f(x) = \sqrt{x}$, luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Por teorema

$$
\begin{aligned}
A(S) &= 2\pi \int_1^3 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx \\
A(S) &= 2\pi \int_1^3 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx \\
A(S) &= 2\pi \int_1^3 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx \\
A(S) &= 2\pi \cdot \frac{2}{3}\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]_1^3
\end{aligned}
$$

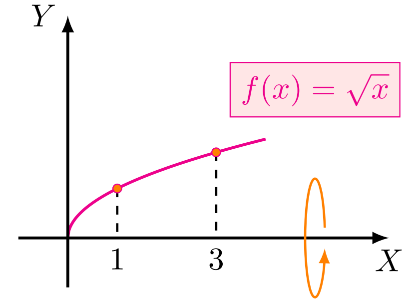


Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

Resolución: Se tiene que $f(x) = \sqrt{x}$, luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Por teorema

$$
\begin{aligned}
A(S) &= 2\pi \int_1^3 \sqrt{x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx \\
A(S) &= 2\pi \int_1^3 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx \\
A(S) &= 2\pi \int_1^3 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx \\
A(S) &= 2\pi \cdot \frac{2}{3}\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]_1^3
\end{aligned}
$$

$$A(S) = \frac{\pi}{6}(13\sqrt{13} - 5\sqrt{5})$$



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

Áreas de superficies en coordenadas paramétricas

Teorema

Sea $\mathscr{C}$ una curva suave definida por $\mathscr{C} : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \ t \in [a, b]$
con g no negativa en $t \in [a, b]$ y sea S la superficie que se obtiene al hacer girar a $\mathscr{C}$ alrededor del eje X. El área de esta superficie esta dado por

$$A(S) = 2\pi \int_a^b g(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

Ejemplo

Calcule el área de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la curva

$$\mathscr{C} : \begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases}, t \in [1, 2]$$

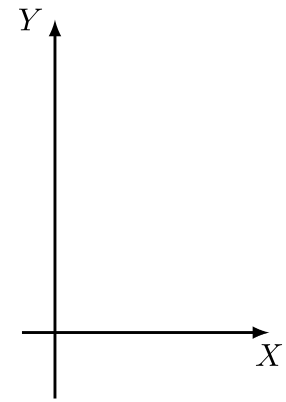
alrededor del eje X.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Se tiene que $f(t) = t$ y $g(t) = t^3$ luego $f'(t) = 1$ y $g'(t) = 3t^2$.

Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

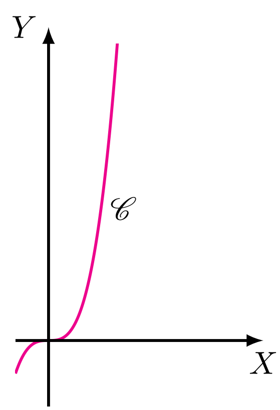
Resolución: Se tiene que $f(t) = t$ y $g(t) = t^3$ luego $f'(t) = 1$ y $g'(t) = 3t^2$.



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

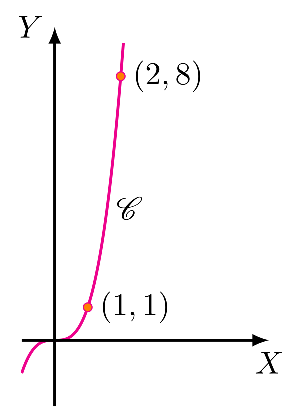
Resolución: Se tiene que $f(t) = t$ y $g(t) = t^3$ luego $f'(t) = 1$ y $g'(t) = 3t^2$.



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

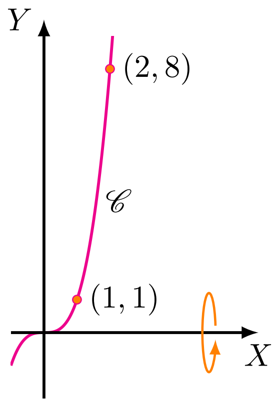
Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

Resolución: Se tiene que $f(t) = t$ y $g(t) = t^3$ luego $f'(t) = 1$ y $g'(t) = 3t^2$.



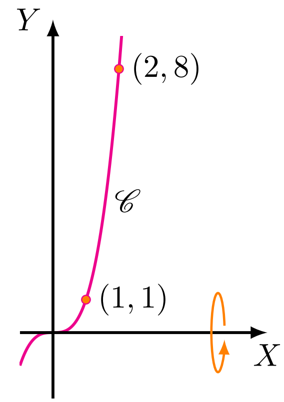
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Se tiene que $f(t) = t$ y $g(t) = t^3$ luego $f'(t) = 1$ y $g'(t) = 3t^2$.



Resolución: Se tiene que $f(t) = t$ y $g(t) = t^3$ luego $f'(t) = 1$ y $g'(t) = 3t^2$.
Por teorema

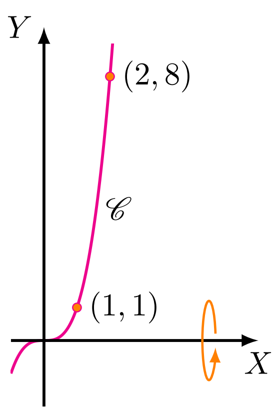
$$A(S) = 2\pi \int_1^2 t^3 \sqrt{(1)^2 + (3t^2)^2}\, dt$$



Resolución: Se tiene que $f(t) = t$ y $g(t) = t^3$ luego $f'(t) = 1$ y $g'(t) = 3t^2$.
Por teorema

$$A(S) = 2\pi \int_1^2 t^3 \sqrt{(1)^2 + (3t^2)^2}\, dt$$

$$A(S) = 2\pi \int_1^2 t^3 \sqrt{1 + 9t^4}\, dt$$

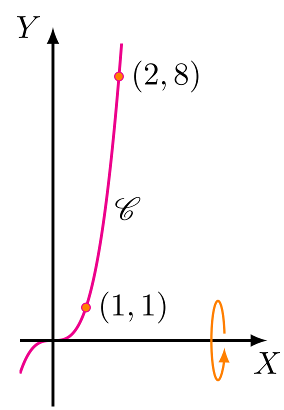


Resolución: Se tiene que $f(t) = t$ y $g(t) = t^3$ luego $f'(t) = 1$ y $g'(t) = 3t^2$.
Por teorema

$$A(S) = 2\pi \int_1^2 t^3 \sqrt{(1)^2 + (3t^2)^2}\, dt$$

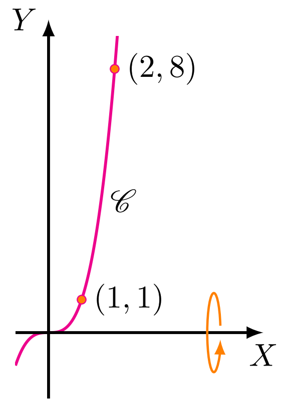
$$A(S) = 2\pi \int_1^2 t^3 \sqrt{1 + 9t^4}\, dt$$

$$A(S) = 2\pi \cdot \frac{1}{54} \left[(1 + 9t^4)^{3/2} \right]_1^2$$



Resolución: Se tiene que $f(t) = t$ y $g(t) = t^3$ luego $f'(t) = 1$ y $g'(t) = 3t^2$.
Por teorema

$$
\begin{aligned}
A(S) &= 2\pi \int_1^2 t^3 \sqrt{(1)^2 + (3t^2)^2}\, dt \\
A(S) &= 2\pi \int_1^2 t^3 \sqrt{1 + 9t^4}\, dt \\
A(S) &= 2\pi \cdot \frac{1}{54} \left[(1 + 9t^4)^{3/2} \right]_1^2 \\
A(S) &= \frac{\pi}{27}(145\sqrt{145} - 10\sqrt{10})
\end{aligned}
$$



Áreas de superficies en coordenadas polares

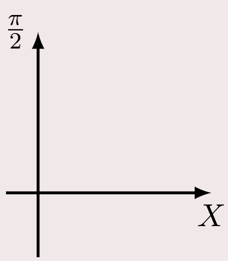
Teorema

Sea $\mathscr{C}$ una curva suave definida por $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y sea S la superficie que se obtiene al hacer girar a $\mathscr{C}$ alrededor del eje X.

Áreas de superficies en coordenadas polares

Teorema

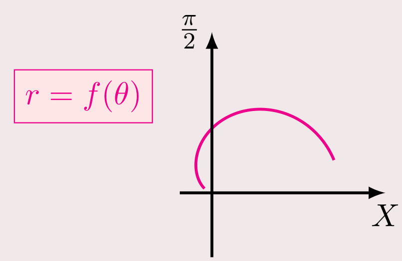
Sea $\mathscr{C}$ una curva suave definida por $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y sea S la superficie que se obtiene al hacer girar a $\mathscr{C}$ alrededor del eje X.



Áreas de superficies en coordenadas polares

Teorema

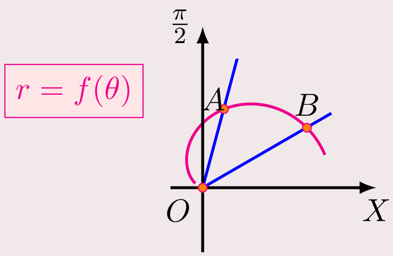
Sea $\mathscr{C}$ una curva suave definida por $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y sea S la superficie que se obtiene al hacer girar a $\mathscr{C}$ alrededor del eje X.



Áreas de superficies en coordenadas polares

Teorema

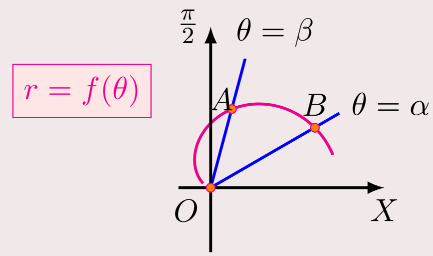
Sea $\mathscr{C}$ una curva suave definida por $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y sea S la superficie que se obtiene al hacer girar a $\mathscr{C}$ alrededor del eje X.



Áreas de superficies en coordenadas polares

Teorema

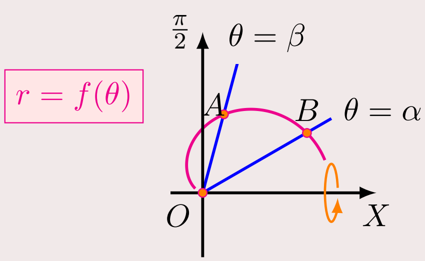
Sea $\mathscr{C}$ una curva suave definida por $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y sea S la superficie que se obtiene al hacer girar a $\mathscr{C}$ alrededor del eje X.



Áreas de superficies en coordenadas polares

Teorema

Sea $\mathscr{C}$ una curva suave definida por $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y sea S la superficie que se obtiene al hacer girar a $\mathscr{C}$ alrededor del eje X.



Teorema

El área de esta superficie esta dado por

$$A(S) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\operatorname{sen}\theta \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta$$

Ejemplo

Calcule el área de la superficie de revolución generada por la cardioide $r = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$ al hacer girar alrededor del eje X.

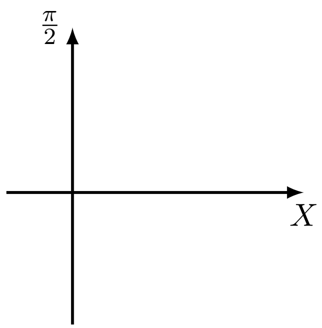
Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

Resolución: Se tiene que $f(\theta) = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$, luego $f'(\theta) = -a\operatorname{sen}\theta$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

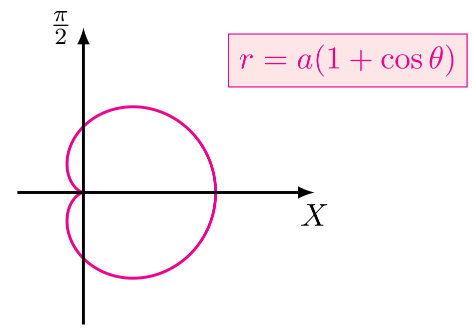
Resolución: Se tiene que $f(\theta) = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$, luego $f'(\theta) = -a\operatorname{sen}\theta$.



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

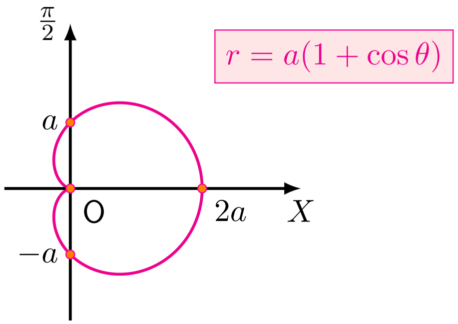
Sesión 20 | Áreas de superficies de revolución | Ejercicios | Referencias

Resolución: Se tiene que $f(\theta) = a(1+\cos\theta)$, $a > 0$, luego $f'(\theta) = -a\operatorname{sen}\theta$.

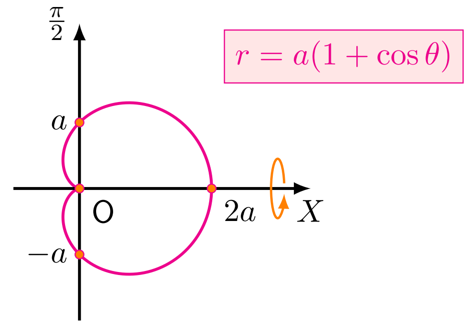


Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Resolución: Se tiene que $f(\theta) = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$, luego $f'(\theta) = -a \operatorname{sen}\theta$.



Resolución: Se tiene que $f(\theta) = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$, luego $f'(\theta) = -a \operatorname{sen}\theta$.



Por teorema

Por teorema

$$A(S) = 2\pi \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta \sqrt{(-a\operatorname{sen}\theta)^2 + [a(1+\cos\theta)]^2}\, d\theta$$

Por teorema

$$A(S) = 2\pi \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{(-a\operatorname{sen}\theta)^2+[a(1+\cos\theta)]^2}\,d\theta$$
$$A(S) = 2\pi\cdot a^2\sqrt{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{3/2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

Por teorema

$$A(S) = 2\pi \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{(-a\operatorname{sen}\theta)^2+[a(1+\cos\theta)]^2}\,d\theta$$
$$A(S) = 2\pi\cdot a^2\sqrt{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{3/2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$
$$A(S) = 2\pi a^2\sqrt{2}\left[-\frac{2}{5}(1+\cos\theta)^{5/2}\right]_0^{\pi}$$

Por teorema

$$A(S) = 2\pi \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\sqrt{(-a\operatorname{sen}\theta)^2+[a(1+\cos\theta)]^2}\,d\theta$$
$$A(S) = 2\pi\cdot a^2\sqrt{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^{3/2}\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$
$$A(S) = 2\pi a^2\sqrt{2}\left[-\frac{2}{5}(1+\cos\theta)^{5/2}\right]_0^{\pi}$$
$$A(S) = \frac{32}{5}\pi a^2$$

Sesión 20

Ejercicios

1. Plantee una integral para el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje X y al eje Y.
   a) $y = \tan x,\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$
   b) $y = x^{-2},\ 1 \leq x \leq 2$
   c) $y = e^{-x^2},\ -1 \leq x \leq 1$
   d) $x = \ln(2y+1),\ 0 \leq y \leq 1$

Ejercicios

2. Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva en torno al eje X.
   a) $y = x^3,\ 0 \leq x \leq 2$
   b) $9x = y^2 + 18,\ 2 \leq x \leq 6$
   c) $y = \sqrt{1+4x},\ 1 \leq x \leq 5$
   d) $y = \sqrt{1+e^x},\ 0 \leq x \leq 1$
   e) $y = \operatorname{sen} \pi x,\ 0 \leq x \leq 1$

Ejercicios

3. Si $a > 0$, encuentre el área de la superficie generada al hacer girar el bucle de la curva $3ay^2 = x(a-x)^2$ en torno al eje X.

Ejercicios

4. Demuestre que el área superficial de una zona de una esfera ubicada entre dos planos paralelos es $S = 2\pi Rh$, donde R es la longitud del radio de la esfera y h es la distancia entre los planos. (Observe que S sólo depende de la distancia entre los planos, y no sobre su ubicación, siempre que ambos planos intersequen la esfera).

Sesión 20

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Michael Spivak
Calculus. 3ra edición.
Editorial Reverté

Cálculo Integral

Juan Cribillero
Jose Ugarte
Ronald Mas
Fernando Zamudio
Dimas Abanto
David Caytuiro

Noviembre 22, 2021

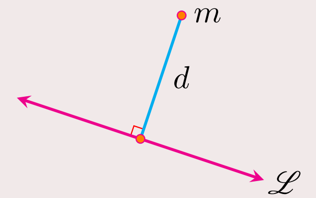
Contenido

Sesión 21

Centro de masas de un sistema de partículas

El momento de masa de una partícula respecto a una recta $\mathscr{L}$ se define como el producto de su masa y su distancia a la recta $\mathscr{L}$, así, si m es la masa de la partícula y d es su distancia a la recta $\mathscr{L}$, entonces el momento de la partícula respecto de a la recta $\mathscr{L}$ está dado por

$$M_{\mathscr{L}} = md$$



Centro de masas de un sistema de partículas

Si consideramos el sistema de coordenadas rectangulares, y si un sistema de n partículas de masas m_1, m_2, $\ldots m_n$ están situados en los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots (x_n, y_n)$ respectivamente, los momentos M_x y M_y del sistema de n partículas, se definen como

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

Centro de masas de un sistema de partículas

El centro de masa de un sistema de partículas es un punto $P(\overline{x}, \overline{y})$ tal que, supuesto que la masa total m del sistema esta concentrada en el punto P, los momentos de P y del sistema coinciden, entonces

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m}$$

Ejemplo

Tres partículas están en los puntos $P_1(-1,-1)$, $P_2(0,5)$ y $P_3(1,2)$ y sus masas son $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ y $m_3 = 3$ respectivamente. Determine las coordenadas del centro de masa del sistema de partículas.

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Resolución: Se tiene

$$M_x = 1(-1)+2(5)+3(2) \qquad M_y = 1(-1)+2(0)+3(1)$$
$$M_x = 15 \qquad M_y = 2$$

Luego,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m}$$
$$\overline{x} = \frac{2}{6} \qquad \overline{y} = \frac{15}{6}$$
$$\overline{x} = \frac{1}{3} \qquad \overline{y} = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, la coordenadas del centro de masa es $P\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Sesión 21

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Centroide de una región plana o lámina

En primer lugar, es necesario tener en cuenta las siguientes consideraciones:

a) Una lámina es llamada homogénea si dos porciones de igual área tienen el mismo peso.

b) La densidad ρ de una lámina es la masa de una unidad cuadrada de lámina. Si una lámina es homogénea, entonces su densidad de área ρ es constante y si A es el área de dicha lámina, entonces su masa es $m = \rho A$.

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

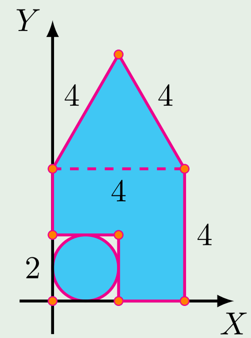
Centroide de una región plana o lámina

c) El centro de masa de una lámina homogénea, puede pensarse como el punto de balance de la lámina. Se define el momento de una lámina de masa m, respecto a una recta, como el momento de una partícula de masa m situado en el centro de masa de la lámina.

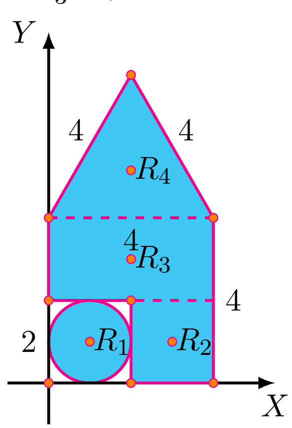
d) Si una lámina se corta en trozos, el momento de la lámina es la suma de los momentos de sus partes.

Ejemplo

Encuentre el centro de masa de una lámina homogénea de densidad ρ que tiene la forma de la figura, las medidas están en cm.



Resolución: La lámina esta formada por un círculo, un cuadrado, un rectángulo y un triángulo equilátero. El área total de la lamina es igual 22.069 cm^2. Si colocamos los ejes coordenados tal como es indica en la figura, los centros de masa son $R_1 = (1,1)$, $R_2 = (3,1)$, $R_3 = (2,3)$ y $R_4 = (2, \frac{12+2\sqrt{3}}{3})$.



Luego,

$$
\begin{aligned}
M_x &= \pi\rho(1) + 4\rho(1) + 8\rho(3) + 4\sqrt{3}\rho(\frac{12+2\sqrt{3}}{3}) \\
M_x &= 66,854\rho
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_y &= \pi\rho(1) + 4\rho(3) + 8\rho(2) + 4\sqrt{3}\rho(2) \\
M_y &= 44.998\rho
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m}$$

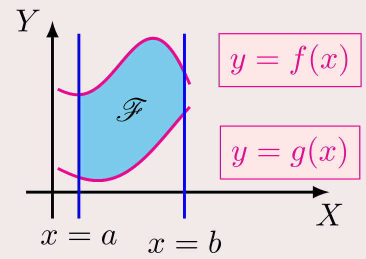
$$\overline{x} = \frac{44.998\rho}{22.069\rho} \qquad \overline{y} = \frac{66.854\rho}{22.069\rho}$$

$$\overline{x} = 2.039 \qquad \overline{y} = 3.029$$

Por lo tanto las coordenadas del centroide de la lámina son $(2.039, 3.029)$.

Teorema

Sea $\mathscr{F}$ un lámina de homogénea cuya densidad es constante e igual a ρ. Supongamos que $\mathscr{F}$ es la región limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$.



Teorema

Entonces, el centroide de la lámina $\mathscr{F}$ están dados por

$$\overline{x} = \frac{\rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx} = \frac{M_y}{m}$$

$$\overline{y} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2}\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)\, dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx} = \frac{M_x}{m}$$

Observación

a) Si la región plana $\mathscr{F}$ es simétrica con respecto a la recta $x = x_0$, entonces $\overline{x} = x_0$.
b) Si la región plana $\mathscr{F}$ es simétrica con respecto a la recta $y = y_0$, entonces $\overline{y} = y_0$.

Corolario

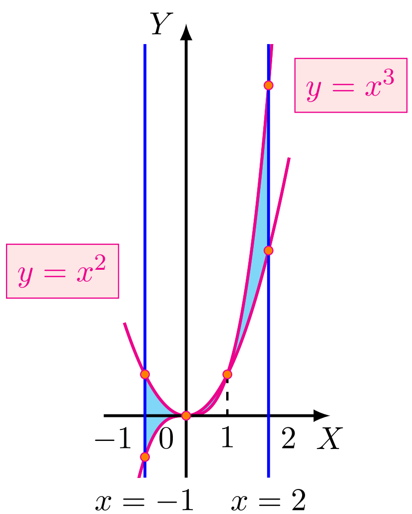
Si la región plana $\mathscr{F}$ está limitada por las gráficas de $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ e $y = d$, donde f y g son funciones continuas en $[c, d]$ y $f(y) \geq g(y)$ para cada $y \in [c, d]$, entonces el centroide de $\mathscr{F}$ está dado por

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_c^d \frac{1}{2}\left([f(y)]^2 - [g(y)]^2\right)\, dy}{\displaystyle\int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy} \qquad \overline{y} = \frac{\displaystyle\int_c^d y[f(y) - g(y)]\, dy}{\displaystyle\int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy}$$

Ejemplo

Determine el centroide de la región plana limitada por las curvas $y = x^2$, $y = x^3$, $x = -1$ y $x = 2$.

Resolución: La región se ilustra en la siguiente figura



Determinando el área

$$\begin{aligned} x^3 &\leq x^2, x \in [-1, 1] \\ x^2 &\leq x^3, x \in [1, 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} (x^2 - x^3)\, dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x^2)\, dx \\ A &= \frac{8}{12} + \frac{17}{12} \\ A &= \frac{25}{12} \end{aligned}$$

Determinando los momentos

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[x^4 - x^6]\,dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{2}[x^6 - x^4]\,dx \\ M_x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{35} + \frac{1}{2}\cdot\frac{418}{35} \\ M_x &= \frac{211}{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{-1}^{1} x[x^2 - x^3]\,dx + \int_{1}^{2} x[x^3 - x^2]\,dx \\ M_y &= -\frac{2}{5} + \frac{49}{20} \\ M_y &= \frac{41}{20} \end{aligned}$$

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Luego,

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\frac{41}{20}}{\frac{25}{12}} \\ \overline{x} &= \frac{123}{127} \\ \overline{x} &= 0.984 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{y} &= \frac{\frac{211}{35}}{\frac{25}{12}} \\ \overline{y} &= \frac{2532}{875} \\ \overline{y} &= 2.894 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centroide de la región plana son $(0.984, 2.894)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Sesión 21

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Teorema

Si un sólido S es obtenido al hacer rotar una región plana $\mathscr{F}$ en torno de una recta del mismo plano, que no sea secante a la región $\mathscr{F}$, entonces el volumen del sólido S es igual al área de la región $\mathscr{F}$ multiplicado por $2\pi r$, siendo r la longitud del radio de la circunferencia descrita por el centroide de la región $\mathscr{F}$, esto es

$$V = 2\pi r A(\mathscr{F})$$

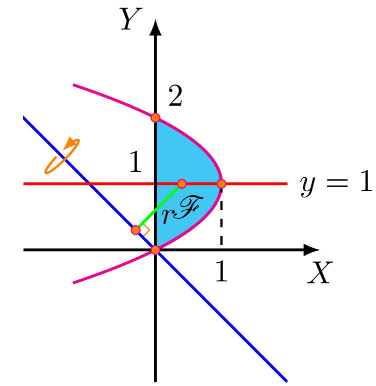
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Ejemplo

Calcule el volumen de sólido S generado por la rotación de la región $\mathscr{F}$ limitada por $x = 2y - y^2$, $x = 0$, en torno a la recta $y = -x$.

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Resolución: Determinamos el centroide de la región $\mathscr{F}$. Como la región es simétrica con respecto a la recta $y = 1$, entonces $\overline{y} = 1$, también



Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Determinando el área de la región $\mathscr{F}$

$$A = \int_0^2 (2y - y^2)\, dy$$
$$A = \frac{4}{3}$$

Luego,

$$\overline{x} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^2 (2y - y^2)^2\, dy}{A(\mathscr{F})}$$
$$\overline{x} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{3}}$$
$$\overline{x} = \frac{2}{5}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Luego, las coordenadas del centroide son $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{2}{5}, 1)$ Por el teorema de Pappus

$$V(S) = 2\pi r A(\mathscr{F})$$

donde

$$r = \frac{\left|\frac{2}{5} + 1\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$
$$r = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$
$$V(S) = 2\pi\left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$V(S) = \frac{28\pi\sqrt{2}}{15}$$

Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 21

Ejercicios

1. Las masas m_i se localizan en los puntos Pi. Encuentre los momentos M_x y M_y y el centro de masa del sistema.
   a) $m_1 = 4,\ m_2 = 2,\ m_3 = 4,\ P_1(2,3),\ P_2(-3,1),\ P_3(3,5)$
   b) $m_1 = 5,\ m_2 = 4,\ m_3 = 3,\ m_4 = 6,\ P_1(-4,2),\ P_2(0,5),\ P_3(3,2),\ P_4(1,-2)$.

Ejercicios

2. Bosqueje la región acotada por las curvas y estime en forma visual la ubicación del centroide. Después encuentre las coordenadas exactas del centroide.
   a) $y = 2x,\ y = 0,\ x = 1$
   b) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4$
   c) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$
   d) $y = \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ 0 \leq x\pi$

Ejercicios

3. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas dadas.
   a) $y = x^2,\ x = y^2$
   b) $y = 2 - x^2,\ y = x$
   c) $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{4}$
   d) $y = x^3,\ x + y = 2,\ y = 0$
   e) $x + y = 2,\ x = y^2$

Ejercicios

4. Utilice el teorema de Pappus halle el volumen del sólido que genera la región limitada
   a) por $y = e^x$, las rectas $x = 0$, $x = 4$ y el eje X, cuando gira alrededor de la recta $x + y = 0$
   b) por $y = \dfrac{1}{x}$ y $2x + 4y = 9$ al girar alrededor de la recta $x + 2y = 0$.
   c) por las curvas $y = (x-1)(4-x)$, $x + y = 4$ al girar alrededor de la recta $x + y = 0$.

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Ejercicios

5. La región limitada por las gráficas $x^2 = 10y$, $y^2 = 10x$, gira alrededor de la recta $\mathscr{L} : 3x + 4y + b = 0$. Calcule el valor de b, si el volumen del sólido generado es igual a 500π.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral

Sesión 21 Centro de masas de un sistema de partículas Centroide Teorema de Pappus Ejercicios Referencias

Ejercicios

6. Considere la región

$$\mathscr{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq |x|\}$$

   a) Determine el centroide de la región $\mathscr{R}$.
   b) Calcule el volumen del sólido generado al hacer girar $\mathscr{R}$ alrededor del eje Y.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Juan Cribillero Jose Ugarte Ronald Mas Fernando Zamudio Dimas Abanto David Caytuiro
Cálculo Integral