

# Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 30, 2024



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

# Sesión 02



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



## Derivadas de orden superior

Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . La función derivada  $f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A_1 \subset A$  puede también tener derivada en un punto  $x_0$ , la segunda derivada de  $f$  en  $x_0$ :

$$f''(x_0) = (f')'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

También se utilizan las notaciones

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = y'' = f''(x) = f^{(2)}(x),$$

donde  $y = f(x)$ .



## Derivadas de orden superior

Notamos que la función correspondiente  $f'' = (f')' : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida sobre  $A_2 \subset A_1$ , también podría ser derivable y definir de forma análoga la tercera derivada. Siguiendo esta idea, definimos la tercera derivada  $f'''(x_0)$  de  $f$  en  $x_0$  como la derivada de  $f''$  en  $x_0$

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0)$$

y la función correspondiente  $f''' : A_3 \rightarrow \mathbb{R}, A_3 \subset A_2$ ,

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = y''' = f'''(x) = f^{(3)}(x).$$



## Derivadas de orden superior

Habiendo definido la derivada de orden  $n - 1$ ,  $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = f^{(n-1)}(x)$  como una función  $f^{(n-1)} : A_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos la derivada de orden  $n$  en un punto  $x_0$  como la derivada de esta,

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0),$$

y su función correspondiente  $f^{(n)} : A_n \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $A_n \subset A_{n-1}$ . Como antes,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

Convenimos que  $f^{(0)} = f$  de modo que  $f^{(1)} = f'$ ,  $f^{(2)} = f''$ ,  $f^{(3)} = f'''$ .



## Ejemplo

Sea  $f$  una función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

Encuentre una formula para la derivada de orden  $n$  de la función  $f$  y demuestre por inducción matemática.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Resolución

Representamos  $f(x) = (x + 2)^{-1}$ . Para todo  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , se tiene

$$f'(x) = (-1)(x + 2)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)(x + 2)^{-3}$$

$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)(x + 2)^{-4}$$

y deducimos entonces que en general

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2) \cdots (-n)(x + 2)^{-(n+1)}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! (x + 2)^{-(n+1)}$$



## Resolución

Demostremos que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! (x+2)^{-(n+1)} \quad (1)$$

por inducción sobre  $n \geq 1$ .

- Para  $n = 1$ , derivando directamente  $f(x) = (x+2)^{-1}$ ,

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = (-1)(x+2)^{-2} = (-1)^1 1! (x+2)^{-(1+1)}$$





## Resolución

- Supongamos que la ecuación (??) es válida para un  $n$  (hipótesis inductiva). Derivando

$$f^{(n+1)} = ((-1)^n n! (x+2)^{-(n+1)})'$$

$$f^{(n+1)} = (-1)^n n! ((x+2)^{-(n+1)})'$$

$$f^{(n+1)} = (-1)^n n! (-(n+1))(x+2)^{-(n+1)-1}$$

$$f^{(n+1)} = (-1)^{n+1} (n+1)! (x+2)^{-((n+1)+1)}$$

La igualdad  $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (n+1)! (x+2)^{-((n+1)+1)}$  significa que (??) vale para  $n+1$  en lugar de  $n$ .

Por el principio de inducción la ecuación (??) vale para todo  $n \geq 1$



# Sesión 02



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



## Derivación implícita

Cada una de las ecuaciones

$$3x^2 + 5y = -1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\cos(x + y) - 5x + y^3 + y = 0$$

expresa una dependencia de la variable  $y$  respecto de  $x$ .

Para  $3x^2 + 5y = -1$ , tal dependencia puede ser expresada

explícitamente mediante  $y = \frac{-1 + 3x^2}{5}$ , una ecuación de la forma  $y = f(x)$ .

Para  $\cos(x + y) - 5x + y^3 + y = 0$  es imposible obtener una ecuación explícita de la forma  $y = f(x)$ .



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Ecuación implícita

Una ecuación implícita entre las variables  $x$  e  $y$  es una ecuación de la forma

$$F(x, y) = 0 ,$$

de modo que  $F(x, y) = 0$  si y solo si  $y = f(x)$ .

O también, la ecuación implícita  $F(x, y) = 0$  define la función  $y = f(x)$  si y solo si

$$F(x, f(x)) = 0.$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Ejemplo

En los ejemplos anteriores:

- $F(x, y) = 3x^2 + 5y + 1.$
- $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$
- $F(x, y) = \cos(x + y) - 5x + y^3 + y.$

Son las funciones implícitas de las ecuaciones mencionadas.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Observación

Una ecuación implícita define, de modo natural, el conjunto

$$C = \{(x, y) | F(x, y) = 0\}.$$

Este conjunto es el conjunto solución de la ecuación  $F(x, y) = 0$ .  
En el caso de la ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $C$  es el círculo unitario.  
En el caso en que la ecuación  $F(x, y) = 0$  define la función  $y = f(x)$ , el conjunto solución  $C$  contiene la curva gráfico de la función  $f$ .



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Observación

Genéricamente se tiene que  $C$  es una curva. Así, el siguiente interés es el calcular la recta tangente a la curva.

Si la curva es parte del gráfico de  $y = f(x)$  para calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en  $(x_0, y_0)$  es necesario calcular

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} = y'(x_0) = f'(x_0).$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Derivación implícita

Usualmente se piensa que es necesario conocer  $f$ , o despejar  $y$ , para después derivar. Sin embargo, como ya vimos eso no siempre es posible. Sin embargo, es posible calcular  $\frac{dy}{dx}$  mediante un proceso denominado derivación implícita. Este proceso consiste en derivar ambos miembros de una ecuación con respecto a  $x$ , usando las reglas de derivación y luego resolviendo para  $\frac{dy}{dx}$ . En la derivación implícita lo más se usa es la regla de la cadena, porque estaremos suponiendo que una variable (usualmente  $y$ ) es función de la otra (usualmente  $x$ ).



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



## Ejemplo

Si  $y = y(x)$ , entonces

- Derivar  $y^4$  (respecto de  $x$ ) es:

$$\frac{d}{dx}(y^4) = \frac{d}{dy}(y^4) \frac{dy}{dx} = 4y^3 y'.$$

- Derivar  $(x^2 + y)$  es:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y) = 2x + \frac{d}{dy}(y) \frac{dy}{dx} = 2x + y'.$$

- Derivar  $x^5 y^2$  es:

¿Cómo sería derivar las expresiones anteriores respecto de  $y$ ?



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Ejemplo

Considere la ecuación  $\cos(x + y) = y \sin(x)$ .

Derivando respecto de  $x$  ambos miembros se obtiene:

$$-\sin(x + y)(1 + y') = y' \sin(x) + y \cos(x)$$

Podemos despejar  $y'$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y \cos(x) + \sin(x + y)}{\sin(x) + \sin(x + y)}.$$



## Ejercicio

La curva  $C$  mostrada en la figura es el conjunto formado por todos los puntos  $(x, y)$  cuyas coordenadas satisfacen la ecuación  $x^3 - xy + y^2 = 4$ .

Determine la ecuación de la recta tangente a  $C$  en el punto de intersección de  $C$  con el eje  $X$ .



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Ejercicio

La curva  $C$  mostrada en la figura es el conjunto formado por todos los puntos  $(x, y)$  cuyas coordenadas satisfacen la ecuación  $y^3 - 5x^2y = 2x^5$ .

- 1 Determine la ecuación de la recta tangente a la curva  $C$  en el punto  $(1, -2)$ .
- 2 Si la recta tangente a la curva  $C$  en el punto  $P$  (ver al figura) es una recta horizontal, determine la coordenadas del punto  $P$ .



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Ejercicio

La elipse  $\mathcal{E}$  mostrada en la figura es el conjunto formado por los todos los puntos  $(x, y)$  cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$\frac{(x + y)^2}{32} + \frac{(y - x)^2}{8} = 1.$$

- 1 Calcule la razón de cambio  $\frac{dx}{dy}$  cuando  $x = 3$  y  $y = 1$ .
- 2 Determine la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto  $(1, 3)$ .
- 3 Encuentre todos los puntos de  $\mathcal{E}$  donde la recta tangente es vertical.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

# Sesión 02



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



## Teorema (Derivada del logaritmo natural)

Sea  $I \subset ]0, +\infty[$ . Si  $f(x) = \ln(x)$ ,  $\forall x \in I$ , entonces  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Demostración.

En efecto

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} &= \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{1/h} \\ &= \ln \left( \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} \right)^{1/x} \\ &= \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h}\end{aligned}$$

como  $\lim_{h \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{x/h} = e$  entonces

$$(\ln(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x} \ln(e) = \frac{1}{x} .$$



## Derivada de funciones hiperbólicas

- Si  $f(x) = \sinh(x)$ ,  $\forall x \in I$ , entonces  $f'(x) = \cosh(x)$
- Si  $f(x) = \cosh(x)$ ,  $\forall x \in I$ , entonces  $f'(x) = \sinh(x)$
- Si  $f(x) = \tanh(x)$ ,  $\forall x \in I$ , entonces  $f'(x) = \operatorname{sech}^2(x)$
- Si  $f(x) = \coth(x)$ ,  $\forall x \in I$ , entonces  $f'(x) = -\operatorname{csch}^2(x)$
- Si  $f(x) = \operatorname{sech}(x)$ ,  $\forall x \in I$ , entonces  $f'(x) = -\tanh(x)\operatorname{sech}(x)$
- Si  $f(x) = \operatorname{csch}(x)$ ,  $\forall x \in I$ , entonces  $f'(x) = -\coth(x)\operatorname{csch}(x)$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Demostración.

En efecto, si  $x \in I$

$$\sinh'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

del mismo modo

$$\cosh'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Demostración.

Las demás derivadas de las demás funciones hiperbólicas pueden obtenerse aplicando las reglas de suma y producto de derivadas.

$$\begin{aligned}\tanh'(x) &= \frac{\sinh'(x) \cosh(x) - \cosh'(x) \sinh(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{\cosh(x) \cosh(x) - \sinh(x) \sinh(x)}{\cosh^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cosh^2(x)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\coth'(x) &= -\frac{\tanh'(x)}{\tanh^2(x)} = -\frac{1/\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)/\cosh^2(x)} \\ &= -\frac{1}{\sinh^2(x)}.\end{aligned}$$

## Derivación logarítmica

La última derivada es la base de una técnica, la de derivación logarítmica:

$$\frac{d}{dx} \left[ \ln (f(x)) \right] = \frac{f'(x)}{f(x)} .$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

## Ejemplo

Si  $y = x^\alpha$ , siendo  $\alpha \in \mathbb{R}$  fijo (y  $x \in \mathbb{R}$  o  $x > 0$  según corresponda), entonces  $\ln y = \alpha \ln x$ , de donde, derivando

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x},$$

de donde

$$y' = \alpha \frac{y}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Concluimos que

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$



## Ejemplo

Si  $y = a^x$ , siendo  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  fijo, tenemos, sucesivamente,

$$\ln y = x \ln a ,$$

luego,

$$\frac{y'}{y} = (x \ln a)' = \ln a ,$$

e  $y' = y \ln a = a^x \ln a$ . Esto lo escribimos como

$$(a^x)' = a^x \ln a .$$



## Ejemplo

Si queremos encontrar la recta tangente  $L_T$ , en el punto  $(2, 8)$ , a la curva descrita por

$$y = x2^x ,$$

en primer lugar calculamos la derivada:

$$y'(x) = x(\ln 2)2^x + 2^x ,$$

y encontramos la pendiente de la recta tangente:

$$y'(2) = (\ln 2)8 + 4 \implies m = 8 \ln 2 + 4 .$$

finalmente obtenemos la ecuación de  $L_T$ :

$$L_t : y = (8 \ln 2 + 4)(x - 2) + 8 .$$

## Método de derivación logarítmica

Para obtener la derivada de  $y = f(x)$  mediante el método de derivación logarítmica, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Tomamos logaritmos naturales en ambos miembros de la expresión por derivar.
2. Utilizamos las propiedades de los logaritmos para reducir los productos y potencias presentes.
3. Derivados ambos miembros respecto de la variable independiente.
4. Despejamos la derivada  $y'$ .
5. Reemplazamos la expresión de  $y$  y simplificamos la expresión resultante.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



## Ejemplo

Para derivar  $y = f(x) = \frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}}$ .

$$1. \ln y = \ln \left( \frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}} \right),$$

$$2. \ln y = \ln(x^{1/2}(x+1)^5) - \ln(10(x^2-3)^{1/3}),$$
$$= \frac{1}{2} \ln(x) + 5 \ln(x+1) - \ln 10 - \frac{1}{3} \ln(x^2-3),$$

$$3. \frac{y'}{y} = \frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{x^2-3},$$

$$4. y' = y \left( \frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{2x}{3(x^2-3)} \right),$$

$$5. y' = \left( \frac{x^{1/2}(x+1)^5}{10\sqrt[3]{x^2-3}} \right) \left( \frac{1}{2x} + \frac{5}{x+1} - \frac{2x}{3(x^2-3)} \right),$$



# Sesión 02



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



# Referencias



James Stewart

Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e

Cengage Learning



Jon Rogawski

Cálculo - Una variable. 2da ed.

W. H. Freeman and Company



Ron Larson - Bruce Edwards

Cálculo, Tomo I. 10ma ed.

Cengage Learning



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA