Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2024-I

[Cálculo de probabilidades]
[Los profesores] UNI, 5 de julio de 2024.

Examen Final

Solucionario

Tiempo: 1h50

1. *Variable aleatoria discreta* Si $\mathbb{P}(X = a) = p$, $\mathbb{P}(X = b) = 1 - p$,

   a) Muestre que $Y = \dfrac{X - b}{a - b}$ es una variable Bernoulli. [2 pts]

   b) Calcule $\mathbb{E}[Y]$. [1.5 pts]

   c) Calcule $\mathbb{V}[Y]$. [1.5 pts]

   Solución:

   a) $P\{Y = 1\} = P\{X = a\} = p$ y $P\{Y = 0\} = P\{X = b\} = 1 - p$, luego $Y \sim Ber(p)$.

   b) Usando que el iı́tem precedente $E[Y] = p$

   c) $Var[Y] = p(1 - p)$

2. *Variable aleatoria continua* La función de densidad de probabilidad de X; el tiempo de vida de un cierto aparato electrónico (medido en horas), es dado por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{x^2} & , \text{ si } x > 10 \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$

   a) Calcule $\mathbb{P}(X > 20)$ [1.5 pts]

   b) Determine la función de distribución acumulada de X. [1.5 pts]

   c) Calcule la probabilidad que de 6 de tales equipos al menos 3 funcionen al menos 15 horas. [2 pts]

   Solución:

   a) $P[X > 20] = \displaystyle\int_{20}^{+\infty} \frac{10}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}$.

   b) $F(a) = P[X \leq a] = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{10}{x^2}\, dx = 0$ si $a \leq 10$.

      $F(a) = P[X \leq a] = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} \frac{10}{x^2}\, dx = \int_{10}^{a} \frac{10}{x^2}\, dx = 1 - \frac{10}{a}$ si $a \geq 10$.

   c) Sean $X_1, \ldots, X_6$ variables aleatorias i.i.d siguiendo la distribución X y N la variable aleatoria que cuenta el número de éxitos de el artículo i dura al menos 15 horas ($i \in \{1, \ldots, 6\}$), se tiene que $N \sim Bin(6, p) ==$ con $p = P(\{X \geq 15\}) = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$. Luego

   $$P(N \geq 3) = \sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k} = \frac{656}{729} \approx 0,89986.$$

3. *Bivariada discreta* Sea R la región de puntos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sobre el cuadrado(incluso en el borde) $A(-2, -2), B(2, -2), C(2, 2)$ y $D(-2, 2)$ y donde cada punto (x, y) de R satisface $2x \geq y$. Sobre dicha región R se define una variable bivariada discreta (X, Y) uniformemente distribuida.

a) Determine la función de probabilidad conjunta $p_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. [0.5 ptos]

b) Calcule las distribuciones marginales $p_X(x)$ y $p_Y(y)$. [0.5 ptos]

c) Determine $p_{X|Y=1}(x) = \mathbb{P}(X = x|Y = 1)$ para $x \in R_X$. [1 pto]

d) Determine $\mathbb{E}(X|Y = 1)$. [1 pto]

e) Determine $\mathbb{E}(Y|X = 1)$. [2 ptos]

f) (*Opcional*) Determine $\mathbb{E}(X|Y)$. [3 ptos]

Solución:

a) La región tiene 14 puntos, con lo cual $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1/14$ para $(x, y) \in R$.

b) De lo anterior tenemos que:

$\mathbb{P}(X = 2) = 5/14$	$\mathbb{P}(Y = 2) = 2/14$
$\mathbb{P}(X = 1) = 5/14$	$\mathbb{P}(Y = 1) = 2/14$
$\mathbb{P}(X = 0) = 3/14$	$\mathbb{P}(Y = 0) = 3/14$
$\mathbb{P}(X = -1) = 1/14$	$\mathbb{P}(Y = -1) = 3/14$
	$\mathbb{P}(Y = -2) = 4/14$

c) De lo anterior,

$$p_{X|Y=1}(x) = \begin{cases} 1/2 & x = 2, \\ 1/2 & x = 1 \end{cases}$$

d) De lo anterior, $\mathbb{E}(X|Y = 1) = 3/2$

e) De los items previos tenemos:

$$p_{Y|X=1}(y) = \begin{cases} 1/5 & y = 2, \\ 1/5 & y = 1, \\ 1/5 & y = 0, \\ 1/5 & y = -1, \\ 1/5 & y = -2, \end{cases}$$

De esta forma tenemos que $\mathbb{E}(Y|X = 1) = 0$.

f) *Sustitutorio*

4. *Bivariada continua* La cantidad de sodio (X) y la cantidad de grasas saturadas (Y) que contiene una galleta, ambas expresadas en cientos de miligramos, son variables aleatorias cuya función de densidad conjunta está dada por:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k\left(3x^2 + 2xy + \frac{y}{2}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Determine el valor de la constante k. [1 pto]

b) Determine la probabilidad que una galleta contenga menos de 100 miligramos de sodio y más de 50 miligramos de grasas saturadas. [1 pto]

c) Determine las funciones marginales. [1 pto]

d) Determine la cantidad esperada de sodio, cuando la cantidad de grasas saturadas es igual a su respectivo valor esperado. [2 ptos]

Solución:

a) Integrando tenemos $k = 2/21$.

b) Piden $\mathbb{P}(X < 1, Y > 0{,}5) = \int_{0{,}5}^{1}\int_{0}^{1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0{,}1011$

c) Integrando tenemos:

$$f_X(x) = \frac{6}{21}x^2 + \frac{2}{21}x + \frac{1}{42} \quad \text{y} \quad f_Y(y) = \frac{16}{21} + \frac{10}{21}y$$

d) Tenemos que $\mu_Y = 0{,}53968$

$$\mathbb{E}(X|Y = \mu_Y) = \mathbb{E}(X|Y = 0{,}53968) = \int_0^2 x\frac{f_{(X,Y)}(x, 0{,}53968)}{f_Y(0{,}53968)}\mathrm{d}x = 1{,}44114737883$$

Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2024-I

[Cálculo de probabilidades]
[Los profesores] UNI, 8 de mayo de 2024.

Examen Parcial

Solucionario

Tiempo: 1h50

1. *Número de hijos*
   Suponiendo que es equiprobable el tener hijo o hija, determinar el número esperado de varones en una familia de ocho hijos, así como la probabilidad de que efectivamente resulte este número.
   [5 puntos]
   Solución:
   Sea X : número de hijos varones en una familia de 8 hijos, tenemos que:
   $$X \sim \text{Bin}(8, 0{,}5)$$
   Con lo cual $\mathbb{E}(X) = 4$, con lo cual $\mathbb{P}(X = 4) = 0{,}273$

2. *Spam o no Spam*
   Se estima que el 50 % de los correos electrónicos son spam. Se ha aplicado algún software para filtrar estos correos electrónicos no deseados antes de que lleguen a su bandeja de entrada. Cierta marca de software afirma que puede detectar el 99 % de los correos electrónicos no deseados y la probabilidad de un falso positivo (un correo electrónico que no es spam detectado como spam) es del 5 %. Ahora bien, si un correo electrónico se detecta como spam, ¿cuál es la probabilidad de que en realidad no sea spam? [5 puntos]
   Solución:
   Considerando:
   $$\begin{aligned} A &= \text{Email es detectado como Spam} \\ B &= \text{Email es Spam} \\ B^c &= \text{Email no es Spam} \end{aligned}$$
   Por el teorema de Bayes tenemos:
   $$\mathbb{P}(B^c|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} = \frac{5}{104} = 0{,}0481$$

3. *Casa de apuestas*
   Deseamos analizar un juego de apuesta. Para esto se gira una ruleta, la probabilidad de que salga rojo es 18/38 y de que salga otro color es 20/38. Además, si sale el color rojo el jugador gana 1 sol en caso contrario pierde 1 sol. De esta forma, un jugador apuesta siguiendo las siguientes reglas en orden:
   - Apuesta la primera vez al color rojo.
   - Si gana la primera vez, ya no sigue jugando.
   - Si no gana pierde 1 sol, y apuesta solamente dos veces más al color rojo.
   - Se retira del juego independientemente de sus ganancias.

   Denotamos por:
   $$X = \text{ Ganancia del jugador al retirarse al final del juego}$$

(a) Determine los valores posibles de X.
Solución:
$R_x = \{1, -1, -3\}$

(b) Determine la función de masa de X.
Solución:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=1) &= \tfrac{18}{38} + \tfrac{20}{38}\left(\tfrac{18}{38}\right)^2 = 0{,}59 \\ \mathbb{P}(X=-1) &= 2\tfrac{18}{38}\left(\tfrac{20}{38}\right)^2 = 0{,}2624 \\ \mathbb{P}(X=-3) &= \left(\tfrac{20}{38}\right)^3 = 0{,}145 \end{aligned}$$

(c) Determine $\mathbb{P}(X > 0)$ e interprete si la estrategia del jugador es buena.
Solución:

$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 0{,}59$$

La estrategia en probabilidad es buena.

(d) Determine $\mathbb{E}(X)$ e indique si la estrategia del jugador es buena.
Solución:
Tenemos que $\mathbb{E}(X) = -0{,}1$, la estrategia en media no es buena.

[4 puntos]

4. *Garza*
Una casa tiene una fuente de agua donde crian algunos pescados. Ellos siempre los alimentan, de pronto estos comenzaban a desaparecer. La causa era que una garza llegaba y se comía los pescados cuando nadie los veía. Sea N el número de veces que la garza visita la fuente en un día, tenemos que $\mathbb{P}(N = n) = (1-\theta)\theta^n$ para $\theta = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Cuando visita la fuente tiene una probabilidad p de comer un pescado en dicha visita, independientemente de la cantidad de peces(Se asume una cantidad grande de pescados). Deseamos estudiar T : Cantidad de peces pescados por la garza en un día.

(a) Denotamos por X_i : La cantidad de pescados cazados en la visita i. Determine el rango de valores de X_i y su función de probabilidad. [1/2 punto]

(b) Determine la función generadora de probabilidad de X_i denotada por $G_X(s)$. [1/2 punto]

(c) Determine la función generadora de probabilidad de N denotada por $G_N(s)$. [1 punto]

(d) Considerando que la garza ha visitado N veces la fuente. Determine la relación entre T y X_1, X_2 , ... , X_N. [1 punto]

(e) *Opcional* Demuestre que $G_T(s) = G_N(G_X(s))$.

(f) Admitimos el resultado previo. Determine $G_T(s)$. [1 punto]

(g) Determine $\mathbb{E}(T)$. [1 punto]

(h) Determine la distribución de T. [1 punto]

Solución:
Sustitutorio.

Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2024-I

[**Cálculo de probabilidades**]
[**Los profesores**] UNI, 17 de julio de 2024.

Examen Sustitutorio

Solucionario

Tiempo: 1h50

1. Determine la cantidad de soluciones no negativas en:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

   Solución:
   Ver proposición 6. de la sección 1.6 del libro de referencia

2. Supongamos que en una fiesta N nombres tira su sombrero al centro de un cuarto. Estas luego son mezcladas y cada hombre selecciona una al azar. Determine la probabilidad que ningún hombre seleccione su propio sombrero
   Solución:
   Ver ejemplo 5.m de la sección 2.5 del libro de referencia.

3. Para determinar la eficacia de una determinada dieta para reducir la cantidad de colesterol en el torrente sanguíneo, se somete a ella a 100 personas. Después de haber estado a dieta durante un tiempo suficiente, se les tomará el recuento de colesterol. El nutricionista que realiza este experimento ha decidido respaldar la dieta si al menos el 65 por ciento de las personas tienen un nivel de colesterol más bajo después de seguir la dieta. ¿Cuál es la probabilidad de que el nutricionista apruebe la nueva dieta si, en realidad, no tiene ningún efecto sobre el nivel de colesterol?
   Solución:
   Ver ejemplo 4j de la sección 5.4

4. Supongamos que si se envía un valor de señal s desde la ubicación A, entonces el valor de la señal recibido en la ubicación B se distribuye normalmente con los parámetros (s, 1). Si S, el valor de la señal enviada en A, se distribuye normalmente con parámetros (μ, σ^2), ¿Cuál es la mejor estimación de la señal enviada si R, el valor recibido en B, es igual a r?
   Solución:
   Ver ejemplo 6.b de la sección 7.6 del libro de referencia

Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2024-I

[Cálculo de probabilidades]
[Los profesores] UNI, 11 de abril de 2024.

Práctica calificada 1
Solucionario
Tiempo: 1h50

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $A_1, \ldots, A_n$ eventos. Demostrar que

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)\right) - (n-1).$$

(5 puntos)

Solución:

Procederemos por inducción sobre n, siendo el punto clave la fórmula

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

La propiedad es verdadera si $n = 1$. Supongamos que es cierto para $n-1$, y demostrémos que es cierto para n. Sea $A = A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ y $B = A_n$. Entonces, según la fórmula anterior

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

Ahora, usamos la hipótesis de inducción para reducir $\mathbb{P}(A)$, y usamos el hecho de que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$, y obtenemos

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(A_i\right) - (n-2) + P\left(A_n\right) - 1$$

que es exactamente el resultado deseado.

2. Un grupo, compuesto por cinco hombres y siete mujeres, forma un comité de 2 hombres y 3 mujeres. De cuántas formas puede formarse, si:

   a) Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer. (1.5 puntos)
   b) Una mujer determinada debe pertenecer al comité. (1.5 puntos)
   c) Dos hombres determinados no pueden estar en el comité. (2 puntos)

Solución:

a) Notemos que como se puede escoger a cualquier hombre, entonces podemos escoger a cualesquiera 2 de los 5 hombres. Notamos que
   - No entran todos los elementos. Esto ya que solo se toman 2 de los 5 hombres.
   - No importa el orden. Esto ya que es lo mismo escoger a Juan y Pedro que escoger a Pedro y a Juan.
   - No se repiten los elementos. Esto ya que obviamente no podemos elegir más de una vez a una persona.

Esto nos darían combinaciones de C_2^5 para poder escoger a los dos hombres. Al igual, podemos escoger entre todas las mujeres y, además, se cumplen las mismas condiciones, por lo tanto serían combinaciones C_3^7 formas distintas de tomar 3 de las 7 mujeres. Esto nos da como resultado final el producto de las combinaciones que obtuvimos. Esto es

$$C_2^5 \cdot C_3^7 = \frac{5!}{(5-2)!2!} \cdot \frac{7!}{(7-3)!3!} = 350$$

b) Notemos que al igual que en el inciso anterior, podemos escoger entre todos los hombres, por lo tanto de nuevo tendríamos combinaciones C_2^5 en los hombres. Ahora, a diferencia del item anterior con las mujeres, aquí nos dice que una mujer ya está determinada, o sea, ya es elegida, por lo tanto, ahora debemos elegir las 2 que faltan entre las 6 restantes, esto lo calculamos con las combinaciones C_2^6. Así, de nuevo nuestro resultado final es el producto de nuestras combinaciones obtenidas:

$$C_2^5 \cdot C_2^6 = \frac{5!}{(5-2)!2!} \cdot \frac{6!}{(6-2)!2!} = 150$$

c) Notemos que al igual que en el item a), podemos escoger entre todos las mujeres, por lo tanto de nuevo tendríamos combinaciones C_3^7 en los mujeres. Ahora, a diferencia de los items anteriores, aquí nos dicen que dos hombres de los 5 no pueden se escogidos, por lo tanto, tenemos que escoger a los 2 entre los 3 restantes, esto lo calculamos con las combinaciones C_2^3. Por último, nuestro resultado final está dado por el producto de las combinaciones obtenidas

$$C_2^3 \cdot C_3^7 = \frac{3!}{(3-2)!2!} \cdot \frac{7!}{(7-3)!3!} = 105$$

3. Si 72 estudiantes desean matricularse en una de las 3 aulas del curso de Calculo de probabilidades, donde hay 27, 20 y 25 vacantes respectivamente. ¿Cuántas formas los estudiantes se pueden matricular? (5 puntos)
Solución:

$$\binom{72}{27}\binom{72-27}{20}\binom{72-27-20}{25} = \binom{72}{27}\binom{45}{20} = \frac{72!}{27!(45)!}\frac{45!}{20!(25)!} = \frac{72!}{20!(25!)(27!)}$$

4. ¿Cuántos subconjuntos con más de dos elementos tiene un conjunto de 100 elementos? (5 puntos)
Solución:

Número de subconjuntos de 0, 1 y 2 elementos: $\binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \binom{100}{2}$
Por complemento, la respuesta es: $2^{100} - (\binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \binom{100}{2})$

Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2024-I

[Cálculo de probabilidades]
[Los profesores] UNI, 28 de abril de 2024.

Práctica calificada 2

Tiempo: 1h50

1. *Computacional - teórico*
Una rueda de lotería tiene 10 casillas: 3 casillas rojas y 7 casillas negras. casillas negras. Si te toca un casilla rojo, ganas 10 euros, de lo contrario pierdes 5 soles. X es la variable aleatoria que da las ganancias del jugador.

   a) Determina la función de masa de X y $\mathbb{E}(X)$.
   b) Escriba un pseudocódigo o un código en lenguaje Python para:
      - Una función **Ganancia** que simule la variable aleatoria X
      - Una función **Promedio** que calcule y devuelva la media de una muestra de tamaño n de X.

(4 puntos)

Solución:

   a) Tenemos que $\mathbb{P}(X = 10) = \frac{3}{10}$ y $\mathbb{P}(X = -5) = \frac{7}{10}$, además $\mathbb{E}(X) = -0{,}5$.
   b)

```
from random import *
    def Ganancia():
    a = randint (1,10)
    if a<= 3 :
        x = 10
    else:
        x = -5
    return x

def Media(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + Ganancia()
    m = s/n
    return m
```

2. *Computacional*
Tenemos una dado equilibrado de 6 caras y dos urnas: la urna U_1 contiene dos bolas verdes y 3 rojas, y la urna U_2 contiene 1 bola verde y dos rojas. Tiramos el dado y si el resultado es 1 o 2 entonces sacamos una bola en la urna U_1, en caso contrario sacamos en la urna U_2. El juego se considera ganado si se extrae una bola verde.

   a) Escribe un pseudocódigo o un algoritmo en Python para simular este juego.
   b) Modifique este algoritmo para que simule n juegos y cuente el número de juegos ganadores.

(4 puntos)

Solución:

a)

```
from random import *

d = randint(1,6)

if d <= 2:
    U1 = randint(1,5)
    if U1 <= 2:
        print( " Sacaste una bola verde, ganaste." )
    else:
        print(" Sacaste una bola roja, perdiste. ")
else:
    U2 = randint(1,3)
    if U2 == 1:
        print("Sacaste una bola verde, ganaste.")
    else:
        print("Sacaste una bola roja, perdiste.")
```

b)

```
from random import *

somme = 0

n = int( input("Numero de juegos ?") )
for i in range(1,n+1):
    d = randint(1,6)
    # print(s)
    if d <= 2:
        U1 = randint(1,5)
        if U1 <=2 :
            somme = somme + 1
            # print("Has sacado una bola verde, has ganado")
        else:
            somme = somme
            # print("Sacaste una bola roja y perdiste")
    else:
        U2 = randint(1,3)
        if U2 == 1:
            somme = somme + 1
            # print("Has sacado una bola verde, has ganado")
        else:
            somme = somme
            # print("Sacaste una bola roja y perdiste")
print(somme)
```

3. *Teórico*
Los cuatro motores de un avión cuatrimotor (dos en cada ala) fallan, cada uno con probabilidad $0,04$, en forma independiente, durante un trayecto de 20000 kilómetros. El avión no entra en emergencia mientras funcionen sin fallar por lo menos dos motores:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el avión no entre en emergencia? (2 puntos)

b) ¿Cuál será esa probabilidad si se agrega la restricción de que, al menos debe funcionar un motor en cada ala? (2 puntos)

Solución:

a) Definiendo una variable binomial X: número de motores que fallan de un total de cuatro motores.

$$X \sim Binomial(n = 4, p = 0{,}04)$$

Que el avión no entre en emergencia es equivalente a que la cantidad de motores que fallan sea menor o igual a dos.

$$\begin{aligned} P(\text{no entre en emergencia}) &= P(X \leq 2) \\ P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \end{aligned}$$

Se pueden calcular las probabilidades puntuales usando la fórmula de probabilidad puntual de una variable binomial:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{4}{0} \cdot (0{,}04)^0 \cdot (0{,}96)^4 \approx 0{,}8493 \\ P(X = 1) &= \binom{4}{1} \cdot (0{,}04)^1 \cdot (0{,}96)^3 \approx 0{,}1416 \\ P(X = 2) &= \binom{4}{0} \cdot (0{,}04)^2 \cdot (0{,}96)^2 \approx 0{,}0088 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$P(X \leq 2) = 0{,}8493 + 0{,}1416 + 0{,}0088 \approx 0{,}9998$$

b) Ahora se agrega la restricción de que para que el avión no entre en emergencia debe funcionar al menos un motor en cada ala.

Llamemos A al suceso de que funciona al menos un motor en el ala izquierda y B al suceso de que funciona al menos un motor en el ala derecha.

Otra vez vamos a definir una variable binomial que nos ayude a calcular la probabilidad del suceso.

Sea Y el número de motores que funcionan bien en el ala izquierda. La distribución Y es

$$\begin{aligned} Y &\sim Binomial(n = 2, p = 0{,}04) \\ P(A) &= P(Y \leq 1) = 0{,}9984 \end{aligned}$$

Pero cómo los motores fallan con la misma probabilidad independientemente del ala del avión entonces: $P(B) = 0{,}9984$.

Es posible expresar al suceso de que el avión no entra en emergencia cómo la intersección de A y B, Cómo los sucesos A y B son independientes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9984^2 = 0{,}9968$$

4. *Teórico*

Tres máquinas, A, B y C, producen el 45 %, 30 % y 25 %, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3 %, 4 % y 5 %.

a) Seleccionamos una pieza al azar; calcule la probabilidad de que sea defectuosa.

b) Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de haber sido producida por la maquina B.

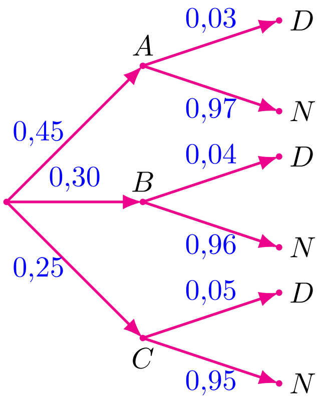
c) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

(4 puntos)

Solución:

Sea D el suceso "la pieza es defectuosaz sea N el suceso "la pieza no es defectuosa". La información del problema puede expresarse en el diagrama de árbol adjunto.

a) Para calcular la probabilidad de que la pieza elegida sea defectuosa, p(D), por la propiedad de la probabilidad total, $p(D) = p(A) \cdot p(D|A) + p(B) \cdot p(D|B) + p(C) \cdot p(D|C) = (0{,}45)(0{,}03) + (0{,}30)(0{,}04) + (0{,}25)(0{,}05) = 0{,}038$



b) Debemos calcular $p(B|D)$. Aplicamos el teorema de Bayes, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
p(B|D) &= \frac{p(B) \cdot p(D|B)}{p(A) \cdot p(D|A) + p(B) \cdot p(D|B) + p(C) \cdot p(D|C)} \\
p(B|D) &= \frac{(0{,}30)(0{,}04)}{0{,}038} \\
p(B|D) &\approx 0{,}316
\end{aligned}
$$

c) Calculamos $p(A|D)$ y $p(C|D)$, comparándolas con el valor de $p(B|D)$ ya calculado. Aplicamos el teorema de Bayes y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
p(A|D) &= \frac{p(A) \cdot p(D|A)}{p(A) \cdot p(D|A) + p(B) \cdot p(D|B) + p(C) \cdot p(D|C)} \\
p(A|D) &= \frac{(0{,}45)(0{,}03)}{0{,}038} \\
p(A|D) &\approx 0{,}355
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(C|D) &= \frac{p(C) \cdot p(D|C)}{p(A) \cdot p(D|A) + p(B) \cdot p(D|B) + p(C) \cdot p(D|C)} \\
p(C|D) &= \frac{(0{,}25)(0{,}05)}{0{,}038} \\
p(C|D) &\approx 0{,}329
\end{aligned}
$$

De donde deducimos que la máquina con mayor probabilidad de haber producido la pieza defectuosa es A.

5. *Teórico*

Una agencia de viajes tiene dos listas de paquetes turísticos. La lista 1 contiene cinco lugares de la costa y dos de la sierra, mientras que la lista 2 contiene dos lugares de la costa y seis de la sierra. Un cliente selecciona un lugar al azar de la lista 1 y lo agrega a la lista 2, para luego escoger al azar un lugar de la nueva lista 2. Si el lugar seleccionado es de la sierra, ¿Cuál es la probabilidad de que el lugar agregado sea de la costa? (4 puntos)

Solución:

Sea A = lugar de la costa seleccionado en la lista 1, B = lugar de la costa seleccionado en la lista 2. Vemos que

a) $P(A) = 5/7$, probabilidad de escoger un lugar de la costa en la lista 1 que tiene 7 lugares.

b) $P(\overline{B}|A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, probabilidad de escoger un lugar de la sierra en la lista 2 si se agregó un lugar de la costa, la lista 2 tiene ahora 9 lugares con 3 de la costa.

c) $P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{7}{9}$, probabilidad de escoger un lugar de la sierra en la lista 2 si se agregó un lugar de la sierra, la lista 2 tiene ahora 9 lugares con 7 de la sierra.

Finalmente

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}|A)P(A)}{P(\overline{B}|A)P(A) + P(\overline{B}|\overline{A})P(\overline{A})} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{5}{7}\right)}{\frac{2}{3}\left(\frac{5}{7}\right) + \frac{7}{9}\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{30}{44}}$$

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2024-1**

[Curso:Calculo de probabilidades][Cod: CM1H2]

Tercera practica calificada

1. Un modelo que habitualmente se utiliza en balística para comprobar la correcta calibración de las armas es

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \geq 0,\ \sigma \geq 0,$$

donde la variable aleatoria X es la distancia del punto de impacto del proyectil al centro del blanco al que iba dirigido y σ es el parámetro que mide la precisión. Si para una distancia determinada de disparo la precisión del arma es $\sigma = 10$ cm,

a) Calcular la función de distribución. (2 punto)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 8 proyectiles, ninguno haya impactado a una distacia menor de 5 cm del centro del blanco? (3 punto)

Solución:

a) Sabemos que

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = -e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x \geq 0$$

b) Sea A_i al suceso "el disparo i está más allá de 5 m del objetivo ".
Como

$$P(A_i) = P(X \geq 5) = 1 - F(5) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{5^2}{2(10)^2}}\right) = e^{-1/8}$$

Luego la probabilidad de que los diez disparos estén más allá de 5m es

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_8) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_8) = (e^{-1/8})^8 = e^{-1}$$

2. El tiempo de espera entre eventos se modela a menudo usando la distribución exponencial. Por ejemplo, supongamos que un promedio de 30 clientes por hora llegan a una tienda y el tiempo entre llegadas se distribuye exponencialmente.

a) En promedio, ¿cuántos minutos transcurren entre dos llegadas sucesivas? (0.5 puntos)

b) Cuando la tienda abre por primera vez, ¿cuánto tiempo en promedio tardan tres clientes en llegar? (0.5 puntos)

c) Después de que llegue un cliente, encuentre la probabilidad de que tarde menos de un minuto para que llegue el siguiente cliente. (1 punto)

d) Después de que llegue un cliente, encuentre la probabilidad de que tarde más de cinco minutos para que llegue el siguiente cliente. (1 punto)

e) ¿El setenta por ciento de los clientes llegan dentro de cuántos minutos del cliente anterior? (1 punto)

f) ¿Es razonable una distribución exponencial para esta situación? (1 punto)

Resolución:

a) Como esperamos que 30 clientes lleguen por hora (60 minutos), esperamos en promedio que un cliente llegue cada dos minutos en promedio.

b) Dado que un cliente llega cada dos minutos en promedio, tardarán seis minutos en promedio para que lleguen tres clientes.

c) Sea X el tiempo entre llegadas, en minutos. Por item a) $\mu = 2$, luego $m = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Por lo tanto, $X \sim Exp(0{,}5)$. La función de distribución acumulativa es $P(X < x) = 1 - e^{-0{,}5x}$. Así,
$$P(X < 1) = 1 - e^{(-0{,}5)(1)} \approx 0{,}3935$$

d) $P(X > 5) = 1 - P(x < 5) = 1 -)1 - e^{(-0{,}50)(5)} = e^{-2{,}5} \approx 0{,}0821$.

e) Resolvemos $0{,}70 = P(X < x)$ para x. Sustituyendo la función de distribución acumulativa se tiene
$$\begin{aligned} 0{,}70 &= 1^{-}e^{-0{,}5x} \\ e^{-0{,}5x} &= 0{,}30 \\ x &= -2\ln(0{,}30) \\ x &= 2{,}41 \end{aligned}$$
Así, el setenta por ciento de los clientes llega antes de los 2,41 minutos del cliente anterior.

f) Este modelo asume que un solo cliente llega a la vez, lo que puede ser irrazonable, ya que la gente puede comprar en grupos, lo que hace que varios clientes lleguen al mismo tiempo. También supone que el flujo de clientes no cambia a lo largo del día, lo que no es válido si algunas horas del día están más ocupadas que otras.

3. Si Y es una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme en $[0; 5]$, ¿cuál es la probabilidad de que ambas raíces de la ecuación
$$4x^2 + 4xY + Y = 0$$
sean reales? (5 puntos)

Solución Y es una variable aleatoria uniforme en $[0, 5]$ con densidad de probabilidad $f_Y(x) := \frac{1}{5}1_{[0,5]}(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
Y es defnida en cierto espacio muestral Ω y a valores en $\mathbb{R}$, se tiene que dado un $\omega \in \Omega$ la ecuación $4x^2 + 4xY(\omega) + Y(\omega) = 0$ tiene sus dos raíces reales si y solo si se cumple la siguiente condición del discriminante $[4Y(\omega)]^2 - 16Y(\omega) \geq 0 \Leftrightarrow [Y(\omega) - 1]Y(\omega) \geq 0$. De forma equivalente, se define el suceso en Ω como:
$$R := \Big\{\omega \in \Omega : \text{ la ecuación } 4x^2 + 4xY(\omega) + Y(\omega) = 0 \text{ tiene ambas raices reales } \Big\}$$

Entonces:
$$\begin{aligned} R :=& \{\omega \in \Omega : [Y(\omega) - 1]Y(\omega) \geq 0\} \quad .....[1] \\ & \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \geq 0 \wedge Y(\omega) \geq 1\} \cup \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq 0 \wedge Y(\omega) \leq 1\} \end{aligned}$$

Pero como $P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq 0 \wedge Y(\omega) \leq 1\}) = P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq 0\}) = \int_{-\infty}^{0} f_Y(x)dx = 0$. De [1] se concluye que
$$\begin{aligned} P(R) &= P(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \geq 0 \wedge \mathrm{Y}(\omega) \geq 1\}) = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : \mathrm{Y}(\varpi) \geq 1\}) \\ &= P(\mathrm{Y} \in [1, +\infty]) = \int_1^{+\infty} \mathrm{f_Y(x)dx} = \int_1^5 \frac{1}{5}\mathrm{dx} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

4. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución exponencial con parámetro 1 . Denotamos $Y = \lceil X \rceil$ por su parte entera 'superior', por ejemplo, $\lceil 1,5 \rceil = 2$ y $\lceil 3 \rceil = 3$.

   a) Demuestre que Y sigue una distribución geométrica y especificar su parámetro. (1.5 puntos)

   b) Sea $Z = Y - X$. ¿Cuál es su función de distribución? (2.5 puntos)

   c) Deducir que Z es una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(t) = \frac{e^{t-1}}{1-e^{-1}} \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\mathbf{1}]}(\mathbf{t}).$$

(1 punto)

Solución

a) Y tiene valores en $\mathbb{N}^*$. Además, tenemos $Y = n \Longleftrightarrow n-1 < X \leq n$. Por lo tanto

$$P(Y=n) = F_X(n) - F_X(n-1) = \left(1-e^{-n}\right) - \left(1-e^{-(n-1)}\right) = \left(1-e^{-1}\right) e^{-(n-1)}.$$

De aquí se deduce que Y sigue una distribución geométrica con parámetro $1 - \frac{1}{e}$.

b) Z tiene valores en $[0,1[$. Si denotamos F_Z a su función de distribución, es cero a la izquierda de 0 , e igual a 1 a la derecha de 1. Escojamos ahora $t \in [0,1[$. Si $X \in]n-1,n]$ con n en $\mathbb{N}^*$, entonces $Y = n$ y $Z \leq t \Longleftrightarrow X \geq Y - t \Longleftrightarrow X \geq n - t$.

Por lo tanto, tenemos $Z \leq t$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n - t \leq X \leq n$. Por lo tanto,

$$P(Z \leq t) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n - t \leq X \leq n\}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(n-t \leq X \leq n),$$

ya que los sucesos $n - t \leq X \leq n$ son disjuntos. De aquí se deduce

$$P(Z \leq t) = \sum_{n\geq 1} (e^{-(n-t)} - e^{-n}) = \sum_{n \geq 1} (e^t - 1)e^{-n} = (e^t - 1)\frac{1}{e-1}.$$

c) Solo resta derivar.

Uni, 3 de Junio del 2024

Universidad Nacional de Ingeniería
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2024-I

[Cálculo de probabilidades]
[Los profesores] UNI, 23 de junio de 2024.

Práctica calificada 4

Solucionario

Tiempo: 1h50

1. *Computacional*
Sea $f:[0,10]\to\mathbb{R}^+$ dada por $f(x)=x^2$ y definimos (X,Y) un par de variables aleatorias discretas que toman valores en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de distribución uniforme definida solamente dentro de la región debajo de la curva incluso sobre su borde, cuya distribución de probabilidad conjunta $p_{(X,Y)}(x,y)$ esta determinada por:

$$p_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases} c(x+y), & 0\le y\le f(x) \quad 0\le x\le 10\\ 0, & \text{en el resto}\end{cases}$$

a) Cree una función en python o un pseudocódigo que calcule c. (2 puntos)
b) Cree una función en python o un pseudocódigo que calcule $\mathbb{P}(X+Y\le 10)$. (2 puntos)

Solución:

a) Como la suma de todas las probabilidades deben de ser 1. Determinamos todas las probabilidades en todos los puntos y la suma debe de ser 1, con esto obtenemos c.

```
aux = MatrizNula(11,101)

Para i = {0,1,2, ... , 10}
        Para j = {0,1,2, ... , 100}
                Si j <= i**2
                        aux[i,j] = i+j

c = 1/sumAllElements( aux )
```

b) Como ya tenemos c ahora realizamos lo mismo pero con $i+j\le 10$ y sumamos las probabilidades.

```
Para i = {0,1,2, ... , 10}
        Para j = {0,1,2, ... , 100}
                Si j <= i**2 & i+j<= 10
                        prob = prob + c*(i+j)

prob
```

2. *Computacional*
Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias con distribución de probabilidad conjunta como se ve en la tabla siguiente

	y_1		
y_2	-1	0	1
-1	1/16	3/16	1/16
0	3/16	0	3/16
1	1/16	3/16	1/16

Escriba un programa que verifique si son independientes o no y calcule la covarianza. (4 puntos)

Solución:

```
import numpy as np
y1 = np.array([-1, 0 ,1])
y2 = np.array([-1 ,0, 1])
p = np.array([ [1/16 , 3/16,1/16],[3/16,0,3/16],[1/16,3/16,1/16]])
Exy = y1.T @ p@y2
Ex = y1.T @ np.sum(p,axis=0)
Ey = y2.T @ np.sum(p,axis=1)
Cov = Exy- Ex*Ey
print(f"E(Y1)={Ex}")
print(f"E(Y2)={Ey}")
print(f"E(Y1,Y2)={Exy}")
print(f"Cov(Y1,Y2)={Cov}")
```

que nos muestra el resultado

```
E(Y1)=0.0
E(Y2)=0.0
E(Y1,Y2)=0.0
Cov(Y1,Y2)=0.0
```

3. *Teórico*

Sea T la unión del triángulo cuyos vértices son los puntos $O(1,1), I(4,1)$ y $J(1,4)$ y sea (X,Y) un par de variables aleatorias de distribución uniforme definida solamente sobre los puntos enteros de T(Se considera los puntos sobre los lados y los vértices).

a) Determine la función de probabilidad conjunta $p_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. (0.5 ptos)

b) Calcule las distribuciones marginales $p_X(x)$ y $p_Y(y)$. (0.5 ptos)

c) ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y? (1 pto)

d) Calcule la covarianza del par (X,Y). (2 ptos)

Solución:

a)

	y			
x	1	2	3	4
1	1/10	1/10	1/10	1/10
2	1/10	1/10	1/10	0
3	1/10	1/10	0	0
4	1/10	0	0	0

b) De lo anterior tenemos que:

1) $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 2/5$,
2) $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 2) = 3/10$,
3) $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(Y = 3) = 1/5$,
4) $\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(Y = 4) = 1/10$

c) De lo anterior se tiene que $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$ por lo tanto no son independientes.

d) Tenemos que $cov(X,Y) = -0{,}5$.

4. *Teórico*

La función de probabilidad conjunta a la emisión de billetes de una compañía aérea esta definido para $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$p_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} c(x+y), & 0 < x < y \quad 0 < y < 5 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcule c.

b) Calcule las distribuciones marginales de X e Y.

c) ¿Son X e Y independientes?

(4 puntos)

Solución:

a)

		y	
x	2	3	4
1	3c	4c	5c
2	0	5c	6c
3	0	0	7c
4	0	0	0

La suma tiene que ser 1 por lo tanto $c = 1/30$.

b) De lo anterior tenemos: $\mathbb{P}(X = 1) = 2/5$, $\mathbb{P}(X = 2) = 11/30$ y $\mathbb{P}(X = 3) = 7/30$. De manera similar, tenemos que $\mathbb{P}(Y = 2) = 1/10$, $\mathbb{P}(Y = 3) = 3/10$ y $\mathbb{P}(Y = 4) = 3/5$.

c) Como $cov(X, Y) \neq 0$ tenemos que no son independientes.

5. *Teórico*

Sean Y_1, Y_2 variables aleatorias distribuidas conjuntamente con varianzas finitas, demuestre que

$$[\mathbb{E}(Y_1Y_2)]^2 \leq \mathbb{E}(Y_1^2)\mathbb{E}(Y_2^2)$$

(4 puntos)

Solución:

Sea $t \in \mathbb{R}$ entonces $E((tY_1 - Y_2)^2) \geq 0$, luego

$$t^2E(Y_1^2) - 2tE(Y_1Y_2) + E(Y_2^2) \geq 0$$

esto es un polinomio cuadrático $At^2 + Bt + C$ no negativo, por lo que $B^2 - 4AC \leq 0$, entonces

$$4(E(Y_1Y_2))^2 - 4E(Y_1^2)E(Y_2^2) \leq 0$$

y finalmente

$$E(Y_1Y_2)^2 \leq E(Y_1^2)E(Y_2^2)$$