Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 5, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

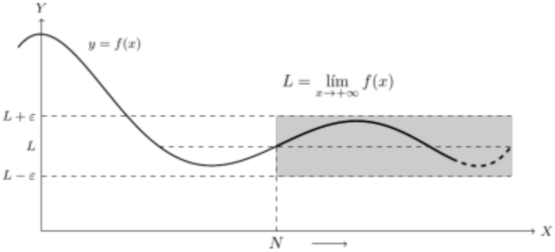
Definición

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado superiormente, $f : A \to \mathbb{R}$, y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiene límite L en $+\infty$ (o cuando x tiende al infinito) si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $N > 0$ (que depende de ϵ) tal que, si $x \in A$ y $x > N$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. Denotamos entonces

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \ .$$

Es decir,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \forall\epsilon > 0, \exists N > 0 : \text{si } x \in A \wedge x > N \implies |f(x) - L| <$$



Definición

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ no acotado inferiormente, $f : A \to \mathbb{R}$, y $L \in \mathbb{R}$. Decimos que f tiene límite L en $-\infty$ (o cuando x tiende a menos infinito) si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $N > 0$ (que depende de ϵ) tal que, si $x \in A$ y $0x < -N$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. Denotamos entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \ .$$

Es decir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N > 0 : \text{si } x \in A \wedge x < -N \Longrightarrow |f(x) - L|$$

Ejemplo: Demostrar que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = -1$$

Ejemplo: Demostrar que para n un número natural se cumple:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Proposición

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = M$.

Entonces

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = L + M.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda f(x) = \lambda L.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda (gf)(x) = L \cdot M.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{L}{M}. \quad M \neq 0$

Se deja como ejercicio la prueba.

Ejemplo: Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

Resolución:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\frac{-2}{1+1}=-1$$

Ejercicio: Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\arctan x}{x+1}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Supongamos que hemos calculado $\lim\limits_{x\to *} = L$ y que queremos calcular $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$

Teorema

- Si $\lim\limits_{x\to *} f(x) = +\infty 0$ o $\lim\limits_{x\to *} = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{1}{f(x)} = 0.$
- Cuando $\lim\limits_{x\to *} f(x) = 0$ tenemos que distinguir dos casos:

$$\text{Si } f(x) \to o^{+} \quad \text{se tiene} \quad \lim_{x\to *} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

$$\text{Si } f(x) \to o^{-} \quad \text{se tiene} \quad \lim_{x\to *} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

Ejemplo:

- Calculemos $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$:

  Usemos que $\dfrac{\ln x}{x} = \left(\dfrac{1}{x}\right) \ln x$, para todo $x > 0$.

  Analizamos cada factor:

  cuando $x \to *$ tenemos $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ y $\ln x \to -\infty$.

  Por la aritmética de límites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

- Calculemos $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x})$:

  Como $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

  entonces $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x}) = +\infty$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

Si $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe y $\lim\limits_{x\to *} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to *} f(x) = 0$.

Demostración:

Que $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ exista quiere decir que $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$ y que L es un número

real. Por la aritmética de límites

$$\lim_{x\to *} f(x) = \lim_{x\to *} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) g(x) = (L)(0) = 0$$

Observe que fue importante en la demostración del teorema que $\lim\limits_{x\to *} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ sea igual a un número real.

En el siguiente ejemplo se muestra que esta condición es necesaria.

Ejemplo: Justifique la veracidad o falsedad de la siguiente proposición:

Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Falso: Justifiquelo mediante un contraejemplo.

Teorema

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$ donde c es un número real, entonces:

1. $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$
2. Si $c > 0$:
   - $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = +\infty$
   - $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$
3. Si $c < 0$:
   - $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = -\infty$
   - $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

Teorema

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ entonces $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$
2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ entonces $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$
3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = -\infty$
4. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ entonces $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = +\infty$

Observación:

- En algunos casos no se puede predecir el límite de la operación conociendo simplemente el de cada operando.
- Las formas anteriores corresponden a las llamadas "formas indeterminadas":

$$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$$

Ejercicios:

1. Un profesor dijo en su clase lo siguiente: Si $\lim_{x \to 0} (g(x))^2 = 9$ entonces, o bien $\lim_{x \to 0} g(x) = 3$, o bien $\lim_{x \to 0} g(x) = -3$
   Muéstrele que está equivocado.

2. Días después dijo lo siguiente:
   Ya que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ entonces concluimos que $\lim_{x \to 0} f(x) \cdot g(x) = 0$.
   Muéstrele que está equivocado.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

3. Calcule los límites

$$\lim_{x\to 0^+ \frac{x^k}{|x|^3}} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^k}{|x|^3}$$

para $k = 1$ y para $k = 2$.

4. Encuentre todos los valores enteros positivos de k para los cuales $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^k}{|x|^3}$ existe.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Asíntota vertical)

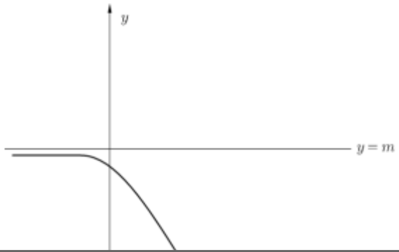
La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función f si

- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$: Asíntota superior izquierda.
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$: Asíntota superior derecha.
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$: Asíntota inferior izquierda.
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$: Asíntota inferior derecha.

Definición (Asíntota horizontal)

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de una función f si

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$: Asíntota horizontal derecha.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$: Asíntota horizontal izquierda.



Definición (Asíntota oblicua)

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = b.$

  Entonces diremos que la recta

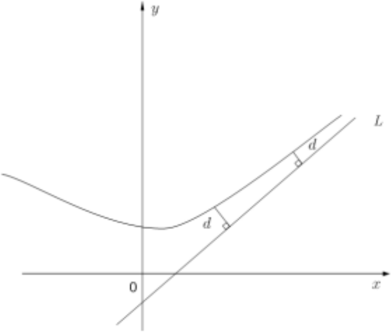
  $$L : y = mx + b$$

  es una asíntota oblicua derecha de la gráfica de f.

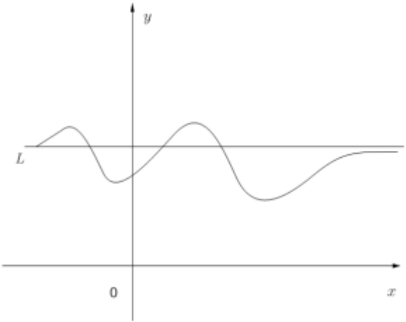
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = b.$

  Entonces diremos que la recta

  $$L : y = mx + b$$



Asíntota oblicua.



Asíntota horizontal derecha.

Ejemplo: Determinar las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 8}{x+3}, \ \forall x \neq -3.$$

Resolución:

a) Asíntotas verticales:
$x = -3$ es una posible asíntota vertical pues anula el denominador.

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x^2 + 5x - 8}{x+3} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x^2 + 5x - 8}{x+3} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

entonces $x = -3$ es una asíntota vertical para f.

b) Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5x-8}{x+3}=\frac{2x+5-\dfrac{8}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=\pm\infty$$

entonces f no tiene asíntotas verticales.

c) Asíntotas oblicuas:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5x-8}{x^2+3x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}}=2$$

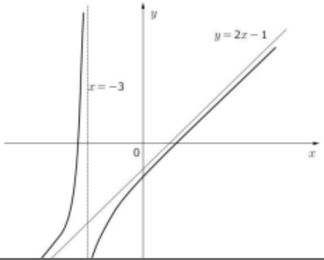
Entonces $m=2$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+5x-8}{x+3}-2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x-8}{x+3} =$$

Entonces $b=-1$.

Por lo tanto:

- $y=2x-1$ es una asíntota oblicua derecha de f.
- $y=2x-1$ es una asíntota oblicua izquierda de f.

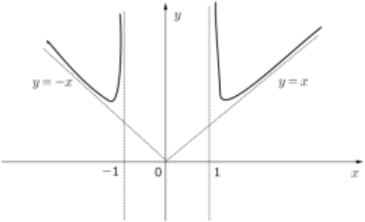


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicio: Determinar las asíntotas de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}, \; x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle.$$

Solución:

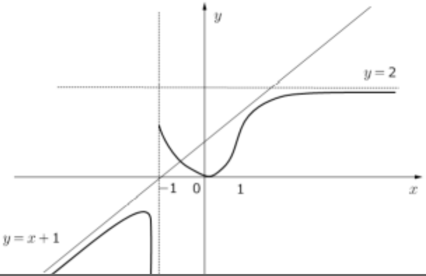


Ejercicio: Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{1}{x+1} & , \text{ si } x < -1 \\ \dfrac{2x^2}{x^2+1} & , \text{ si } x \geq -1 \end{cases}$$

Hallar todas las asíntotas de la función f.

Solución:



Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning

- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company

- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning