Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 17, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Extensión y restricción de una función

Vamos a establecer lo que significan las siguientes afirmaciones:

- g es una extensión de f. En ese caso lo que se tiene es que la función g es el resultado de añadir puntos al dominio de f y definiendo su valor de alguna manera.
- f es una restricción de g. En ese caso lo que se tiene es que la función f resulta de retirar puntos al dominio de g y manteniendo la regla de correspondencia.

En ambos casos: $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Ejemplo

Sean las funciones $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 3, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Luego, g es un extensión de f.

Definición (Continuidad)

Decimos que $f : D \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in D$ si dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera existe un $\delta > 0$ de modo que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x \in D \quad \text{con} \quad |x - a| < \delta \, .$$

Teorema

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $a \in D' \cap D$. Se tiene que f es continua en a, si y solo si,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Observación:

En el caso en que $a \in D$ pero $a \notin D'$ la función es continua en a.

Definición

Decimos que $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua cuando f es continua en todos los puntos $a \in X$ (i.e. cuando es continua en todos los puntos de su dominio).

Definición

Decimos que $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en $A \subset X$ si f es continua en todos los puntos $a \in A$.

Teorema

Las siguientes funciones son continuas.

- Polinomios.
- Las funciones sen y $\cos$ son continuas en $\mathbb{R}$.
- La función definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en $]0, +\infty[$
- La función $\exp$ es continua en $\mathbb{R}$.
- La función $\ln$ es continua en $]0, +\infty[$
- La función $[\![.]\!]$ es continua en $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Teorema

Si g es continua y f es una restricción de g entonces f también es continua.

Ejemplo

La función $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln x$ es una función continua.

Teorema

Si f y g son funciones continuas en a, entonces

- $f-g$, $f+g$ y $f\cdot g$ son continuas en a.
- Si $g(a)\neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es continua en a.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \; x \neq 0$$

es una función continua.
¿Existe una extensión continua de f definida incluso en 0?
La función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

es una extensión continua de la función f.

Teorema

Sea f una función continua en x_0, y g una función tal que $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$ y $t_0 \in (\mathrm{Dom}(f \circ g))'$, entonces

$$\lim_{t\to t_0} (f \circ g)(t) = f(x_0) = f(\lim_{t\to t_0} g(t))$$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{t\to 0} \cos\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right)$$

Teorema

Si g es una función continua en t_0 y f es una función continua en $g(t_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en t_0.

Ejemplo

Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$. Determine los valores donde $g \circ f$ es continua.

Resolución: La función f es continua en $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ y la función g es continua en $]-\infty, 1]$. Luego, $g \circ f$ es continua en $x \neq 3$ con $1 - \dfrac{x+2}{x-3} \geq 0$.
Por lo tanto, $g \circ f$ es continua en $]-\infty, -3[$.

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en x_0, y $a < f(x_0) < b$, entonces existe $V_\delta(x_0)$ tal que $a < f(x) < b$, para todo $x \in V_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

Demostración.

Para $\varepsilon = \min\{b - f(x_0), f(x_0) - a\}$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in V_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, esto es

$$a \leq f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \leq b$$

$\square$

Corolario

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en x_0, y $f(x_0) > 0$, entonces existe $V_\delta(x_0)$ tal que $0 < f(x)$, para todo $x \in V_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$

Definición (Continuidad por la izquierda)

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua por la izquierda en $a \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $x \in X$ y $a - \delta < x < a$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definición (Continuidad por la derecha)

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua por la derecha en $a \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $x \in X$ y $a < x < a + \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua en $a \in X$ si y solo si f es continua por la izquierda y por la derecha en a.

Observación

- Si $a \in X'_-$, entonces

$$f \text{ es continua por la izquierda en } a \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

- Si $a \in X'_+$, entonces

$$f \text{ es continua por la derecha en } a \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Ejemplo

La función máximo entero es continua por la derecha en cualquier $a \in \mathbb{R}$, ya que

$$\lim_{x \to a^+} [\![x]\!] = [\![a]\!]$$

sin embargo no es continua por la izquierda en $a = n \in \mathbb{Z}$. En efecto,

$$\lim_{x \to a^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq n$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Analice la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \geq 0 \\ x+1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} |x-2|, & \text{si } x \geq 0 \\ x^3, & \text{si } -1 < x < 0 \\ 3, & \text{si } x = -1 \end{cases}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Funciones discontinuas

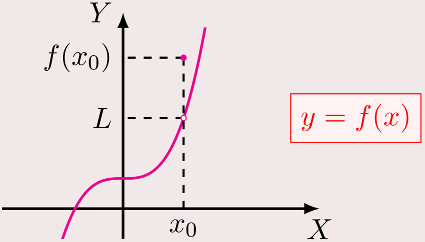
De la definición de continuidad, existen dos formas de que una función $f : A \to \mathbb{R}$ no sea continua en $a \in \mathrm{Dom}(f) = A$.

- Que el límite no exista.
- En el caso que el límite exista, que el límite no sea igual a $f(a)$.

Tipos de discontinuidad

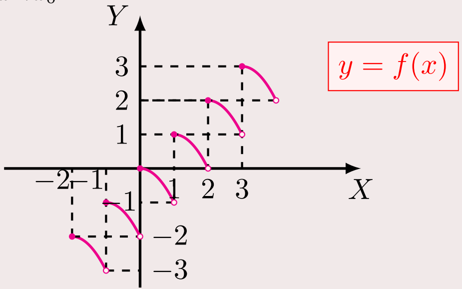
Sean $f : X \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$.

- Decimos que la discontinuidad de f en x_0 es removible si existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ pero $L \neq f(x_0)$.



Tipos de discontinuidad

- Decimos que la discontinuidad de f en x_0 es no removible si no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$.



Discontinuidad removible

Si f tiene una discontinuidad removible en a entonces podemos definir una nueva función $\hat{f}$ continua en a tan solo redefiniendo la regla de correspondencia de f en a.

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \ x \neq a, \\ L & , \ x = a. \end{cases}$$

Discontinuidad no removible

Si f tiene una discontinuidad no removible en a diremos que

- f tiene una discontinuidad de salto si los límites laterales de f en a existen pero son distintos.
- f tiene una discontinuidad esencial en a si por lo menos un límite lateral en a no existe (lo que incluye el caso cuando es infinito).

Ejemplo

La función $f(x) = H(x-2)$ tiene una discontinuidad de salto en $x = 2$.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x+1} & , -1 < x \leq 0, \\ 2 & , x > 0. \end{cases}$$

tiene una discontinuidad esencial en $x = -1$ y una discontinuidad de salto en $x = 0$.

Ejemplo

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - \ln(x^2+1) & , x \geq 0 \\ 2^{\frac{1}{x}} + \cos x & , x < 0. \end{cases}$$

Indique los puntos en que f es continua.

Ejemplo

Sean a, b y c constantes y $f : \mathbb{R}\backslash\{0,3\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-a}{\sqrt{x+1}-2} & , x > 3 \\ \\ \dfrac{2x^2-bx-c}{x^2-3x} & , x < 3,\ x \neq 0. \end{cases}$$

Halle los valores de a, b y c de modo que se pueda definir una extensión continua de f en el punto $x = 3$.

Ejemplo

Demuestre que: Si f es una función continua en a, entonces $|f|$ es una función continua en a.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ para algún $k > 0$. Demuestre que f es continua en cualquier $c \in \mathbb{R}$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Sea f una función real de variable real tal que $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que f es continua en $x = 0$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) < g(x)$, para todo $x < \mathbb{R}$. Demuestre que existe una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) < 2h(x) < g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicios

1. Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las funciones siguientes es continua en el número dado a.
   a) $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}$, $a = 4$.
   b) $g(x) = \dfrac{x^2+5x}{2x+1}$, $a = 2$.
2. Utilice la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que cada una de las funciones siguientes es continua en el intervalo dado.
   a) $f(x) = x + \sqrt{x-4}$, $[4, +\infty[$.
   b) $g(x) = \dfrac{x-1}{3x+6}$, $]-\infty, -2[$.

Ejercicios

3. Encuentre los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos números f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguna de las dos? Trace la gráfica de f.

   a) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x, & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ \sqrt{x}, & \text{si } x > 4 \end{cases}$

   b) $g(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Ejercicios

4. Suponga que f y g son funciones continuas tales que $g(2) = 6$ y $\lim_{x\to 2}[3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encuentre $f(2)$.
5. ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en a? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y sea continua en a.
   a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$, $a = 1$
   b) $g(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}$, $a = 2$
   c) $h(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!]$, $a = \pi$

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning