Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 22, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Cuando $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto a interior de D, definimos lo siguiente: La linealización de f en a es la función $\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\ell(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

- Cuando f es continua en a aprendimos que $x \approx a \Rightarrow f(x) \approx f(a)$.
- Cuando f es derivable en a podemos mejorar la aproximación: $x \approx a \Rightarrow f(x) \approx \ell(x)$.

Esta última aproximación es llamada aproximación lineal.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

La recta tangente L es la gráfica de la linealización ℓ.

Teorema

Si f es derivable en a y ℓ es la linealización de f en a, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - \ell(x)|}{|x - a|} = 0$$

es decir, cuando $x \approx a$ el error $|f(x) - \ell(x)|$ es mucho menor que la distancia $|x - a|$.

Ejemplo

Defina la linealización de la función f, definida por $f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)}$, en torno al punto $x_0 = 1$.

Resolución

La función $f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)}$ es diferenciable en $x_0 = 1$, luego,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{[x_0(x_0-2)]^2}} \cdot (2x-2) \\ f'(1) &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \ell(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) \\ \ell(x) &= -1 + 0 \cdot (x-1) \\ \ell(x) &= -1 \end{aligned}$$

Ejemplo

Use la linealización de una función en torno a un punto, elegido convenientemente, para aproximar el valor de $\sqrt{17}$.

Resolución

Sea $f(x)=\sqrt{x}$ y $x_0=16$. La función f es diferenciable en $x_0=16$, luego

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \\ f'(16) &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \ell(x) &= f(16)+f'(16)(x-16) \\ \ell(x) &= 4+\frac{1}{8}\cdot(x-16) \end{aligned}$$

Así, $\ell(17)=4+\frac{1}{8}(17-16)=4.125$ comparando con $f(17)=4.123$ se tiene una buena aproximación.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

Así, $\ell(17) = 4 + \dfrac{1}{8}(17 - 16) = 4.125$ comparando con $f(17) = 4.123$ se tiene una buena aproximación.

Definición

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función definida sobre el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. La variación de x entre x_0 y x es

$$\Delta x = x - x_0$$

La variación de la función f entre x_0 y x, también llamada "variación de y", es

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Ejemplo

El costo total en dólares de fabricar q unidades de cierto artículo es

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 10$$

Calcule la variación del costo de 40 a 41 unidades, y de 40 a 42 unidades.

Resolución

En ambos casos, $q_0 = 40$.

- En el primer caso $q = 41$, $\Delta q = 1$ y
  $\Delta C = C(41) - C(40) = 5258 - 5010 = 248.$
  Interpretación: produciendo 40 unidades, cuando se aumenta una unidad, el costo aumenta 248 dólares.
- En el segundo caso, $q = 42$, $\Delta q = 2$ y
  $\Delta C = C(42) - C(40) = 5512 - 5010 = 502.$
  Interpretación: produciendo 40 unidades, cuando se aumenta dos unidades, el costo aumenta 502 dólares.

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Diferencial)

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in I$. Entonces para valores pequeños de Δx, tenemos

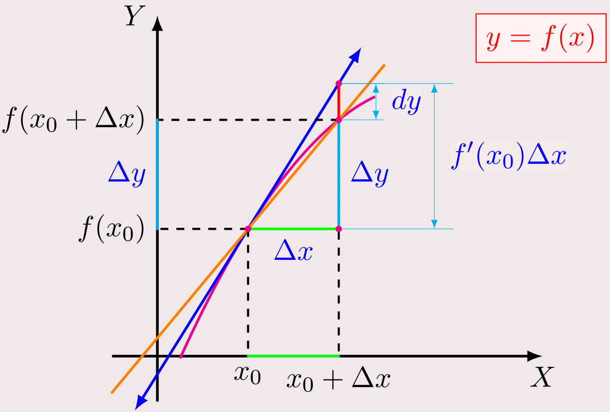
$$f'(x) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es decir $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$.
El diferencial de f en x_0, que depende de Δx, se denota como dy y se define como

$$dy = f'(x_0)\Delta x$$

Esta definición hace que dy sea la variación aproximada de y entre x_0 y $(x_0 + \Delta x)$

Interpretación geométrica



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

Si $y = I(x) = x$, entonces para cualquier x_0 y Δx, se tiene que el diferencial de la función $I(x)$ es

$$I'(x_0)\Delta x = \Delta x$$

Debido a esto, en adelante denotaremos Δx como dx. Este diferencial será llamado diferencial de la variable independiente x. Usando la notación anterior, podemos escribir $dy = f'(x_0)\, dx$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Calcule un valor aproximado de $\sqrt{65}$ usando el diferencial como una aproximación al incremento de alguna función adecuada.

Resolución

Considere $y = f(x) = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$, cuya derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ para $x > 0$. Considerando $x_0 = 64$ y $\Delta x = 1$, se tiene

$$f(65) - f(64) = \Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{16}$$

Así, $\sqrt{65} \approx \sqrt{64} + \dfrac{1}{16} = 8,0625$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

El costo total, en miles de dólares, de fabricar q miles de unidades de cierto artículo es

$$C(q) = 0.01q^2 + 2.5q - 50$$

Siendo el nivel actual de producción de $100\,000$ unidades, se planea disminuirlo en $95\,000$ unidades. Determinar la variación aproximada del costo debida a tal cambio.

Resolución

En este caso $q_0 = 100$ y $\Delta q = -5$. Como $C'(q) = 0.02q + 2.5$, entonces

$$dC = C'(q_0)\Delta q = (4.5)(-5) = -22.5$$

Comparando con la variación real:

$$\Delta C = C(q_0 + \Delta q) - C(q_0) = C(95) - C(100) = -22.25$$

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Ron Larson - Bruce Edwards
Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA