Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Junio 5, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Polinomio de Taylor

Recordemos que una aproximación de f alrededor de $x = a$ está dada por

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + f'(a)h}_{\text{aproximación}} + \underbrace{r(h)}_{\text{residuo}} \quad \text{con} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Si definimos $p(x)$ como un polinomio de grado 1 en x tal que

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

entonces

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + r(x-a) \\ p(a) = f(a), \quad p'(a) = f'(a) \end{cases}$$

es decir f es aproximación por un polinomio de grado 1 que reproduce el comportamiento de f y f' en $x = a$ (interpolación).

Polinomio de Taylor

¿Podemos encontrar $p(x)$ de grado 2 que interpole a f, f' y f'' en $x = a$?

Si $p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$ entonces

$$p(a) = c_0, \quad p'(a) = c_1, \quad p''(a) = 2c_2,$$

luego

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2,$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Polinomio de Taylor

Además si $r(h) = f(a+h) - p(a+h)$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2}f''(a)}{h^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a) - hf''(a)}{2h} \quad \text{(L'Hospital)} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0} \left(\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} - f''(a) \right) = 0 \quad (f''(a) \text{ existe})
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Para $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 0$ encontramos

- La aproximación lineal

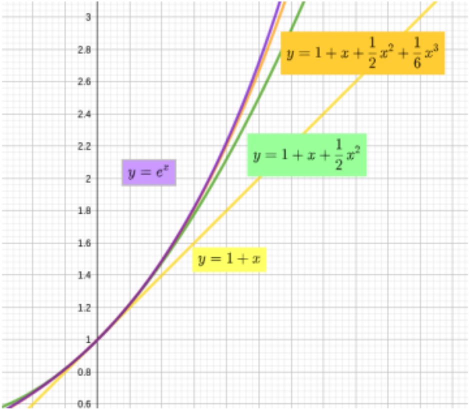
$$p_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$p_1(x) = 1 + x$$

- La aproximación cuadrática

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f'(0)}{2}(x - 0)^2$$
$$p_1(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

- La aproximación cúbica

$$p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f(0) = p_3(0) \Longrightarrow d = 1$$
$$f'(0) = p_3'(0) \Longrightarrow c = 1$$
$$f''(0) = p_3''(0) \Longrightarrow 2b = 1$$
$$f'''(0) = p_3'''(0) \Longrightarrow 6a = 1$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

Los polinomios $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ se llaman polinomios de Taylor de la función exponencial alrededor de $x = 0$.
Las aproximaciones dadas son locales, mejoran si aumentamos el grado del polinomio de Taylor, pero a medida que nos alejamos de a la aproximación empeora.

Definición (Polinomio de Taylor)

Sea f una función n veces derivable en $x = x_0$, entonces el polinomio

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se llama polinomio de Taylor de orden n de f alrededor de x_0.

Si denotamos por $f^{(0)}$ a f entonces

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Ejemplo

Encuentre los polinomios de Taylor hasta el orden 7 de la función seno alrededor de $x = 0$.

Resolución: Calculamos las derivadas de seno:

$$\operatorname{sen}'(0) = 1, \quad \operatorname{sen}''(0) = 0,$$
$$\operatorname{sen}'''(0) = -1, \quad \operatorname{sen}^{(4)}(0) = 0,$$

por lo tanto

$$p_1(x) = x, \quad p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3,$$
$$p_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, \quad p_7(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7.$$

Resolución

Calculamos las derivadas de seno:

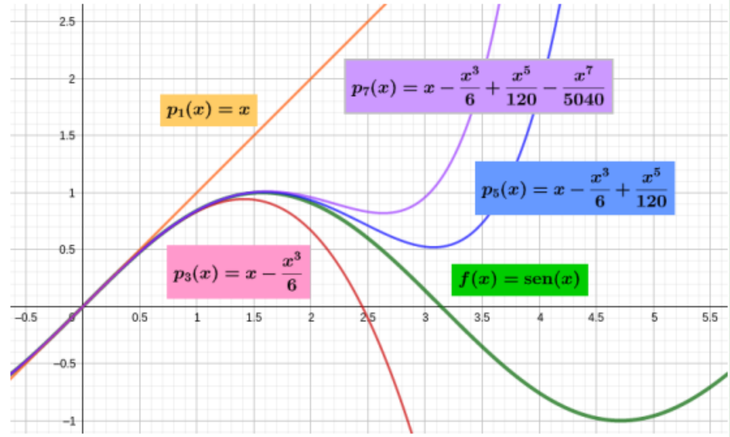
$$\operatorname{sen}'(0) = 1, \quad \operatorname{sen}''(0) = 0,$$
$$\operatorname{sen}'''(0) = -1, \quad \operatorname{sen}^{(4)}(0) = 0,$$

por lo tanto

$$p_1(x) = x, \quad p_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3,$$

$$p_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5, \quad p_7(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7.$$

Resolución


$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$
$p_1(x) = x$
$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$
$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$
$f(x) = \text{sen}(x)$
2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5

Teorema (Formula de Taylor infinitesimal)

Sea $I = \langle a, b\rangle$ y $f : I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $x_0 \in I$, si definimos $J = \langle a - x_0, b - x_0\rangle$ y $r : J \to \mathbb{R}$ tal que

$$r(h) = f(x_0 + h) - p_n(x_0 + h), \ \forall h \in J,$$

entonces $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0.$

[

] ¿Existirá otro polinomio de grado menor o igual a n que aproxime f en el sentido del teorema anterior? Y que interpole a f y todas sus n primeras derivadas en x_0. Sea $q(x)$ un polinomio que interpole f y sus n primeras derivadas en x_0, entonces $r(h) = p_n(x_0 + h) - q(x_0 + h)$ es un polinomio en h de grado menor o igual a n que tiene sus n primeras derivadas nulas en 0. Sea $r(h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \ldots + c_n h^n$, luego

$$\begin{aligned} r(0) = 0 &\implies c_0 = 0 \\ r'(0) = 0 &\implies c_1 = 0 \\ &\vdots \\ r^{(n)}(0) = 0 &\implies c_n = 0 \end{aligned}$$

[

] ¿Que relación hay entre un polinomio de grado n y su interpolante de Taylor?
Sea $p_n(x)$ el polinomio de Taylor de orden n para $p(x)$ alrededor de x_0, luego ambos polinomios coinciden en x_0 y en sus n primeras derivadas en x_0, por lo tanto son iguales.
De esto deducimos que cualquier polinomio $p(x)$ de grado n se puede escribir como

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}p^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Caracterización del polinomio de Taylor)

Si encontramos un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a n tal que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ entonces $p = p_n$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración

Como $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ entonces $\lim_{x\to x_0} \dfrac{p(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i(x-x_0)^i$ y $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i(x-x_0)^i$, entonces

$p(x) - p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (c_i - d_i)(x-x_0)^i$, luego

$$\lim_{x\to x_0} p(x) - p_n(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} (c_0 - d_0) \implies c_0 = d_0,$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

Como $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{p(x)-p_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

Si $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i(x-x_0)^i$ y $p_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} d_i(x-x_0)^i$, entonces

$p(x) - p_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} (c_i - d_i)(x-x_0)^i$, luego

$$\lim_{x\to x_0} p(x) - p_n(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} (c_0 - d_0) \implies c_0 = d_0,$$

de igual modo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)-p_n(x)}{(x-x_0)} = 0 = \lim_{x\to x_0} (c_1 - d_1) \implies c_1 = d_1,$$

Esta caracterización permite encontrar polinomios de Taylor de productos:
Sean p_n y q_n los polinomios de Taylor de f y g respectivamente alrededor de $x = a$, luego

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (p_n(x) + r_1(x-a))(q_n(x) + r_2(x-a)) \\ &= w_n(x) + r_3(x-a), \end{aligned}$$

donde $w_n(x)$ es el polinomio que se obtiene de $p_n(x)q_n(x)$ descartando los términos $(x-a)^i$ de grado mayor a n, y

$$r_3(x-a) = r_1(x-a)q_n(x)+r_2(x-a)p_n(x)+r_1(x-a)r_2(x-a)+(x-a)^{n+1}v$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

de aquí

$$\lim_{x\to a}\frac{r_3(x-a)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{r_1(x-a)q_n(x)}{(x-a)^n}+\lim_{x\to a}\frac{r_2(x-a)p_n(x)}{(x-a)^n}$$

$$+\lim_{x\to a}\frac{r_1(x-a)r_2(x-a)}{(x-a)^n}+\lim_{x\to a}(x-a)v(x)=0.$$

Ejemplo: Encuentre el polinomio de Taylor de orden 6 de x^3e^x al rededor de $x=0$.

Resolución:

$$\begin{aligned} x^3e^x &= x^3\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+r(x)\right)\\ &= \underbrace{x^3+x^4+\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{6}x^6}_{p_6(x)}+x^3r(x)\end{aligned}$$

Ejemplo: Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 de $e^x \operatorname{sen}(2x)$ alrededor de $x = 0$.

Resolución:

$$e^x \operatorname{sen}(2x) = (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + r_1(x))((2x) - \frac{1}{6}(2x)^3 + r_2(x))$$
$$= \underbrace{2x + 2x^2 + x^3 - \frac{4}{3}x^3}_{p_3(x)} + r(x)$$

$$p_3(x) = 2x + 2x^2 + x^3 - \frac{1}{3}x^3.$$

Polinomio de Taylor de una composición

Si f y g tiene derivadas hasta el orden k y $g(x_0) = 0$ entonces

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + r_k$$

$$g(x) = b_1(x - x_0) + r_1$$

por lo tanto

$$f(g(x)) = a_0 + a_1 b_1 (x - x_0) + \cdots + a_k b_1^k (x - x_0)^k + r_k.$$

Es decir realizamos la composición de los polinomios de Taylor correspondientes y descartamos los términos con potencias de $(x - x_0)$ mayor a k.

Ejemplo: Encuentre el polinomio de Taylor de cuarto orden para $e^{\operatorname{sen}(x)}$.

Resolución:

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{sen}(x)} &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + r_4 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + r_4 \end{aligned}$$

donde hemos agrupado en r_4 los términos con potencia mayor a 4.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Ron Larson - Bruce Edwards
Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA