ÁRBOLES.

Profesores del curso:

Ronald Mass [1]

Ángel Ramírez [1]

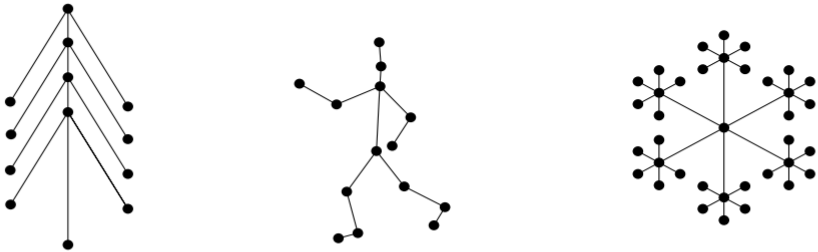
[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

6 de julio de 2020

Tabla de contenidos

Definición 1

Un **árbol** *es un grafo conexo que no contiene ciclos.*



Caracterización de árboles

Teorema 1

Las siguientes condiciones son equivalentes para grafo $G = (V, E)$:

1. *G es un árbol.*
2. **(Unicidad de camino simple).** *Para todo par de vértices $x, y \in V$ existe un único camino simple que los une.*
3. **(Mínimo grafo conexo).** *El grafo G es conexo y si borramos cualquiera de sus aristas resulta un grafo disconexo.*
4. **(Máximo grafo sin ciclos).** *El grafo G no tiene ciclos, y cualquier grafo que se obtiene de G aumentando una arista (es decir, un grafo de la forma $G + e$ donde $e \in \binom{V}{2} \setminus \{E\}$) tiene un ciclo.*
5. **(Fórmula de Euler).** *G es conexo y además $|V| = |E| + 1$.*

Antes de demostrar el teorema anterior, vamos a dar una definición previa y auxiliarnos de dos lemas que se dan a continuación.

Definición 2

Un vértice de G de grado uno es llamado **vértice final** *o también que es una* **hoja** *de G.*

Lemma 1

Cada árbol con al menos 2 vértices contiene al menos 2 vértices finales.

Lemma 2

Las siguientes proposiciones son equivalentes para un grafo G y su vértice final v:

1. *G es un árbol.*
2. *$G - \{v\}$ es un árbol.*

Demostración del Lema 1

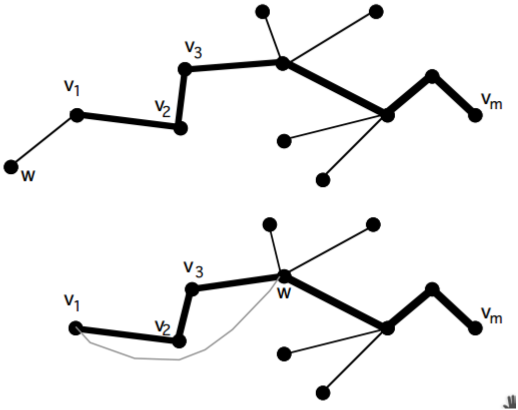
Sea $P = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ un camino simple de máxima longitud en un árbol $T = (V, E)$. Desde que el árbol tiene al menos dos hojas, entonces la longitud de P es al menos 1, por tanto $v_0 \neq v_t$.

Afirmamos que v_0 y v_t son hojas.

Procedamos por contradicción:

Si, por ejemplo, v_0 no es una hoja, entonces existe una arista $e = \{v_0, v\}$ que contiene a v_0 y diferente de la primera arista $e_1 = \{v_0, t_t\}$ del camino simple P. Entonces o v es uno de los vértices de P, es decir $v = v_i$ $i \geq 2$ (en este caso, la arista e junto con la porción de P de v_0 a v_t forman un ciclo) $v \in \{v_0, \ldots, v_t\}$ en cuyo caso estamos extendiendo P al añadir una arista e. En ambos casos se observa que llegamos a una contradicción.

Demostración del Lema 1 (cont.)



Demostración del Lema 2

- ($\Rightarrow$): Sean $x, y \in G \backslash \{v\}$. Desde que G es conexo entonces x e y están unidos por un camino simple en G. Este camino no puede contener un vértice de grado 1 diferente de x e y, y así no contiene a v. Por tanto, el camino simple está contenido en $G \backslash \{v\}$, es decir, $G \backslash \{v\}$ es conexo. Además, como G no contiene ciclos, entonces $G \backslash \{v\}$ tampoco tiene ciclos, y así, $G \backslash \{v\}$ es un árbol.
- ($\Leftarrow$): Al retornar la hoja v no se crea ciclo. G es conexo: Sean x, y vértices de G distintos de v. De la hipótesis x e y están unidos por un camino simple en G. Y un camino de v hacia cualquier otro vértice x se obtiene considerando el vecino $v' \in G \backslash \{v\}$, que está unido a x mediante un camino en $G \backslash \{v\}$ y luego extendemos este camino añadiendo la arista $\{v', v\}$.

Demostración del Teorema 1

- Veamos que $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Sea G un grafo tal que existe un único camino simple entre cualquier par de vértices de G, esto implica que G es conexo. Afirmamos que G no tiene ciclos. Si G tiene un ciclo, digamos entre los vértices u y v, entonces existen dos caminos simples distintos que unen a u y v, lo cual es una contradicción. Por tanto, G es conexo y sin ciclos, entonces es un árbol.
  Inversamente, sea G un árbol. Desde que G es conexo, existe al menos un camino simple entre cualquier par de vértices en G. Falta demostrar la unicidad del camino simple. Considere dos caminos simples entre dos vértices u y v de G. La unión de estos dos caminos forman un ciclo lo cual contradice el hecho de que G es un árbol.

Demostración del Teorema 1 (cont.)

- Veamos que $(iii) \Rightarrow (i)$. Como G es un grafo mínimo conexo entonces no tiene ciclos. Por tanto es un árbol.
  Veamos que $(i) \Rightarrow (iii)$. Sea G un árbol, entonces G no tiene ciclos y así, si borramos cualquier arista de G se obtiene un grafo disconexo. Por tanto, G es un grafo mínimo conexo.

Demostración del Teorema 1 (cont.)

- Veamos que $(i) \Rightarrow (iv)$. Dados dos vértices u, v en G, como G es conexo entonces existe un camino simple en G que une a u y v. Si agregamos la arista $\{u, v\}$ se obtiene un ciclo, contradiciendo el hecho de que G es un árbol.
- Veamos que $(iv) \Rightarrow (i)$. Resta probar que G es conexo. Sean $x, y \in V(G)$, luego, o ellos están unidos por una arista o el grafo $G + \{x, y\}$ contiene un ciclo, y removiendo la arista $\{x, y\}$ de este ciclo se obtiene un camino simple desde x a y en G.

Demostración del Teorema 1 (cont.)

- Veamos que $(i) \Rightarrow (v)$. Usamos inducción sobre $|V| = n$. El resultado es directo para $n = 1$. Asumamos que es verdad para árboles con cantidad de vértices menores a n. Considere el árbol G con n vértices y sea e una arista con extremos u y v. Si eliminamos la arista e se obtiene exactamente dos componentes conexas en G, digamos G_1 y G_2, observe que estas componentes no contienen ciclos, así cada componente es un árbol. Sean n_1 y n_2 el número de vértices en G_1 y G_2 respectivamente, es decir, $n_1 + n_2 = n$. Observe que $n_1 < n$ y $n_2 < n$, así, por hipótesis de inducción. el número de aristas en G_1 y G_2 son respectivamente $n_1 - 1$ y $n_2 - 1$. Por tanto, el número de aristas en G es:

$$|E| = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = (n_1 + n_2) - 1 = n - 1 \Rightarrow |V| = n = |E| + 1.$$

Demostración del Teorema 1 (cont.)

Veamos que $(v) \Rightarrow (i)$. Usamos inducción sobre $|V|$. Hipótesis inductiva: Todo grafo G conexo con $|V| = n-1$ vértices tal que $|V| = |E| + 1$ es un árbol. Veamos para un grafo conexo G con $|V| = n+1$ vértices y $|V| = n = |E| + 1$. Como $n \geq 2$ entonces $|V| = |E| + 1 \geq 2$.
Por teorema de la suma de los grados se obtiene:

$$\sum_{v \in V(G)} deg_G(v) = 2|E| = 2(|V| - 1) = 2|V| - 2$$

Si $deg_G(v) > 2$ para todo $v \in V(G)$ entonces $\sum_{v \in V(G)} deg_G(v) > 2|V|$ contradiciendo el resultado anterior.
Por tanto $deg_G(v) \leq 2$.

Demostración del Teorema 1 (cont.)

Como G es conexo entonces $deg_G(v) \geq 1$ y así $1 \leq deg_G(v) \leq 2$.
Si $deg_G(v) = 2$ para todo $v \in V(G)$ se llega a una contradicción. Por tanto, debe existe al menos un vértice $v \in V(G)$ tal que $deg_G(v) = 1$, es decir, una hoja de G.
Considerando el grafo $G' = G \backslash \{v\}$ es otra vez conexo tal que $|V(G')| = n - 1$ y además $|V(G')| = |E(G')| + 1$, entonces por la hipótesis inductiva G' es un árbol y por el Lema 2 se concluye que G es un árbol.

Tabla de contenidos

Definición 3 (Árbol con raíz)

Es un par (T, r) donde T es un árbol y $r \in V(T)$ es un vértice distinguido de T llamado **raíz**. *Si $\{x, y\} \in E(T)$ es una arista y el vértice x está en el único camino simple que une y a la raíz, decimos que x* **es padre** *de y (en el árbol con raíz) e y es llamado* **hijo** *de x.*

Definición 4 (Árbol plantado)

Es un **árbol con raíz** *(T, r) mas un gráfico de T en el plano. En el gráfico, la* **raíz** *es señalada mediante una flecha apuntando hacia abajo y los hijos de cada vértice son ubicados arriba del vértice respectivo.*

Isomorfismos

Definición 5

Una función $f : V(T) \to V(T')$ *es un* **isomorfismo de árboles** T *y* T' *si* f *es una biyección que satisface* $\{x, y\} \in E(T)$ *si sólo si* $\{f(x), f(y)\} \in E(T')$. *Este isomorfismo es denotado por* $T \cong T'$.

Definición 6

Un **isomorfismo de árboles con raíz** (T, r) *y* (T', r') *es un isomorfismo* f *de los árboles* T *y* T' *y que además se cumple* $f(r) = r'$. *Este isomorfismo es denotado por* $T \cong' T'$.

Definición 7

Un **isomorfismo de árboles plantados** *es un isomorfismo de árboles con raíz que preservan el orden de izquierda a derecha de los hijos de cada vértice. Este isomorfismo es denotado por* $T \cong'' T'$.

Representación gráfica. Ejemplo 1

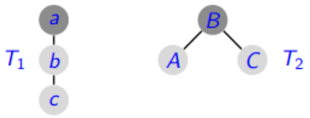


Figura 1: Isomorfos como grafos.

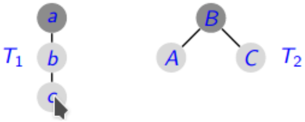
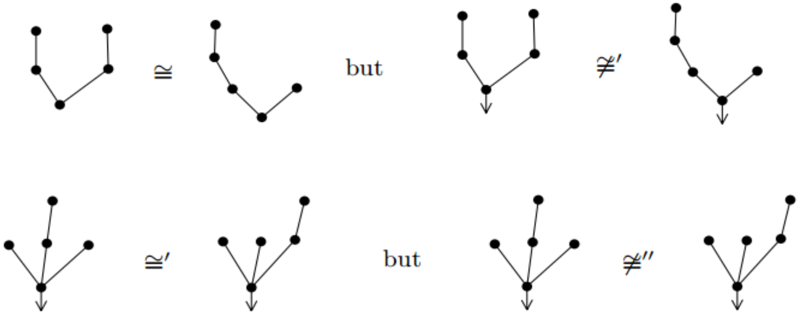


Figura 2: No son isomorfos como árboles con raíz.

Representación gráfica. Ejemplo 2



La definición de **árboles plantados** es más restrictiva y por tanto hace más fácil su codificación.

Ejemplo:

Draw all possible 7-vertex trees with maximun degree 3.

Solución:
La secuencia de grados pueden ser (3,3,2,1,1,1,1) o (3,2,2,2,1,1,1).
Por tanto, los árboles pueden ser: