Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 2, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

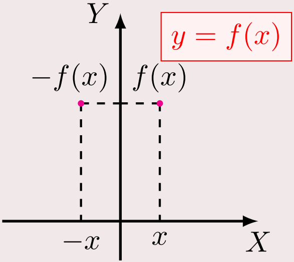
Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función par)

Una función f, real de variable real, se denomina función par si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

- Esto implica que el dominio de una función par es simétrico respecto del origen.
- La gráfica de una función par es simétrico respecto del eje Y.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Las siguientes funciones son pares:

- $f(x) = ax^2 + b,\ x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

Demuestre que: Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones pares, entonces $f \pm g$ es función par en su dominio.

Resolución: Tenemos: $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$ y $g(-x) = g(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(g)$. Luego, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$:

$$\begin{aligned}
(f \pm g)(-x) &= f(-x) \pm g(-x) \\
(f \pm g)(-x) &= f(x) \pm g(x) \\
(f \pm g)(-x) &= (f \pm g)(x)
\end{aligned}$$

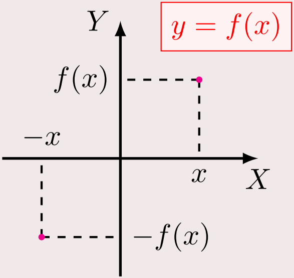
Por lo tanto, $f \pm g$ es función par.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función impar)

Una función f, real de variable real, se denomina función impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

- Esto implica que el dominio de una función impar es simétrico respecto del origen.
- La gráfica de una función impar es simétrico respecto del origen.



Ejemplo

Las siguientes funciones son impares:

- $f(x) = ax^3,\ x \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$
- $f(x) = \operatorname{sen} x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Demuestre que: Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones impares, entonces $f \pm g$ es función impar en su dominio.

Resolución: Tenemos: $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$ y $g(-x) = g(x)$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(g)$. Luego, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$:

$$
\begin{aligned}
(f \pm g)(-x) &= f(-x) \pm g(-x) \\
(f \pm g)(-x) &= (-f(x)) \pm (-g(x)) \\
(f \pm g)(-x) &= -(f \pm g)(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $f \pm g$ es función impar.

Ejercicio

Sean las funciones $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

I. Si f es par y g es impar, entonces $f \circ g$ es par en su dominio.

II. Si f es impar y g es par, entonces $f \circ g$ es par en su dominio.

Ejercicio

Fijado un entero $k \geq 0$, sea $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_k(x) = ax^k$. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones.

I. Si k es par, entonces f_k es una función par.

II. Si k es impar, entonces f_k es una función impar.

Definición (Función periódica)

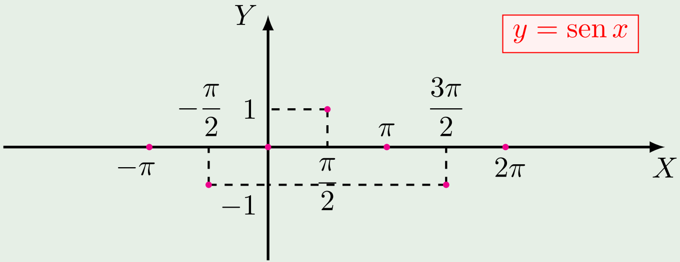
Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{Dom}(f) = A$. La función f es periódica de periodo $T \neq 0$ si para todo $x \in A$, se cumple que $x + T \in A$ y

$$f(x+T) = f(x)$$

El número T se denomina periodo de la función f.
Si existe un valor mínimo de $T > 0$ con esta propiedad, se denomina a T periodo fundamental para f.

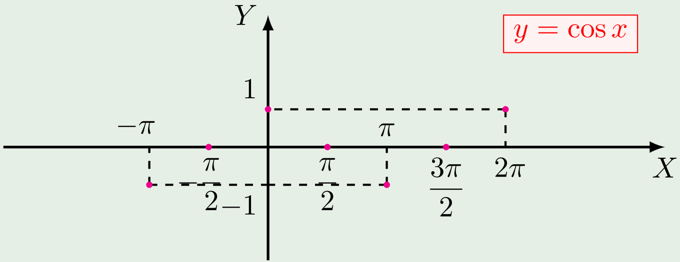
Ejemplo

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es periódica de periodo fundamental $T = 2\pi$.



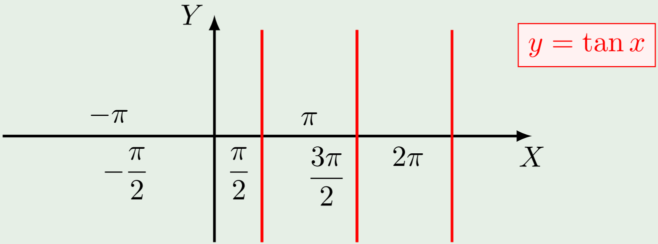
Ejemplo

La función $f(x) = \cos x$ es periódica de periodo fundamental $T = 2\pi$.



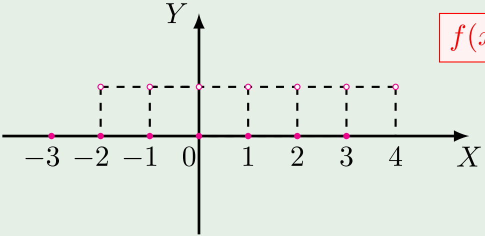
Ejemplo

Las funciones trigonométricas en general son periódicas. La función $f(x) = \tan x$ es periódica de periodo fundamental $T = \pi$.



Ejemplo

La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x-[\![x]\!]$ es periódica de periodo fundamental $T=1$.



$$\boxed{f(x)=x-[\![x]\!]}$$

Definición

Dado la función $f \subset A \times B$. La función f es

- **inyectiva** si cada vez que $f(x_1) = f(x_2)$ se tiene necesariamente que $x_1 = x_2$.
- **sobreyectiva** si para todo $y \in B$, existe $x \in A$, tal que $y = f(x)$.
  Equivalentemente, $\mathrm{Ran}(f) = B$.
- **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Ejemplo

- $f(x) = e^x$ es función inyectiva.
- $f(x) = x^2 + 1$ no es función inyectiva.
- $f(x) = ax + b$ donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$ es función biyectiva.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Imagen inversa)

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to B$ una función. Dado $y \in B$, la imagen inversa de y por f es el conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : y = f(x)\} \subset \mathrm{Dom}(f)$$

Observación

- $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ si y solo si $y \in \mathrm{Ran}(f)$. Luego, f es sobreyectiva si y solo si para todo $y \in B, f^{-1}(y) \neq \emptyset$.
- Para $y \in \mathrm{Ran}(f), f$ inyectiva significa que $f^{-1}(y) = \{x\}$ posee un solo punto.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Sea la función $f(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$. La imagen inversa de f es $f^{-1}(\{3\}) = \mathbb{R}$.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. La imagen inversa de f

- Para $x = 0$ es $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\}$
  $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$
- Para $x = 4$ es $f^{-1}(\{4\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) = 4\}$
  $f^{-1}(\{4\}) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4\}$
  $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$

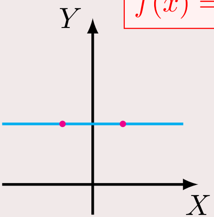
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Criterio de la recta horizontal

Si toda recta horizontal interseca a la gráfica de una función f en un sólo punto, entonces f es inyectiva.

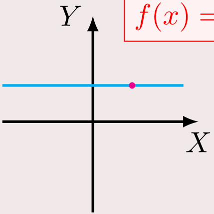
- Función no inyectiva

$\boxed{f(x) = x^2 + 1}$



- Función inyectiva

$\boxed{f(x) = x^3 - 1}$



Observación

El hecho de que para un valor dado de $y \in B$ exista un único valor de x en $f^{-1}(y)$, nos indica que la asignación de tal valor de x a y es una función.

Definición (Función inversa)

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to B$ una función. Si f es inyectiva definimos la función inversa de f, $f^*\colon B \to A$, tal que

$$y = f^*(x) \text{ si y solo si } x = f(y)$$

Definición (Función inversa)

En forma equivalente:
Si la función $f = \{(x, f(x))/x \in \mathrm{Dom}(f)\}$ es inyectiva. Se define la función inversa, denotado por f^*, como

$$f^* = \{(f(x), x)/x \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

Así,

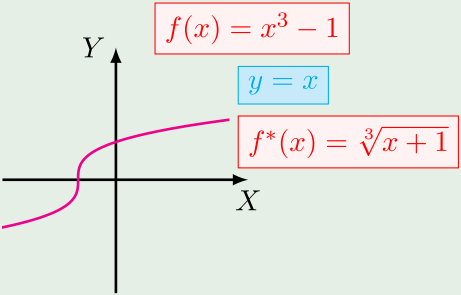
- $\mathrm{Dom}(f^*) = \mathrm{Ran}(f)$
- $\mathrm{Ran}(f^*) = \mathrm{Dom}(f)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

La función $y = f(x) = x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$ es inyectiva, entonces existe la función f^*, es decir

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^3 - 1 \\ x &= y^3 - 1 \\ y = f^*(x) &= \sqrt[3]{x+1} \end{aligned}$$

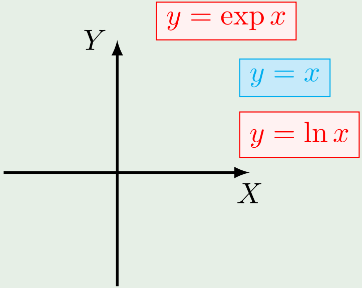


- $\mathrm{Dom}\,(f^*) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{Ran}\,(f^*) = \mathbb{R}$

Ejemplo

La función $y = \ln x$, $x \in]0, +\infty[$ es inyectiva, entonces existe la función $\ln^*$, es decir

$$\begin{aligned} y &= \ln x \\ x &= \exp y \\ \ln^* x &= \exp x \end{aligned}$$



- $\operatorname{Dom}(\ln^*) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{Ran}(\ln^*) =]0, +\infty[$

Definición (Función creciente)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo. Decimos que f es creciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definición (Función estrictamente creciente)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo. Decimos que f es estrictamente creciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

Definición (Función decreciente)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo. Decimos que f es decreciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Definición (Función estrictamente decreciente)

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo. Decimos que f es estrictamente decreciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_2) < f(x_1)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función monótona)

En cualquiera de las cuatro ultimas definiciones, diremos que f es monótona sobre I, siendo estrictamente monótona si es estrictamente creciente o decreciente.

Observación

Algunos autores utilizan los términos no decreciente y creciente en lugar de los respectivos creciente y estrictamente creciente, y del mismo modo para el decrecimiento.

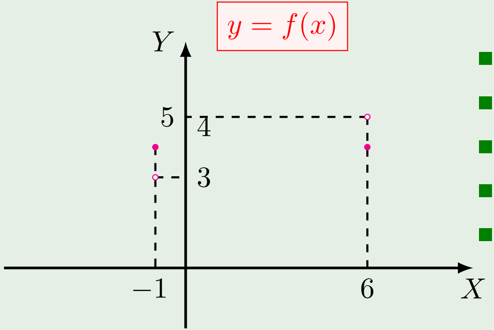
Ejemplo

Los siguientes funciones son monótonas.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ es estrictamente creciente.
- $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es estrictamente decreciente.
- $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente.
- Toda función constante es creciente y decreciente a la vez.

Ejemplo

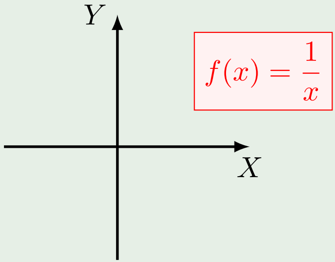
Se muestra la gráfica de la función f.



- f es creciente.
- f no es inyectiva.
- $f^{-1}(\{4\}) = [-1, 6]$.
- $f^{-1}(]5, +\infty[) = [6, +\infty[$.
- f no tiene inversa.

Ejemplo

Se muestra la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}, \; x \neq 0.$



- f es inyectiva.
- f no es sobreyectiva (sobre $\mathbb{R}$).
- f es decreciente en $]-\infty, 0[$.
- f es decreciente en $]0, +\infty[$.

Relación entre monotonía e inyectividad

- Si f es monótona estricta, implica que f es inyectiva.
- Si f es inyectiva, no implica que f es monótona estricta.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicios

Determine si f es par, impar o ninguna de las dos. Si tiene una calculadora graficadora, utilícela para verificar visualmente su respuesta.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

b) $f(x) = x|x|$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

e) $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

f) $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

Ejercicios

Suponga que f es una función inyectiva.

a) Si $f(x) = x^5 + x^3 + x$, ¿qué es $f^{-1}(3)$?

b) Si $f^{-1}(8) = 2$, ¿qué es $f(2)$?

Ejercicios

Encuentre una fórmula explícita para f^{-1} y utilícela para trazar la gráfica de f^{-1}, f y la recta $y = x$ en la misma pantalla. Para comprobar su trabajo, vea si las gráficas de f y f^{-1} son reflexiones a través de la recta.

a) $f(x) = \sqrt{4x + 3}$

b) $f(x) = 1 + e^{-x}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicios

Sea la función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

a) Demuestre que f es una función impar.

b) Encuentre la inversa de f.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA