Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 24, 2024

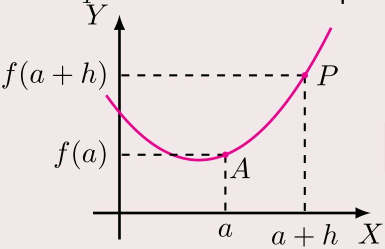
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Recta tangente a una curva

Se tiene una curva $\mathscr{C}$, el cual es la gráfica de una función $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $D = \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}$.
Sean $a, (a+h) \in D,\ h \neq 0$, se tiene que los puntos $A(a, f(a))$ y $P(a+h, f(a+h))$ pertenecen a la curva $\mathscr{C}$. Se quiere determinar la recta tangente L_T a la curva $\mathscr{C}$ en el punto $A(a, f(a))$.

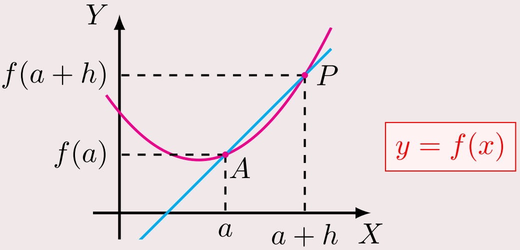


$$\boxed{y = f(x)}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Recta tangente a la curva

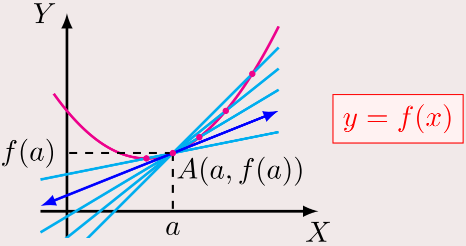
Para esto, faltaría conocer la pendiente de L_T. Una manera más prometedora de lograrlo es empezando con **secantes**.
De este modo, se toma la recta secante L_S determinada por los puntos $A(a, f(a))$ y $P(a+h, f(a+h))$.



Recta tangente a la curva

La pendiente de L_S esta dada por: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Cuando $h \to 0$, la tangente en $(a, f(a))$ parece ser el límite, en algún sentido de estas secantes.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Recta tangente a la curva

Hasta aquí no hemos hablado nunca de límite de rectas, pero podemos hablar del límite de sus pendientes. La pendiente de L_T en $(a, f(a))$ debería ser

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

siempre que este límite exista.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Derivada)

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $a \in D' \cap D$. Decimos que f es derivable en a si el siguiente límite existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

El número obtenido como límite se llama **derivada de f en a** y se denota como $f'(a)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

El límite en la definición es equivalente a:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Definición

Un punto a es interior a D si $a \in D$ y existe un intervalo abierto I tal que $a \in I \subset D$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Cuando $f : D \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto a interior de D, entonces

- **La recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ **es la recta**

$$L_T \ : \ y = f(a) + f'(a)(x - a) \ .$$

- **La recta normal** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ **es la recta**

$$L_N \ : \ y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a) \ .$$

Ejemplo

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Determine las rectas tangente y normal a la gráfica de f en $x = 1$.

Resolución

Determinemos el punto sobre la curva para $x = 1$, como $f(1) = 1$, entonces el punto sobre la curva es $(1, 1)$. Para determinar la pendiente de la recta tangente calculamos el siguiente límite,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} (h+2) = 2$$

esto es $f'(1) = 2$. Así,

- Recta tangente es $L_T : y - 1 = 2(x - 1)$.
- Recta normal es $L_N : y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 1)$.

Definición

Decimos que f es una función derivable si f es derivable en cada punto de su dominio.

Ejemplo

Las funciones constante, lineal, sen y $\cos$ son derivables. Las potencias también.
Veamos el caso $f(x) = x^2$,

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} \\
f'(a) &= \lim_{h\to 0} (2a + h) \\
f'(a) &= 2a
\end{aligned}$$

Ejemplo

Veamos a modo de ejemplo el modo alternativo

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\
f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} \\
f'(a) &= 2a
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

- En la definición a puede ser un número concreto o un elemento cualquiera del dominio de f.
- No vamos a considerar el caso en el que el límite anterior existiera y sea infinito, en este caso diremos que la función no es diferenciable en a.

Ejemplo

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x+5$. Calcule $f'(2)$.

Ejemplo

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Determine $f'(x)$.

Ejercicio

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demuestre que existe $f'(0)$ e indique su valor.

Ejercicio

Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left| x^5 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{x^2+1}\right) \right|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Utilice la definición de la derivada de una función para calcular el valor de $f'(0)$ si es que existe.

Ejercicio

Sean $c \in \mathbb{R}$ y f una función derivable sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = f(x+c)$$

Utilice la definición de la derivada de una función y demuestre que $g'(x) = f'(x+c)$. Además, demuestre que si $h(x) = f(cx)$, entonces $h'(x) = cf'(x)$.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

La derivada de la función f con respecto a la variable x, es la función f', cuya regla de correspondencia es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista.

Observación

$\mathrm{Dom}(f') \subset \mathrm{Dom}(f)$, de hecho

$$\mathrm{Dom}(f') = \left\{ x \in \mathrm{Dom}(f) \colon \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existe} \right\}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Notaciones

$y = f(x)$	**Función derivada**			**Derivada en a**	
Lagrange	$f'(x)$	y'		$f'(a)$	
Leibniz	$\dfrac{df(x)}{dx}$	$\dfrac{df}{dx}$	$\dfrac{dy}{dx}$	$\left.\dfrac{df}{dx}\right\|_{x=a}$	$\left.\dfrac{dy}{dx}\right\|_{x=a}$
Cauchy	Dy	$Df(x)$	$D_x f(x)$	$Dy\big\|_{x=a}$	
Newton	$\dot{y}$				

Ejemplo

Sea la función f dada por $f(x) = x^2 + 5$. Determine la función derivada de f.

Resolución

De la definición de la derivada de una función, tenemos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+5-(x^2+5)}{h} \\
f'(x) &= 2x
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la función derivada de f esta dada por $f'(x) = 2x$. Además, se tiene que $\mathrm{Dom}(f') = \mathrm{Dom}(f)$.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Derivada lateral derecha)

Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si $x_0 \in A'_+ \cap A$, la derivada lateral derecha de f en x_0 como

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

o en forma equivalente

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cuando el límite existe.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Derivada lateral izquierda)

Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Si $x_0 \in A'_- \cap A$, la derivada lateral derecha de f en x_0 como

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

o en forma equivalente

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cuando el límite existe.

Función derivable

Solo en el caso en que ambas derivadas laterales existan y sean iguales, la función sera derivable en x_0 es decir

$$f'(x_0) = f'_(x_0) = f'_+(x_0)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcule las derivadas laterales en $x = 1$.

Ejemplo

Sea f la función definida por $f(x) = |x-2|$. Calcule $f'(2)$.

Ejemplo

Sea f la función definida por $f(x) = |x| + |x+1|$. Analizar la derivada de f.

Observación

En muchos casos las derivadas laterales no coinciden y la curva presenta "puntos angulosos". Por el contrario, en aquellos puntos de la gráfica donde las derivadas laterales coinciden se dice que la curva es "suave".

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

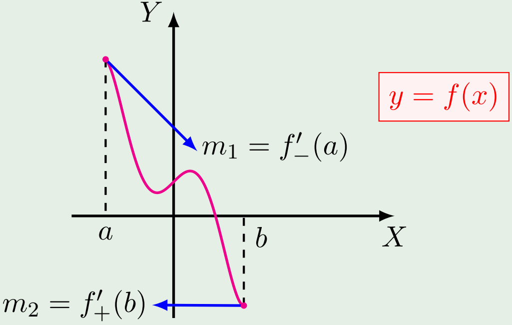
Definición

Sea f una función. Se dice que:

- f es derivable en $]a, b[$ si para cada $x \in]a, b[$ existe $f'(x)$.
- f es derivable en $[a, b[$ si f es derivable en $x \in]a, b[$ y existe $f'_+(a)$.
- f es derivable en $]a, b]$ si f es derivable en $x \in]a, b[$ y existe $f'_-(b)$.
- f es derivable en $[a, b]$ si f es derivable en $x \in]a, b[$ y existen $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$.

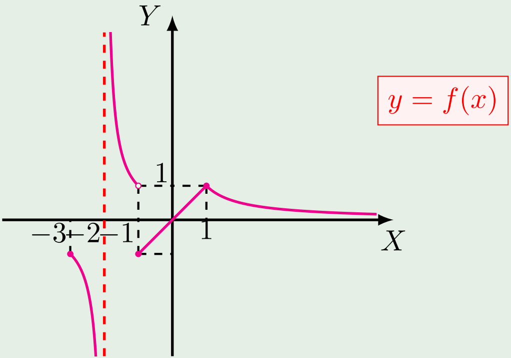
Ejemplo

En la gráfica de la función f se puede observar que f es derivable en $]a, b[$ y existen $f'_{+}(a)$ y $f'_{-}(b)$.



Ejemplo

Determine los intervalos donde es derivable la función f según la gráfica.



Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in A' \cap A$. En estas condiciones, si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Demostración.

Si f es una función derivable en x_0, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(f(x_0)+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right)\\
\lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0)+\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\
\lim_{x\to x_0} f(x) &= f(x_0)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f es continua en x_0. $\square$

Corolario

Si f no es continua en x_0, entonces f no es derivable en x_0.

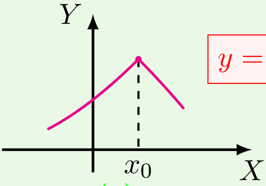
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

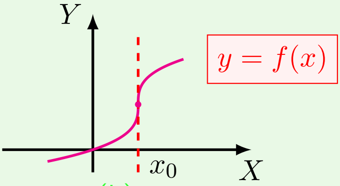
La figura adjunta describe dos situaciones comunes en la que una función f que es continua en x_0 puede dejar de ser derivable en x_0. Estas situaciones puede ser descritas informalmente como

a) Puntos con pico

b) Puntos de rectas tangente vertical



(a)



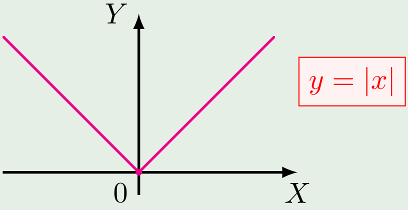
(b)

Ejemplo

El gráfico de $y = |x|$ muestra que hay un pico en $x = 0$, y eso implica que $f(x) = |x|$ no es derivable en aquel punto.

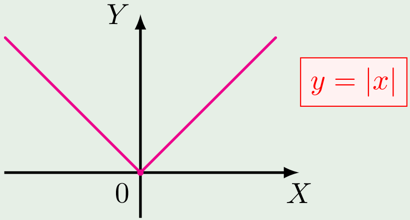
a) Demuestre que $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$.

b) Encuentre una formula para $f'(x)$.



Resolución

a) Es fácil ver que $f'_-(0) = -1$ y $f'_+(0) = 1$, como estos límites son diferentes, entonces no existe $f'(0)$.

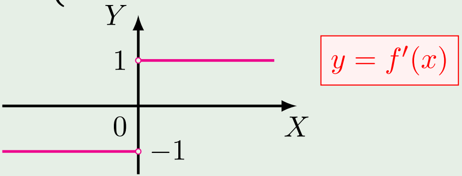


Resolución

b) Una formula para la derivada de $f(x) = |x|$ se obtiene así:

- Si $x > 0$, entonces $f(x) = x$ y $f'(x) = 1$
- Si $x < 0$, entonces $f(x) = -x$ y $f'(x) = -1$

Luego, $f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$



Observe que f' no es continua en $x = 0$.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning