Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 13, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Rolle)

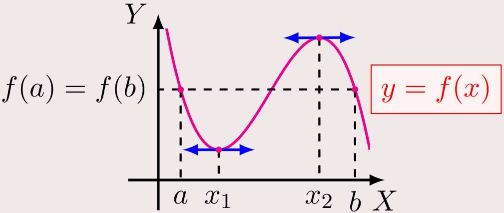
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demostración.

Si f es constante en $[a,b]$, entonces para cada $x_0 \in]a,b[$ se cumple que $f'(x_0) = 0$.

Supongamos que f no es constante en $[a,b]$. Como f es continua en $[a,b]$, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo en $[a,b]$.

Supongamos que f alcanza su valor mínimo en x_1 y su valor máximo en x_2.



Demostración.

Luego, uno de ellos debe estar en $]a, b[$, pues si ambos estuvieran en el conjunto $\{a, b\}$ de la condición $f(a) = f(b)$ se tendría que f es constante.

Supongamos que $x_1 \in]a, b[$. Luego, se tiene

$f(x_1) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$ y $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0, \forall x \in [a, x_1[$ y como f es derivable en x_1, entonces $\displaystyle\lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0$ lo que implica que $f'_-(x_1) = f'(x_1) \leq 0$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

De la misma forma $\forall x \in]x_1, b]$ se tiene $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0$ y como f es derivable en x_1, entonces $\displaystyle\lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0$ lo que implica que $f'_+(x_1) = f'(x_1) \geq 0$. Así, se tiene que $f'(x_1) = 0$. Si $x_2 \in]a, b[$, la prueba es similar. $\square$

Ejemplo

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1. \\ 0 & , x = 1. \end{cases}$$

Es claro que $f(0) = f(1)$, f es derivable en $]0,1[$, pero f no es continua en $[0,1]$ (f no es continua en 1).
Se puede ver que $f'(x) = 1$, para cada $]0,1[$, y por lo tanto, f' nunca es cero en $]0,1[$. Esto sucede pues f no es continua en $[0.1]$.

Ejemplo

Sea $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, la función definida por $g(x) = |x|$, $\forall x \in [-1, 1]$.
Es claro que $g(-1) = g(1) = 1$, g es continua en $[-1, 1]$ y que g no es derivable en $]-1, 1[$ (g no es derivable en 0). Se puede ver que $g'(x) = -1$, si $x < 0$ y $g'(x) = 1$, si $x > 0$.
Así, g' nunca es cero en $]-1, 1[$. La causa de esto es que g no es derivable en 0.

Ejemplo

Sea $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [-1,1]$.

Es claro que $f(-1) = f(1) = 0$, f es continua en $[-1,1]$ y f es derivable en $]-1,1[$ con $f'(x) = -\dfrac{x}{1-x^2}, \forall x \in]-1,1[$.

Como f satisface las condiciones del teorema de Rolle, existe $x_0 \in]-1,1[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

De la ecuación anterior, se obtiene que $x_0 = 0$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicio

Sean f, g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si $f(a) = g(a)$ y $f(b) = g(b)$, demuestre que existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Valor medio de Lagrange)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Luego existe $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad \forall x \in [a, b].$$

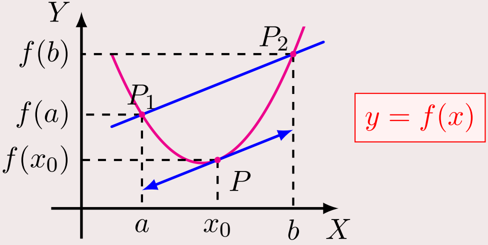
Veamos que g satisface las condiciones del teorema de Rolle $g(a) = 0 = g(b)$. Es claro que g es continua en $[a, b]$, g es derivable en $]a, b[$ y $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Por el teorema de Rolle, existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $g'(x_0) = 0$; es decir, $f'(x_0) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

Por lo tanto, $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ □

Interpretación geométrica del teorema del valor medio

Si f es una función con gráfica continua y tiene recta tangente (no vertical) en todos los puntos $P(x, f(x))$ con abscisas están en $x_0 \in]a, b[$, entonces existe $x_0 \in]a, b[$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es paralela al segmento que une los puntos $P_1(a, f(a))$ y $P_2(b, f(b))$.



Ejemplo

Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & ,0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x^2+1}{2} & ,1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

¿Se puede aplicar el teorema del valor medio a f? Calcule, si fuera el caso, el valor de x que cumpla con la conclusión del teorema.

Resolución

La función f es continua en $[0,2]$ y es derivable en $]0,2[$, donde

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \\ x, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

La derivada $f'(1)$ se calculo por definición. Luego, se cumplen las condiciones del Teorema del valor medio en virtud de lo cual existe

$x_0 \in]0,2[$ tal que $f'(x_0) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{\frac{5}{2}-0}{2} = \dfrac{5}{4}$.

En este caso se obtiene $x_0 = \dfrac{5}{4}$.

Ejercicio

Sea $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $\lim_{x\to 0} f'(x) = L$, entonces demuestre que $L = f'(0)$.

Ejercicio

Un automovilista que viaja de Lima a Cañete hace 1 hora con 50 minutos. La distancia entre estas ciudades es de 240 kilómetros. Si el límite de velocidad es de 110 km/hr, ¿debe o no ser multado el conductor?

Teorema (Valor medio generalizado)

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones reales tales que:

- f y g son continuas en $[a, b]$.
- f y g son derivables en $]a, b[$.
- $g(a) \neq (b)$.
- $g'(x) \neq 0$ para todo $x]a, b[$.

Luego, existe $x_0 \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Demostración.

Sea $h(x)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)),\ \forall x \in [a,b]$$

La función h es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, donde

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x),\ \forall x \in]a,b[$$

Demostración.

Luego, por el Teorema de Rolle existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $h'(x_0) = 0$, esto es

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x_0) &= 0 \\
\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} &= \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}
\end{aligned}
$$

□

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Corolario

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in I$, $f'(x) = 0$. Luego, f es constante en I.

Demostración.

Sean $a, x \in I$ con $[a, x] \subset I$. Como para cada $t \in I, f'(t) = 0$ y $[a, x] \subset I$, entonces $f'(t) = 0$, para cada $t \in [a, x]$.
Esto implica que f es continua en $[a, x]$ y derivable en $]a, x[$.
Por el teorema del valor medio existe $t_0 \in]a, x[$ tal que

$$f'(t_0) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0,$$

lo cual implica que $f(x) - f(a) = 0$, es decir, $f(x) = f(a)$. $\square$

Corolario

Sea f y g funciones derivables en un intervalo I tales que para cada $x \in I$, $f'(x) = g'(x)$. Luego, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + C, \quad \forall x \in I.$$

Es decir f y g se diferencian por una constante.

Demostración.

Sea $h : I \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad \forall x \in I.$$

Es claro que para cada $x \in I, h'(x) = 0$.
Por el corolario anterior existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = C, \quad \forall x \in I$,
lo que implica que

$$f(x) = g(x) + C, \quad \forall x \in I.$$

$\square$

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Ron Larson - Bruce Edwards
Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
Cengage Learning