CONJUNTOS-RELACIONES-FUNCIONES

Profesores del curso:

Ronald Mass [1]

Ángel Ramírez [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

30/03/2020

Tabla de contenidos

Un **conjunto** está formado de objetos que son llamados elementos del conjunto.

La relación básica entre un conjunto y un objeto es la **relación de pertenencia.**

Cuando un objeto x es uno de los elementos de un conjunto A, decimos que x **pertenece** a A y se denota por $x \in A$.

Caso contrario, cuando un objeto x no es uno de los elementos de un conjunto A, decimos que x **no pertenece** a A y se denota por $x \notin A$.

El método más frecuente de definir un conjunto es por medio de una propiedad común y exclusiva de sus elementos.

Siendo más preciso, partiendo de una propiedad P definimos el conjunto A del modo que sigue:

Si un objeto x satisface la propiedad P entonces $x \in A$, y si x no satisface P entonces $x \notin A$

lo anterior se expresa: $A = \{x \,/\, x \quad \text{satisface la propiedad} \quad P\}$.

En ocasiones, la propiedad P se refiere a elementos de un cierto conjunto universal U, en cuyo caso:

$$A = \{x \in U \,/\, x \quad \text{satisface la propiedad} \quad P\}$$

Ejemplos:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \}, \mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$, etc.
2. Definamos: U: conjunto de todos los triángulos. Sea la propiedad P: Es un triángulo rectángulo. Luego: $A = \{x \in U \,/\, x \quad \text{satisface la propiedad} \quad P\}$ = Conjunto de todos los triángulos rectángulos.
3. En cálculo se trabajan con conjuntos de la forma:

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\} \\
[a, b\rangle &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\} \\
\langle a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\} \\
\langle a, b\rangle &= \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}
\end{aligned}
$$

Definition 1 (Conjunto vacío)

Denotado por $\emptyset$, es definido así:

$$\text{Para todo } x \text{ se cumple que } x \notin \emptyset$$

Ejemplo: $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 < x < 2\}$.

Definition 2 (Inclusión)

A es subconjunto de B cuando todo elemento de A es elemento de B. Se denota por $A \subset B$ y se lee " A está contenido en B ".

Ejemplo: Sean X conjunto de todos los cuadrados e Y conjunto de todos los rectángulos, entonces $X \subset Y$.

Observación: $A \subset B$ no excluye la posibilidad que $A = B$. En el caso que $A \subset B$ y $A \neq B$ se dice que A es un subconjunto propio de B.

Propiedades de la inclusión:

Se cumple:

1. Es reflexiva: $A \subset A$ para todo conjunto A.
2. Antisimétrica: Si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$.
3. Transitiva: Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

Definition 3 (Conjunto de partes)

Dado un conjunto A, se denota por $\mathcal{P}(A)$ al conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de A.

Observación: $\mathcal{P}(A)$ nunca es vacío porque $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$.
Ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3\}$ entonces
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Operaciones entre conjuntos

Definition 4 (Unión)

Denotado por $A \cup B$ y está formado por los elementos de A con los elementos de B, es decir:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \quad \vee \quad x \in B\}.$$

Definition 5 (Intersección)

Denotado por $A \cup B$ y está formado por los elementos comunes de A y de B, es decir:

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \quad \wedge \quad x \in B\}.$$

Observación: En el caso que A y B no tienen elementos comunes, entonces $A \cap B = \emptyset$.

Operaciones entre conjuntos

Definition 6 (Diferencia)

Denotado por $A - B$ y está formado por los elementos de A que no pertenecen a B, es decir:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \quad \vee \quad x \notin B\}.$$

Definition 7 (Complemento)

Si $B \subset A$ entonces $A - B$ se llama el **complemento** *de B en relación a A. Esto se denota $C_A B$.*

Observación: Es usual tener un conjunto universal U, en este caso, el complemento de A es denotado por CA o A^c. Por tanto, $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$.

Propiedades de conjuntos

Con la **unión:**

1. $A \cup \emptyset = A$.
2. $A \cup A = A$.
3. $A \cup B = B \cup A$.
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
5. $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$.
6. $A \subset B, A' \subset B' \Rightarrow (A \cup A') \subset (B \cup B')$.
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Con la **intersección:**

1. $A \cap \emptyset = A$.
2. $A \cap A = A$.
3. $A \cap B = B \cap A$.
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.
6. $A \subset B, A' \subset B' \Rightarrow (A \cap A') \subset (B \cap B')$.
7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Propiedades de conjuntos

Con el **complemento:**

Sean A, B subconjuntos de un conjunto universal U, luego:

1. $(A^c)^c = A$.
2. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.
3. $A = \emptyset \Leftrightarrow A^c = U$.
4. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
5. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Tamaño de un conjunto

Sea A un conjunto. Si A tiene exactamente n elementos distintos, donde $n \in \mathbb{N}$, decimos que A es un **conjunto finito** y n es la **cardinalidad** de A. La cardinalidad de A es denotada por $|A|$.

Un conjunto A es **infinito** cuando no es finito.

Producto cartesiano:

El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \times B$ definido por:

$$A \times B = \{(a, b) \,/\, a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}.$$

Cuando $A = B$ se tiene el producto cartesiano $A^2 = A \times A$. El subconjunto $\Delta \subset A \times A$ definido por:

$$\Delta = \{(a, a) \,/\, a \in A\}$$

es llamado **diagonal** de A^2.

El **producto cartesiano** de los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, es definido por:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,/\, a_i \in A_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Tabla de contenidos

Un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$ es llamado **una relación** del conjunto A en el conjunto B. Es decir, los elementos de R son pares ordenados (a, b) donde el primer elemento $a \in A$ y el segundo elemento $b \in B$.

Ejemplo 1:
Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ entonces:

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (a,0),(a,1),(a,2),(a,3),(a,4), \\ (b,0),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4), \\ (c,0),(c,1),(c,2),(c,3),(c,4), \\ (d,0),(d,1),(d,2),(d,3),(d,4), \\ (e,0),(e,1),(e,2),(e,3),(e,4) \end{array} \right\}$$

$R = \{(a,0),(a,1),(a,3),(b,1),(b,2),(c,0),(c,3)\} \subset A \times B$, así R es una relación de A en B.

El ejemplo anterior ilustra que una relación R no contiene un par (x, y) para todo elemento de $x \in A$.

Una relación de A en sí mismo es llamado **una relación** en A.

Un par ordenado $(a, b) \in R$ es denotado por aRb.

Ejemplo 2: Del Ejemplo 1, calcule los pares (a, b) de la relación R sobre A donde $aRb \Leftrightarrow a \leq b$.

$$R = \left\{ \begin{array}{l} (0,0),(0,1),(0,2),(0,3), \\ (1,1),(1,2),(1,3), \\ (2,2),(2,3),(3,3) \end{array} \right\}$$

Definition 8

Si R es una relación de A en B y S una relación de B en C, la **composición** *de R con S denotada por $R \circ S$ es una relación de A en C definida por:*

$$R \circ S = \{(x, y) \,/\, \exists z \in B \quad tal\ que \quad (x, z) \in R \quad y \quad (y, z) \in S\}.$$

Definition 9 (Relación inversa R^{-1}.)

Sea R una relación de A en B. Definimos la relación inversa R^{-1} de B en A como sigue: $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \,/\, (a, b) \in R\}$. De forma equivalente:

$$para\ todo \quad a \in A \quad y \quad b \in B : (b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in R.$$

Sea R una relación sobre un conjunto A.

Definition 10

R es llamada **Reflexiva** *si y sólo si para todo $a \in A$: aRa.*

Definition 11

R es llamada **Simétrica** *si y sólo si para todo $a, b \in A$: si aRb entonces bRa.*

Definition 12

R es llamada **Transitiva** *si y sólo si para todo $a, b, c \in A$: Si aRb y bRc entonces aRc.*

Definition 13

R es llamada **Antisimétrica** *si y sólo si para todo $a, b \in A$: Si aRb y bRa entonces aRb.*

Ejemplo:

Defina una relación R sobre $\mathbb{R}$ como sigue: para todo número real a, b :

$$aRb \quad \Leftarrow \quad a = b.$$

¿R es reflexiva?. ¿R es simétrica?. ¿R es transitiva?.

Ejemplo:

Defina una relación T sobre $\mathbb{Z}$ como sigue: Para todos los enteros $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$mTn \quad \Leftrightarrow \quad 3|(m-n).$$

Esta relación es llamada **congruencia módulo 3**.
¿T es reflexiva?. ¿T es simétrica?. ¿T es transitiva?.

Tabla de contenidos

Función:

Una función f de un conjunto X hacia un conjunto Y denotado por $f : X \to Y$, es una relación de X en Y que satisface dos propiedades:

1. Todo elemento en X está relacionado con algún elemento de Y.
2. Ningún elemento en X está relacionado con más de un elemento de Y.

Es decir, cualquier elemento $x \in X$ está relacionado con un único elemento $y \in Y$ por la relación f y decimos que f envía x hacia y o que f mapea x en y y se denota $f : x \to y$. El único elemento $y \in Y$ para el cual f envía x es denotado por $f(x)$, es decir: $y = f(x)$.

Definiciones:

Sea f una función de X en Y.

1. El conjunto X es llamado el **dominio** de f.
2. El conjunto de valores de f es llamado el **rango** de f o la **imagen** de X bajo f, es denotado por:

$$\text{rango de } f = \{y \in Y \,/\, y = f(x) \quad \text{para algún} \quad x \in X\}.$$

3. Dado un elemento $y \in Y$, pueden existir elementos $x \in X$ tal que y es su imagen, es decir $f(x) = y$, entonces x es llamado una **preimagen** de y o una **imagen inversa** de y. El conjunto de todas las imágenes inversas de y es llamado **la imagen inversa** de y, es decir:

$$\text{la imagen inversa de} \quad y = \{x \in X \,/\, f(x) = y\}.$$

Definiciones:

Sea $f : X \to Y$ una función, $A \subset X$ y $C \subset Y$, entonces:

1. La **imagen** de A se define por:

$$f(A) = \{y \in Y \,/\, y = f(x) \quad \text{para algún} \quad x \in A\}.$$

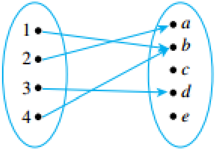
2. La **imagen inversa** de C se define por:

$$f^{-1}(C) = \{x \in X \,/\, f(x) \in C\}.$$

Ejemplo:

The Action of a Function on Subsets of a Set

Let $X = \{1, 2, 3, 4\}$ and $Y = \{a, b, c, d, e\}$, and define $F : X \rightarrow Y$ by the following arrow diagram:



Let $A = \{1, 4\}$, $C = \{a, b\}$, and $D = \{c, e\}$. Find $F(A)$, $F(X)$, $F^{-1}(C)$, and $F^{-1}(D)$.

Solution

$$F(A) = \{b\} \quad F(X) = \{a, b, d\} \quad F^{-1}(C) = \{1, 2, 4\} \quad F^{-1}(D) = \emptyset$$

Propiedades:

Dada una función $f : A \to B$.

Para las **imágenes:**
Sean X e Y subconjuntos de A. Se cumplen:

1. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
2. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.
3. Si $X \subset Y$ entonces $f(X) \subset f(Y)$.
4. $f(\emptyset) = \emptyset$.

Para las **imágenes inversas o pre-imágenes:**
Sean Y y Z subconjuntos de B. Se cumplen:

1. $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$.
2. $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$.
3. $f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$.
4. Si $Y \subset Z$ entonces $f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Z)$.
5. $f^{-1}(B) = A$.
6. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Sea $f : X \to Y$ una función.

Definition 14 (Función inyectiva)

f es llamada **inyectiva** *cuando para cualesquiera $x, y \in X$ tal que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$.*

Definition 15 (Función sobreyectiva)

f es llamada **sobreyectiva** *cuando para todo $y \in Y$ existe por lo menos un $x \in X$ tal que $f(x) = y$.*

Definition 16 (Función biyectiva)

f es llamada **biyectiva** *cuando es* **inyectiva** *y* **sobreyectiva***.*

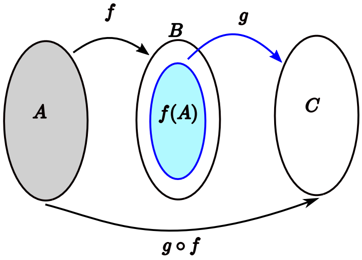
Ejemplo:

Sean A, B conjuntos. Definimos $\mathcal{F}(A,B) = \{f : A \to B \,/\, f \quad \text{es una función}\}$. Sean A, B, C, D conjuntos. Suponga que existe funciones biyectivas $f : A \to C$ y $g : B \to D$, entonces demuestre que existe una función biyectiva entre $\mathcal{F}(A,B)$ y $\mathcal{F}(C,D)$.

Composición de funciones

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones tales que el **dominio** de g es igual al **rango** (o contradominio) de f. Definimos la **función compuesta** $g \circ f : A \to C$ que consiste en evaluar primero f y luego aplicar g, es decir:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{para todo} \quad x \in A.$$



Propiedades:

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ funciones tales que está bien definido la composición de funciones. Se cumple:

1. La composición de funciones es asociativa, es decir: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
2. Si f y g son funciones inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.
3. Si f y g son funciones sobreyectivas entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
4. La composición de dos biyecciones es otra biyección.

Sean $f : A \to B$, $g : B \to A$ funciones ($dom(g) = B$).

Definition 17 (Función Inversa a derecha)

Si $g \circ f = id_A : A \to A$, es decir, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$, entonces g es llamada **inversa a izquierda** *de f.*

Definition 18 (Función Inversa a izquierda)

Si $f \circ g = id_B : B \to B$, es decir, $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$ para todo $y \in B$, entonces g es llamada **inversa a derecha** *de f.*

Definition 19 (Función inversa)

Si $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$ (es decir, g es inversa a izquierda y a derecha de f), entonces g es llamada **función inversa** *de f y es denotada por $f^{-1} := g$.*

Ejemplo:

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales. Definamos $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como $s(n) = n + 1$, la cual es llamada **función shift**. Demuestre que s no tiene inversa a la derecha pero tiene infinitas funciones inversas a la izquierda.

Solución:

- Por contradicción: Suponga que s admite una inversa a derecha " r ". Luego: $s(r(1)) = 1$ entonces $1 + r(1) = 1$ esto es $r(1) = 0 \notin \mathbb{N}$. Entonces s no admite inversa a derecha.
- Defina l sobre el conjunto $\{2, 3, \ldots, \} \subset \mathbb{N}$ del modo siguiente: $l(n) = n - 1$. Esto permite crear una infinidad de funciones $\{l_i\}$ y cada uno de ellos cumple $l_i(s(n)) = (n + 1) - 1 = n$ para todo $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Así l_i es una inversa a izquierda de s para todo $i = 2, 3, \ldots$.

Propiedades:

1. Una función $f : A \to B$ posee inversa a izquierda si y solamente si f es inyectiva.
2. Una función $f : A \to B$ posee inversa a derecha si y solamente si f es sobreyectiva.
3. Una función $f : A \to B$ tiene inversa si y sólo si es una biyección.
4. Cuando existe la función inversa, ésta es única.
5. Si $f : A \to B$ y $g : B \to A$ son biyecciones, entonces es claro que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.