Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

2 de noviembre de 2020

Introducción

Definición (Anillo)

Sea $\mathbb{F}$ un conjunto no-vacío, la cual poseé las operaciones de

a) *la* **SUMA** $+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ *tal que* $(\forall a, b \in \mathbb{F})(a + b \in \mathbb{F})$, *es decir,* $\mathbb{F}$ *es cerrada con respecto* $+$, *y además satisface los siguientes axiomas:*
   1) $(\forall a, b \in \mathbb{F})(a + b = b + a)$ *(conmutativa).*
   2) $(\forall a, b, c \in \mathbb{F})(a + (b + c) = (a + b) + c)$ *(asociativa).*
   3) *Existe un elemento* $0 \in \mathbb{F}$, *llamado neutro aditivo (en este caso,* **cero**), *tal que* $(\forall a \in \mathbb{F})(a + 0 = a)$.
   4) *Existe el elemento simétrico (opuesto):* $(\forall a \in \mathbb{F})(\exists b \in \mathbb{F})(a + b = 0)$, *y lo denotamos por* $b = -a$.

b) *del* **PRODUCTO** $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ *tal que* $(\forall a, b \in \mathbb{F})(a \cdot b \in \mathbb{F})$, *es decir,* $\mathbb{F}$ *es cerrado con respecto* $\cdot$, *y además satisface los siguientes axiomas:*
   5) $(\forall a, b, c \in \mathbb{F})(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$ *(asociativa).*
   6) $(\forall a, b, c \in \mathbb{F})(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$ *(distributiva respecto $+$).*

Este conjunto $\mathbb{F}$ *con las operaciones indicadas se le llama* **ANILLO**.

Notar que un anillo $\mathbb{F}$ es conmutativo con respecto $+$.

Definición (Anillo Conmutativo y Anillo con Unidad)

Si un anillo $\mathbb{F}$ *es conmutativa con respecto* $\cdot$, *diremos que* $\mathbb{F}$ *es un* **ANILLO CONMUTATIVO**.
Si en un anillo $\mathbb{F}$ *existe un elemento* $1 \in \mathbb{F}$ *no nulo, llamado neutro multiplicativo (en este caco,* **uno**) *tal que* $(\forall a \in \mathbb{F})(a \cdot 1 = a)$, *entonces diremos* $\mathbb{F}$ *es un* **ANILLO CON UNIDAD**

Ejemplo

1. *El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo con unidad.*
2. *El conjunto $A = \{(a,b)/a, b \in \mathbb{Z}\}$ con respeto a las operaciones*
   1) *SUMA $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ y el*
   2) *PRODUCTO $(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$*

   tiene la estructura de anillo conmutativo con unidad.

Ejercicio

Encuentre al menos dos conjuntos que no sean anillos.

Proposición

Sea $\mathbb{F}$ un anillo y para todo $a, b \in \mathbb{F}$ se tiene

1. $a \cdot 0 = 0$ *y* $0 \cdot a = 0$
2. $a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$ *y* $b \cdot a + (-b) \cdot a = 0.$
3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$

En efecto: Para todo $a, b \in \mathbb{F}$ se tiene:

1. $a \cdot (b + 0) = a \cdot b + a \cdot 0 = a \cdot b$ (propiedad distributiva), de la última igualdad y usando la existencia del elemento simétrico para $a \cdot b$, obtenemos que $a \cdot 0 = 0$, la segunda parte queda como ejercicio.
2. Ejercicio.
3. Usando 2) y la existencia del elemento simétrico obtenemos $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-a \cdot b) = a \cdot b.$

■

Definición (Cuerpo)

Sea $\mathbb{F}$ un anillo conmutativo con unidad tal que
(Para cada $a \in \mathbb{F}$ no nulo)$(\exists b \in \mathbb{F})(a \cdot b = 1)$.
El elemento b es llamado **inverso multiplicativo** *y lo denotamos por $b = a^{-1}$.*
Tal anillo se le llama **CUERPO**.

Nota de aquí en adelante denotaremos $ab = a \cdot b$.

Espacios Vectoriales

Ahora denotamos por $\mathbb{K}$, el cual es llamado cuerpo de los escalares, donde $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{Q}$, etc.

Definición

Sea V un conjunto no-vacío sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, diremos que V es un espacio vectorial (también llamado $\mathbb{K}-$espacio vectorial), la cual está provisto de operaciones

- **suma** $+ : V \times V \longrightarrow V$, *tal que es cerrada, es decir,* $(\forall u, v \in V)(u + v \in V)$ *y para todo* $u, v, w \in V$ *se tiene*
  1) $u + v = v + u$ *(conmutativo).*
  2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(asociativo).*
  3) *Existe un elemento* $\mathbf{0} \in V$, *llamado elemento* **neutro aditivo**, *(también llamado* **cero***), tal que*

$$(\forall u \in V)(u + \mathbf{0} = u).$$

  4) $(\text{Para cada } v \in V)(\exists w \in V)(v + w = \mathbf{0})$.
     El elemento w es llamado el **opuesto** *de v, y lo denotamos por $w = -v$.*

- **producto por un escalar** $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$, *tal que es cerrada, es decir,* $(\forall u \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K})(\lambda v \in V)$ *y para todo* $u, v \in V$ *y todo* $\lambda, \gamma \in \mathbb{K}$ *se tiene*
  1) $\lambda(\gamma v) = (\lambda\gamma)v$.
  2) $(\lambda + \gamma)v = \lambda v + \gamma v$.
  3) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
  4) $1v = v$.

Nota Los elementos del $\mathbb{K}-$espacio vectorial son llamados **vectores**. De aquí en adelante simplemente llamaremos a V espacio vectorial, a menos que tengamos espacios vectoriales definidos sobre diferentes cuerpos.
A los elementos de $\mathbb{K}$ son llamados **escalares**.

Nota

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, diremos que V es un espacio* **vectorial racional**.
2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se dice que V es un espacio* **vectorial real**.
3. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, diremos que V es un espacio* **vectorial complejo**.

Ejemplo

Daremos algunos ejemplos de espacios vectoriales.

1. *Consideremos le conjunto*

$$\mathscr{L} = \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 / 4v_1 - 3v_2 = 0\},$$

   es un espacio vectorial sobre real.

2. *Sea A un conjunto no-vacío y definamos el conjunto*

$$\mathbb{K}_A = \{f : A \longrightarrow \mathbb{K} / f \text{ es una función}\}$$

   provisto de las operaciones

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

   para todo $f, g \in \mathbb{K}_A$, y toto $\lambda \in \mathbb{K}$. $\mathbb{K}_A$ es espacio vectorial.

3. *el conjunto*

$$D = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f \text{ es diferenciable en } x = 1\},$$

es un espacio vectorial con las operaciones definidas en el item 2).

4. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y definamos el conjunto*

$$S = \{\{a_n\} / a_n \in \mathbb{R}\},$$

con las operaciones

$$\begin{aligned} \{a_n\} + \{b_n\} &= \{a_n + b_n\} \\ \lambda\{a_n\} &= \{\lambda a_n\}, \end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, es espacio vectorial real.

Proposición

En todo espacio vectorial V, se satisface, para todo $u, v, w \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. *El elemento neutro aditivo es único.*
2. *el elemento opuesto (también llamado simétrico) de un vector es único.*
3. $0v = \mathbf{0}$, $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
4. *Si $\lambda v = \mathbf{0}$, entonces $\lambda = 0$ o $v = \mathbf{0}$.*
5. *Si $u + v = u + w$, entonces $v = w$.*
6. $-(u + v) = -u + (-v)$.
7. $(-1)v = -v$.

Prueba:

1. Supongamos que existen dos neutros aditivos **0** y **0'** en V, luego

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'.$$

2. Supongamos que existen dos opuestos v' y v'' de v en V, luego

$$\begin{aligned} v' &= v' + \mathbf{0} = v' + (v + v''), \quad v + v'' = \mathbf{0} \\ &= (v' + v) + v'' = \mathbf{0} + v'', \quad v' + v = \mathbf{0} \\ &= v''. \end{aligned}$$

3. Ejercicio.
4. Ejercicio.

5.

$$\begin{aligned} v = v + \mathbf{0} = v + (u + (-u)) &= (v + u) + (-u) \\ &= (w + u) + (-u) \quad \textit{hipótesis} \\ &= w + (u + (-u)) = w + \mathbf{0} \\ &= w. \end{aligned}$$

6. *Ejercicio.*
7. *Ejercicio.*

Definición

Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y un subconjunto $S \subset V$ no vacío, diremos que S es un **subespacio** *de V, si es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V.*

Ejemplo

1. *$V_0 = \{\mathbf{0}\}$ es el subespacio vectorial de cualquier espacio vectorial V.*
2. *Sea $V = \mathbb{R}^3$, entonces los únicos subespacios de V son $\{\mathbf{0}\}$, todas las rectas que pasan por el origen, todos los planos que pasan por el origen y $\mathbb{R}^3$.*

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $S \subset V$ un subconjunto no-vacío, entonces S es un subespacio si, y solo si

$$\alpha u + \beta v \in S, \quad \text{para todo } u, v \in S, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Prueba:

$\Longrightarrow$) S es un subespacio por lo tanto S es un espacio vectorial y de hecho satisface el enunciado.

$\Longleftarrow$) Sean $u, v \in S$, entonces en particular escojamos $\alpha = \beta = 1$, entonces

$$u + v = 1u + 1v \in S,$$

ahora hagamos $v = \mathbf{0}$, $\beta = 1$, entonces $\alpha u = \alpha u + 1\mathbf{0}$.

Definición (Combinación Lineal)

Sean V un espacio vectorial y los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^r \in V$, entonces estos vectores son llamados **combinación lineal** *a toda expresión de la forma*

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_r v^r,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.
El conjunto $A \subset V$ se llama combinación lineal de elementos de A a toda combinación lineal de un número finito de elementos de A.

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

4 de noviembre de 2020

Espacios Vectoriales (continuación)

Definición (Combinación Lineal)

Sean V un espacio vectorial y los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^r \in V$, entonces estos vectores son llamados **combinación lineal** *a toda expresión de la forma*

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_r v^r,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{K}$.
El conjunto $A \subset V$ se llama combinación lineal de elementos de A a toda combinación lineal de un número finito de elementos de A.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $A \subset V$ un conjunto no-vacío, y $\mathscr{F} = \{W \supset A / W \text{ es un subespacio de } V\}$, entonces

$$\bigcap_{W\in\mathscr{F}} W \in \mathscr{F}$$

Prueba:
Sean $u, v \in \bigcap_{W\in\mathscr{F}} W$, entonces $u, v \in W$ para todo $W \in \mathscr{F}$,
pero $W \subset V$ es un subespacio, luego $(\forall\alpha, \beta \in \mathbb{F})(\alpha u + \beta v \in W)$ por tanto $\alpha u + \beta v \in \bigcap_{W\in\mathscr{F}} W$, es decir,

$\bigcap_{W\in\mathscr{F}} W$ es un subespacio de V que contiene a A. ■

Denotemos $\mathscr{L}(A) = \bigcap_{W\in\mathscr{F}} W$, es decir, es el subespacio más pequeño de V que contiene a A y $\mathscr{L}(A) \subset W$ para todo $W \in \mathscr{F}$.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $A \subset V$ un conjunto no-vacío, entonces $\mathscr{L}(A)$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de A.

Prueba: ejercicio.

Nota

Esta proposición nos indica que $\mathscr{L}(A)$ puede ser obtenido a partir de los elementos de A.

Nota

Si $A = \emptyset$, entonces $\mathscr{L}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$.

Definición

Sean V un espacio vectorial y $A \subset V$ un conjunto. Si $\mathscr{L}(A) = V$, entonces decimos que A es un conjunto de **generadores** *de V.*

Ejemplo

1. *Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathscr{L}(A) = \{(0;1),(1;0)\} \subset V$, entonces $\mathscr{L}(A) = V$. En efecto:*
   Basta elegir cualquier $v = (v_1, v_2) \in V$ el cual puede ser expresado
   $v = (v_1, v_2) = v_1(1;0) + v_2(0;1)$.
2. $\{(1-x)^2, (1+x)^2, x + x^2\}$ *genera a* $F = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] / grad(f) \leq 2\}$.
   En efecto: Ejercicio

Si R, S son subespacios de V, entonces definimos la suma de estos subespacios por

$$R + S = \{u + v / u \in R, \ v \in S\}.$$

Nota

$R + S$ es un subespacio de V.
En efecto:
Sean $x, y \in R + S$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ arbitrarios,
entonces existen $u^1, u^2 \in R$, $v^1, v^2 \in S$ tales que:
$x = u^1 + v^1$ *e* $y = u^2 + v^2$.
Dado que R, S son subespacios de V, entonces
$\alpha u^1 + \beta u^2 \in R$ *y* $\alpha v^1 + \beta v^2 \in S$, *de donde se tiene*
$\alpha x + \beta y = \alpha(u^1 + v^1) + \beta(u^2 + v^2) = (\alpha u^1 + \beta u^2) + (\alpha v^1 + \beta v^2) \in R + S.$
Así $R + S$ es un subespacio de V. $\square$

Si R, S son subespacios de V, entonces definimos la **suma directa** de estos subespacios por

$$R + S = \{u + v / u \in R, \ v \in S\}, \quad \text{y} \quad R \cap S = \{\mathbf{0}\},$$

y lo denotamos por $R + S = R \oplus S$

Ejemplo

Consideremos $V = \mathbb{R}^3$, y los subespacios

1. $R = \{(x,y,z) \in V / x + y + z = 0\}$ *y*
   $S = \{(x,y,z) \in V / -x + y - z = 0\}$
   Veamos $R \cap S$:

$$
\begin{aligned}
R \cap S &= \{(x,y,z) \in V / x + y + z = 0, \ \ -x + y - z = 0\} \\
&= \{(x,y,z) \in V / y = 0, \ x = -z\} \\
&= \{(-z, 0, z) \in V / z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z(-1,0,1) / z \in \mathbb{R}\} \neq \{\mathbf{0}\}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, la suma $R + S$ no es suma directa.

2. $R = \{\alpha(1,-1,2) / \alpha \in \mathbb{R}\}$ *y* $S = \{(x,y,z) \in V / x + y + z = 0\}$
   Veamos $R \cap S$:

$$
\begin{aligned}
R \cap S &= \{(x,y,z) \in V / (x,y,z) = \alpha(1,-1,2), \ x + y + z = 0\} \\
&= \{\mathbf{0}\}, \qquad \textit{esto es debido a que } \alpha = 0
\end{aligned}
$$

Por tanto, la suma $R + S$ es suma directa, es decir,

$$R + S = R \oplus S.$$

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $R, S \subset V$ subespacios. Entonces la suma $R + S$ directa si, y solo si todo elemento $u \in R + S$ debe escribirse de manera única

$$u = v + w, \qquad \textit{donde} \quad v \in R, w \in S.$$

Prueba:

$\Longrightarrow$) Supongamos que $R \cap S = \{\mathbf{0}\}$, y $u \in R + S$ arbitrarios. Consideremos que existen $v, v' \in R$, $w, w' \in S$ tales que

$$u = v + w = v' + w',$$

de donde

$$v - v' = w' - w \in R \cap S.$$

Como $R \cap S = \{\mathbf{0}\}$, entonces $v' = v$ y $w' = w$.

$\Longleftarrow$) Ejercicio. $\blacksquare$

Ejercicio

Sean $n \in \mathbb{N}$, V un espacio vectorial y los subespacios $S^k \subset V$, $k = 1, 2 \cdots, n$. Generalice el resultado anterior.

Veremos como determinar un mínimo de generadores de un espacio vectorial.
Consideremos $k \in \mathbb{N}$, V un espacio vectorial y un conjunto de vectores $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\} \subset V$, diremos que estos vectores son **linealmente dependiente**, simplemente lo denotamos por **l.d.**, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ no todos nulos tales que

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k = \mathbf{0}$$

Ejemplo

Los vectores $(2, -3), (-4, 6)$ *son l.d. en* $\mathbb{R}^2$, *en efecto:*

$$2(2, -3) + (-4, 6) = (0, 0).$$

Definición (Linealmente Independiente)

Sean V un espacio vectorial, decimos que los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^k$ de V son **linealmente independientes**, *y lo denotamos por* **l.i.**, *si la ecuación*

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k = \mathbf{0}$$

tiene como única solución a $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Ejercicio

1. *Pruebe que si $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$ son l.i., entonces estos vectores son no-nulos.*
2. *Cualquier vector $v \neq \mathbf{0}$, es l.i.*
3. *si conjunto de vectores $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$ es l.i., entonces el conjunto $\{v^1, v^2, \cdots, v^k, \mathbf{0}\}$ es l.d.*

Definición

Sean V un espacio vectorial y $A \subset V$ un conjunto no-vacío, decimos que A es **linealmente independiente***si toda colección finita de elementos de A es l.i.*

Definición

Sea V un espacio vectorial, un conjunto $A \subset V$ es una base si

1. *$V = \mathscr{L}(A)$, es decir, A genera a V.*
2. *A es linealmente independiente.*

Nota

Si A es un conjunto finito, digamos $A = \{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$, y además una base para el espacio vectorial V, entonces se tiene

1. *Cada elemento $u \in V$ se expresa de la forma*

$$u = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j,$$

   donde $\alpha_j \in \mathbb{F}$.

2. *Los vectores $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$ son l.i.*

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$ un conjunto de generadores de V. Supongamos que $u = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k$, con $\alpha_1 \neq 0$. entonces $\{u, v^2, \cdots, v^k\}$ genera a V.

Prueba:
Dado que $\alpha_1 \neq 0$, entonces tenemos

$$v^1 = \beta_1 u + \beta_2 v^2 + \cdots + \beta_k v^k,$$

donde $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}$, y $\beta_j = -\frac{\alpha_j}{\alpha_1}$, $j = 2, 3, \cdots, k$. Sea $w \in V$ cualquiera y como $v^1, v^2, \cdots, v^k$ genera a V, entonces escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ tales que

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_k v^k \\ &= \lambda_1(\beta_1 u + \beta_2 v^2 + \cdots + \beta_k v^k) + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_k v^k \\ &= \lambda_1 \beta_1 u + (\lambda_1 \beta_2 + \lambda_2) v^2 + \cdots + (\lambda_1 \beta_k + \lambda_k) v^k. \end{aligned}$$

Por tanto $\{u, v^2, \cdots, v^k\}$ genera a V. ∎

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\} \subset V$ genera a V y $\{u^1, u^2, \cdots, u^r\} \subset V$ una colección arbitraria de vectores, con $k < r$, entonces $\{u^1, u^2, \cdots, u^r\}$ son l.d.

Prueba:
Probaremos está proposición por el absurdo, es decir, supongamos que $\{u^1, u^2, \cdots, u^r\}$ son l.i.
Por hipótesis tenemos que $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}$ generan a V, entonces, tenemos

$$u^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k,$$

donde algún $\alpha_j \neq 0$, dado que $u^1 \neq \mathbf{0}$.
Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha_1 \neq 0$.

Entonces, por la proposición anterior tenemos que los vectores $\{u^1, v^2, \cdots, v^k\}$ generan a V.
En forma inductiva, podemos asumir que hemos conseguido que los vectores $\{u^1, u^2, \cdots, u^j, v^{j+1}, \cdots, v^k\}$ sean generadores de V.
Así podemos escribir

$$u^{j+1} = \sum_{l=1}^{j} \beta_j u^j + \sum_{i=j+1}^{k} \gamma_i v^i.$$

Como $u^{j+1} \neq \mathbf{0}$, para algún $\gamma_i \neq 0$, (si todos los $\gamma_i = 0$ entonces los u^i serían l.d. contradice la hipótesis auxiliar).
Sin pérdida de generalidad, asumiremos que $\gamma_{j+1} \neq 0$, entonces por la proposición anterior se tiene

$$\{u^1, u^2, \cdots, u^j, u^{j+1}, v^{j+2}, \cdots, v^k\}$$

generan a V.

Luego por el Principio de Inducción Matemática, se logró reemplazar todos los vectores v^i por los u^i, obteniéndose que

$$\{u^1, u^2, \cdots, u^k\}$$

generan a V.
Pero $r > k$, entonces existe u^{k+1} tal que

$$u^{k+1} = \beta_1 u^1 + \beta_2 u^2 + \cdots + \beta_k u^k,$$

lo cual es una contradicción a la independencia lineal de $\{u^1, u^2, \cdots, u^k\}$.
Por tanto, $\{u^1, u^2, \cdots, u^k\}$ son l.d. ■

Proposición (Teorema de la Dimensión)

Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo cardinal.

Proposición (Existencia de Bases)

De cualquier conjunto generador de un espacio vectorial V se puede extraer una base.

Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

9 de noviembre de 2020

Espacios Vectoriales (continuación)

Proposición (1)

Sean V un espacio vectorial, $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\} \subset V$ genera a V y $\{u^1, u^2, \cdots, u^r\} \subset V$ una colección arbitraria de vectores, con $k < r$, entonces $\{u^1, u^2, \cdots, u^r\}$ son l.d.

Proposición (Teorema de la Dimensión)

Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo cardinal.

Prueba:
Denotemos $\mathfrak{B}$ la base de V.
Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\mathfrak{B} = \emptyset$.
Si $V \neq \{\mathbf{0}\}$, en este caso demostraremos previamente el siguiente

Lema

Sean V un espacio vectorial, $S \subset V$, $u, v \in V$. Entonces $v \in \mathscr{L}(S \cup \{u\}) \backslash \mathscr{L}(S) \Rightarrow u \in \mathscr{L}(S \cup \{v\})$.

Prueba:
Por hipótesos se tiene que $v \in \mathscr{L}(S \cup \{u\}) \backslash \mathscr{L}(S)$, entonces vectores $\{s^1, s^2, \cdots, s^m\} \subset S$ tales que

$$v = \alpha_1 s^1 + \alpha_2 s^2 + \cdots + \alpha_m s^m + \alpha u,$$

observar que si $\alpha = 0$, entonces $v \in \mathscr{L}(S)$ lo cual es una contradicción.
Por tanto despejamos u, y obtenemos

$$u = \alpha^{-1} v + \alpha^{-1}\alpha_2 s^1 + \cdots + \alpha^{-1}\alpha_m s^m,$$

esto nos indica que $u \in \mathscr{L}(S \cup \{v\})$. $\square$

Ahora veamos la continuación de la demostración del **Teorema de la Dimensión**, entonces
Caso I $card(\mathfrak{B}) < \infty$.
Entonces supongamos que V posee dos bases $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ tales que $card(\mathfrak{B}_1) = n$ y $card(\mathfrak{B}_2) = m$, con $m < n$, y consideremos que $\mathfrak{B}_1 = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{u^1, u^2, \cdots, u^m\}$.
Como $u^1 \in \mathscr{L}(\mathfrak{B}_1) = V$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ no todos nulos tale que

$$u^1 = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_n v^n, \tag{1}$$

notar que $u^1 \neq \mathbf{0}$, dado que los $v^j \neq \mathbf{0}$.
Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha_1 \neq 0$.
Notamos que $u^1 \notin \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\})$, en caso contrario, existen escalares no todos nulos $\beta_2, \cdots, \beta_n$ tales que

$$u^1 = \beta_2 v^2 + \cdots + \beta_n v^n, \tag{2}$$

Restando las ecuaciones (2) de (1) tenemos

$$\alpha_1 v^1 + (\alpha_2 - \beta_2)v^2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)v^n = \mathbf{0},$$

con $\alpha_1 \neq 0$ entonces $\mathfrak{B}_1$ es l.d lo cual es una contradicción.
Por tanto tenemos

$$u^1 \in \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\} \cup \{v^1\}) \backslash \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\}),$$

ahora aplicamos el Lema anterior obteniéndose

$$v^1 \in \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\} \cup \{u^1\}).$$

Como $\{v^2, \cdots, v^n\}$ es linealmente independiente. y $u^1 \notin \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\}$
entonces $\{u^1, v^2, \cdots, v^n\}$ es l.i.

Como $v^1 \in \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\} \cup \{u^1\})$, entonces se tiene que $V = \mathscr{L}(\{v^2, \cdots, v^n\} \cup \{u^1\}) = \mathscr{L}(\{u^1, v^2, \cdots, v^n\}$, es decir, $\{u^1, v^2, \cdots, v^n\}$ es una base de V.
Repitiendo el proceso m veces, tenemos que

$$\{u^1, \cdots, u^m.v^{m+1}, \cdots, v^n\}$$

es una base de V.
Pero $\mathfrak{B}_2 = \{u^1, \cdots, u^m\}$ es una base de V, por tanto,$v^{m+1} \in \mathfrak{B}_2$, entonces

$$\{u^1, \cdots, u^m.v^{m+1}, \cdots, v^n\}$$

es linealmente dependiente, lo cual es una contradicción.
Por tanto, $m < n$ no puede ser.
De forma similar no puede ser $n < m$.
Por tanto todas las bases de V tiene el mismo número de elementos, es decir, tienen el mismo cardinal.

caso II $card(\mathfrak{B}) = \infty$, es decir. ninguna base tiene cardinal finito.
Sean $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ dos bases de V, entonces tienen un número infinito de vectores.
Consideremos $u \in \mathfrak{B}_1$, y como $\mathfrak{B}_2$ es una base de V, entonces existe un único subconjunto $\Delta_x \subset \mathfrak{B}_2$ tal que
$u \in \mathscr{L}(\Delta_u)$ y $u \notin \mathscr{L}(\Delta')$ para todo $\Delta' \subsetneq \Delta_u$.
Definamos una función definida

$$\varphi : \mathfrak{B}_1 \longrightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{B}_2), \qquad \varphi(u) = \Delta_u.$$

Recordemos ahora la siguiente propiedad de teoría de cardinales:
PROPIEDAD. Si A y B son conjuntos con A infinito y para todo $x \in A$ consideramos un conjunto finito $\Delta_x \subset B$, entonces

$$card(A) \geq card\left(\bigcup_{x \in A} \Delta_x\right).$$

Como $\mathfrak{B}_1$ es un conjunto infinito, entonces por la propiedad anterior tenemos

$$card(\mathfrak{B}_1) \geq card\left(\bigcup_{u \in \mathfrak{B}_1} \Delta_u\right).$$

Dado que $u \in \mathscr{L}(\Delta_u)$ para todo $u \in \mathfrak{B}_1$, entonces

$$V = \mathscr{L}\left(\bigcup_{u \in \mathfrak{B}_1} \Delta_u\right).$$

Como $\bigcup_{u \in \mathfrak{B}_1} \Delta_u \subset \mathfrak{B}_2$ y $\mathfrak{B}_2$ es una base de V, entonces se tiene que

$$\mathfrak{B}_2 = \bigcup_{u \in \mathfrak{B}_1} \Delta_u,$$

es decir, $card(\mathfrak{B}_1) \geq card(\mathfrak{B}_2)$.
Intercambiando $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$, llegamos de forma análoga a obtener

$$card(\mathfrak{B}_2) \geq card(\mathfrak{B}_1). \blacksquare$$

Proposición (Existencia de Bases)

De cualquier conjunto generador de un espacio vectorial V se puede extraer una base.

Prueba:
Probaremos solo para el caso finito.
Sea $A = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$.
Consideremos $u^1 \in A$ no-nulo, si $V = \mathscr{L}(\{u^1\})$, entonces terminamos.
Caso contrario si $\mathscr{L}(\{u^1\}) \subsetneq V$, entonces sea $u^2 \in A \backslash \mathscr{L}(\{u^1\})$ no nulo, ahora si $V = \mathscr{L}(\{u^1, u^2\})$, entonces terminamos.
Caso contrario $\mathscr{L}(\{u^1, u^2\}) \subsetneq V$, entonces sea $u^3 \in A \backslash \mathscr{L}(\{u^1, u^2\})$ no nulo y repetimos el proceso en forma inductiva hasta obtener $\{u^1, u^2, \cdots, u^m\}$ que son l.i. por construcción..
Este proceso termina en número finito de pasos $m \leq n$, con lo cual obtenemos

$$V = \mathscr{L}(\{u^1, u^2, \cdots, u^m\}).$$

■

Definición

Sean V un espacio vectorial, y $\mathfrak{B}$ una base, al número card$(\mathfrak{B})$ diremos que es la dimensión del espacio vectorial V y lo denotamos por $dim_{\mathbb{K}}(V)$ o simplemente $dim(V)$ si no hay confusión.

Observación

1. *Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces $dim(V) = 0$.*
2. *Si V tiene una base infinita, entonces $dim(V) = \infty$.*
3. *$dim(\mathbb{K}^n) = n$.*
4. *$dim(\mathbb{K}[x]) = \infty$.*

Ejercicio

Sea el conjunto $A = \{1, \pi, \pi^2, \cdots, \pi^n, \cdots\}$. Pruebe que A es un conjunto l.i. y $dim(A) = dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial con $dim(V) = n$. Entonces los n vectores son l.i si, y solo si dichos vectores generan a V.

Prueba:

$\Rightarrow$) Sean $v^1, v^2, \cdots, v^n$ vectores l.i.
Para cada $u \in V$ tenemos por la proposición (1) que los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^n, u$ son l.d., esto es debido a que $dim(V) = n$. Entonces existen escalares $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \cdots + \lambda_n v^n + \lambda u = \mathbf{0},$$

Notar que $\lambda \neq 0$, caso contrario, como los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^n$ son l.i., entonces $v^1, v^2, \cdots, v^n, u$ son l.i. esto no puede ser.

Luego despejamos u entonces tenemos

$$u = \beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \cdots + \beta_n v^n,$$

donde $\beta_j = -\frac{\lambda_j}{\lambda}$, por tanto $v^1, v^2, \cdots, v^n$ genera a V, es decir, $V = \mathscr{L}(\{v^1, v^2, \cdots, v^n\})$.

$\Leftarrow$) Si $V = \mathscr{L}(\{v^1, v^2, \cdots, v^n\})$. y por tanto aplicamos la proposición anterior.

■

Teorema (Completación de una base)

Sea V un espacio vectorial, con $dim(V) = n$. Si $v^1, v^2, \cdots .v^r \subset V$ son l.i., con $r < n$, entonces existen vectores $v^{r+1}, v^{r+2}, \cdots .v^n$ tales que

$$v^1, v^2, \cdots .v^r, v^{r+1}, \cdots, v^n$$

es una base de V.

Prueba:
Sea $v^{r+1} \in V \backslash \{v^1, v^2, \cdots, v^r\}$ cualquiera.
Si $v^1, v^2, \cdots .v^r, v^{r+1}$ genera a V termina la prueba.
Caso contrario, existe $v^{r+2} \in V \backslash \{v^1, v^2, \cdots, v^r, v^{r+1}\}$, entonces si $v^1, v^2, \cdots .v^r, v^{r+1}, v^{r+2}$ genera a V termina la prueba.
Caso contrario, existe $v^{r+3} \in V \backslash \{v^1, v^2, \cdots, v^{r+2}\}$ y repetimos el proceso anterior, hasta obtener $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ una base de V. ■

Corolario

Sea V un espacio vectorial. Si $dim(V) \geq 1$, entonces todo vector $v \neq \mathbf{0}$ forma parte de una base de V.

Prueba: Ejercicio.

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $S \subset V$ un subespacio, entonces

1. *$dim(S) \leq dim(V)$.*
2. *Si $dim(V) < \infty$ y $dim(V) = dim(S)$, entonces $S = V$.*
3. *Si $dim(V) = \infty$ y $dim(V) = dim(S)$, luego no necesariamente se tiene $S = V$.*

Prueba: Ejercicio.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) < \infty$, y $S, S' \subset V$ subespacios, entonces

$$dim(S + S') = dim(S) + dim(S') - dim(S \cap S').$$

Prueba:

Sean $v^1, v^2, \cdots, v^r$ una base de $S \cap S'$, entonces por el teorema anterior (completación de base) existen $u^1, u^2, \cdots, u^p \in S$ y $w^1, w^2, \cdots, w^q \in S'$ tales que

$$\{v^1, v^2, \cdots, v^r, u^1, u^2, \cdots, u^p\} \text{ un base de } S$$
$$\{v^1, v^2, \cdots, v^r, w^1, w^2, \cdots, w^q\} \text{ un base de } S',$$

de donde $\{v^1, \cdots, v^r, u^1, \cdots, u^p, w^1, \cdots, w^q\}$ es una base de $S + S'$, por tanto

$$\begin{aligned} dim(S + S') &= p + q + r = (p + r) + (q + r) - r \\ &= dim(S) + dim(S') - dim(S \cap S'). \end{aligned}$$ ∎

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface

1. $(\forall u, v \in V)(\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle)$,
2. $(\forall u, v, w \in V)(\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle)$,
3. $(\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in V)(\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle)$,
4. $(\forall u \in V)(\langle u, u \rangle \geq 0)$, *y* $\langle u, u \rangle = 0$ *si, y solo si* $u = \mathbf{0}$,

decimos que un **producto interno** *real sobre V.*

Nota al para $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es llamado espacio producto interno.

Definición

Un espacio vectorial V real de dimensión finita con producto interno, es llamado **espacio euclidiano**.

Ejercicio

1. $V = \mathbb{R}^n$, *y el producto* $\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$, *donde* $u = (u_1, \cdots, u_n)$, $v = (v_1, \cdots, v_n)$, *este producto es llamado* **producto interno canónico**.
2. *Si* $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, *entonces*
$$\langle u, v \rangle = 2u_1 v_1 + u_2 v_1 + u_1 v_2 + 3u_2 v_2,$$
es un producto interno sobre $V = \mathbb{R}^2$

Verifique que efectivamente, en cada caso, es un producto interno.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ que satisface

1. $(\forall u, v \in V)\left(\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}\right)$,
2. $(\forall u, v, w \in V)(\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle)$,
3. $(\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall u, v \in V)(\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle)$,
4. $(\forall u \in V)(\langle u, u \rangle \geq 0)$, *y* $\langle u, u \rangle = 0$ *si, y solo si* $u = \mathbf{0}$,

decimos que un **producto interno** *complejo (también llamado* **hermitiano**) *sobre V.*

Definición

Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita con producto interno, también se le llama **espacio unitario**.

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

11 de noviembre de 2020

Espacios Vectoriales (continuación)

Consideremos $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial (real ó complejo) definamos la función $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{F}$ por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

esta función satisface la siguiente

Proposición

1. $(\forall v \in V)(\|v\| \geq 0)$, *y* $\|v\| = 0$ *si, y solo si* $v = \mathbf{0}$.
2. $(\forall u, v \in V)(|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \ \|v\|)$ *(desigualdad de Schwarz).*
3. $(\forall u, v \in V)(\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|)$ *(desigualdad triangular).*

Prueba: Ejercicio.

Definición

Sea V un espacio vectorial, la función $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{F}$ que satisface las siguientes propiedades

1. $(\forall v \in V)(\|v\| \geq 0)$, *y* $\|v\| = 0$ *si, y solo si* $v = \mathbf{0}$.
2. $(\forall v \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{F})(\|\lambda v\| \leq |\lambda| \ \|v\|)$.
3. $(\forall u, v \in V)(\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|)$ *(desigualdad triangular).*

es llamada **norma**.

A la función de la proposición anterior es llamada **norma inducida** por el producto interno definido en V.

Definición

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial. Diremos que $u, v \in V$ son **ortogonales** *si, y solo si $\langle u, v\rangle = 0$, y lo denotamos por $u \perp v$*

Nota

Sea $A \subset V$ un conjunto no vacío, el siguiente conjunto

$$A^{\perp} = \{u \in V / \langle u, v\rangle = 0, \ \text{para todo} \ \ v \in A\}$$

es llamado el **ortogonal** *de A.*

De hecho el $A^{\perp}$ es no vacío, y además es un subespacio de V. (Ejercicio)

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial,

Definición

Una base de V es llamada **base ortogonal** *si sus elementos son mutuamente ortogonales.*

Proposición (Método de Ortogonalización de Gram-Schmidt)

Dada una base $\{v^1, \cdots, v^n\}$ de V, entonces existe una base ortogonal $\{u^1, \cdots, u^n\}$ de V tal que $(j = 1, \cdots, n)(u^j \in \mathscr{L}(\{v^1, \cdots, v^n\})$

Prueba:
La prueba la haremos en forma inductiva:
Sea $u^1 = v^1$.
Definamos $u^2 = v^2 + \lambda u^1$, luego $0 = \langle u^1, u^2\rangle = \langle u^1, v^2\rangle + \langle \lambda u^1, u^1\rangle$ entonces

$$\lambda = -\frac{\langle u^1, v^2\rangle}{\langle u^1, u^1\rangle},$$

entonces $u^2 = v^2 - \dfrac{\langle u^1, v^2\rangle}{\langle u^1, u^1\rangle} u^1$.

Continuamos con el proceso, y observamos que el $j-$ésimo vector es de la forma

$$u^j = v^j + \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_k u^k,$$

dado que $(\forall k = 1, \cdots, j-1)(\langle u^j, u^k\rangle = 0)$, entonces tenemos para cada $k = 1, \cdots, j-1$

$$\lambda_k = -\frac{\langle u^j, v^k\rangle}{\langle u^k, u^k\rangle},$$

de esta manera hemos construido vectores ortogonales. ■

Ejemplo

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}[x]$ *con el producto interno*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt,$$

y sea $\{1, x, x^2 \cdots, x^n, \cdots\}$ *una base de* $\mathbb{R}[x]$.
entonces aplicamos el método de Gram-Schmidt como sigue:
$f_0(x) = 1$, *entonces*

$$f_1(x) = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = x;$$

$$f_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = x^2 - \frac{1}{2},$$

etcétera.

Definición

Una base ortogonal $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ *de* V *es llamada* **ortonormal** *si (para cada* $j = 1, 2, \cdots, n)(\langle v^j, v^j\rangle = 1)$.

Es decir, la base es ortonormal si cada de sus elementos tienen norma uno.

Proposición

Sea $S \subset V$ *es un subespacio de dimensión finita, entonces*

$$V = S \oplus S^{\perp}$$

Prueba:
Consideremos $v^1, \cdots, v^r$ una base ortonormal de S. Luego para cada $v \in V$, definamos el vector

$$w = \sum_{k=1}^{r} \langle v, v^k\rangle v^k,$$

luego $\langle v - w, v^j\rangle = \langle v - \sum_{k=1}^{r} \langle v, v^k\rangle v^k, v^j\rangle = \langle v, v^j\rangle - \langle\langle v, v^j\rangle v^j, v^j\rangle = 0$, entonces $u = v - w \in S^{\perp}$, de donde

$$v = w + u \in S + S^{\perp}.$$

Además, si $v \in S \cap S^{\perp}$, entonces $\langle v, v\rangle = 0$, luego $v = \mathbf{0}$, es decir, $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. Por tanto, $V = S \oplus S^{\perp}$. ■

Proposición

Si $B = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ *es un conjunto ortonormal de* V, *entonces*

1. $(\forall v \in V)\left(\sum_{k=1}^{n} |\langle v, v^k\rangle|^2 \leq \|v\|^2\right)$. *(Desigualdad de Bessel).*
2. $u = v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, v^k\rangle v^k$ *es ortogonal a* B.

Prueba:

1. Para cada $k = 1, 2, \cdots, n$, sea $b_k = \langle v, v^k \rangle$, entonces

$$
\begin{aligned}
0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} b_k v^k \right\|^2 &= \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} b_k v^k, v - \sum_{k=1}^{n} b_k v^k \right\rangle \\
&= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k \langle v, v^k \rangle - \sum_{k=1}^{n} b_k \langle v^k, v \rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_k \overline{b}_j \langle v^k, v^j \rangle \\
&= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\overline{b}_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \\
&= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 = \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, v^k \rangle|^2,
\end{aligned}
$$

de donde $\sum_{k=1}^{n} |\langle v, v^k \rangle|^2 \leq \|v\|^2$.

2. Ejercicio. $\blacksquare$

Proposición

Dado $B = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ un conjunto ortonormal de V, entonces los siguientes enunciados son equivalentes

1. *B es una base de V.*
2. *Si $(\forall k = 1, 2, \cdots, n)(\langle v, v^k \rangle = 0)$ entonces $v = \mathbf{0}$.*
3. *Cada $v \in V$ es expresado de la forma $v = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v^k \rangle v^k$.*
4. *Para cada $v, w \in V$ se tiene $\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v^k \rangle \langle v^k, w \rangle$,* *(Igualdad de Parseval)*
5. *Para todo $v \in V$, se tiene $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle v, v^k \rangle|^2$*

Prueba: Ejercicio.

Antes de definir espacios cocientes en espacio vectorial V, daremos la siguiente

Definición (Relación de Equivalencia)

Dado un conjunto A no vacío, una **relación de equivalencia** *sobre A, denotada por $\simeq_A$,(si no existe confusión usaremos $\simeq$) si*

1. *$\simeq$ es* **reflexiva***, es decir, $(\forall x \in A)(x \simeq x)$.*
2. *$\simeq$ es* **simétrica***, es decir, si $x \simeq y$, entonces $y \simeq x$.*
3. *$\simeq$ es* **transitiva***, es decir, $(\forall x, y, z \in A)(x \simeq y$ e $y \simeq z)(x \simeq z)$.*

La **clase de equivalencia** *para cada $x \in A$ es definida por*

$$[x] = \{y \in A / y \simeq x\}.$$

Proposición

Los siguientes enunciados son válidos para todas las clases de equivalencia de conjunto A no-vacío:

1. *Si $y \in [x]$, entonces $[y] = [x]$.*
2. *si $[y] \neq [x]$, entonces $[y] \cap [x] = \emptyset$.*
3. *$A = \bigcup_{x \in A} [x]$.*

Prueba:

1. Si $w \in [y]$, entonces $w \simeq y$, como $y \in [x]$, se tiene $y \simeq x$, entonces $\simeq$ por ser transitiva tenemos $w \simeq x$, luego $w \in [x]$, es decir, $[y] \subset [x]$.
   De manera similar tenemos $[x] \subset [y]$. Por tanto $[x] = [y]$.
2. Apliquemos la propiedad: $p \longrightarrow q$ es equivalente $\sim q \longrightarrow \sim p$, es decir, si $w \in [y] \cap [x] \neq \emptyset$, entonces $[y] = [x] = [w]$ por el item anterior, entonces $[y] = [x]$.
3. Para cada $x \in A$, se tiene $x \in [x] \subset \bigcup_{x \in A} [x]$, entonces $A \subset \bigcup_{x \in A} [x]$, además si $z \in \bigcup_{x \in A} [x]$, el resto queda de ejercicio.

■

Nota $A = \bigcup_{x \in A} [x]$ ¿será unión disjunta? Justifique su respuesta.

Con la proposión anterior podemos definir el **conjunto cociente** como el conjunto

$$\frac{A}{\simeq} = \{[x](x \in A\},$$

Definición

Sean V un espacio vectorial, $S \subset V$ un subespacio y $u, v \in V$, diremos que u es **equivalente** *a v* **módulo** *S si $u - v \in S$, lo cual lo denotamos por*

$$u \simeq v \quad \text{si, y solo si } u - v \in S.$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial y usando la definición anterior. Se tiene que la relación $\simeq$ es de equivalencia en V

Prueba:

1. $(\text{Para cada } v \in V)(v \simeq v)$, esto es debido a que, $v - v = \mathbf{0} \in S$.
2. Si $u \simeq v$, entonces $u - v \in S$,
   luego $v - u = -(u - v) \in S$, entonces $v \simeq u$.
3. Si $u \simeq v$ y $v \simeq w$, entonces $u - v, v - w \in S$, entonces $u - w = (u - v) + (v - w) \in S$, es decir $u \simeq w$.

■

Nota

La clase de equivalencia de $v \in V$ la podemos expresar

$$\begin{aligned}[v] =& \{u \in V / u \simeq v\} = \{u \in V / w = u - v \in S\} \\ =& \{v + w / w \in S\} \\ =& \{v\} + S = v + S.\end{aligned}$$

Entonces, podemos denotar esta clase de equivalencia $\frac{V}{\simeq}$ en V como $\frac{V}{S}$, es decir,

$$\frac{V}{S} = \{[v] / v \in V\} = \{v + S / v \in V\}$$

Ejemplo

1. *Si* $S = \{\mathbf{0}\}$, *entonces*

$$\frac{V}{\{\mathbf{0}\}} = \{v + \{\mathbf{0}\}/v \in V\} = V$$

2. *Si* $S = V$, *entonces*

$$\frac{V}{V} = \{[v]/v \in V\} = \{\mathbf{0}\}$$

Proposición

El conjunto $\dfrac{V}{S}$ *es un espacio vectorial con las operaciones definidas anteriormente.*

Prueba:Ejericio.

Proposición

Si $S, W \subset V$ *son subespacios, entonces*

$$\frac{W+S}{W \cap S} = \frac{W}{W \cap S} \oplus \frac{S}{W \cap S}$$

Prueba:Ejercicio.

Proposición

Si V *es un espacio de dimensión finita y* $S \subset V$ *un subespacio, entonces*

$$dim\left(\frac{V}{S}\right) = dim(V) - dim(S).$$

Prueba:

Consideremos $\{v^1, \cdots, v^r\}$, *con* $r < n$ *una base de* S, *(dado que* S *tiene dimensión finita). Entonces por el teorema de completación de bases, existen vectores* $u^1, \cdots .u^t \in V$ *tales que* $\{v^1, \cdots, v^r, u^1, \cdots .u^t\}$ *es una base de* V. *Aplicamos la definición de* $\dfrac{V}{S}$ *obtenemos que los vectores* $\{w^1, \cdots, w^t\}$ *es una base de* $\dfrac{V}{S}$, *por tanto* $dim\left(\dfrac{V}{S}\right) = t = (r+t) - r = dim(V) - dim(S)$.

Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

23 de noviembre de 2020

Transformaciones Lineales

Definición

Sean V, W espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $T : V \longrightarrow W$ una función tal que para todo $u, v \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$.
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Esta función T es llamada **transformación lineal**.

Ejemplo

1. *La función $0 : V \longrightarrow W$ nula, es una transformación lineal.*
2. *La función $I : V \longrightarrow W$ identidad, es una transformación lineal.*
3. *Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno, $u \in V$ fijo y $T : V \longrightarrow V$ una función definida por*

$$(\textit{para cada } v \in V)(T(u, v) = \langle u, v\rangle)$$

es una transformación lineal.

4. *La función $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida*

$$T(x) = y,$$

donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, y para $k = 1, 2, \cdots, n$, $y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}x_k$; los a_{jk} son constantes.

Ejemplo (continuación)

5. **Proyección sobre un subespacio** *Sean V un espacio vectorial, $S \subset V$ un subespacio y consideremos otro subespacio $W \subset V$, tal que $V = S \oplus W$. la proyección de V sobre S a lo largo de W, $P : V \longrightarrow S$ está definida*

$$P(v) = s, \quad \textit{donde} \quad v = s + w \in S \oplus W.$$

También es una transformación lineal.

6. **Rotación en el plano** *Sea $\theta \in \mathbb{R}$ un ángulo, una rotación (en el sentido antihorario), de magnitud θ, alrededor del origen del sistema de coordenadas, es decir, por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, lleva un vector v, a un nuevo vector v' la cual es denotada por $R_\theta(v) = v'$.*

Consideremos $v = (v_1, v_2)$ y $v' = (v_1', v_2')$, formando los ángulos φ y $\theta + \varphi$ con el eje X respectivamente, entonces tenemos $\|v'\| = \|v\|$ y

$$\begin{aligned}
v_1 &= \|v\|cos(\varphi), \qquad v_2 = \|v\|sen(\varphi),\\
v_1' &= \|v'\|cos(\theta+\varphi) = \|v\|(cos(\theta)(cos(\varphi) - sin(\theta)(sin(\varphi))\\
&= v_1cos(\theta) - v_2sen(\theta),\\
v_2' &= \|v'\|sen(\theta+\varphi) = \|v\|(sen(\theta)(cos(\varphi) + cos(\theta)(sin(\varphi))\\
&= v_1sen(\theta) + v_2cos(\theta).
\end{aligned}$$

Luego se obtiene

$$R_\theta(v) = (v_1 cos(\theta) - v_2 sen(\theta), v_1 sen(\theta) + v_2 cos(\theta)),$$

y en su forma matricial se titene

$$R_\theta(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, entonces en toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. $(\forall v \in V)\Big(T(-v) = -T(v)\Big)$.
3. $(\forall v, w \in V)\Big(T(v - w) = T(v) - T(w)\Big)$.
4. $(\forall v^j \in V, \alpha_j \in \mathbb{K}, j = 1, \cdots, n,\ y\ n \in \mathbb{N})$ $$\left(T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(v^j)\right).$$

Prueba:
1. $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{0}) = 0T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
Lo demás queda como ejercicio.

Definición (Núcleo e Imagen)

Sean V, W espacios vectoriales, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces definimos los conjuntos

1. $\mathcal{N}(T) = \{v \in V / T(v) = \mathbf{0}\}$.
2. $Im(T) = \{w \in W / w = T(v),\ \text{para algún } v \in V\}$,

que son llamados **núcleo** *de T e* **imagen** *de T respectivamente.*

Nota

Observamos que $\mathcal{N}(T) \subset V$ e $Im(T) \subset W$ son subespacios.

Definición

Sean V, W espacios vectoriales, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces se tiene

1. *T es un* **sobreyectiva** *(también llamado* **epimorfismo***) si $T(V) = W$.*
2. *T es un* **inyectiva** *(también llamado* **monomorfismo***) si T es una función inyectiva.*
3. *T es un* **isomorfismo** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces T es inyectiva si, y solo si $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Prueba:

$\Longrightarrow$) Sea $v \in \mathcal{N}(T)$, entonces $T(v) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0})$, como T es inyectiva, entonces se tiene que $v = \mathbf{0}$.
Luego $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

$\Longleftarrow$) Sean $v, w \in V$ tales que $T(v) = T(w)$, como T es lineal tenemos $T(v - w) = \mathbf{0}$, entonces $v - w \in \mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.
De donde $v = w$, por tanto T es inyectiva.

■

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\} \subset V$ y $\{w^1, w^2, \cdots, w^k\} \subset W$ bases de V y W respectivamente, entonces existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que (para cada $j = 1, 2, \cdots, k$)$(T(v^j) = w^j)$.

Prueba:

Como $\{w^1, w^2, \cdots, w^k\} \subset W$ es una base, entonces cada $w \in W$ puede ser expresado de manera única

$$w = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j,$$

donde (para cada $j = 1, 2, \cdots, k$)$(\alpha_j \in \mathcal{K})$. Definamos la aplicación $T : V \longrightarrow W$ mediante

$$T(v) = w = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j,$$

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, $\{v^1, v^2, \cdots, v^k\} \subset V$ generadores de V (no necesariamente una base) y $\{w^1, w^2, \cdots, w^k\} \subset W$ una colección, entonces existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que (para cada $j = 1, 2, \cdots, k$)$(T(v^j) = w^j)$ si, y solo si

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j = \mathbf{0} \text{ implica } \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j = \mathbf{0},$$

donde $\alpha_j \in \mathbb{K}$ para cada $j = 1, \cdots, k$.

Prueba

$\Longrightarrow$) Como T es lineal,y sean $\alpha_j \in \mathbb{K}$ para cada $j = 1, \cdots, k$ tal que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j = \mathbf{0}$ entonces

$$\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) = T\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j T\left(v^j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j.$$

$\Longleftarrow$) Como $\mathcal{L}(\{v^1, v^2, \cdots, v^k\}) = V$, entonces para cada $v \in V$, existen escalares $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \cdots, k$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j.$$

Definamos la función $T : V \longrightarrow W$ mediante

$$T(v) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j.$$

Veamos que T está bien definida: supongamos que existen escalares $\beta_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \cdots, k$ tal que

$$v = \sum_{j=1}^{k} \beta_j v^j,$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j-\beta_j)v^j=\mathbf{0}\overset{\text{hipótesis}}{\Longrightarrow}\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j-\beta_j)w^j=\mathbf{0},$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j w^j=\sum_{j=1}^{k}\beta_j w^j,$$

por tanto T está bien definida.
Veamos que T es lineal:
Sean $u,v\in V$, entonces existen escalares $\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{K}$, $j=1,\cdots,k$ tales que

$$u=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j v^j,\quad v=\sum_{j=1}^{k}\beta_j v^j\quad\text{entonces}\quad u+v=\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j+\beta_j)v^j$$

luego

$$\begin{aligned}T(u+v)&=\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j+\beta_j)w^j\\&=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j w^j+\sum_{j=1}^{k}\beta_j w^j\\&=T(u)+T(v).\end{aligned}$$

Similar para $T(\lambda v)=\lambda T(v)$ (ejercicio)
Por tanto T es lineal.

■

Corolario

Sean V un espacio vectorial, $v\in V$ no nulo, $\alpha\in\mathbb{K}$, entonces existe una transformación lineal $f:V\longrightarrow\mathbb{K}$ tal que $f(v)=\alpha$.
En particular si $v\neq\mathbf{0}$, entonces existe una transformación lineal $f:V\longrightarrow\mathbb{K}$ tal que $f(v)\neq 0$.

Prueba: Ejercicio.

Proposición

Sean V,W espacios vectoriales. Una transformación lineal, entonces $T:V\longrightarrow W$ es inyectiva si, y solo si, lleva vectores l.i en vectores l.i.

Prueba:
$\Longrightarrow$) Sean $v^1,v^1,\cdots,v^m\in V$ vectores l.i. $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_1T(v^1)+\cdots+\alpha_mT(v^m)=\mathbf{0},$$

como T es lineal tenemos

$$T(\alpha_1v^1+\cdots+\alpha_mv^m)=T(\mathbf{0})=\mathbf{0},$$

dado que T es inyectiva, se tiene

$$\alpha_1v^1+\cdots+\alpha_mv^m=\mathbf{0},$$

por hipótesis los vectores $v^1,\cdots,v^m$ son l.i., entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$, es decir $T(v^1), \cdots, T(v^m)$ son l.i.

$\Longleftarrow$) Ejercicio

$\blacksquare$

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, de dimensión finita, $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal. Si T es un isomorfismo, entonces $dim(V) = dim(W)$.

Prueba: Ejercicio.

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, con $dim(V) = n$, $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal. Entonces

$$dim(V) = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)).$$

Prueba:
Sea $u^1, \cdots, u^r$ una base $\mathcal{N}(T) \subset V$, entonces por el teorema de completación, existen $v^1, \cdots, v^t \in V$ tales que

$$u^1, \cdots, u^r, v^1, \cdots, v^t$$

es una base de V.
Por tanto $T(u^1), \cdots, T(u^r), T(v^1), \cdots, T(v^t)$ son l.i.
Ahora sea $w \in T(V) = Im(T)$, entonces existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$.

Luego existen escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_t \in \mathbb{K}$ tal que

$$v = \alpha_1 u^1 + \cdots + \alpha_r u^r + \beta_1 v^1 + \cdots + \beta_t v^t,$$

de donde

$$\begin{aligned} w = T(v) &= T(\alpha_1 u^1 + \cdots + \alpha_r u^r + \beta_1 v^1 + \cdots + \beta_t v^t) \\ &= \alpha_1 T(u^1) + \cdots + \alpha_r T(u^r) + \beta_1 T(v^1) + \cdots + \beta_t T(v^t) \end{aligned}$$

por tanto $T(u^1), \cdots, T(u^r), T(v^1), \cdots, T(v^t)$ es una base de W. Por tanto

$$n = dim(V) = r + t = dim(\mathcal{N}(T)) + dim(Im(T)).$$

$\blacksquare$

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, con $dim(V) = dim(W) < \infty$, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces T es inyectiva si, y solo si T es sobreyectiva.

Prueba:
$\Longrightarrow$) Notar que si T es inyectiva si, y solo si $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, por tanto $dim(\mathcal{N}(T)) = 0$.
Además tenemos

$$\begin{aligned} dim(V) &= dim(\mathcal{N}(T)) + dim(T(V)) \\ &= dim(T(V)) \overset{\text{hipótesis}}{=} dim(W) < \infty, \end{aligned}$$

como $T(V) \subset W$ y por una proposición del capítulo anterior tenemos

$$T(V) = W.$$

$\Longleftarrow$) Ejercicio

Sean V, W espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, y una aplicación de paso cociente $\pi : V \longrightarrow \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)}$, entonces existe una transformación lineal $\widehat{T} : \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \longrightarrow W$ definida por

$$\widehat{T}(v + \mathcal{N}(T)) = T(v),$$

tal que

$$T = \widehat{T} \circ \pi$$

Proposición

Con las notaciones anteriores tenemos

1. $T = \widehat{T} \circ \pi$.
2. $\widehat{T} : \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \longrightarrow Im(T)$.

Prueba:
Veamos que $\widehat{T}$ esté bien definida:
Sean $u, v \in V$ tales que $\{u\} + \mathcal{N}(T) = \{v\} + \mathcal{N}(T)$, entonces $u - v \in \mathcal{N}(T)$, por tanto $T(u - v) = \{\mathbf{0}\}$, de donde $T(u) = T(v)$.
Entonces

$$\widehat{T}(\{u\} + \mathcal{N}(T)) = T(u) = T(v) = \widehat{T}(\{v\} + \mathcal{N}(T)).$$

Luego $\widehat{T}$ está bien definida.
Lo demás queda como ejercicio. ■

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

25 de noviembre de 2020

Transformaciones Lineales

Sean V, W espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, y una aplicación de paso cociente $\pi : V \longrightarrow \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)}$, entonces existe una transformación lineal $\widehat{T} : \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \longrightarrow W$ definida por

$$\widehat{T}(v + \mathcal{N}(T)) = T(v),$$

tal que

$$T = \widehat{T} \circ \pi$$

Proposición

Con las notaciones anteriores tenemos

1. $T = \widehat{T} \circ \pi$.
2. $\widehat{T} : \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \longrightarrow Im(T) + W$ *es biyectiva (es decir, un isomorfismo).*

Prueba:
Veamos que $\widehat{T}$ esté bien definida:
Sean $u, v \in V$ tales que $\{u\} + \mathcal{N}(T) = \{v\} + \mathcal{N}(T)$, entonces $u - v \in \mathcal{N}(T)$, por tanto $T(u - v) = \{\mathbf{0}\}$, de donde $T(u) = T(v)$.
Entonces

$$\widehat{T}(\{u\} + \mathcal{N}(T)) = T(u) = T(v) = \widehat{T}(\{v\} + \mathcal{N}(T)).$$

Luego $\widehat{T}$ está bien definida.

1. De la definición de $\widehat{T}$ y π tenemos:

   $$(\text{para cada } v \in V)\left(T(v) = \widehat{T}(v + \mathcal{N}(T) = \widehat{T}(\pi(v)) = \widehat{T} \circ \pi(v)\right)$$

   por tanto $T = \widehat{T} \circ \pi$.
2. Sea $w \in Im(T)$, entonces
   $(\exists v \in V)\left(w = T(v) = \widehat{T}(v + \mathcal{N}(T))\right)$.
   luego $w \in \widehat{T}(\frac{V}{\mathcal{N}(T)}) = Im(\widehat{T})$,
   por tanto $Im(T) \subset Im(\widehat{T})$, entonces $Im(\widehat{T}) = Im(T)$.
   Veamos que $\mathcal{N}(\widehat{T}) = \{\mathbf{0}\}$:
   sea $v \in \mathcal{N}(\widehat{T})$, entonces $\widehat{T}(v) = \mathbf{0}$, pero $T(v) = \widehat{T}(v + \mathcal{N}(T)) = \widehat{T}(\mathcal{N}(T)) = \widehat{T}(\mathbf{0} + \mathcal{N}(T)) = \mathbf{0}$=T($\mathbf{0}$), Así $\mathcal{N}(\widehat{T}) = \{\mathbf{0}\}$.

Entonces $\widehat{T}$ es un isomorfismo. ∎
Ésta proposición es llamada el **teorema de factorización**.

Nota

Sean V y W espacios vectoriales, si existe un isomorfismo entre ellos, entonces lo denotaremos $V \approx W$.

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $S, U \subset V$ subespacios. Entonces

$$\frac{U}{U \cap S} \approx \frac{U + S}{S}$$

Prueba:
Definamos la aplicación $T : U \longrightarrow \dfrac{U + S}{S}$ mediante $T(u) = u + S$.
Note que T es lineal. En efecto:
Sean $u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces
$T(u + \lambda v) = (u + \lambda v) + S = (u + S) + \lambda(v + S) = T(u) + \lambda T(v)$,
por tanto T es lineal.

Además se tiene que $(\forall v \in S)((u + v) + S = u + S)$.
En efecto:
Sea $w \in (u + v) + S$, entonces
$(\exists s \in S)(w = (u + v) + s = u + (v + s) \in u + S)$, luego $w \in u + S$,
similar se tiene que $(\forall v \in S)(u + S \subset (u + v) + S)$.
Luego

$$T(u) = u + S = (u + v) + S = T(u + v),$$

entonces T es sobreyectiva (es decir, T es un epimorfismo).
Además

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in U / u + S = S\} = \{u \in U / u \in S\} = U \cap S$$

En el teorema de factoriazación hacemos $V = U$, $W = \dfrac{U+S}{S}$ y $\dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} = \dfrac{U}{U \cap S}$, de dónde se tiene

$$\widehat{T} : \frac{U}{U \cap S} \longrightarrow \frac{U+S}{S}$$

es un isomorfismo. ■

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $U, S \subset V$ subespacios tales que $S \subset U$, entonces

$$\frac{V/S}{U/S} \approx \frac{V}{U}$$

Prueba:Ejercicio (Como $S \subset U \subset V$, entonces $U \cap S = S$, basta definir la aplicación $T : \dfrac{V}{S} \longrightarrow \dfrac{V}{U}$ mediante $T(v+S) = v+U$, pruebe que está bien definida y además es un epimorfismo, halle $\mathcal{N}(T)$, por tanto $\widehat{T} : \dfrac{V/S}{U/S} \longrightarrow \dfrac{V}{U}$ es un isomorfismo). ■

Sean U, V, W espacios vectoriales, consideremos el conjunto

$$\mathscr{L}(V, W) = \{T : V \longrightarrow W / T \text{ es una tranformación lineal}\}$$

con las operaciones
para todo $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(V, W)$, y todo $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\left.\begin{array}{rl} (T_1 + T_2)(v) & = T_1(v) + T_2(v) \\ (\lambda T_1)(v) & = \lambda T_1(v) \end{array}\right\} \forall v \in V$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, el cual es llamado **espacio vectorial de transformaciones lineales**.

- Cuando $W{=}\mathbb{K}$, luego $V^*{=}\mathscr{L}(V, \mathbb{K})$ se llama **espacio dual** de V.
- Si $W = V$, entonces denotamos $\mathscr{L}(V) = \mathscr{L}(V, V)$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial, entonces $\mathscr{L}(\mathbb{K}, V) \approx V$.

Prueba:
Basta definir la aplicación $\Lambda : \mathscr{L}(\mathbb{K}, V) \longrightarrow V$ mediante $\Lambda(T) = T(1)$, se observa que Λ es lineal.
Ejercicio. que Λ es un isomorfismo. ■

Proposición

Sea V un espacio vectorial con $dim(V) < \infty$, entonces V y V^* son isomorfos.

Prueba:
Como $dim(V) = n < \infty$, entonces sea $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ una base de V. Luego definamos las transformaciones $T_j : V \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante

$$T_j(v^k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

donde $j + 1, 2, \cdots, n$.
Estas transformaciones constituyen una base.

En efecto:

1. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j T_j = 0,$$
entonces $\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T_j(v^k) = 0$ para cada $k = 1, \cdots, n$.
Entonces $\{T_1, \cdots, T_n\}$ son linealmente independientes.
2. Si $T \in V^*$, entonces existen escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tales que
$$T = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T_j,$$
notar que $\alpha_k = T(v^k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T_j(v^k)$.
Verifique que $T_1, \cdots, T_n$ es una base de V^*.

Además verifique que la transformación lineal $\Phi : V \longrightarrow V^*$ definida por

$$\Phi(v^k) = T_k, \quad \text{para} \quad k = 1, \cdots, n$$

es un isomorfismo. ■
Note que $dim(V^*) = dim(V)$

Proposición

Sea V y W espacios vectoriales de dimensión finita, entonces

$$dim(\mathscr{L}(V, W)) = dim(V)dim(W)$$

Prueba:
Sean $\{v^1, \cdots, v^n\}$, $\{w^1, \cdots, w^m\}$ bases de V y W respectivamente. Para cada (i, j), $i=1, \cdots, n$, $j=1, \cdots, m$ definamos la trasformación $T_{ij} : V \longrightarrow W$ mediante

$$T_{ij}(v^k) = \begin{cases} w^j & i = k \\ \mathbf{0} & i \neq k \end{cases}$$

Pruebe que los T_{ij} son lineales y $\{T_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ es una base de $\mathscr{L}(V, W)$. ■

Definición

Sean U, V espacios vectoriales, $V \xrightarrow{L} U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{L} U$ son transformaciones lineales, entonces tenemos

- *Si $L \circ T = \mathrm{I}$ (identidad en U), L es una inversa a la izquierda de T*
- *Si $T \circ L = \mathrm{I}$ (identidad en V), L es una inversa a la derecha de T.*
- *Si $T \circ L = \mathrm{I}$ y $L \circ T = \mathrm{I}$, L es la inversa de T y la denotamos por $L = T^{-1}$. En este caso, decimos que T es inversible.*

Ejemplo

Consideremos las transformaciones $\mathbb{K}^3 \xrightarrow{L} \mathbb{K}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{K}^3 \xrightarrow{L} \mathbb{K}^2$ definidas por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_2), \quad L(y_1, y_2, y_3) = (y_2 - y_3, y_3).$$

Encuentre las inversas correspondientes, sí existen.

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces

1. *Si T posee inversa, entonces ésta es única.*
2. *T es inyectiva si, y solo si T posee inversa a la izquierda.*
3. *T es sobreyectiva si, y solo si T posee inversas por la derecha.*
4. *T es isomorfo si, y solo si T es inversible.*

Prueba:

1. Supongamos que T posee dos inversas L_1 y L_2, entonces

$$L_1 = L_1 \circ \mathrm{I} = L_1 \circ (T \circ L_2) = (L_1 \circ T) \circ L_2 = \mathrm{I} \circ L_2 = L_2,$$

entonces $L_1 = L_2$, por tanto si T posee inversa, ésta es única.

2.$\Longrightarrow$) Supongamos que T posee inversa, y como $T(V) \subset W$ es un subespacio, entonces existe un subespacio $S \subset W$ tal que $W = T(V) \oplus S$.
Ahora, definamos la transformación $L : W \longrightarrow V$ mediante $L(T(v) + w) = v$.
Notamos que L es lineal (ejercicio).
Además, $L \circ T(u) = L(T(u)) = L(T(u) + \mathbf{0}) = u$, $\forall u \in V$, es decir, L es la inversa a la izquierda de T.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $L : W \longrightarrow V$ es la inversa a la izquierda de T, es decir, $L \circ T = \mathrm{I}$.
Sea $v \in \mathcal{N}(T)$, entonces $T(v) = \mathbf{0}$,
luego $v = (L \circ T)(v) = L(T(v)) = L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
entonces $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, es decir, T es inyectiva.

3. Ejercicio.
4. Ejercicio.

Proposición

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \longrightarrow V$ una transformaxión lineal.Si $T \circ L = L \circ T$ para toda transformación lineal $L : V \longrightarrow V$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T = \lambda \mathrm{I}$.

Prueba:
Como V es dimensión finita, entonces sea $\{v^1, \cdots, v^n\}$ una base de V, entonces cada $T(v^j) \in V$ se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de la base, es decir, existen escalares $\alpha_{1j}.\alpha_{2j}, \cdots, \alpha_{nj}$ tales que

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Para cada $k = 1, 2, \cdots, n$ definamos la transformación lineal $L_k : V \longrightarrow V$ mediante

$$L_k(v^i) = \begin{cases} v^{k+1}, & i = k, k < n \\ \mathbf{0}, & i \neq k, k < n \\ \mathbf{0}, & i = 1, 2, \cdots, n-1, \ k = n \\ v^1, & i = n, k = n \end{cases}$$

Luego

$$L_k \circ T(v^j) = L_k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} L_k(v^i) = \alpha_{kj} v^{k+1}$$

También

$$T \circ L_k(v^j) = \begin{cases} \mathbf{0}, & j \neq k, \\ T(v^{k+1}), & j = k, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{0}, & j \neq k, \\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,k+1} v^i, & j = k, \end{cases}$$

Por hipótesis se tiene que $L_k \circ T = T \circ L_k$, entonces

$$\alpha_{kj} = 0, \text{ si } j \neq k$$

$$\alpha_{kk} v^{k'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik'} v^i, \quad k' = k + 1$$

de dónde

$$\alpha_{kk} = \alpha_{k'k'}, \qquad \alpha_{ik'} = 0 \text{ para } i \neq k$$

por tanto $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \cdots = \alpha_{nn} = \lambda, \quad \alpha_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
Luego, T tiene la propiedad

$$T(v^j) = \lambda v^j, \text{ para cada } j = 1, 2, \cdots, n.$$

Si $v = \sum_{j=1}^{n} c_j v^j$, entonces

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} c_j T(v^j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda v^j = \lambda v.$$

Por tanto $T = \lambda \mathrm{I}$. ■

Proposición

Sean V un espacio vectorial $T : V \longrightarrow V$ una trnadformación lineal tal que $T(v^j) = \alpha_j v^j$, $j = 1, \cdots, n$ en cierta base $\{v^1, \cdots, v^n\}$ de base V, donde $\alpha_j \neq \alpha_i$ para $j \neq i$. Supongamos, además, que existe una transformación lineal $L : V \longrightarrow V$ que conmuta con T, es decir, $T \circ L = L \circ T$.
Entonces, L es de la forma

$$L(v^j) = \beta_j v^j, \quad \text{para } j = 1, \cdots, n$$

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

30 de noviembre de 2020

Transformaciones Lineales

Proposición

Sean V un espacio vectorial $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $T(v^j) = \alpha_j v^j$, $j = 1, \cdots, n$ en cierta base $\{v^1, \cdots, v^n\}$ de V, donde $\alpha_j \neq \alpha_i$ para $j \neq i$. Supongamos, además, que existe una transformación lineal $L : V \longrightarrow V$ que conmuta con T, es decir, $T \circ L = L \circ T$.
Entonces, L es de la forma

$$L(v^j) = \beta_j v^j, \quad \text{para } j = 1, \cdots, n$$

Prueba:
Siendo $\{v^1, \cdots, v^n\}$ una base de V, luego cada $L(v^j)$ para $j = 1, \cdots, n$, se puede escribir de la forma

$$L(v^j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} v^k,$$

por hipótesis tenemos

$$T \circ L(v^j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} T(v^k) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \alpha_k v^k,$$

además tenemos

$$T \circ L(v^j) = L \circ T(v^j) = L(T(v^j)) = L(\alpha_j v^j) = \alpha_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} v^k.$$

De las dos últimas igualdades se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} \alpha_k v^k = \alpha_j \sum_{k=1}^{n} b_{kj} v^k,$$

luego para cada $j = 1, 2, \cdots, n$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} (\alpha_k - \alpha_j) v^k = \mathbf{0},$$

siendo $\{v^1, \cdots, v^n\}$ son l.i., también para $j \neq k$, $\alpha_k \neq \alpha_j$, entonces $b_{jk} = 0$ para $j \neq k$.
Por tanto,

$$L(v^j) = b_{jj} v^j = \beta_j v^j, \text{ para } j = 1, 2, \cdots, n.$$

■

Proyecciones:

Definición

Sean V un espacio vectorial, y dos subespacios $W, S \subset V$ tales que $V = W \oplus S$, entonces existen dos transformaciones lineales $P : V \longrightarrow V$, $Q : V \longrightarrow V$ definidas mediante

$$P(w+s) = w, \quad Q(w+s) = s, \quad w \in W, s \in S.$$

El subespacio W es el espacio fijo de P. La transformación lineal P es la ***proyección*** *de V sobre W, similar para Q.*

Proposición

Las proyecciones P y Q satisfacen

1. *$P^2 = P$, $Q^2 = Q$, donde $P^2 = P \circ P$.*
2. *$P \circ Q = Q \circ P = 0$.*
3. *$P + Q = \mathrm{I}$.*

Prueba:

Para cada $w \in W$, $s \in S$ tenemos

1. $P^2(w+s) = P(P(w+s)) = P(w) = w = P(w+s)$. Similar para Q.
2. $(P \circ Q)(w+s) = P(Q(w+s)) = P(s) = \mathbf{0}$. Similar $Q \circ P$.
3. $(P+Q)(w+s) = P(w+s) + Q(w+s) = w + s = \mathrm{I}(w+s)$, por tanto $P + Q = \mathrm{I}$.

■

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $P : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces P es una proyección si, y solo si $P^2 = P$.

Prueba:

$\Rightarrow$) Si P es una proyección, entonces por proposicón anterior se tiene que $P^2 = P$.

$\Leftarrow$) Sea $P^2 = P$, entonces definamos

$$W = \{w \in V / P(w) = w\}, \quad S = \{s \in V / P(s) = \mathbf{0}\}.$$

Notamos que $W, S \subset V$ son subespacios y además $W \cap S = \{\mathbf{0}\}$. Ahora consideremos $v \in V$, y definamos $s = v - P(v)$, entonces $P(s) = P(v - P(v)) = P(v) - P(P(v)) = P(v) - P(v) = \mathbf{0}$. Por tanto, $s \in S$.

Notamos que

$$\begin{aligned} v = P(v) + (v - P(v)) = w + s \Rightarrow P(v) &= P(w+s) \\ &= P(w) + P(s) \\ &= P(w) \end{aligned}$$

donde $w = P(v) \in W$, $s \in S$. Por tanto $V = W \oplus S$. Por tanto P es una proyección V sobre W.

■

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $P_1, P_2 : V \longrightarrow V$ proyecciones. Entonces $P_1 + P_2$ es una proyección si, y solo si $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0$.

Prueba:

$\Rightarrow$) Veamos que $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 P$, siendo $P_1 + P_2$ una proyeccción:

$$\begin{aligned}(P_1 + P_2)^2 &= P_1^2 + P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1 + P_2^2 \\ &= (P_1 + P_2) + P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1,\end{aligned}$$

entonces $P_1 \circ P_2 + P_2 \circ P_1 = 0 \Rightarrow P_1 \circ P_2 - P_2 \circ P_1 = 0$.
Por tanto $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = 0$, y definamos para $j = 1; 2$

$$W_j = \{w \in W / P_j(w) = w\}, \quad S_j = \{w \in W / P_j(w) = \mathbf{0}\}$$

Pruebe que $P_1 + P_2$ tiene como subespacio a $(W_1 + S_1) + (W_2 + S_2)$ y luego use la proposición anterior para mostrar que $P_1 + P_2$ es una proyección.

Definición

Sean V un espacio vectorial, $W \subset V$ un subespacio, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Decimos que W es **invariante bajo** *T si $T(W) \subset W$.*

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $W, S \subset V$ sub-espacios con $W \cap S = \{\mathbf{0}\}$, $P : V \longrightarrow V$ una proyección sobre W, y además $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces W es invariante bajo T si, y solo si $P \circ T = T \circ P$.

Prueba:

$\Rightarrow$) Como W es invariante bajo T, entonces, entonces
$(\forall w \in W)\big((P \circ T)(w) = P(T(w)) = T(w) == T(P(w))\big)$,
luego $P \circ T = T \circ P$.

$\Leftarrow$) Sea $w \in T(W)$, entonces $(\exists \widehat{w} \in W)(w = T(\widehat{w}))$,

luego

$$P(T(\widehat{w})) = T(P(\widehat{w})) = T(\widehat{w}) = w \in W.$$

Por tanto $T(W) \subset W$, es decir, W es invariante bajo T.

■

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $T^2 = \mathrm{I}$, es decir T es una **involución**, *entonces existe una proyección $P : V \longrightarrow V$ tal que $T = 2P - \mathrm{I}$.*

Prueba:

Definamos $P = \dfrac{1}{2}(T + \mathrm{I})$, entonces

$$P^2 = \frac{1}{2}(T+\mathrm{I}) \circ \frac{1}{2}(T+\mathrm{I}) = \frac{1}{4}\big(T^2 + T \circ \mathrm{I} + \mathrm{I} \circ T + \mathrm{I}^2\big) = \frac{1}{2}(T+\mathrm{I}) = P.$$

Por tanto P es una proyección y así, $T = 2P - \mathrm{I}$.

■

Recordar que un espacio vectorial V es de dimensión finita, entonces $dim(V) = dim(V^*)$, este hecho falla para el caso cuando $dim(V) = \infty$.

Definición

Una sucesión $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es llamada **casi siempre nula**, *denotada* **csn**, *si*

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\alpha_j = 0, \ \text{para todo } j \geq m)$$

Ejercicio

Pruebe que $V = \{\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} / \alpha_j \in \mathbb{R}, \ \text{para todo } j \in \mathbb{N} \text{ y es } \mathbf{csn}\}$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales en $\mathbb{R}$ y $\{e^1, e^2, \cdots\}$ es una base de V, donde $e^k = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{k-1 \text{ ceros}}, 1, 0, \cdots)$.

Esta base es **numerable**.

Sea V un espacio vectorial, y V^* su dual, entonces para cada $f \in V^*$ definamos la sucesión

$$\alpha_j = f(e^j), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Recíprocamente, toda sucesión $\{\beta_j\}$ de números reales determina una única función lineal $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(e^j) = \beta_j, \text{ para } j \in \mathbb{N}.$$

Luego el conjunto

$$V^* = \{\{\alpha_n\}/\alpha_j \in \mathbb{R}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}\}$$

es un espacio vectorial real.

Proposición

Sea V un espacio vectorial real de dimensión infinita, entonces V y V^* no son isomorfos.

Sea V un espacio vectorial, entonces para cada $v \in V$ definamos la función $\varphi_v : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$\varphi_v(f) = f(v)$$

la cual es una transformación lineal (ejercicio). Por tanto $\varphi_v \in V^{**}$, entonces podemos definir la función $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$ mediante

$$\varphi(v) = \varphi_v.$$

Proposición

La función φ definida antes es una transformación lineal inyectiva.

Prueba:
Veamos que φ es lineal:
• Sean $v, w \in V$, entonces para cada $f \in V^*$ tenemos

$$\varphi_{v+w}(f) = f(v + w) = f(v) + f(w) = \varphi_v(f) + \varphi_w(f) = (\varphi_v + \varphi_w)(f)$$

Luego $\varphi_{v+w} = \varphi_v + \varphi_w$, es decir, $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.
Sea $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces para cada $f \in V^*$ tenemos

$$\varphi_{\lambda v}(f) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda\varphi_v(f),$$

luego $\varphi_{\lambda v} = \lambda\varphi_v$, es decir, $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.
Por tanto, φ es lineal.
• Veamos que φ es inyectiva:
Sea $v \in \mathcal{N}(\varphi)$, entonces $\varphi(v) = 0$, luego $\varphi_v \equiv 0$, es decir, $(\forall f \in V^*)(f(v) = 0)$, -0r tanto $v = \mathbf{0}$.
Por tanto $\mathcal{N}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$, entonces φ es inyectiva.

■

Proposición

Sea V un espacio vectorial tal que $dim(V) < \infty$, entonces la función φ definida antes es un isomorfismo.

Prueba:
Ejercicio. (use la proposición anterior para probar que es inyectiva, y luego use este hecho para mostrar que es sobreyectiva).

■

Si $dim(V) < \infty$, entonces identificamos V con V^{**} vía el isomorfismo φ, es decir, se identifica todo $v \in V$ con $\varphi \equiv \varphi_v$, de modo que

$$v(f) = f(v), \quad \text{para cada } V \in V = V^{**}, f \in V^*.$$

Definición

Un espacio $\mathbb{K}-$vectorial V es ***reflexivo*** *si $\varphi : V \longrightarrow V^{**}$ es un isomorfismo.*

Sean V un $\mathbb{K}-$vectorial V con $dim(V) = \infty$, $S \subset V$ una base, con $dim(S) = \infty$. Dado $w \in S$, entonces definimos para $v \in S$

$$f_w(v) = \begin{cases} 1, & v = w \\ 0, & v \neq w \end{cases}$$

y extendemos por linealidad a todo V, y así obtenemos $f_w \in V^*$, y definamos la transformación lineal $g : V \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante

$$g(v) = 1, \text{ si } v \in S.$$

Proposición

Con las consideraciones dadas antes, se tiene que $\{f_w / w \in S\} \cup \{g\}$ es linealmente independiente.

Prueba:
Ejercicio (Suponga que (existen $\lambda, \lambda_1, \lambda_m \in \mathbb{K})(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k + \lambda g = 0)$, luego use el hecho de que si $S \subsetneq V$ y $dim(S) = \infty$). ■

Proposición

Si $dim(V) = \infty$, entonces φ no es un epimorfismo (es decir, no es sobreyectiva).

Prueba: Ejercicio. ■

Corolario

Si V es reflexivo, entonces $dim(V) < \infty$.

Prueba: Ejercicio (use la proposición anterior). ■

Sean V un espacio vectorial, $A \subset V$ un conjunto arbitrario, definimos

$$A^o = \{f \in V^* / f(v) = 0, \text{ para todo } v \in A\},$$

este conjunto es llamado **anulador** de A.

Nota

1. *A^o es un sub-espacio de V^*.*
2. *$V^o = \{0\}$.*
3. *$\{\mathbf{0}\}^0 = V^*$.*
4. *Si $A \backslash \{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$, entonces $A^o \neq V^*$.*
5. *Si $A \subset B \subset V$, entonces $A^o \supset B^o$.*

Ejercicio pruebe esta nota.

Proposición

Sean V un $\mathbb{K}-$espacio, $S \subset V$, con $dim(V) < \infty$. Entonces

1. $\dfrac{V^*}{S^o} \approx S^*$.
2. $dim(v) = dim(S) + dim(S^o)$

Prueba:

1. Sea $f \in V^*$, entonces definamos función $f' : S \longrightarrow \mathbb{K}$ por
$$f'(v) = f(v), \text{ para cada } v \in S,$$
esta función es la restricción al sub-espacio S.
Observamos que f' es lineal, es decir, $f' \in S^*$. Luego definamos $phi : V^* \longrightarrow S^*$ mediante
$$\phi(f) = f'$$
Ejercicio pruebe que ϕ es sobreyectiva y $\mathcal{N}(\phi) = S^o$; y con ello obtenga el ítem 1.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $S \subset V$ un sub-espacio, con $dim(V) < \infty$, entonces $S^{oo} = S$.

Prueba:
Como $dim(V) < \infty$, entonces en virtud de la identificación $V = V^{**}$ y $S = S^{**}$, de esta forma consideramos a S y S^{oo} como subconjuntos de V, entonces

$$\begin{aligned} S^{oo} &= \{\varphi_v / \varphi_v(f) = 0, \text{ para todo } f \in S^o\} \\ &= \{v \in V / f(v) = 0, \text{ para todo } f \in S^o\}. \end{aligned}$$

Además, para todo $v \in S$ se tiene que $f(v) = 0$, para cada $f \in S^o$, de donde $v \in S^{oo}$, es decir $S \subset S^{oo}$.
Lo demás queda como ejercicio. ■

Sean U, V espacios vectoriales, $T : U \longrightarrow V$ una transformación, entonces la transformación $T^{\nabla} : V^* \longrightarrow U^*$ definida por

$$T^{\nabla}(f) = f \circ T,$$

se verifica fácilmente que T^{∇} es lineal, la cual es llamada la **transpuesta** de T.

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{f} \mathbb{K}$$

Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

2 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Sean U, V espacios vectoriales, $T : U \longrightarrow V$ una transformación, entonces la transformación $T^{\nabla} : V^* \longrightarrow U^*$ definida por

$$T^{\nabla}(f) = f \circ T,$$

se verifica fácilmente que T^{∇} (también se le denota por T^t) es lineal, la cual es llamada la **transpuesta** de T.

$$U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{f} \mathbb{K}$$

1. $(\lambda T)^{\nabla} = \lambda T^{\nabla}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. $(T_1 + T_2)^{\nabla} = T_1^{\nabla} + T_2^{\nabla}$.
3. $(T_1 \circ T_2)^{\nabla} = T_2^{\nabla} \circ T_1^{\nabla}$, donde
$$U \xrightarrow{T_2} V \xrightarrow{T_1} W$$
4. Si T es inversible, entonces $(T^{-1})^{\nabla} = (T^{\nabla})^{-1}$.
5. Si $\mathrm{I} : V \longrightarrow V$ es la identidad en V, entonces $\mathrm{I}^{\nabla} : V^* \longrightarrow V^*$ es ;a identidad en V^*.

En efecto:

1. Sea $f \in V^*$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos
$$(\lambda T)^{\nabla}(f) = f \circ (\lambda T) = \lambda(f \circ T) = \lambda T^{\nabla}.$$
2. Ejercicio.
3. Ejercicio.
4. Ejercicio.
5. Ejercicio.

Proposición

Sean U, V espacios vectoriales, $T \in \mathscr{L}(U, V)$ una transformación, entonces

1. $\big(T(U)\big)^{o} = \mathcal{N}(T^{\nabla})$.
2. $T^{\nabla}(V^*) \subset \big(\mathcal{N}(T)\big)^{o}$.
3. *Si U y V son de dimensión finita, entonces*
$$dim(T(U)) = dimt(T^{\nabla}(V^*)).$$
4. *Con la hipótesis de (3), tenemos*
$$\big(\mathcal{N}(T)\big)^{o} = T^{\nabla}(V^*).$$

1. Ejercicio.
2. Sabemos que $T^{\nabla} \in \mathscr{L}(V^*, U^*)$.
Si $f \in T^{\nabla}(V^*)$, entonces $(\exists g \in V^*)(f = T^{\nabla}(g))$.
Luego,
$$\big(\forall u \in \mathcal{N}(T)\big)\big(f(u) = (g \circ T)(u) = g(T(u)) = g(\mathbf{0}) = 0\big),$$
entonces $f \in \big(\mathcal{N}(T)\big)^{o}$.
3. Como $T^{\nabla} \in \mathscr{L}(V^*, U^*)$, entonces
$$\begin{aligned} dim(V^*) - dim(T^{\nabla}(V^*)) &= dim(\mathcal{N}(T^{\nabla})) \\ &= dim\big((T(U))^{o}\big) \\ &= dim(V) - dim(T(U)), \end{aligned}$$
además, tenemos que $dim(V^*) = dim(V) < \infty$, luego
$$dim(T^{\nabla}(V^*)) = dim(T(U)).$$
4. Ejercicio.

Ejemplo

Pruebe que
$$\mathcal{N}(T) = \big(T^{\nabla}(V^*)\big)^{o}.$$

Definición

Sean V, W $\mathbb{C}-$espacios vectoriales, una aplicación $T : V \longrightarrow W$ se les llama **transformación lineal conjugada** *si para todo $u, v \in U$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos*

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$
$$T(\lambda u) = \overline{\lambda} T(u).$$

Además, si T es biyectiva, entonces T se llama **isomorfismo conjugado**.

Sea $\left(V, \langle,\cdot,\rangle\right)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ó$\mathbb{C}$), con producto interno y $dim(V) < \infty$. Consideremos $u \in V$ y la función $f_u : V \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$f_u(v) = \langle v, u \rangle.$$

Observe que f_u es lineal, es decir, $f_u \in V^*$.
Ahora, definamos la aplicación $\psi : V \longrightarrow V^*$ mediante

$$\psi(u) = f_u.$$

Proposición

Con las notaciones anteriores

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces ψ es un isomorfismo.*
2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces ψ es un isomorfismo conjugado.*

Prueba:

1. Como $dim(V) < \infty$, entonces V y V^* son isomorfos.

Veamos que ψ es lineal:
Como f_u es lineal, es decir,
$(\forall u^1, u^2 \in V)(f_{u^1+u^2} = f_{u^1} + f_{u^2})$ y $(\forall \lambda, \forall u \in V)(f_{\lambda u} = \lambda f_u)$,
entonces ψ es una transformación lineal, es decir, $\psi \in \mathscr{L}(V, V^*)$.
Veamos $\mathcal{N}(\psi) = \{0\}$:
Sea $v \in \mathcal{N}(\psi)$, luego $\psi(v) = 0$, es decir, $(\forall v \in V)(\langle v, u \rangle = 0)$.
Entonces $v = \mathbf{0}$, por tanto $\mathcal{N}(\psi) = \{0\}$ si, solo si ψ es inyectiva.
Compruebe que ψ es sobreyectiva, y así φ es un isomorfismo.

2. Ejercicio

■

Nota

El isomorfismo de ψ no indica que para cada $f \in V^*$, existe un único $u \in V$ tal que

$$\left(\forall v \in V\right)\left(f(v) = \langle v, u \rangle\right)$$

Ejemplo

Sea $\mathbb{K} = \left(\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}\right)$.
Toda aplicación lineal $f : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ es de la forma

$$f(x, y) = ax + by = \Big\langle (a, b), (x, y) \Big\rangle,$$

para todo $a, b, x, y \in \mathbb{K}$, con a, b fijos

Ejercicio

Pruebe que toda aplicación lineal $h : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ es de la forma

$$\psi(v^0) = h, \text{ con } v^0 \in \mathbb{C}^2.$$

Debido a la proposición anterior, para cada aplicación lineal $f \in V^*$, existe un único $v \in V$ tal que

$$(\forall u \in V)(f(u) = \langle u, v \rangle).$$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $\{v^1, \cdots, v^n\} \subset V$, y $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset V^*$ una base (llamada la **correspondiente base dual** *de V) tales que*

$$(\forall u \in V)\left(f_j(u) = \left\langle u, v^j \right\rangle\right), \; j = 1, \cdots, n$$

Entonces $\{v^1, \cdots, v^n\}$ es una base de V.

Prueba:
Veamos $\{v^1, \cdots, v^n\}$ son linealmente independiente:
sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^j = \mathbf{0}.$$

Entonces

$$(\forall u \in V)\left(\sum_{j=1}^{n} \left\langle u, \alpha_j v^j \right\rangle = 0 = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} \left\langle u, v^j \right\rangle\right),$$

de donde

$$(\forall u \in V)\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} f_j(u) = 0\right), \text{ esto implica } \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} f_j = 0,$$

como $\{f_1, \cdots, f_n\}$ es una base de V^*, entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Por tanto $\{v^1, \cdots, v^n\}$ son linealmente independientes.
Ejercicio, pruebe que para cada $v \in V$ existen $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \beta_1 v^1 + \cdots + \beta_n v^n.$$

Luego $\{v^1, \cdots, v^n\}$ es una base de V. ∎

Consideremos $\{w^1, \cdots, w^n\}$ una base de V y su correspondiente base dual $\{f_1, \cdots, f_n\} \subset V^*$ tales que

$$f_i(w^j) = \langle w^j, v^i \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

en este caso, decimos que $\{v^1, \cdots, v^n\}$ es la base dual de $\{w^1, \cdots, w^n\}$. como $\langle w^j, v^i \rangle = \delta_{ij}$ es simétrica, entonces decimos que las bases $\{v^1, \cdots, v^n\}$ y $\{w^1, \cdots, w^n\}$ son **bases duales**.

Observación

La base dual de una base ortonormal $\{e^1, \cdots, e^n\}$ es ella misma.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

nos conduce a un reordenamiento de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

llamada **matriz** de orden 2×2.

En general, una matriz de orden $m \times n$ (m filas y n columnas), es un ordenamiento de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

donde a_{ij} son escalares (únicos). Denotemos dicho reordenamiento por $A = [a_{ij}]$.
Denotemos por $\mathbb{K}^{m\times n}$ (ó también $\mathbb{K}(m,n)$) al conjunto de matrices de orden $m \times n$.

El conjunto $\mathbb{K}^{m\times n}$ (ó también $\mathbb{K}(m,n)$) está provisto de la operaciones de suma y producto por un escalar de forma análoga a $\mathbb{K}$, es decir, sean $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij} + b_{ij}] \\ \lambda A &= [\lambda a_{ij}]. \end{aligned}$$

Coon estas operaciones $\mathbb{K}(m,n)$ es un espacio vectorial.

Además, podemos definir, otra operación, producto de matrices de la siguiente forma:
Sean las matrices $A \in \mathbb{K}(m,n)$ y $B \in \mathbb{K}(n,p)$, entonces definimos la matriz $C = AB = [c_{ik}] \in \mathbb{K}(m,p)$, donde

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \ \text{para } i = 1, \cdots, m, \ \ k = 1, \cdots, p,$$

El producto de matrices, presenta las siguientes propiedades:

1. $\Big(\forall A \in \mathbb{K}(m,n), B \in \mathbb{K}(n,p), C \in \mathbb{K}(p,q)\Big)\Big(A(BC) = (AB)C\Big)$.
2. $\Big(\forall A \in \mathbb{K}(m,n), B, C \in \mathbb{K}(n,p)\Big)\Big(A(B+C) = AB + AC\Big)$ y $\Big(\forall A, B \in \mathbb{K}(m,n), C \in \mathbb{K}(n,p)\Big)\Big((A+B)C = AC + BC\Big)$.
3. En general se tiene $AB \neq BA$ para $A \in \mathbb{K}(m,n), B \in \mathbb{K}(n,p)$.

Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Nota el conjunto de matrices en $\mathbb{K}(n,n)$, diremos sue son **matrices cuadradas** de orden $n \times n$, y lo denotamos por $\mathbb{K}(n) = \mathbb{K}(n,n)$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, matrices $\mathrm{I} \in \mathbb{K}(n,n)$ definidas por

$$\mathrm{I} = [\delta_{ij}]$$

son llamadas **matrices identidad** de orden $n \times n$ o simplemente de orden n, donde δ_{ij} es el δ **de Kronecker**.

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es llamada **inversible**, *si existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $AB = BA = \mathrm{I}$, y lo denotamos por $B = A^{-1}$, esta matriz A también es llamada* **no singular** *y B es llamada la* **inversa** *de A.*

Consideremos la matriz de orden $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

los vectores $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ son llamados **vectores filas** de A para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, el cual también es una matriz de orden $1 \times n$; y las matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

son llamados vectores columnas de A de orden $m \times 1$.

Para la determinar la inversa de una matriz cuadrada, si existe, lo podemos hacer por operaciones elementales, sistemas de ecuaciones lineales, entre otras técnicas.
Los vectores filas los vectores $a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$, $i = 1, 2, \cdots, m$ de una matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$ puede escribirse de la forma

$$a^i = a_{i1}e^1 + a_{i2}e^2 + \cdots + a_{in}e^n, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

donde $\{e^1, e^2, \cdots, e^n\}$ es una base canónica de $\mathbb{K}^{n\times 1}$.
Supongamos que $m = n$ y que A es inversible. Entonces para cada a^j $j = 1, 2, \cdots, n$ debemos encontrar escalares b_{jk} $k = 1, 2, \cdots, n$ (si existen de forma única) tales que

$$e^j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} a^k, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

Entonces definimos la matriz inversa de A por $B = [b_{ij}]$, en este caso los vectores filas de $\{a^1, a^2, \cdots, a^n\}$ son linealmente independientes.

Por ejemplo, sea la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

en este caso tenemos $a^1 = (5;6)$, $a^2 = (4;5)$, entonces

$$\begin{aligned} a^1 &= 5e^1 + 6e^2 \\ a^2 &= 4e^1 + 5e^2, \end{aligned}$$

de donde, aplicando la teécnica anterior tenemos

$$\begin{aligned} e^1 &= \quad 5a^1 - 6a^2 \\ e^2 &= -4a^1 + 5a^2, \end{aligned}$$

luego la inversa de A es la matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$.

Matrices Especiales

Sea una matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$ es llamada

- Diagonal, si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
- Triángular superior, si $a_{ij} = 0$ para $j < i$.
- Triángular inferior, si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
- simétrica, si ${}^tA = A$.
- anti-simétrica, si ${}^tA = -A$.
- Hermitiana, si $A^* = A$, aquí $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- anti-Hermitiana, si $A^* = -A$,
- Ortogonal, si ${}^tAA = \mathrm{I}$.

Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

6 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Matrices Especiales Una matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$ es llamada

- Diagonal, si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
- Triángular superior, si $a_{ij} = 0$ para $j < i$.
- Triángular inferior, si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
- simétrica, si ${}^tA = [a_{ji}] = A = [a_{ij}]$, y $m = n$.
- anti-simétrica, si ${}^tA = [a_{ji}] = -A = -[a_{ij}]$, y $m = n$.
- Hermitiana, si $A^* = [\overline{a_{ji}}] = A = [a_{ij}]$, y $m = n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- anti-Hermitiana, si $A^* = [\overline{a_{ji}}] = -A = -[a_{ij}]$, y $m = n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Matrices Especiales

- Ortogonal, si ${}^tAA = \mathrm{I}$ de orden n.
- Unitaria, si $A^*A = \mathrm{I}$ de orden n, y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Normal, si $A^*A = AA^*$, $m = n$, y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Idemponte, si $A^2 = A$, $m = n$.
- Nilponte, si $A^r = 0$ para algún y $r \in \mathbb{N}$, $m = n$.
- Definida Positiva (respec. Definida Negativa), si ${}^txAx > 0$ (respec. ${}^txAx < 0$), para todo $x \in \mathbb{K}(n,1)$ no nulo y $m = n$.
- Semi-definida Positiva (respec. Semi-definida negativa), si ${}^txAx \geq 0$ (respec. ${}^txAx \leq 0$), para todo $x \in \mathbb{K}(n,1)$ y $m = n$.

De aquí en adelante denotaremos A^t en lugar de t^A.

Existen operaciones elementales sobre filas y columnas que son muy importantes y permiten ciertas operaciones con cierta facilidad, estas son llamadas **operaciones elementales**.

Veamos las operaciones elementales en $\mathbb{K}(n,n)$ por fila

1. $E_i(\lambda)$ es una matriz obtenida de la matriz identidad I, multiplicando la $i-$ésima fila por $\lambda \in \mathbb{K}$ no-nulo. Por ejemplo

$$n = 2 : E_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$n{=}3 : E_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

2. $E_{ij}(\lambda)$ es una matriz obtenida de la matriz identidad I, sumando a la $i-$ésima fila, la $j-$ésima fila multiplicada por λ, con $i \neq j$. Por ejemplo

$$n = 2 : E_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{21}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$$

$$n{=}3 : E_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{13}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{21}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

similar la las matrices $E_{23}(\lambda)$, $E_{31}(\lambda)$ y $E_{32}(\lambda)$.

3. E_{ij} es una matriz obtenida de la matriz I, intercambiando la $i-$ésima fila con la $j-$ésima fila con $i \neq j$. Por ejemplo

$$n = 2 : E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{21}$$

$$n = 3 : E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}, E_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{31},$$

$$E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = E_{32}.$$

Proposición

Dada una matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}(m,n)$, y consideremos $a^1, a^2, \cdots, a^m$ los vectores filas de A, y las matrices elementales $E_i(\lambda), E_{i,j}(\lambda), E_{ij}$ de orden $m \times m$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ no nulo. Entonces

1. $E_i(\lambda)A = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ \lambda a^j \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}$ es la matriz obtenida de A multiplicando la $j-$ésima por λ.

2. $E_{ji}(\lambda)A = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j + \lambda a^i \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}$ es la matriz obtenida de A sumando la $j-$ésima fila, la $i-$ésima multiplicada por λ

3. $E_{ij}A = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^i \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \to i \\ \\ \to j \\ \\ \\ \end{matrix}$ es la matriz obtenida de A intercambiando $i-$ésima con la $j-$ésima.

Prueba: Ejercicio. ■

Proposición

Toda matriz elemental es inversible y su inversa es matriz elemental del mismo tipo, donde se verifica

1. $\left[E_i(\lambda)\right]^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$, *con* $\lambda \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$.
2. $\left[E_{ij}(\lambda)\right]^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$, *con* $\lambda \neq 0$, $i, j = 1, 2, \cdots, m$, *e* $i \neq j$.
3. $\left[E_{ij}\right]^{-1} = E_{ij}$, $i, j = 1, 2, \cdots, m$, *e* $i \neq j$.

Prueba:

1. Una forma de probar es la siguiente forma:
   En particular para $n = 2$ se tiene
   consideremos $E_1(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ y matriz
   $$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$
   entonces

$$E_1(\lambda)B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de donde $a = \lambda^{-1}$, $b = 0 = c$, $d = 1$. Por tanto

$$\begin{bmatrix} \lambda^{=1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1(\lambda^{-1}) = \left[E_1(\lambda)\right]^{-1}.$$

También pruebe probarlo usando la proposición anterior.

2. Pruebe probarlo usando la proposición anterior.
3. Pruebe probarlo usando la proposición anterior.

■

Proposición

Sea $A \in \mathbb{K}(n,n)$ una matriz tal que $L_A : \mathbb{K}(n,1) \longrightarrow \mathbb{K}(n,1)$ es una aplicación inyectiva, entonces existen matrices E_j tales que

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I.$$

Prueba:
La prueba la haremos por inducción sobre n.
• Si $n = 1$, entonces, entonces la matriz de orden 1×1 tiene la forma $A = [\lambda]$, con $\lambda \in \mathbb{K}$ y definamos la aplicación $L_A(x) = Ax = \lambda x$, $\lambda \neq 0$.
Como deseamos que L_A sea inyectiva, entonces sean $x, y \in \mathbb{K}(n,1)$ tales que $L_A(x) = L_A(y)$, entonces $\lambda x = \lambda y$, esto implica que $x = y$.
Luego hacemos $E_1 = [\lambda^{-1}]$, de donde $E_1 A = AE_1 = \mathrm{I} = [1]$.

• Supongamos que el enunciado es válido para matriz hasta de orden $n = k$.
• Ahora veamos que el enunciado es válido para $n = k + 1$.
Consideremos la matriz $A \in \mathbb{K}(k+1, k+1)$.
Notamos que algún elemento de la primera columna de A debe ser diferente de cero, caso contrario tendremos

$$Ae^1 = [a^1 a^2 \cdots a^{k+1}]e^1 = Ae^1 = [\mathbf{0} a^2 \cdots a^{k+1}]e^1 = \mathbf{0},$$

de donde L_A no es inyectiva, lo cual es una contradicción. Por tanto, la columna a^1 (primera) de A posee algún elemento no nulo, entonces tenemos
Si $a_{j1} \neq 0$, entonces matriz $E_{1j}A = [a_{ij}]$ se tiene que $a_{11} \neq 0$.

Luego, multiplicamos por $E_2 = E_2(a_{11}^{-1})$ obtenemos

$$E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ a_{21} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{21} & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Queda como ejercicio los siguientes pasos. ■

Corolario

Con las hipótesis de la proposición anterior, la matriz A es inversible.

Prueba:
De la identidad

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = \mathrm{I},$$

obtenida de la proposición anterior, multiplicamos en forma sucesiva por la izquierda las matrices $E_k^{-1}, E_{k-1}^{-1}, \cdots, E_1^{-1}$, obteniéndose

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

Luego multiplicamos sucesivamente por la derecha las matrices $E_k, \cdots, E_1$ de donde

$$AE_k E_{k-1} \cdots E_1 = \mathrm{I}.$$

Por tanto la matriz $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1$ es la inversa de A. ■

Corolario

Si $A \in \mathbb{K}(n,n)$ posee inversa a la izquierda, entonces A es inversible.

Prueba:
Por hipótesis, existe la inversa por la izquierda, sea $B \in \mathbb{K}(n,n)$ tal que $BA = \mathrm{I}$.
Supongamos que $Ax = \mathbf{0}$, entonces

$$x = \mathrm{I}x = B(Ax) = B\mathbf{0} = \mathbf{0} \Longrightarrow x = \mathbf{0},$$

luego$\mathcal{N}(L_A) = \{\mathbf{0}\}$, por tanto L_A inyectiva, es decir, A es inversible. ■

Corolario

Si $A \in \mathbb{K}(n,n)$ posee inversa a la derecha, entonces A es inversible.

Por hipótesis, A posee inversa por la derecha, entonces existe $B \in \mathbb{K}(n,n)$ tal que $AB = \mathrm{I}$ y por el corolario anterior, tenemos que B es inversible. Entonces

$$A = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = \mathrm{I}B^{-1} = B^{-1}.$$

Por tanto A es inversible. ■

Corolario

Si la matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$ es inversible si, y solo si L_A es inyectiva.

Prueba:Ejercicio. ■

Corolario

Toda matriz inversible es producto de un número finito de matrices elementales.

Prueba:
Si $A \in \mathbb{K}(n,n)$ es inversible, entonces L_A es inyectiva, luego por el primer corolario de la proposición anterior tenemos

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1},$$

y como la inversa de una matriz elemental también es una matriz elemental, por tanto, el corolario es verdadero. ■

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

7 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Cálculo de la inversa mediante operaciones elementales Sea $A \in \mathbb{K}(n,n)$ una matriz inversible y deseamos encontrar su inversa, Para ello consideremos la matriz de orden $n \times 2n$

$$\left[\ A\ \middle|\ \mathrm{I}\ \right],$$

donde I es la matriz identidad de orden $n \times n$.
Luego procedemos a multiplicar, por la izquierda, por matrices elementales $E_1, E_2, \cdots, E_k$, tales que

$$\left[\ E_kE_{k-1}\cdots E_1A\ \middle|\ E_kE_{k-1}\cdots E_1\ \right],$$

nos produzca $E_kE_{k-1}\cdots E_1A = \mathrm{I}$, y por tanto

$$A^{-1} = E_kE_{k-1}\cdots E_1.$$

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

halle su inversa. Para ello procedamos como sigue:

$$\left[\ A\ \middle|\ \mathrm{I}\ \right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Multiplicamos la primera fila por -2 y luego la sumamos a la segunda

$$\xrightarrow{E_{21}(-2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

ahora, multiplicamos la segunda fila por 2 y luego la sumamos a la primera.

$$\xrightarrow{E_{12}(2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

ahora, multiplicamos la primera fila por 1 y luego la sumamos a la segunda.

$$\xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 3 \end{array}\right].$$

Finalmente, multiplicamos por $-0,5$ la segunda fila

$$\xrightarrow{E_{2}(-0,5)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right].$$

De donde la inversa de la matriz A, resulta

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Proposición

Una matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$ es inversible si, y solo si sus vectores columnas son linealmente independientes

Prueba:
Sean $a^1, \cdots, a^n$ los vectores columnas de A, $L_A : \mathbb{K}(n,1) \longrightarrow \mathbb{K}(n,1)$ la transformación lineal definida

$$L_A(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j a^j, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$$

$\Rightarrow$) Supongamos que A es inversible, y que existe $x \in \mathbb{K}(n,1)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a^j = \mathbf{0}, \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t,$$

entonces $L_A(x) = \mathbf{0}$, esto implica que $Ax = \mathbf{0}$, luego

$$x = \mathrm{I}x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

de donde $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Por tanto $a^1, a^2, \cdots, a^n$ son linealmente independientes.

$\Leftarrow$) Si $L_A(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j a^j = \mathbf{0}$, y como los vectores columnas de A son linealmente independientes, entonces $x = \mathbf{0}$.
Por tanto L_A es inyectiva y por el primer corolario de la proposcicón se tiene que A es inversible.

■

Proposición

Una matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$ es inversible si, y solo si los vectores fila son linealmente independientes.

Prueba:

$\Rightarrow$) Supongamos que A es inversible.
Sean $a^1, \cdots, a^n$ los vectores columnas de A y

$$\mathcal{F}(A) = \mathscr{L}(\{a^1, a^2, \cdots, a^n\})$$

es espacio de filas de A.

Note que las operaciones elementales fila sobre A, produce una de los siguientes efectos:
a^i es cambiado

1) por λa^i, con $\lambda \neq 0$, ó
2) por $a^i + \lambda a^j$ con $j \neq i$, ó
3) por intercambio con a^j, donde $j \neq i$.

Esto significa, el espacio fila $\mathcal{F}(A)$ no es modificado por ninguna de las operaciones elementales, es decir

$$(\text{para toda matriz elemental } E)\Big(E\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(A)\Big). \qquad (1)$$

Dado que A es inversible, existen matrices elementales E_j tales que

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = \mathrm{I}.$$

Aplicamos en forma sucesiva (1) obteniéndose

$$\mathcal{F}(A) = E_k E_{k-1} \cdots E_1 \mathscr{L}(A) = \mathcal{F}(\{e^1, e^2, \cdots, e^n\}) = \mathbb{K}(1,n),$$

donde $\{e^1, e^2, \cdots, e^n\}$ es la base canónica de $\mathbb{F}(1,n)$, con ello tenemos que las filas $\{a^1, a^2, \cdots, a^n\}$ de A generan $\mathbb{F}(1,n)$ y por tanto es una base, es decir, que estos vectores son linealmente independientes.

$\Leftarrow$) Supongamos que los vectores fila $\{a^1, a^2, \cdots, a^n\}$ de A son linealmente independientes.
Luego estos vectores constituyen una base para $\mathbb{K}(1,n)$, entonces podemos expresar los vectores canónicos j, $j = 1, \cdots, n$ como

$$e^j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} a^k, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Definamos la matriz $B = [\beta_{ij}]$, de donde $BA = \mathrm{I}$, es decir, A es inversible.

■

Estas matrices tienen la facilidad de transformar una matriz para su mayor facilidad de operar.

Definición

Una matriz de orden $m \times n$ es **escalonada reducida** *si*

1. *El primer* **elemento no nulo** *de un fila no nula es 1. Este se denomina $1-$***capital**.
2. *Toda fila cuyas componentes son todos ceros está por debajo de aquellas filas no nulas.*
3. *En cada columna donde aparece el $1-$capital, sus demás componentes son ceros.*
4. *Si son r filas no nulas, y si el $1-$capital de la $i-$ésima fila está en la columna k_i, entonces $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.*

Proposición

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$, existen matrices elementales $E_j \in \mathbb{K}(m,m)$ tales que

$$E_r E_{r-1} \cdots E_1 A = A_0$$

es una matriz escalonada reducida

Prueba:
Usaremos inducción sobre m.
• $m = 1$, en este caso se tiene que $A \in \mathbb{K}(1,n)$ posee una única fila, entonces

1. todos sus elementos son ceros, ó
2. sea $c \neq 0$ el primer elemento no nulo, entonces $E_1(c^{-1})A$.

En cualquier caso tenemos una matriz escalonada reducida

• Supongamos que hasta m el enunciado es válido (**H I**)
• Veamos para $m+1$:
Sea c el primer elemento no nulo del primer vector columna de A, que se encuentra en la fila j.
Luego c estará en la primera fila si $E_1 A = E_{j1} A$, de donde al multiplicar por $E_2 = E_1(c^{-1})$ se tiene

$$E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & * & & & * \end{bmatrix},$$

donde $*$ representa cualquier elemento de $\mathbb{K}$.

En forma sucesiva multiplicamos las matrices $E_{j1}(*)$ se convierten en cero los elementos debajo del primer $1-$capital y con ello tenemos

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}, \text{ con } C \in \mathbb{K}(m.n-1).$$

Por hipótesis de inducción, existen matrices elementales F_j de orden m tales que

$$F_s F_{s-1} \cdots F_1 C = C_0$$

es una matriz escalonada reducida. Las matrices elementales

$$E_j' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & F_j & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}, \quad j = 1, \cdots, s$$

son tales que

$$E'_s \cdots E'_1 E_k \cdots E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C_0 & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}.$$

Finalmente, mediante operaciones elementales adecuadas, se anulan los elementos de la primera fila que se hallan en las columnas de los $1-$capital de C_0.
Por tanto la proposición es válida.

$\blacksquare$

Corolario

Si $A \in \mathbb{K}(n,n)$ es inversible, entonces A_0, la matriz elemental reducida a A, obtenida en la proposición anterior, es la matriz identidad I.

Prueba:
Como A es inversible, entonces $E_r E_{r-1} \cdots E_1 A = A_0$ también lo es.
Luego las n filas de A_0 son linealmente independiente, esto es cierto, debido a que solo existen n $1-$capitales, uno en cada fila.
Por tanto $A_0 = \mathrm{I}$.

$\blacksquare$

Definición

Dos matrices $A, B \in \mathbb{K}(m,n)$ son **equivalentes por filas**, *si existe una matriz inversible $P \in \mathbb{K}(m,m)$ tal que*

$$B = PA$$

En el corolario anterior, hacemos $P = E_r E_{r-1} \cdots E_1$ el cual es una matriz inversible, y $B = \mathrm{I}$, entonces A e I son equivalentes por filas.
La equivalencia por filas es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{K}(m,m)$.

La penúltima proposición nos indica que toda matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$ es equivalente por filas a la matriz elemental reducida A_0.
Probaremos que A_0 no depende de A, sino de la clase de equivalencia a la que pertenece A. Además, probaremos que A_0 es la única matriz elemental reducida que existe en dicha clase. Dada $A \in \mathbb{K}(n,n)$, sean $a^1, a^2, \cdots, a^n$ los vectores filas de A y

$$\mathcal{F}(A) = \mathscr{F}(\{a^1, a^2, \cdots, a^n\})$$

su espacio de filas.
Entonces, tenemos uno de los tres casos.

1. $E(a^i) = a^j$, $E(a^j) = a^i$, $E(a^l) = a^l$ para $l \neq i, j$
2. $E(a^i) = a^i + \lambda a^j$, $E(a^l) = A^l$ para $l \neq i$.
3. $E(a^i) = \lambda a^i$, $E(a^j) = a^j$ para $j \neq i$, $\lambda \neq 0$.

Notamos que el espacio de filas A y EA son iguales, para toda matriz elemental E.
Al repetir este proceso un número finito de veces, se tiene que A y $E_k \cdots, E_1 A = A_0$ poseen el espacio de filas.

Proposición

Si $A, B \in \mathbb{K}(m,n)$ son equivalentes por filas, entonces $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$.

En particular $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(A_0)$, además las filas no nulas forman una base de $\mathcal{F}(A)$.

Proposición

La matriz escalonada reducida, equivalente por filas a una matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$ es única.

Prueba:
Sean A_0 y B_0 dos matrices escalonadas reducidas asociadas a la matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$.
Sabemos que ls filas no nulas de A_0 y B_0 forman una base de $\mathcal{F}(A)$, entonces esta matrices tienen el mismo número de filas no nulas.
Sean $v^1, \cdots, v^r$ y $w^1, \cdots, w^r$ las filas no nulas de A_0 y B_0 respectivamente.
Además, supongamos que los $1-$capitales de A_0 están en las columnas $h_1, \cdots, h_r$, y los de B_0 en las columnas. $k_1, \cdots, k_r$

Veamos que $v^j = w^j$, para $j = 1, \cdots, r$ lo cual implica que $A_0 = B_0$:
Usaremos inducción sobre r.
• $r = 1$, entonces en este caso tenemos $\{v^1\}$, $\{w^1\}$, luego

$$v^1 = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1,}_{k_1} *, \cdots), \quad w^1 = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1,}_{h_1} *, \cdots),$$

como las filas no nulas de A_0, respectivamente las de B_0 forman una base para $\mathcal{F}(A)$, entonces se tiene que $v^1 = \lambda w^1$, de donde $\lambda = 1$ y $k_1 = h_1$.
Por tanto $v^1 = w^1$.

• Supongamos ahora $r > 1$.
Afirmamos que $h_r = k_r$ y $v^r = w^r$
En efecto: supongamos que $h_r < k_r$, entonces

$$v^r = \lambda_1 w^1 + \cdots + \lambda_r w^r, \tag{2}$$

luego las componentes de v^r son ceros en las posiciones $h_1, h_2, \cdots, h_r$, y en el segundo miembro se tiene $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ en tales posiciones.
Entonces $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$, lo cual implica que $v^r = \mathbf{0}$ y esto es una contradicción, dado que $v^r \neq \mathbf{0}$, entonces $h_r < k_r$ no puede ser.
De manera similar $k_r < h_r$ también no es posible.
Entonces tenemos que $h_r = k_r$.
De la expresión (2) se tiene que las componentes de v^r en las posiciones $h_1, \cdots, h_{r-1}$ son cero, dado que $h_r = k_r$, y en el segundo miembro se tiene que $\lambda_1, \cdots, \lambda_{r-1}$ como dichas componentes también son cero, por tanto

$$v^r = \lambda_r w^r$$

Luego v^r y w^r tienen $1-$capital en la posición $h_r = k_r$, de donde $\lambda_r = 1$, entonces $v^r = w^r$.
Ahora veamos que

$$\mathscr{L}(\{v^1, \cdots, v^{r-1}\}) = \mathscr{L}(\{w^1, \cdots, w^{r-1}\}) \qquad (3)$$

En la expresióm

$$v^j = \lambda_1 w^1 + \cdots + \lambda_r w^r, \quad j = 1, \cdots, r$$

observamos que v^j tiene componentes en la posición k_r, mientras que en el segundo miembro tiene componente λ_r (esto es debido a que $h_r = k_r$), entonces $\lambda_r = 0$'

Por tanto

$$v^j = \lambda_1 w^1 + \cdots + \lambda_r w^{r-1}, \quad j = 1, \cdots, r-1,$$

de donde la relación (3) se satisface.
Por hipótesis inductiva aplicada a (3), se tiene

$$v^j = w^j \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \cdots, r-1.$$

Por tanto la proposición es válida. ■

Corolario

Sean $A, B \in \mathbb{K}(m, n)$ tales que $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(B)$, entonces A y B son equivalentes por filas.

Prueba: Ejercicio. ■

Ejemplo

Halle la matriz escalonada reducida asociada a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y la base asociada de su espacio fila.

Aplicamos matrices elementales para transforma A a su forma reducida

$$A \rightarrow \underset{\xrightarrow{E_{23}(1)}}{\xrightarrow{E_{13}(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observamos que la última matriz es la forma reducida, y por tanto tenemos $\{(1, -1, 0), (0, 1, 1)\}$ es la base del espacio fila de A

Base Canónica

Todo subespacio $V \subset \mathbb{K}^n$ está determinado por una o más ecuaciones lineales homogéneas, o simplemente está generado por un conjunto finito de vectores.
En cualquier caso tenemos que $dim(V) = r \leq n$. Supongamos que $\{v^1, \cdots, v^r\}$ es una base de V, luego

$$A = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^r \end{bmatrix}$$

es la matriz fila, en este caso todas las filas son no nulas y por tanto la matriz elemental reducida A_0 asociada de A, conforman una base canónica para el espacio fila.

Como historia tenemos que el estudio de el sistema de ecuaciones lineales da lugar a uno de los principales temas del **Álgebra Lineal**.
Supongamos que tenemos un sistema de m ecuaciones con n incógnitas dada de por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4}$$

donde a_{ij}, b_i son datos, mientras que los x_j son las **incógnitas**.
Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, entonces el sistema (4) es llamado **homogéneo**, caso contrario se llama **no homogéneo**.
La matriz $A=[a_{ij}]\in\mathbb{K}(m,n)$ se llama **matriz asociada** al sistema (4).
Consideremos $b = [b_1 \cdots b_m]^t$, $x = [x_1 \cdots x_n]^t$

Entonces el sistema (4) puede escribirse de la forma

$$Ax = b. \tag{5}$$

Note que (4) y (5) representan el mismo problema.

Definición

Una n–ada ordenada de números $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ se llama **solución del sistema** *(4) si*

$$a_{i1}\lambda_1 + a_{i2}\lambda_2 + \cdots + a_{in}\lambda_n = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Una forma de resolver un sistema de la forma (5), es usando matrices elementales sobre las filas de A.
Esto significa,

$$E(Ax) = (EA)(x), \quad \text{para toda matriz} \quad E \in \mathbb{K}(m,m),$$

luego EA es el resultado de una operación elemental sobre las filas de A, y de esta forma, tenemos $(EA)x = Eb$.
Aplicando un número finito de operaciones elementales obtenemos

$$A_0 x = b_0, \tag{6}$$

donde A_0 es la matriz elemental reducida asociada a la matriz A.
Observar que toda solución del sistema (5) es solución del sistema (6).

Definición

Dos sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b, \quad A'x = b', \quad \text{donde } A, A' \in \mathbb{K}(m,n), \; b, b' \in \mathbb{K}(n,1)$$

son **equivalentes** *si existe una matriz inversible $P \in \mathbb{K}(m,m)$ tal que $A' = PA$ y $b' = Pb$.*

Note que de acuerdo a la última definición, los sistemas (5) y (6) son sistemas equivalentes.

Definición

Se llama **conjunto solución del sistema** $Ax = b$*, al conjunto total de sus soluciones.*

Verifique que dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes tienen el mismo conjunto solución.
Se llama **matriz aumentada del sistema** $Ax = b$ a la matriz $[A \mid b]$.

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

9 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Definición

Se llama **conjunto solución del sistema** $Ax = b$*, al conjunto total de sus soluciones.*

Verifique que dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes tienen el mismo conjunto solución.
Se llama **matriz aumentada del sistema** $Ax = b$ a la matriz $[A \mid b]$.

Ejemplo

Halle el conjunto solución del sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & 4t & + & 3w & = & 6 \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 6t & - & 5w & = & 1 \\ 2x & & & - & z & - & 4t & + & 2w & = & -7 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & - & 10t & - & 8w & = & -5 \end{array}$$

luego el sistema anterior lo llevamos a forma de matriz aumentada

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & -6 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -4 & 2 & -7 \\ 2 & -2 & 3 & -10 & -8 & -5 \end{array}\right].$$

Haciendo operaciones elementales llegamos a la solución
$S = \{(0, 13, 7, 0, 0) + t(1, -7, -2, 1, 0) + w(0, -1, 2, 0, 1)/t, w \in \mathbb{R}\}$

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}(m, n)$ una matriz, la dimensión de su espacio fila se llama **rango por filas**, *y lo denotamos por $r_f(A)$, es decir,*
$$r_f(A) = dim(\mathcal{F}(A)).$$

También, la dimensión de su espacio columna $\mathscr{C}(A) = \mathscr{L}(\{a^1, \cdots, a^n\})$ se llama **rango por columnas** y lo denotamos por $r_c(A)$, es decir,
$$r_c(A) = dim(\mathscr{C}(A)).$$

Nota

El rango por filas de una matriz A, es igual al número de filas no nulas de A_0, la matriz elemental reducida asociada a la matriz A, de donde tenemos $r_f(A) \leq m$.
Además, los $1-$capitales de A_0 se encuentran en columnas distintas, de donde se tiene que $r_f(A) \leq n$.
De esta forma se obtiene que
$$r_f(A) \leq \text{mín}(\{m, n\}).$$
Si $r_f(A)$=mín$(\{m, n\})$, entonces diremos que el $r_f(A)$ es total, también llamado rango full.

Recordar que el sistema homogéneo $Ax = \mathbf{0}$ siempre posee solución, la cual es $x = \mathbf{0}$.
Sin embargo, nos interesa determinar todas las soluciones del sistema homogénemo.
Observe que el conjunto total de soluciones de $Ax = \mathbf{0}$ es un subespacio de $\mathbb{K}(n, 1)$, de donde
$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{K}(n, 1)/Ax = \mathbf{0}\}.$$
En la siguiente proposición determinamos la dimensión de este subsespacio.

Proposición

Para toda matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$ se tiene que $dim(\mathcal{N}(A)) = n - r_f(A)$.

Prueba:
Consideremos A_0 la matriz elemental reducida asociada a la matriz A, entonces $Ax = \mathbf{0}$ y $A_0x = \mathbf{0}$ tienen el mismo conjunto solución, es decir, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_0)$.
Ahora, en la ecuación $A_0x = \mathbf{0}$, las variables dependientes corresponden a las columnas donde se hallan los $1-$capitales, mientras que las demás variables son independientes.
Luego si $r_f(A) = p$, entonces se tienen p variables dependientes $y_1, \cdots, y_p$ y q variables independientes $z_1, \cdots, z_q$. de $A_0x = \mathbf{0}$, de donde se tienen

$$y_1 = \sum_{i=1}^{q} \gamma_{i1} z_i$$

$$y_2 = \sum_{i=1}^{q} \gamma_{i2} z_i$$

$$\vdots$$

$$y_p = \sum_{i=1}^{q} \gamma_{ip} z_i$$

Luego, las componentes de todo vector $v \in \mathcal{N}(A)$ están expresadas como combinación lineal de $z_1, \ldots, z_q$.

Para cada $i = 1, \cdots, q$, consideremos $u^i \in \mathcal{N}(A)$ el vector que se obtiene tomando $z_i = 1$ y $z_j = 0$ para $j \neq i$. Entonces los vectores $\{u^1, \cdots, u^q\}$ son linealmente independiente y generan a $\mathcal{N}(A)$. Luego

$$dim(\mathcal{N}(A)) = q = n - p = n - r_f(A).$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & + & 9z & + & w & = & 0 \\ -x & + & y & - & 6z & + & 6w & = & 0 \\ 5x & + & y & + & 24z & - & 2w & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & + & 2w & = & 0. \end{array}$$

De donde haciendo las operaciones elementales correspondientes llegamos a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 6 \\ 5 & 1 & 24 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_0.$$

Entonces $r_f(A) = r_f(A_0) = 2$. Por tanto, el sistema inicial es equivalente a

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + 5z & - & w & = 0 \\ & & y & - z & + & 3w & = 0, \end{array}$$

observamos que las variables dependientes son x, y y las variables independientes z, w.

Luego si $v = (x, y, z, w) \in \mathcal{N}(A)$, entonces

$$v = (-5z + w, z - 3w, z, w) = z(-5, 1, 1, 0) + w(1, -3, 0, 1)$$

Por tanto una base de $\mathcal{N}(A)$ es $\{(-5, 1, 1, 0), (1, -3, 0, 1)\}$, y de manera tenemos

$$dim(\mathcal{N}(A)) = 2 = 4 - 2 = 4 - r_f(A).$$

Observamos que los sistemas homogénos poseen siempre solución, y aquí podemos deducir que un sistema homogéneo:

- posee solución única (si $m = n$ y la matriz es inversible)
- posee infinitas soluciones.

Sistema no Homogéneo

En esta parte nos encontramos con sistemas que pueden poseer

- solución única (si $m = n$ y la matriz es inversible) **ó**
- infinitas soluciones **ó**
- no posee solución.

Definición

Sean $A \in \mathbb{K}(m, n)$, $b \in \mathbb{K}(n, 1)$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ se llama **consistente**, *si posee alguna solución. En caso contrario, se llama* **inconsistente.**

Proposición

Sean $A \in \mathbb{K}(m, n)$, $b \in \mathbb{K}(n, 1)$, entonces el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ posee solución si $b \in \mathscr{L}(a^1, \cdots, a^n)$, donde $a^1, \cdots, a^n$ son los vectores columnas de A.

Prueba: Ejercicio.

Proposición (Criterio de la matriz aumentada)

Un sistema $Ax = b$ posee solución si, y solo si

$$r_f(A) = r_f([A \mid b])$$

Prueba:
Denotaremos por $\mathscr{L} = \mathscr{L}(a^1, \cdots, a^n)$ y $\mathscr{L}' = \mathscr{L}(a^1, \cdots, a^n, b)$.
Si el sistema posee solución, entonces por la porposición anterior se tiene $b \in \mathscr{L}$. Luego $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$ y además

$$r_f(A) = dim(\mathscr{L}) = dim(\mathscr{L}') = r_f([A \mid b]).$$

Recíprocamente, si $r_f(A) = r_f([A \mid b])$, es decir, $dim(\mathscr{L}) = dim(\mathscr{L}')$, de donde $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}'$ y esto implica que $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$.
Por tanto, $b \in \mathscr{L}' = \mathscr{L}$ y por la proposición anterior se tiene que el sistema posee solución. ∎

Una **solución particular** del sistema $Ax = b$, es cualquier solución de este sistema.

Proposición

Si $x^0 \in \mathbb{K}(n, 1)$ es un aolución particular del sistema $Ax = b$, entonces el conjunto total de soluciones de este sistema está dada por

$$x^0 + \mathcal{N}(A) = \{x^0 + z/z \in \mathcal{N}(A)\}$$

Prueba:
Consideremos $CS = \{x \in \mathbb{K}(n, 1)/Ax = b\}$.
Veamos que $CS = x^0 + \mathcal{N}(A)$:

$\subset$) Sea $x \in CS$, entonces $Ax = b$. Luego

$$A(x - x^0) = Ax - Ax^0 = b - b = \mathbf{0},$$

entonces $z = x - x^0 \in \mathcal{N}(A)$, luego $x \in x^0 + \mathcal{N}(A)$, es decir, $CS \subset x^0 + \mathcal{N}(A)$.

$\supset$) Sea $x \in x^0 + \mathcal{N}(A)$, entonces existe $x \in \mathcal{N}(A)$ tal que $x = x^0 + z$, luego

$$Ax = A(x^0 + z) = Ax^0 + Az = Ax + \mathbf{0} = Ax = b,$$

de donde $x \in CS$, es decir $x^0 + \mathcal{N}(A) \subset CS$.

Por tanto $CS = x^0 + \mathcal{N}(A)$. ∎

Sistema Inconsistente
Empezaremos con el siguiente sistema, a modo de ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & 4y & & & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & = & -4 \end{array}$$

aplicando operaciones elmentales a la matriz aumentada tenemos

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 2 & 3 & 1 & | & 1 \\ 1 & 4 & 0 & | & 2 \\ -1 & 1 & -1 & | & -4 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rrrcr} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 5 & -1 & | & -2 \\ 0 & 5 & -1 & | & -7 \end{array}\right],$$

donde observamos que $\left[\begin{array}{rrrcr} 1 & -1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 5 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -5 \end{array}\right]$ y en le última fila se tiene $0 = -5$ lo cual no puede ser, y de acuerdo a la penúltima proposición tenemos que, $b = [1, -2, 4]^t \notin \mathscr{L}(\{a^1, a^2, a^3\})$.

Sean V, W espacios vectoriales de dimensiones n y m, respectivamente, y $\Gamma = \{v^1, \cdots, v^n\}$ una base de V, $\Omega = \{w^1, \cdots, w^m\}$ una base de W. Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal tal que

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

determinan una matriz

$$A_T = [a_{ij}] \in \mathbb{K}(m, n),$$

llamada **matriz asociada** a T en las base Γ y Ω.

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transfomación definida por

$$T(x, y) = (x + y, x - y, 2x - 3y.)$$

Ahora procedemos a calcular la matriz asociada a T,

1. *En las base cacnónicas $\{e^1, e^2\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\{f^1, f^2, f^3\}$ de $\mathbb{R}^3$, entonces*

$$T(e^1) = (1, 1, 2) = f^1 + f^2 + 2f^3$$
$$T(e^2) = (1, -1, -3) = f^1 - f^2 - 3f^3$$

Luego tenemos la matriz $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ es la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

2. Ahora considere otras bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, digamos
$\{v^1 = (3; 5), v^2 = (2; 3)\}$ para $\mathbb{R}^2$ y
$\{w^1 = (3, 1, 2), w^2 = (-1, 1, -1), w^3 = (2, 1, 1)\}$ para $\mathbb{R}^3$,
de donde

$$A_T = \begin{bmatrix} -45 & -26 \\ -19 & -11 \\ 62 & 36 \end{bmatrix}$$

los detalles como ejercicio.

Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

14 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Proposición

Sean V, W espacios vectoriales, entonces la aplicación $\varphi : \mathscr{L}(V, W) \longrightarrow \mathbb{K}(m, n)$, definida por

$$\varphi(T) = A_T,$$

establece un isomorfismo entre $\mathbb{K}-$espacios vectoriales.

Prueba:
Verifique que

1. φ es una transformación lineal.
2. $dim(\mathscr{L}(V, W)) = dim(\mathbb{K}(m, n)) = mn$

Veamos que φ es inyectiva
• Sea $T \in \mathbb{N}(\varphi)$, entonces $\varphi(T) = A_T = [ai_{ij}] = 0$.
Luego $T(v^j) = 0$ para $j = 1, 2, \cdots, n$, entonces T se anula en una base, por tanto
$(\forall v \in V)(T(v) = 0)$, entonces $T = 0$.
Por tanto $\mathbb{N}(\varphi) = \{0\}$, entonces φ es inyectiva.
• Ejercicio φ es sobreyectiva.

Proposición

Sean U, V, W espacios vectoriales, $T_1 : U \longrightarrow V$, $T_2 : V \longrightarrow W$ transformaciones lineales, entonces $T = T_2 \circ T_1 : U \longrightarrow W$ es una tansformación que a través de φ (definida en la proposición anterior) satisface la siguiente propiedad

$$\varphi(T_2 \circ T_1) = \varphi(T_1)\varphi(T_2)$$

Prueba:
Sean $u^1, \cdots, u^p$, $v^1, \cdots, v^n$ y $w^1, \cdots, w^m$ bases de U, V y W respectivamente, entonces tenemos:

$$T_1(u^k) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} v^j, \text{ para } k = 1, \cdots, p$$

$$T_2(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i, \text{ para } j = 1, \cdots, n.$$

$$\begin{aligned} T_2 \circ \Big(T_1(u^k)\Big) = T_2\Big(T_1(u^k)\Big) = T_2\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} v^j\right) &= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} T_2(v^j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_{jk} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) w^i, \quad k = 1, \cdots, p. \end{aligned}$$

También tenemos,

$$T_2 \circ \Big(T_1(u^k)\Big) = T_2\Big(T_1(u^k)\Big) = \sum_{i=1}^{m} c_{ik} w^i, \quad k = 1, \cdots, p.$$

Dado que $\{w^1, \cdots, w^m\}$ es una base de W, entonces tenemos

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \Big(A_{T_2} A_{T_1}\Big)_{ik}$$

Por tanto $A_{T_2 \circ T_1} = [c_{ik}] = A_{T_2} A_{T_1} \Longrightarrow \varphi(T_2 \circ T_1) = \varphi(T_1)\varphi(T_2)$. ∎

Nota

Si $V = W$, entonces la matriz asociada a una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ la calculamos de la siguiente forma

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

donde $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$.
En este caso, el isomorfismo

$$\varphi : \mathscr{L}(V, V) \longrightarrow \mathbb{K}(n, n).$$

satisface la proposición anterior.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, con $\dim(V) = n$, $T \in \mathscr{L}(V, V)$, y A_T la matriz asociada a T en alguna base.
Entonces T es un isomorfismo ai, y solo si A_T es inversible.

Prueba

Supongamos que T es isomorfismo, entonces existe $L \in \mathscr{L}(V, V)$ tal que

$$L \circ T = \mathrm{I} = T \circ L.$$

Aplicando φ, entonces tenemos

$$A_L A_T = \mathrm{I} = A_T A_L, \quad (A_{\mathrm{I}} = \mathrm{I}).$$

por tanto A_T es invertible.

Recíprocamente, supongamos que A_T sea no singular, entonces existe una transfomación $L \in \mathscr{L}(V, V)$ tal que

$$\varphi(L) = A_T^{-1}, \quad \text{es decir,} \quad A_T^{-1} = A_L.$$

Luego

$$\varphi(L \circ T) = \varphi(L)\varphi(T) = A_T^{-1} A_T = \mathrm{I},$$

y dado que φ es inyectiva, tenemos

$$L \circ T = \mathrm{I}.$$

De manera similar, se tiene que $T \circ L = \mathrm{I}$.
Por tanto T es inversible, y de esta manera tenemos que T es un isomorfismo.

$\blacksquare$

Ahora veamos la relación que existe entre las matrices asociadas a una transformación lineal T y a su transformación lineal transpuesta T^{∇}.
Consideremos los espacios vectoriales V, W y sus correspondientes base $\{v^1, \cdots, v^n\}$, $\{w^1, \cdots, w^m\}$ y $\{v_*^1, \cdots, v_*^n\}$, $\{w_*^1, \cdots, w_*^m\}$ sus respectivas bases duales.
Si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal y $T^{\nabla} : W^* \longrightarrow V^*$ la transformación lineal transpuesta, entonces

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i, \quad i = 1, \cdots, n, \quad A_T = [a_{ij}] \in \mathbb{K}(m, n)$$

$$T^{\nabla}(w_*^i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_*^j, \quad i = 1, \cdots, m, \quad A_{T^{\nabla}} = [b_{ji}] \in \mathbb{K}(n, m).$$

Ahora determinemos la relación entre A_T y A_{T^∇}, para ello calculamos como sigue

$$\begin{aligned}\left[T^\nabla(w_*^i)\right](v^t) &= (w_*^i \circ T)(v^t) = w_*^i\big(T(v^t)\big)\\ &= w_*^i\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kt}w^t\right) = \sum_{k=1}^{m} a_{kt}w_*^i(w^k) = a_{it}.\end{aligned}$$

También lo podemos calcular

$$\left[T^\nabla(w_*^i)\right](v^t) = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji}v_*^j\right)(v^t) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}v_*^j(v^t) = b_{it}.$$

Luego llegamos a la siguiente

Proposición

Con las notaciones anteriores tenemos

$$A_{T^\nabla} = A_T^t.$$

Proposición

Sean $\{v^1, \cdots, v^n\} \subset V$ y $\{w^1, \cdots, w^m\} \subset W$ las bases de dichos espacios vectoriales. Además $\{e^1, \cdots, e^n\}$ y $\{f^1, \cdots, f^m\}$ las bases de $\mathbb{K}(n,1)$ y $\mathbb{K}(m,1)$ respectivamente. Si la transformación $T : V \longrightarrow W$ lineal posee una matriz asociada A_T en las bases dadas, entonces

1. *El diagrama de espacios vectoriales y transformaciones lineales*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[d, "\varphi'"] \\ \mathbb{K}(n,1) \arrow[r, "L_{A_T}"'] & \mathbb{K}(m,1) \end{tikzcd}$$

donde $\varphi(v^j) = e^j$, *para*, $j = 1, \cdots, n$
$\varphi(w^i) = f^i$, *para*, $i = 1, \cdots, m$
es conmutativo.

2. $r_c\big(A_T\big) = dim\big(T(V)\big).$

Prueba:

1. Veamos que φ y φ' son isomorfos:
   Sabemos que cualquier elemento $v \in V$ y $w \in W$ pueden ser expresados como una combinación lineal de los elementos de las bases $\{v^1, \cdots, v^n\}$ y $\{w^1, \cdots, w^m\}$ respectivamente, es decir, existen escalares $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_m$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j, \qquad w = \sum_{j=1}^{m} y_j w^j,$$

   por tanto

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v^j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j e^j, \quad \varphi'\left(\sum_{i=1}^{n} y_i w^i\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i f^i.$$

   También, tenemos que

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i, \quad j = 1, \cdots, n$$

por tanto esta igualdad define la matriz $A_T = [a_{ij}]$. Luego con las notaciones dadas, tenemos

$$\varphi' \circ T(v^j) = \varphi'\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f^i,$$

$$L_{A_T} \circ \varphi(v^j) = A_T(e^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f^i.$$

Por tanto, $\varphi' \circ T(v^j) = L_{A_T} \circ \varphi(v^j)$, para $j = 1, \cdots, n$.
Entonces $\varphi' \circ T = L_{A_T} \circ \varphi$, es decir, el diagrama conmuta.

2. De las igualdades

$$\varphi'\big(T(v^j)\big) = A_T(e^j), \quad \text{para} \quad j = 1, \cdots, n,$$

nos inidcan que $\varphi' : T(V) \longrightarrow A_T(\mathbb{K}(n,1))$ es epiyectiva, por tanto un ismorfismo, de donde

$$dim\big(T(V)\big) = dim\big(A_T(\mathbb{K}(n,1))\big) = r_c(A_T).$$

∎

Definición

Sean $A, B \in \mathbb{K}(n,n)$ matrices, decimos que ellas son

1. **equivalentes** *si existen matrices $P, Q \in \mathbb{K}(n,n)$ no singulares tales que*
$$B = QAP$$
2. **semejantes** *se existe una matriz $P \in \mathbb{K}(n,n)$ no singular tal que*
$$B = P^{-1}AP.$$
3. **congruentes** *si existe una matriz $P \in \mathbb{K}(n,n)$ no singular tal que*
$$B = P^tAP.$$

El estudio de equivalencia y semejanza de matrices se presentan en los casos de matrices asociadas a una transformación lineal, mientras que la congruencia aparece cuando se estudian las matrices asociadas a aplicaciones bilineales y formas cuadráticas.
Consideremos las bases $\Gamma = \{v^1, \cdots, v^n\}$ y $\Omega = \{w^1, \cdots, w^n\}$ de un espacio vectorial V, entonces lass relaciones

$$v^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$
$$w^k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} w^i, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

determinan las matrices

$$P = [\alpha_{ij}] \quad \text{y} \quad Q = [\beta_{ik}].$$

Donde la matriz P se llama **matriz cambio de base** de Γ en Ω, y la matriz Q se llama **matriz cambio de base** de Ω en Γ.

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{R}^2$, y las bases $\{w^1 = (2,1), w^2 = (3,2)\}$ y $\{e^1, e^2\}$ canónica de V, la matrices cambio de base para P y Q se obtienen

$$\begin{cases} e^1 = (1,0) = 2w^1 - w^2 \\ e^2 = (0,1) = -3w^1 + 2w^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} w^1 = (2,1) = 2e^1 + e^2 \\ w^2 = (3,2) = 3e^1 + 2e^2 \end{cases}$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nota

Consideremos $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, entonces podemos escribir de dos maneras

$$v = ae^1 + be^2$$
$$v = (2a - 3b)w^1 + (-a + 2b)w^2,$$

luego tenemos $x_v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ es el vector de componentes de v respecto a $\{e^1, e^2\}$, mientras que $y_v = \begin{bmatrix} 2a - 3b \\ -a + 2b \end{bmatrix}$ es el vector de componentes de v respecto a $\{w^1, w^2\}$.
Observe que $Px_v = y_v$ y $Qy_v = x_v$

En general tenemos, sea $v \in V$ cualquiera, entonces podemos escribir en función de las bases Γ y Ω como sigue

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j, \qquad \text{y} \qquad v = \sum_{j=1}^{n} x_j w^j$$

que determinan los vectores

$$x_v = (x_1, \cdots, x_n)^t, \qquad \text{y} \qquad y_v = (y_1, \cdots, y_n)^t.$$

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

14 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

En general tenemos, sea $v \in V$ cualquiera, entonces podemos escribir en función de las bases Γ y Ω como sigue

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j, \qquad \text{y} \qquad v = \sum_{j=1}^{n} x_j w^j$$

que determinan los vectores

$$x_v = (x_1, \cdots, x_n)^t, \qquad \text{y} \qquad y_v = (y_1, \cdots, y_n)^t.$$

Proposición

Con las notaciones anteriores,se tiene

1. $PQ = \mathrm{I}$.
2. $Px_v = y_v$ *y* $Qy_v = x_v$.

Prueba:

1. Note que

$$v^j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} w^i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \left(\sum_{t=1}^{n} \beta_{ti} v^t \right) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{ij} \beta_{ti} \right) v^t.$$

Como los vectores v^j son linealmente independiente, entonces se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_{ti} = \delta_{tj},$$

donde δ_{tj} es el delta de Kronecker.

Además tenemos,

$$(QP)_{tj} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ti}.$$

Por tanto se tiene $QP = \mathrm{I}$.

2. Se tiene que $v = \sum_{j=1}^{n} y_j w^j$, y

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v^i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} w^j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i\right) w^j.$$

De las dos últimas relaciones tenemos

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i = (Px_v)_j, \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Luego $y_v = Px_v$ y por el item (1) se obtiene que $Qy_v = x_v$. ■

Consideremos V y W espacios vectoriales, y las bases $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ y $\{e^1, e^2, \cdots, e^n\}$ para V, y $\{w^1, w^2, \cdots, w^m\}$ y $\{f^1, f^2, \cdots, f^m\}$ para W. Entonces

$$v^j = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{tj} e^t, \quad w^t = \sum_{k=1}^{m} \beta_{kt} f^k,$$

para $j = 1, 2, \cdots, n$ y $t = 1, 2, \cdots, m$, entonces estas expresiones determinan las matrices de cambio de base

$$P = [\alpha_{tj}] \in \mathbb{K}(n, n), \quad Q = [\beta_{kt}] \in \mathbb{K}(m, m).$$

Además, dadas la transformación lineal $T : V \longrightarrow V$, se tiene

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$T(e^t) = \sum_{k=1}^{m} b_{kt} f^k, \quad t = 1, 2, \cdots, n,$$

determinan las matrices asociadas a T, $A_T = [a_{ij}]$, $B_T = [b_{kt}]$.

Proposición

Con las notaciones dadas se tiene

$$A_T = Q^{-1} B_T P$$

. **Prueba**:

Notamos

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w^i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_{ki} f^k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} a_{ij}\right) f^k$$

$$T(v^j) = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{tj} T(e^t) = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{tj}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{kt} f^k\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t=1}^{n} b_{kt}\alpha_{tj}\right) f^k.$$

Como $\{f^1, f^2, \cdots, f^m\}$ *es una base, y de la igualdad anterior tenemos*

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} a_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{kt}\alpha_{tj}, \quad k = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Por tanto, $(QA_T)_{kj} = (B_T P)_{kj}$, $\quad k = 1, 2, \cdots, m, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$

Entonces $QA_T = B_T P$. ■

Observación

La proposición anterior no indica que dos matrices asociadas a una transformación lineal son equivalentes, luego podemos escribir

$$A_T = Q^{-1} B_T P.$$

Para un caso particular $W = V$ *se tiene, para dos bases* $\{v^1, \cdots, v^n\}$ *y* $\{w^1, \cdots, w^n\}$ *de* V*, obtenemos*

$$v^j = \sum_{t=1}^{j} \alpha_{tj} w^t, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Si $P = [\alpha_{ij}]$ *y* $T : V \longrightarrow V$ *una transformación lineal, entonces tenemos*

$$T(v^j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v^i, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$
$$T(w^t) = \sum_{k=1}^{n} b_{kt} w^k, \quad t = 1, 2, \cdots, n,$$

estas relaciones nos proporciona las matrices $A_T = [a_{ij}]$, $B_T = [b_{kt}]$ asociadas a T.
Por tanto las notaciones anteriores nos conduce a la siguiente

Proposición

$A_T = P^{-1} B_T P$.

Prueba: Ejercicio. ■
Esta proposición nos indica que dos matrices asociadas a una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ son semejantes.

Recordemos que dada una matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$, denotamos por $\mathcal{F}(A)$, $\mathscr{C}(A)$ los espacios generado por los vectores fila y columna de A respectivamente, también $r_f(A) = dim(\mathcal{F}(A))$ y $r_c(A) = dim(\mathscr{C}(A))$ el rango de A por filas y por columnas de A respectivamente.

Teorema (Teorema del Rango)

Sea una matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$, entonces

$$r_f(A) = r_c(A).$$

Denotemos por $r(A) = r_f(A) = r_c(A)$, el **rango** *de A.*

Proposición

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}(m, n)$ y

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{K}(n, 1) / Ax = \mathbf{0}\}.$$

Entonces

$$n = dim\Big(\mathcal{N}(A)\Big) + r_c(A).$$

Prueba:
Sea la transformación lineal $L_A : \mathbb{K}(n, 1) \longrightarrow \mathbb{K}(m, 1)$ definida por

$$L_A(x) = Ax,$$

consideremos $A = [a^1 a^2 \cdots a^n]$ (vectores columnas de A), entonces

$$L_A(x) = Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j a^j,$$

entonces tenemos

$$Im(L_A) = \mathscr{L}(\{a^1, a^2, \cdots, a^n\}),$$

y por tanto

$$r_c(A) = dim(Im(L_A)).$$

Luego tenemos

$$n = dim(\mathcal{N}(L_A)) + dim(Im(L_A)) = dim(\mathcal{N}(L_A)) + r_c(A).$$

■

Ahora veamos una de las demostraciones del teorema del rango
Prueba:
Consideremos

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A) &= \{x \in \mathbb{K}(n,1)/Ax = 0\}\\ &= \Big\{x \in \mathbb{K}(n,1)\Big/\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ i = 1,2,\cdots,m\Big\}\\ &= \Big\{x \in \mathbb{K}(n,1)\Big/\langle a^i, x\rangle = 0,\ i = 1,2,\cdots,m\Big\},\quad a^i \text{ vectores filas}\\ &= \Big\{x \in \mathbb{K}(n,1)\Big/\langle y, x\rangle = 0,\ \text{para todo } y \in \mathcal{F}(A)\Big\}\\ &= \big[\mathcal{F}(A)\big]^{\perp}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$n = dim(\mathcal{F}(A)) + dim\left(\big[\mathcal{F}(A)\big]^{\perp}\right) = r_f(A) + dim(\mathcal{N}(A)).$$

Por la proposición anterior tenemos que $r_f(A) = r_c(A)$. ■

Proposición

Dadas $A, B \in \mathbb{K}(m,n)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *A y B son equivalentes.*
2. *A y B son asociados a una misma transformación lineal.*
3. *$r(A) = r(B)$.*

Prueba: Ejercicio. ■

Empezaremos el estudio con las formas bilineales y luego lo generalizaremos

Definición

Sea V, W espacios vectoriales, una **forma bilineal** $b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una aplicación que es lineal en cada una de sus componentes, es decir, para todo $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$*

1. $b(v + v', w) = b(v,w) + b(v', w)$; $\quad b(\alpha v, w) = \alpha b(v,w)$.
2. $b(v, w + w') = b(v,w) + b(v, w')$; $\quad b(v, \alpha w) = \alpha b(v,w)$.

Definamos el connjunto

$$\mathcal{B}(V \times W) = \{b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}/b \text{ es bilineal}\}$$

con las operaciones dadas antes este conjunto es un espacio vectorial.

Consideremos $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \cdots, v^m\}$, $\mathcal{W} = \{w^1, w^2, \cdots, w^n\}$ bases de V y W respectivamente, entonces sea $b_{ij} = b(v^i, w^j)$ define una matriz $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}(m,n)$, la cual es llamada **matriz de la forma bilineal** b relativamente a las bases $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$.
Si tenemos las base de $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \cdots, v^m\}$, $\mathcal{W} = \{w^1, w^2, \cdots, w^n\}$ V y W respectivamente, entonces podemos definir la matriz $B = [b_{ij}]$ de la siguiente forma

$$b_{ij} = b(v^i, w^j),$$

entonces una forma bilineal $b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ queda determinada, esto es posible, dado que $v = \sum_{i=1}^{m} x_i v^i \in V$ y $w = \sum_{j=1}^{n} y_j w^j \in W$, entonces

$$b(v,w) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(v^i, w^j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j b_{ij}.$$

Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

16 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Empezaremos el estudio con las formas bilineales y luego lo generalizaremos

Definición

Sea V, W espacios vectoriales, una **forma bilineal** $b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una aplicación que es lineal en cada una de sus componentes, es decir, para todo* $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $b(v + v', w) = b(v, w) + b(v', w)$; $\quad b(\alpha v, w) = \alpha b(v, w)$.
2. $b(v, w + w') = b(v, w) + b(v, w')$; $\quad b(v, \alpha w) = \alpha b(v, w)$.

Definamos el conjunto

$$\mathcal{B}(V \times W) = \{b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}/b \text{ es bilineal}\}$$

con las operaciones dadas antes este conjunto es un espacio vectorial.

Consideremos $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \cdots, v^m\}$, $\mathcal{W} = \{w^1, w^2, \cdots, w^n\}$ bases de V y W respectivamente, entonces sea $b_{ij} = b(v^i, w^j)$ define una matriz $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}(m, n)$, la cual es llamada **matriz de la forma bilineal** b relativamente a las bases $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$.
Si tenemos las base de $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \cdots, v^m\}$, $\mathcal{W} = \{w^1, w^2, \cdots, w^n\}$ V y W respectivamente, entonces podemos definir la matriz $B = [b_{ij}]$ de la siguiente forma

$$b_{ij} = b(v^i, w^j),$$

entonces una forma bilineal $b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ queda determinada, esto es posible, dado que $v = \sum_{i=1}^{m} x_i v^i \in V$ y $w = \sum_{j=1}^{n} y_j w^j \in W$, entonces

$$b(v, w) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(v^i, w^j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j b_{ij}.$$

Nota

Verifique que $\mathcal{B}(V \times W) = \{b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}/b \text{ es bilineal}\}$ *y* $\mathbb{R}(m, n)$ *es un isomorfismo.*

Consideremos $\mathcal{V}' = \{v'^1, v'^2, \cdots, v'^m\}$, $\mathcal{W}' = \{w'^1, w'^2, \cdots, w'^n\}$ otras bases de V y W respectivamente, entonces

$$v'^j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} v^i, \;\; j = 1, \cdots m \quad \text{y}$$

$$w'^k = \sum_{i=1}^{n} q_{ik} w^i, \;\; k = 1, \cdots n$$

y $b'_{ij} = b(v'^i, w'^j)$

Teorema

Las matrices $B = [b_{ij}]$ y $B' = [b'_{ij}]$ de la forma bilineal b en las bases $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ y $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$ respectivamente, están relacionadas por la igualdad $B' = P^T BQ$, donde $P = [p_{ij}]$ y $Q = [q_{ij}]$.

Prueba:
Para todo $i = 1, \cdots, m$ y todo $j = 1, \cdots, n$ tenemos

$$b'_{ij} = b(v'^i, w'^j) = b\left(\sum_{r=1}^{m} p_{ri} v^r, \sum_{s=1}^{n} q_{sj} w^s\right) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} p_{rj} q_{sj} b(v^r, w^s)$$
$$= \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} p_{rj} q_{sj} b_{rs} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} p_{rj} b_{rs} q_{sj} = \left(P^T BQ\right)_{ij},$$

por tanto $$B' = P^T BQ.$$

■

Cuando $W = V$, entonces $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ está idéntificada a la base $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \cdots, v^m\} \subset V$ y $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}(m, m)$, además, si $\mathcal{V}' = \{v'^1, v'^2, \cdots, v'^n\}$ es otra base de V, entonces se tiene

$$B' = P^T BP,$$

también notamos que

$$b(v, w) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j b_{ij}$$

es un polinomio homogéneo de segundo grado en relación a las coordenadas de v y w, donde $v = \sum_{i=1}^{m} x_i v^i$, $w = \sum_{i=1}^{m} y_i v^i$

Definición

Una forma bilineal $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada **simétrica** *(***anti-simétrica***) si, y solo si $b(v, w) = b(w, v)$ $(b(v, w) = -b(w, v))$ para cualquier $v, w \in V$.*

Nota

Para que b sea siméetrica es suficiente que la matriz en relación a la base $\mathcal{V} \subset V$ sea simétrica y también es suficiente que su matriz a cualquier base de V sea simétrica.
En efecto:

$$b(v, w) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j b_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} y_i x_j b_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j b_{ji} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} x_i y_j b_{ji}$$
$$= b(w, v)$$

Una forma bilineal $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se puede expresar de la forma

$$b(v, w) = \frac{1}{2}\Big[b(v, w) + b(w, v)\Big] + \frac{1}{2}\Big[b(v, w) - b(w, v)\Big]$$

para todo $v, w \in V$, es decir, que el espacio $\mathcal{B}(V \times V)$ es expresado como suma directa de los subespacios formados por formas bilineales simétricas y anti-simétricas respectivamente.

Ejemplo

1. *Sean las aplicaciones lineales $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : W \longrightarrow \mathbb{R}$, y la aplicación $b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $b(v, w) = f(v)g(w)$, es una forma bilineal, la cual es llamada* **producto tensorial** *de f y g.*
2. *Si V y W están poseen producto interno, entonces para $v^0 \in V$ y $w^0 \in W$ fijos, la aplicación $b : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $b(v, w) = \langle v, v^0\rangle\langle w, w^0\rangle$ es una forma bilineal.*
3. *Si $W = V$ y dados las aplicaciones lineales $f, g : V \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces*

$$\big(f \bullet g\big)(v, w) = f(v)g(w) + f(w)g(v),$$
$$\big(f \wedge g\big)(v, w) = f(v)g(w) - f(w)g(v)$$

definen forma bilineales que son simétricas y anti-simétricas respectivamente.

Teorema

Sea V un espacio vectorial, con $\dim(V) < \infty$, la cual posee un producto interno. Entonces para forma bilineal $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ tal que

$$\langle v, T(w)\rangle = b(v, w)$$

para todo $v, w \in V$.

Prueba: Ejercicio. ■

Definición

Una función $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada **forma cuadrática** *si existe una forma bilineal $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi(v) = b(v, v).$$

La matriz de la forma cuadrática φ en la base $\mathcal{V}$ es, por definición, la matriz B, es la misma de la forma bilineal b tal que $\varphi(v) = b(v, v)$.
Si la matriz P de la base $\mathcal{V}$ a la base $\mathcal{V}'$ es la matriz B' de la forma cuadráatica φ en la base $\mathcal{U}'$, entonces $B' = P^T BP$.
En el caso de que $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}'$ posean producto interno entonces P es una matriz ortogonal, y por tanto $P^T = P^{-1}$ y así, tenemos $B' = P^{-1}BP$.

Teorema

Sea V un espacio vectorial, con $\dim(V) < \infty$, que posee un producto interno. Entonces para la forma bilineal simétrica $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ existe una base ortonormal $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \cdots, v^m\} \subset V$ tal que

$$\Big(\text{para } i \neq j\Big)\Big(b(v^i, v^j) = 0\Big).$$

Prueba:
Por el teorema anterior, existe una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ tal que

$$b(v, w) = \langle v, T(w)\rangle.$$

Luego existe una base ortonormal $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \cdots, v^m\} \subset V$ tal que

$$\Big(i = 1, 2, \cdots, m\Big)\Big(\exists \alpha_i \in \mathbb{R}\Big)\Big(T(v^i) = \alpha_i v^i\Big).$$

Entonces

$$i \neq j \Longrightarrow b(v^i, v^j) = \langle v^i, T(v^j)\rangle = \langle v^i, T(V^j)\rangle = \langle v^i, \alpha_j v^j\rangle = \alpha_j\langle v^i, v^j\rangle = 0.$$ ■

Los vectores $v = \sum_{i=1}^{m} x_i v^i$, $w = \sum_{i=1}^{m} x_i v^i$ en la base $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \cdots, v^m\}$ de V del teorema anterior la forma bilineal b se expresa como

$$b(v, w) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i y_i.$$

En particular, la forma cuadrática $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(v) = b(v, v)$ para $w = \sum_{i=1}^{m} y_i v^i$ se tiene

$$\varphi(v) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_1 y_2^2 + \cdots + \alpha_m y_m^2.$$

Donde, sin pérdida de generalidad se tiene, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \cdots \leq \alpha_m$.

Definición

Una forma cuadrática $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada **no negativa (positiva)**, *para todo $v \in V$ ($v \in V$ no nulo) se tiene $\varphi(v) \geq 0$ ($\varphi(v) > 0$).*
En forma similar se define no positiva (negativa).
Diremos que φ es **indefinida** *si existen $v, w \in V$ tales que $\varphi(v) < 0$ y $\varphi(w) > 0$.*

Definición (Función Determinante)

Una aplicación $D : \mathbb{K}(n, n) \longrightarrow \mathbb{K}$ que satisface

1. $D\big([a^1 \cdots \alpha a^j + \beta a^j_* \cdots a^n]\big) = \alpha D\big([a^1 \cdots a^j \cdots a^n]\big) + \beta D\big([a^1 \cdots a^j_* \cdots a^n]\big)$, $j = 1, \cdots, n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
2. $D\big([a^1 \cdots a^i \cdots a^j \cdots a^n]\big) = -D\big([a^1 \cdots a^j \cdots a^i \cdots a^n]\big)$, $i < j$.

es llamada **función determinante** *o simplemente* **determinante**.

Donde a^i con $i = 1, \cdots, n$ son los vectores columnas de A.
La primera condición de la definición anterior es llamada D $n-$lineal, y la segunda es **alternada**.
Esta definición nos conduce a las siguientes proposiciones.
También denotamos por $det(A) = |A| = D(A)$.

Proposición

Si una matriz $A \in \mathbb{K}(n, n)$ posee al menos columna nula, entonces $D(A) = 0$.

Prueba:
Sin pérdida de generalidad supongamos que $a^1 = \mathbf{0}$, entonces

$$\begin{aligned} D(A) &= D\big([\mathbf{0}\ a^2 \cdots\cdots a^n]\big) = D\big([\mathbf{0} + \mathbf{0}\ a^2 \cdots\cdots a^n]\big) \\ &= D\big([\mathbf{0}\ a^2 \cdots\cdots a^n]\big) + D\big([\mathbf{0}\ a^2 \cdots\cdots a^n]\big) = D(A) + D(A), \end{aligned}$$

por tanto $D(A) = 0$.

Proposición

Si A posee al menos dos columnas iguales, entonces $D(A) = 0$.

Prueba:
Supongamos que $A = \Big[a^1 \cdots a^i \cdots a^j \cdots a^n]\Big)$ con $a^i = a^j$, $i < j$., entonces

$$D(A) = -D\Big[a^1 \cdots a^j \cdots a^i \cdots a^n]\Big) = -D(A),$$

por tanto $D(A)$=0.

Proposición

Si en una matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$ se le suma el múltiplo de otra columna, entonces el determinante no cambia.

Prueba:
Supongamos que

$$\begin{aligned} & D\Big[a^1 \cdots a^i + \alpha a^j \cdots a^j \cdots a^n]\Big) = \\ & = D\Big[a^1 \cdots a^i \cdots a^j \cdots a^n]\Big) + \alpha D\Big[a^1 \cdots a^j \cdots a^j \cdots a^n]\Big) \\ & = D(A) + \alpha 0 = D(A). \end{aligned}$$

Corolario

$$D\Big[\underbrace{a^1 \cdots a^i + \sum_{j \neq i} \alpha_j a^j}_{i} \cdots a^n\Big] = D(A).$$

Proposición

Una función determinante aplicada a matrices elementales satisface:

1. $D[E_j(\alpha)] = \alpha D[\mathrm{I}]$, $\alpha \neq 0$, $j = 1, \cdots, n$.
2. $D[E_{ij}(\alpha)] = D[\mathrm{I}]$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $i \neq j$.
3. $D[E_{[}ij]] = -D[\mathrm{I}]$.

Prueba *Ejercicio.*

Nota

El conjunto $\mathcal{D}(n, \mathbb{K}) = \{D : \mathbb{K}(n,n) \longrightarrow \mathbb{K} / D$ es una determinante$\}$ es un espacio vectorial, con $dim(\mathcal{D}(n,\mathbb{K})) < \infty$.
Ejercicio

Solo enunciaremos la siguiente

Proposición (Existencia)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función determinante

$$D : \mathbb{K}(n,n) \longrightarrow \mathbb{K}$$

tal que $D\Big[\mathrm{I}\Big] = 1$.

Proposición

Dada una matriz elemental $E \in \mathbb{K}(n,n)$ y $D \in \mathcal{D}(n,\mathbb{K})$, entonces para todo $A \in \mathbb{K}(n,n)$ se tiene

$$D(AE) = D(A)D_k(E),$$

donde $D_k : \mathbb{K}(n,n) \longrightarrow \mathbb{K}$ es definida por

$$D_k(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}D'(A_{kj}),$$

$D' : \mathbb{K}(n-1,n-1) \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $D'(\mathrm{I}) = 1$ y A_{kj} es la matriz obtenida de A suprimiendo la $k-$ésima fila y la $j-$ésima columna

Prueba:
La matriz AE puede tomar tres casos, debido a la matriz elemental

$$AE_i(\alpha) = \left[a^1 \cdots \alpha a^i \cdots a^n\right]$$
$$AE_{ij}(\alpha) = \left[\underbrace{a^1 \cdots a^j + \alpha a^i}_{j} \cdots a^n\right], \quad \text{para todo} \quad i \neq j$$
$$AE_{ij} = \left[\underbrace{a^1 \cdots a^j \cdots a^i}_{j} \cdots a^n\right].$$

entonces

$$D\left[AE_i(\alpha)\right] = \alpha D(A) = D(A)D_k(E_i(\alpha))$$
$$D\left[AE_{ij}(\alpha)\right] = D(A) = D(A)D_k(E_{ij}(\alpha))$$
$$D\left[AE_{ij}\right] = D(A) = D(A)D_k(E_{ij})$$

$\blacksquare$

Proposición

Sea $D \in \mathcal{D}(n,\mathbb{K})$, entonces
$$\Big(\forall A, B \in \mathbb{K}(n,n)\Big)\Big(D(AB) = D(A)D_k(B)\Big)$$

Prueba:

1. Si B es no singular, entonces B es el producto de matrices elementales, es decir,

$$B = E_1E_2\cdots E_r,$$

entonces por la proposición anterior se tiene

$$D(AB) = D(A)D_k(E_1)D_k(E_2)\cdots D_k(E_r) = D(A)D_k(B).$$

2. Si B es singular, entonces AB no es inversible, entonces los vectores columnas de AB son linealmente dependientes, de donde

$$D(AB) = 0.$$

Por tanto

$$D(AB) = 0 = D(A)0 = D(A)D_k(B),$$

dado que $D_k(B) = 0$.

$\blacksquare$

Proposición (Teorema de Unicidad)

D_k es la única función determinante definida sobre $\mathbb{K}(n,n)$ tal que $D_k(\mathrm{I}) = 1$.

Prueba:
Sea D una función determinante tal que $D(\mathrm{I}) = 1$, entonces

$$D(A) = D(\mathrm{I}A) = D(\mathrm{I})D_k(A) = D_k(A), \quad \text{para todo} \quad A \in \mathbb{K}(n,n),$$

por tanto $D = D_k$. ■

Nota

Por el teorema de unicidad, tenemos que $D_1 = D_2 = \cdots = D_n = det$. Luego por proposición de existencia, se tiene

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}), \quad \textit{para cada } i \textit{ fijo.}$$

Proposición

El espacio vectorial $\mathcal{D}(n, \mathbb{K})$ tiene dimensión uno.

Prueba:
Sea $D \in \mathcal{D}(n, \mathbb{K})$, entonces

$$D(A) = D(\mathrm{I}A) = D(\mathrm{I})D_k(A) = \alpha det(A),$$

para todo $A \in \mathbb{K}(n,n)$.
Por tanto, $D = \alpha det$, $\alpha = D(\mathrm{I})$. Luego $\mathcal{D}(n, \mathbb{K})$ es generado por $\{det\}$.
De donde $dim(\mathcal{D}(n, \mathbb{K})) = 1$. ■

Proposición (Propiedad Multiplicativa)

Para todo $A, B \in \mathbb{K}(n,n)$ se tiene $det(AB) = det(A)det(B)$.

Prueba:
Consideremos $D = det$, entonces

$$det(AB) = det(A)D_k(B) = det(A)det(B).$$

■

usaremos $|\ | = det$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a^2+ab+b^2 & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(ac+c^2-ab-b^2)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

Recordar que las matrices $E_i(\alpha)$ y E_{ij} son simétricas,

Proposición

Para todo $A \in \mathbb{K}(n,n)$ tenemos

$$det(A^t) = det(A)$$

Prueba:

Supongamos que A sea no singular, entonces existen matrices elementales E_j tales que

$$A = E_1 \cdots E_r, \Longrightarrow A^t = E_r^t \cdots E_1^t,$$

entonces

$$\begin{aligned} det(A^t) &= det(E_r^t \cdots E_1^t) = det(E_r^t) \cdots det(E_1^t) \\ &= det(E_r) \cdots det(E_1) = det(E_1 \cdots E_r) = det(A). \end{aligned}$$

■

Nota

$$det(A) = det(A^t) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}).$$

Proposición

Sea $A \in \mathbb{K}(n,n)$ una matriz, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *A es no singular.*
2. *$det(A) \neq 0$.*
3. *Los vectores columnas de A son linealmente independientes.*

Prueba:

1. Como $AA^{-1} = \mathrm{I}$, entonces $det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) = det(\mathrm{I}) = 1$, entonces $det(A) \neq 0$.
   Los otros item quedan como ejercicio.

Proposición

Sean las matrices $A \in \mathbb{K}(n,n)$, $B \in \mathbb{K}(m,m)$ y $C \in \mathbb{K}(m,n)$, entonces

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = det(A)det(B)$$

Prueba Ejercicio.

Proposición

Sea $T : \mathbb{K}(n,1) \longrightarrow \mathbb{K}(n,1)$ una transformación lineal y $v^1, \cdots, v^n \in \mathbb{K}(n,1)$, entonces

$$det([T(v^1) \cdots T(v^n)]) = det(T)det([v^1 \cdots v^n])$$

Prueba Ejercicio.

Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

28 de diciembre de 2020

Transformaciones Lineales

Corolario

Sea $A, B \in \mathbb{R}(n,n)$ matrices, tales que $A = B^2$, entonces $det(A) \geq 0$.

Prueba:
Basta usar la proposición (Propiedad Multiplicativa), es decir,

$$det(A) = det(B^2) = det(BB) = det(B)det(B) = \Big(det(B)\Big)^2 \geq 0$$

■

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}(n,n)$ una matriz. Entonces A es no-singular si, y solo si $det(A) \neq 0$.

$\Rightarrow$) Supongamos que A es inversible, entonces existe A^{-1}, es decir, $AA^{-1} = \mathrm{I}$, por tanto
$$det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) = det(\mathrm{I}) = 1,$$
entonces $det(A) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $det(A) \neq 0$. Luego, consideremos una base $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset \mathbb{R}(n,1)$, y definamos una transformación lineal $T : \mathbb{R}(n,1) \longrightarrow \mathbb{R}(n,1)$, mediante $T(x) = Ax$, entonces
$$det\Big([Av^1\ Av^2 \cdots Av^n]\Big) = det(A)det\Big([v^1\ v^2 \cdots v^n]\Big),$$
luego $det\Big([v^1\ v^2 \cdots v^n]\Big) \neq 0$ por ser $\{v^1, \cdots, v^n\}$ es una base, entonces $det\Big([Av^1\ Av^2 \cdots Av^n]\Big) \neq 0$, luego $\{Av^1, Av^2, \cdots, Av^n\}$

Corolario

El sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}(n,n)$ y $b \in \mathbb{R}(n,1)$, posee solución única si, y solo si $det(A) \neq 0$.

1. Sean $v^1, v^2 \in \mathbb{R}(2,1)$ dos vectores no colineales, definamos
$$A\left(v^1, v^2\right) = \left|det\left(\left[v^1\ v^2\right]\right)\right|,$$
el cual representa el **área de un paralelogramo**.
2. Sean $v^1, v^2, v^3 \in \mathbb{R}(3,1)$ tres vectores no coplanares, definamos
$$Vol\left(v^1, v^2, v^3\right) = \left|det\left(\left[v^1\ v^2\ v^3\right]\right)\right|,$$
el cual representa el **volumen de un paralelepípedo**.
3. Generalizando, consideremos $v^1, \cdots, v^n \in \mathbb{R}(n,1)$, con $n \geq 4$, vectores linealmente independientes, definamos
$$Vol\left(v^1, \cdots, v^n\right) = \left|det\left(\left[v^1\ \cdots\ v^n\right]\right)\right|,$$
el cual representa el **volumen de un hiperparalelepípedo**.

Hasta ahora, para determinar la inversa de una matriz, tenemos dos métodos:

- usando sistemas de ecuaciones lineales, y
- por operaciones elementales.

En este caso proporcionaremos una fórmula explícita para obtener la inversa de una matriz no singular.

Dada la matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}(n, n)$, y sea $A_{ij} \in \mathbb{K}(n-1, n-1)$ la matriz obtenida eliminando la $i-$ésima fila y la $j-$ésima columna de A, para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, entonces

1. $\Big(\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}\Big)\Big(c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij})\Big)$.
   El número c_{ij} es llamado **cofactor** de a_{ij}.
2. la matriz $[c_{ij}]$ es llamada **matriz de cofactores** de A.
3. $Adj(A) = [c_{ij}]^t$ es llamada la **adjunta** de A.

Proposición (Fórmula de la Inversa)

Con las notaciones dadas anteriormente, se tiene

$$A \cdot Adj(A) = det(A) \cdot \mathrm{I}.$$

Prueba:

$$A \cdot Adj(A) = [a_{ij}][c_{ij}]^t = [d_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{jk}\right],$$

de donde

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} det(A_{ik}) \end{aligned}$$

Ahora determinemos d_{ij}, $i \neq j$.

Consideremos la matriz B, la cual es la matriz A salvo que la fila j es idéntica a la fila i. Por tanto

$$\begin{aligned} 0 = det(B) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{ik} det(A_{jk}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{jk} \\ &= d_{ij}, \qquad \text{para todo} \quad i \neq j. \end{aligned}$$

En cualquier caso tenemos,

$$A \cdot Adj(A) = det(A) \cdot \mathrm{I}.$$

En el caso de que A sea no singular, entonces tenemos

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)},$$

dado que $det(A) \neq 0$.

También podemos determinar el rango de una matriz usando determinantes, antes necesitamos las siguientes.

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}(m,n)$ una matriz, llamaremos **menor de orden** p $(1 \leq p \leq \text{mín}(\{m,n\}))$ *al determinante de cualquier submatriz de* A *de orden* $p \times p$.

Definición

Se llama **rango por menores** *de una matriz* A, *denotado por* $r_m(A)$, *al orden de la mayor submatriz cuadrada cuyo determinantes sea no nulo.*

Nota

De acuerdo a las definiciones anteriores, tenemos que $r_m(A) = p$.

Proposición

Para toda matriz $A \in \mathbb{K}(m,n)$, *tenemos que* $r_m(A) = r(A)$.

Prueba:
Supongamos que $r_m(A) = p$ y $r(A) = q$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que submatriz de orden $p \times p$, está conformada por las primera p filas y las primeras p columnas de A, denotada por S_p, esto es debido a que el intercambio de filas y el intercambio de columnas no modifica $r_m(A)$ ni $r(A)$.
Observar que $det(S_p) \neq 0$, entonces la filas, así como las columnas de S_p son linealmente independientes, estas p filas son las primeras p filas de A, entonces

$$r_m(A) = p \leq r(A) = q.$$

El recíproco, queda como ejercicio.

La regla de Cramer, es debido al matemático suizo Gabriel Cramer (31/07/1704–04/01/1752).
Consideremos un sistema de la forma $Ax = b$, donde $b \in \mathbb{K}(n,1)$ y $A = [a^1 \cdots a^n] \in \mathbb{K}(n,n)$, por tanto este sistema se puede expresar de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a^j = b,$$

con $x = (x_1, \cdots, x_n)^t \in \mathbb{K}(n,1)$.

Proposición (Regla de Cramer)

Con las notaciones dadas anteriormente, tenemos

$$\Big(\forall j = 1, \cdots, n\Big)\Big(x_j det(A) = det([a^1 \cdots a^{j-1}\ b\ a^{j+1} \cdots a^n])\Big)$$

Prueba: De

$$\begin{aligned} det([a^1 \cdots a^{j-1}\ b\ a^{j+1} \cdots a^n]) &= det([a^1 \cdots a^{j-1}\ \sum_{i=1}^{n} x_i a^i\ \ a^{j+1} \cdots a^n]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i det([a^1 \cdots a^{j-1}\ a^i\ a^{j+1} \cdots a^n]) \\ &= x_j det([a^1 \cdots a^{j-1}\ a^j\ a^{j+1} \cdots a^n]) \\ &= x_j det(A), \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \cdots, n$. Los otros sumandos se anulan por tener dos columnas iguales.

Nota

Si A es una matriz no singular, entonces $det(A) \neq 0$, por tanto

$$x_j = \frac{det([a^1 \cdots a^{j-1}\ b\ a^{j+1} \cdots a^n])}{det(A)},$$

para todo $j = 1, \cdots, n$.

Sea V es espacio vectorial, con $dim(V) = n$, ahora debemos calcular la base dual de la base $\mathcal{W} = \{w^1, \cdots, w^n\} \subset V$, entonces debemos resolver n sistemas de ecuaciones lineales $n \times n$.
Sea $\mathcal{V} = \{v^1, \cdots, v^n\}$ su base dual de $\mathcal{W}$ tales que

$$v^J = x_{1j}w^1 + \cdots + x_{nj}w^n, \quad j = 1, \cdots, n,$$

$$\langle w^i, v^j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

de donde obtenemos

Por facilidad tomemos el caso $j = 1$, entonces tenemos el sistema

$$\begin{array}{ccccccccc} \|w^1\|^2 x_1 & + & \langle w^1, w^2 \rangle x_2 & + & \cdots & + & \langle w^1, w^n \rangle x_n & = & 1 \\ \langle w^2, w^1 \rangle x_1 & + & \|w^2\|^2 x_2 & + & \cdots & + & \langle w^2, w^n \rangle x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ \langle w^n, w^1 \rangle x_1 & + & \langle w^n, w^2 \rangle x_2 & + & \cdots & + & \|w^n\|^2 x_n & = & 0 \end{array}$$

de donde la solución del sistema depende del valor del determinante de la matriz de sus coeficientes

$$det([\langle w^i, w^j \rangle]).$$

Entonces por la Regla de Cramer el sistema anterior tiene solución única si, y solo si $det([\langle w^i, w^j \rangle]) \neq 0$. El determinante $det([\langle w^i, w^j \rangle])$ se le llama **gramiano** de los vectores $w^1, \cdots, w^n$.

Definición

Se llama **gramiano** *de los $v^1, \cdots, v^r \in V$, al determinante*

$$det([\langle v^i, v^j \rangle])$$

y lo denotamos por $G(v^1, \cdots, v^r)$.

Si $r = 1$, entonces $G(v) = det([\langle v, v \rangle]) = \|v\|^2 > 0$ si, y solo si $v \neq \mathbf{0}$.
Si $r = 2$, entonces

$$G(v, w) = \begin{vmatrix} \|v\|^2 & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \|w\|^2 \end{vmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - |\langle w, v \rangle|^2 \geq 0$$

(desigualdad de Schwartz) y $G(v, w) > 0$ si, y solo si v, w son l.i.

En general tenemos la siguiente

Proposición

Sean $v^1, \cdots, v^r \in V$. Entonces

$$G(v^1, \cdots, v^r) \neq 0 \ \text{ si, y solo si } \ v^1, \cdots, v^r \ \text{ son l.i.}$$

Prueba:
Ejercicio. (sug. pruebe que $G(v^1, \cdots, v^r) = 0$ si, y solo si $v^1, \cdots, v^r$ son l.d.).

■

1. $G(v) = \|v\|^2$, para todo $v \in V$, representa el cuadrado de la longitud del vector v.
2. Sea $v, w \in V$ y θ el ángulo entre dichos vectores, entonces

$$\begin{aligned} G(v, w) &= \|v\|^2\|w\|^2 - |\langle v, w\rangle|^2 \\ &= \|v\|^2\|w\|^2 - \|v\|^2\|w\|^2(cos(\theta))^2 \\ &= \|v\|^2\|w\|^2(1 - (cos(\theta))^2) \\ &= \Big(\|v\|\|w\|sen(\theta)\Big)^2, \end{aligned}$$

es el cuadrado del área del paralelogramo de lados v, w.

3. Sean los vectores $u, v, w \in V$ no coplanares (es decir, l.i.), sea $S = \mathscr{L}(\{u, v\})$ el plano generado por los vectores u y v, entonces

$$V = S \oplus S^{\perp},$$

como $w \in V$, entonces

$$w = z + w', \quad \text{donde} \quad z = xu + yv \in S, \quad w' \in S^{\perp}.$$

Además, tenemos

$$\langle w, w'\rangle = \|w'\|^2 \quad \text{y} \quad \|w'\| = \|w - z\| = dist(w, S),$$

donde $dist(w, S)$ es la distancia de w a S. Luego tenemos

$$\begin{aligned} G(w, u, v) &= \begin{bmatrix} \langle w, w\rangle & \langle w, u\rangle & \langle w, v\rangle \\ \langle u, w\rangle & \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle \\ \langle v, w\rangle & \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle \end{bmatrix} \\ &= |dist(w, S)|^2 G(u, v), \end{aligned}$$

Observamos que $G(w, u, v)$ es el cuadrado del volumen del paralelepípedo de aristas concurrentes u, v y w, donde hemos tomado por base al paralelogramo de lados u y v, y por altura

$$\|w'\| = \|w - z\| = dist(w, S)$$

En general tenemos la siguiente

Proposición

Sean los vectores $v^1, \cdots, v^r \in V$ linealmente independientes, $S = \mathscr{L}(\{v^1, \cdots, v^r\})$ y $w \in V \backslash S$, entonces

$$G(w, v^1, \cdots, v^r) = |dist(w, S)|^2 G(v^1, \cdots, v^r).$$

Prueba: Ejercicio. ■

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

30 de diciembre de 2020

Espacios Vectoriales (continuación)

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial real con producto interno. definamos la función $\|\ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \tag{1}$$

esta función es una norma.
En efecto:

1. Como $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno, entonces
   - $(\forall v \in V)(\langle v, v\rangle \geq 0)$, entonces $(\forall v \in V)(\|v\| \geq 0)$.
   - $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = \mathbf{0}$, entonces $\|v\| = 0 \iff v = \mathbf{0}$.

2. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, para todo $v \in V$, tenemos $\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle v, v\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\alpha|\|v\|$.
3. Para todo $v, w \in V$ tenemos
$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \langle w, v\rangle + \langle w, v\rangle + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\langle w, v\rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle w, v\rangle| + \|w\|^2 & (*) \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|w\|\|v\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$
   Es decir,
$$(\forall v, w \in V)(\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|).$$

Por tanto (1) es una norma en V. ■

Para verificar $(*)$ nos basamos en la siguiente

Proposición (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial real con producto interno, luego para todo $v, w \in V$ se tiene

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$$

Prueba:
Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle|\alpha|v-|\beta|w, |\alpha|v-|\beta|w\rangle =& |\alpha|^2\langle v, v\rangle - |\alpha||\beta|\langle v, w\rangle - |\beta||\alpha|\langle w, v\rangle + \\ & |\beta|^2\langle w, w\rangle \\ =& |\alpha|^2\langle v, v\rangle - 2|\alpha||\beta|\langle v, w\rangle + |\beta|^2\langle w, w\rangle \geq 0\end{aligned}$$

En particular escojamos $\alpha = \langle v, w\rangle$, $\beta = \langle v, v\rangle$. Sustituyendo en la desigualdad anterior se obtiene

$$\begin{aligned}&|\langle v, w\rangle|^2\langle v, v\rangle - 2|\langle v, w\rangle|^2\langle v, v\rangle + |\langle v, v\rangle|^2\langle w, w\rangle = \\ &= -|\langle v, w\rangle|^2\langle v, v\rangle + |\langle v, v\rangle|^2\langle w, w\rangle \geq 0,\end{aligned}$$

de donde para todo $v, w \in V$ se tiene

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle = \|v\|^2\|w\|^2.$$

■

Esta demostración también es válida si $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial complejo.

Proposición (Proceso de Gram-Schmidt)

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio vectorial, y $\mathcal{B} = \{v^1, \cdots, v^k\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes, entonces los vectores $w^1, \cdots, w^k$ definidos mediante

$$\begin{cases} w^1 &= v^1 \\ w^j &= v^j - \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} proy_{w^i}(v^k), \quad para \;\; j = 2, \cdots, k, \end{cases}$$

son ortogonales, donde $proy_u(v) = \dfrac{\langle v, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u.$

Prueba:
$\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces

$$(\forall j = 1, 2, \cdots, k)(v^j \neq \mathbf{0}).$$

Usaremos inducción matemática sobre k

- Definamos $w^1 = v^1 = v^1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{1-1} proy_{w^i}(v^1) \neq \mathbf{0}.$

$$w^2 = v^2 - \alpha w^1 \Longrightarrow 0 = \langle w^1, w^2\rangle = \langle w^1, v^2\rangle - \alpha\langle w^1, w^1\rangle,$$

entonces

$$\alpha = \frac{\langle w^1, v^2\rangle}{\langle w^1, w^1\rangle} \Longrightarrow w^2 = v^2 - \frac{\langle w^1, v^2\rangle}{\langle w^1, w^1\rangle}w^1 = v^2 - proy_{w^1}(v^2)$$

luego $\quad w^2 = v^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{2-1} proy_{w^i}(v^2) \neq \mathbf{0}.$

En caso contrario
si $w^2 = \mathbf{0}$, entonces $v^2 /\!\!/ w^1$, es decir, $v^2 /\!\!/ v^1$ esto contradice el hecho de que v^1, v^2 son l.i., por tanto $w^2 \neq \mathbf{0}$.

• Supongamos que hasta k–1 se satisface el enunciado de la proposición (**H.I.**).

• Veamos que el enunciado de la proposición se satisface para k: Expresaremos los vectores $v^1, v^2, \cdots, v^k$ en función de los vectores $w^1, w^2, \cdots, w^k$ como sigue

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\langle w^1, v^2\rangle}{\langle w^1, w^1\rangle} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\langle w^1, v^k\rangle}{\langle w^1, w^1\rangle} & \frac{\langle w^2, v^k\rangle}{\langle w^2, w^2\rangle} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^1 & w^2 & \cdots & w^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^k \end{bmatrix},$$

de donde

$$w^k = v^k + \sum_{j=1}^{k-1} \mu_{(k)(j)} v^j \neq \mathbf{0}.$$

Queda como ejercicio justificar este resultado. ■

Corolario

Los conjuntos $\mathcal{B} = \{v^1, \cdots, v^k\}$ y $\mathcal{E} = \{w^1, \cdots, w^k\}$ generan el mismo subespacio vectorial.

Corolario

Del conjunto $\mathcal{E} = \{w^1, \cdots, w^k\}$ podemos obtener $\mathcal{E}'$ normalizado.

Prueba:

Basta definir $w^k_* = \dfrac{w^k}{\sqrt{\langle w^k, w^k\rangle}} = \dfrac{w^k}{\|w^k\|}$, y así obtenemos $\mathcal{E}'$

Definición

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ espacios vectoriales, $T : V \longrightarrow W$ una transformación. Diremos que T es una **isometría lineal** *si*

1. *T es lineal y*
2. $\Big(\forall v^1, v^2 \in V\Big)\Big(\langle T(v^1), T(v^2)\rangle_W = \langle v^1, v^2\rangle_V\Big)$

Nota

• *De la definición anterior tenemos que si T es una isometría lineal, entonces se tiene*

$$\Big(\forall v \in V\Big)\Big(\|T(v)\|_W = \|v\|_V\Big).$$

• *Si $dim(V) = dim(W) < \infty$, entonces T es un isomorfismo.*

Proposición

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ espacios vectoriales y una trasformación lineal $T : V \longrightarrow W$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *T preserva el producto interno, es decir,*
$$\Big(\forall v^1, v^2 \in V\Big)\Big(\langle T(v^1), T(v^2)\rangle_W = \langle v^1, v^2\rangle_V\Big).$$
2. *T preserva la norma, es decir,*
$$\Big(\forall v \in V\Big)\Big(\|T(v)\|_W = \|v\|_V\Big).$$

Prueba:

1)⇒2) Inmediato, usando el primer item de la nota anterior.

2)⇒1) Ejercicio, use el hecho de que $\langle T(v^1+v^2), T(v^1+v^2)\rangle_W = \|T(v^1+v^2)\|^2_W = \|v^1+v^2\|^2_V = \langle v^1+v^2, v^1+v^2\rangle_V$, etc. ■

Nota

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ espacios vectoriales y una trasformación lineal $T : V \longrightarrow W$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *T es una isometría.*
2. *$d_W(T(v^1), T(v^2)) = d_V(v^1, v^2)$, para todo $v^1, v^2 \in V$.*

Donde $d_V(v^1, v^2) = \|v^1 - v^2\|_V$, similar para d_W.

La prueba es inmediata. ■

Proposición

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ espacios vectoriales y una aplicación $T : V \longrightarrow W$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *T preserva el producto interno.*
2. *T es lineal y preserva el producto interno.*
3. *T es lineal y preserva la norma.*

Prueba: Ejercicio. ■

Proposición

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ espacios vectoriales y $T : V \longrightarrow W$ una isometría lineal, entonces T es inyectiva.

Prueba:
Veamos que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}_{\mathbf{V}}$:
Sea $v \in \mathcal{N}(T)$, entonces $T(v) = \mathbf{0}_W$, dado que T es una isometría lineal, entonces

$$0 = \|\mathbf{0}\|_W = \|T(v)\|_W = \|v\|_V, \text{ entonces } v = \mathbf{0}_V,$$

por tanto $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}_{\mathbf{V}}$, es decir, T es inyectiva.

■

Proposición

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \longrightarrow W$ una isometría lineal, entonces T es sobreyectiva si, y solo si $dim(V) = dim(W)$.

Prueba: Ejercicio. ■

Proposición

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces los siguientes enunciados son equivalentes

1. *T es un isometría lineal sobreyectiva.*
2. *Para toda base ortonormal $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$, se tiene que el conjunto*
$$T(\mathcal{B}) = \{T(v^1), T(v^2), \cdots, T(v^n)\} \subset W.$$
es una base.
3. *Existe una base ortonormal $\mathcal{B}_0 = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$ tal que*
$$T(\mathcal{B}_0) = \{T(v^1), T(v^2), \cdots, T(v^n)\} \subset W.$$
es una base.

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

04 de enero del 2021

Espacios Vectoriales (continuación)

Proposición

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal, entonces los siguientes enunciados son equivalentes

1. *T es un isometría lineal sobreyectiva.*
2. *Para toda base ortonormal $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$, se tiene que el conjunto*
$$T(\mathcal{B}) = \{T(v^1), T(v^2), \cdots, T(v^n)\} \subset W$$
es una base ortonormal.
3. *Existe una base ortonormal $\mathcal{B}_0 = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$ tal que*
$$T(\mathcal{B}_0) = \{T(v^1), T(v^2), \cdots, T(v^n)\} \subset W.$$
es una base ortonormal.

Prueba:

1)⇒2) Supongamos que T es sobreyectiva, y $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, \cdots, v^n\} \subset V$ una base ortonormal.
Como T es una isometría lineal entonces T es inyectiva, por tanto es una T es un isomorfismo (por ser T inyectiva), por tanto $T(\mathcal{B})$ es una base de W.
Ahora veamos que $T(\mathcal{B})$ es ortonormal:
Sean $T(v^i), T(v^j) \in T(\mathcal{B})$ con $i \neq j$, entonces

$$\begin{aligned} \langle T(v^i), T(v^j)\rangle_W &= \langle v^i, v^j\rangle_V \quad T \text{ preserva el producto interno} \\ &= 0 \\ \|T(v^i)\|_W &= \|v^i\|_V \ \forall i, \quad T \text{ preserva la norma} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto $T(\mathcal{B})$ es una base ortonormal de W.

2)⇒3) Por el proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt, existe de una base ortonormal $\mathcal{B}_0$ de V, por tanto por el item anterior, tenemos que $T(\mathcal{B}_0)$ es una base ortonormal de W.

3)⇒1) Ejercicio.

■

Teorema

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces T es una isometría lineal sobreyectiva si, y solo si T es inversible y $T^{-1} = T^*$.

Prueba:

⇒) Como T es una isometría lineal, entonces T es inyectiva y por la proposición anterior T es sobreyectiva y así T es un isomorfismo sobre V y por tanto $T^{-1} : V \longrightarrow V$ existe.
Veamos que $\big(\forall v, w \in V\big)\big(\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^{-1}(w)\rangle\big)$:
Notamos que $w = T(T^{-1}(w))$, de donde

$$\begin{aligned}\langle T(v), w\rangle &= \langle T(v), T(T^{-1}(w))\rangle \\ &= \langle v, T^{-1}(w)\rangle \quad T \text{ preserva el producto interno.}\end{aligned}$$

Por tanto, $T^{-1} = T^*$.

⇐) Supongamos T es inversible y $T^{-1} = T^*$.
Basta verificar que T preserva el producto interno:
Sean $v, w \in V$ cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned}\langle T(v), T(w)\rangle &= \langle v, (T^{-1}(T(w))\rangle \qquad (\text{dado que } T^{-1} = T^*) \\ &= \langle v, w\rangle.\end{aligned}$$

■

Definición

Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio vectorial y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal inversible que satisface $T^{-1} = T^*$, decimos que T es ortogonal si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y diremos T es unitario si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definición

Sean $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio vectorial y S_1, S_2 dos subespacios de V, diremos que S_1 es ortogonal a S_2 si

$$\big(\forall s_1 \in S_1, \forall s_2 \in S_2\big)\big(\langle s_1, s_2\rangle = 0\big)$$

y lo denotamos por $S_1 \perp S_2$.

Recordaremos que si S es un subespacio vectorial de V, entonces el complemento ortogonal de S, denotado por $S^\perp$ está definido por

$$S^\perp = \{v \in V / \langle v, s\rangle = 0, \quad \forall s \in S\}$$

Ejemplo

Sean $V = \mathbb{R}^3$ *y los subespacios* $S_1 = \mathscr{L}(\{e^1\})$, *y* $S_2 = \mathscr{L}(\{e^2\})$, *observamos que para cualquier* $s_1 \in S_1$ $s_2 \in S_2$, *tenemos que* $s_1 = (\alpha, 0, 0)^t$ *y* $s_2 = (0, \beta, 0)^t$ *y por tanto*

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \alpha 0 + 0\beta + 00 = 0,$$

de donde $S_1 \perp S_2$ *con respecto al producto interno usual.*

Cáculo de Valores y Vectores Propios de una Matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$

Ejemplo

Sean $V = \mathbb{R}^3$ *y* S *un subespacio de* V *definido por* $S = \mathscr{L}(\{e^1, e^2\})$, *con respecto al producto interno usual, determinemos*

$$S^\perp = \{v \in V / \langle v, s \rangle = 0, \quad \forall s \in S\},$$

note que si $s \in S$, *entonces* $s = (\alpha, \beta, 0)^t$, *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Consideremos* $v = (v_1, v_2, v_3)^t \in V$ *cualquiera, entonces para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tenemos*

$$\langle v, s \rangle = v_1\alpha + v_2\beta + v_3 0 = 0,$$

de donde $v_1 = v_2 = 0$, *con* $v_3 \in \mathbb{R}$, *es decir,*

$$S^\perp = \mathscr{L}(\{e^3\}).$$

Cáculo de Valores y Vectores Propios de una Matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$

Proposición

Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio vectorial y* S_1, S_2 *subespacios ortogonales de* V, *entonces* $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Proposición

Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio vectorial y* S *un subespacio, entonces* $S^\perp$ *también es un subespacio vectorial de* V.

Proposición

Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio vectorial de dimensión finita y* S *un subespacio, entonces*

$$dim(S) + dim(S^\perp) = dim(V).$$

Además, si $\{v^1, \cdots, v^r\}$ *es una base de* S *y* $\{v^{r+1}, \cdots, v^n\}$ *es una base de* $S^\perp$, *entonces* $\{v^1, \cdots, v^r, v^{r+1}, \cdots, v^n\}$ *es una base de* V.

Note que con las proposiciones anteriores tenemos que $S \oplus S^\perp = V$.

Cáculo de Valores y Vectores Propios de una Matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$

Ejercicio

Consideremos una matriz $A \in \mathbb{R}(3,3)$. *Determine la relación entre* $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(A^t)$, *los espacios* $\mathcal{F}(\{a^1, a^2\})$, *y* $\mathcal{C}(\{b^1, b^2\})$, *donde* a^1, a^2 *y* b^1, b^2 *son los vectores filas y columna de* A *respectivamente. Generalice este resultado a una matriz* $A \in \mathbb{R}(m, n)$.

El problema de Valores propios está definido como sigue:
Sea una matriz $A \in \mathbb{K}(n, n)$, entonces debemos encontrar $\lambda \in \mathbb{K}$, y $x \in \mathbb{K}(n, 1)\backslash\{\mathbf{0}\}$ tales que

$$Ax = \lambda x.$$

La resolución de este problema tiene muchas aplicaciones, entre ellas, la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, en ingeniería civil, circuitos eléctricos, biología, médicina, etc.

En esta parte consideraremos a todos los espacios involucrados de dimensón finita, a menos que se diga lo contrario.

Definición

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, diremos que $\lambda \in \mathbb{K}$ **es un valor propio** *de T, si existe un vector $v \in V$ no nulo tal que*

$$T(v) = \lambda v. \tag{1}$$

Este vector v es llamado **vector propio** *de T asociado a λ.*

Recordar: como $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y V es de dimensión finita, digamos $dim(V) = n$, entonces existe una matriz $A_T \in \mathbb{K}(n, n)$ tal que

$$T(v) = A_T v, \tag{2}$$

la matriz A_T es llamada la matriz asociada a la transformación lineal T.

Note que el problema (1) es equivalente a resolver el problema (2).
Ahora consideremos $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ una base de V y la matriz A_T asociada a la transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ en dicha base.
Además, cada vector $v \in V$ puede ser expresado de la siguiente forma $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j$, con $x_j \in \mathbb{K}$, al cual le asociamos el vector de coordenadas $x_v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$

Proposición

La función $\psi : V \longrightarrow \mathbb{K}(n, 1)$, definida mediante $\psi(v) = x_v$, es un isomorfismo que satisface

$$\psi(T(v)) = A_T x_v$$

Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

06 de enero del 2021

Cáculo de Valores y Vectores Propios de una Matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$

El problema de Valores propios está definido como sigue:
Sea una matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$, entonces debemos encontrar $\lambda \in \mathbb{K}$, y $x \in \mathbb{K}(n,1)\backslash\{\mathbf{0}\}$ tales que

$$Ax = \lambda x.$$

La resolución de este problema tiene muchas aplicaciones, entre ellas, la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, en ingeniería civil, circuitos eléctricos, biología, médicina, etc.

En esta parte consideraremos a todos los espacios involucrados de dimensón finita, a menos que se diga lo contrario.

Definición

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, diremos que $\lambda \in \mathbb{K}$ **es un valor propio** *de T, si existe un vector $v \in V$ no nulo tal que*

$$T(v) = \lambda v. \tag{1}$$

Este vector v es llamado **vector propio** *de T asociado a λ.*

Recordar: como $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y V es de dimensión finita, digamos $dim(V) = n$, entonces existe una matriz $A_T \in \mathbb{K}(n,n)$ tal que

$$T(v) = A_T v, \tag{2}$$

la matriz A_T es llamada la matriz asociada a la transformación lineal T.

Note que el problema (1) es equivalente a resolver el problema (2).
Ahora consideremos $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ una base de V y la matriz A_T asociada a la transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ en dicha base.
Además, cada vector $v \in V$ puede ser expresado de la siguiente forma $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j$, con $x_j \in \mathbb{K}$, al cual le asociamos el vector de coordenadas $x_v = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^t$

Proposición

La función $\psi : V \longrightarrow \mathbb{K}(n,1)$, definida mediante $\psi(v) = x_v$, es un isomorfismo que satisface

$$\psi(T(v)) = A_T x_v$$

Prueba:
Observamos que ψ es una trasfomación lineal,
en efecto
Sean $v, w \in V$, entonces existen escalares $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j v^j \quad \text{y} \quad w = \sum_{j=1}^{n} y_j v^j,$$

luego $\psi(v) = x_v$ y $\psi(w) = y_w$, con $x_v = (x_1, \cdots, x_n)^t$ e $y_w = (y_1, \cdots, y_n)^t$, de donde tenemos $z_{v+w} = x_v + y_w = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)^t$, entonces

$$\begin{aligned}\psi(v + \alpha w) = z_{v+\alpha w} &= (x_1 + \alpha y_1, \cdots, x_n + \alpha y_n)^t = x_v + \alpha y_w \\ &= \psi(v) + \alpha\psi(w),\end{aligned}$$

por tanto ψ es una transformación lineal.

ψ es un isomorfismo, dado que lleva la base $\{v^1, \cdots, v^n\}$ de V en la base canónica $\{e^1, \cdots, e^n\}$ de $\mathbb{K}(n,1)$ (Ejercicio).
Además tenemos

$$\psi\big(T(v^j)\big) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v^i\right) = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})^t = A_{_T}(e^j),$$

de donde

$$\begin{aligned}\psi\big(T(v)\big) &= \psi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j T(v^j)\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(v^j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j A_{_T}(e^j) = A_{_T}(x_1, \cdots, x_n)^t\\ &= A_{_T}(x_v).\end{aligned}$$

■

Proposición

Sean V un espacio vectorial y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces T su matriz asociada $A_{_T}$ tienen los mismos valores propios.

Prueba:
Sea λ un valor propio de T y v el vector propio correspondiente a λ, entonces

$$\begin{aligned}A_{_T}(x_v) &= \psi(T(v)) \qquad \text{(por la proposición anterior)}\\ &= \psi(\lambda v) = \lambda\psi(v)\\ &= \lambda x_v,\end{aligned}$$

por tanto λ es un valor propio de $A_{_T}$.

Recíprocamente, sea λ un valor propio de $A_{_T}$ y $x \in \mathbb{K}(n,1)$ su correspondiente vector propio. entonces existe $v \in V$ tal que $\psi(v) = x$ (esto es debido a que ψ es un isomorfismo), de donde

$$\begin{aligned}\psi\big(T(v)\big) &= A_{_T}x \qquad \text{(por la proposición anterior)}\\ &= \lambda x = \lambda\psi(v)\\ &= \psi(\lambda v).\end{aligned}$$

Como ψ es inyectiva, entonces tenemos que $T(v) = \lambda v$ y como $v \neq \mathbf{0}$, entonces λ es un valor propio de T. ■

Corolario

Si $A, P \in \mathbb{K}(n,n)$ son matrices con P no singular, entonces A y $P^{-1}AP$ son matrices que poseen los mismos valores propios.

Prueba:
definamos $B = P^{-1}AP$ entonces A y B son matrices semejantes y como estas matrices están asociadas a las mismas transformaciones lineales, el resto queda como ejercicio. ■

Ejemplo

La transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (-y, x)$, no posee valores propios en $\mathbb{R}$.

efecto:
supongamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de T y $v = (v_1, v_2)$ no nulo es el correspondiente vector propio, entonces

$$\begin{aligned} T(v) &= T(v_1, v_2) = (-v_2, v_1) \\ &= \lambda(v_1, v_2), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{array}{rcrcl} \lambda v_1 & + & v_2 & = & 0 \\ -v_1 & + & \lambda v_2 & = & 0, \end{array}$$

resolviendo el sistema anterior, tenemos que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda^2 + 1 = 0$.

Definición

Sea la matriz $A \in \mathbb{K}(n, n)$, el polinomio

$$p_A(\lambda) = det(A - \lambda \mathrm{I})$$

es llamado **polinomio característico** *de A.*

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, entonces

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 11 \end{aligned}$$

Definición

Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. El **polinomio característico** *de T está definido como el polinomio caracterítico de la matriz asociada en cualquier base de V, es decir, A_T es la matriz asociada a T en alguna base de V, entonces el polinomio característico de T es*

$$p_T(\lambda) = det(A_T - \lambda \mathrm{I})$$

Nota

El polinomio dado, en la definición anterior, no depende de A_T, es decir, si B_T es otra matriz asociada a T, entonces existe una matriz P no singular tal que

$$B_T = P^{-1} A_T P,$$

por tanto

$$B_T - \lambda \mathrm{I} = P^{-1} A_T P - \lambda \mathrm{I} = P^{-1}\big(A_T - \lambda \mathrm{I}\big)P$$

entonces

$$\begin{aligned} det(B_T - \lambda \mathrm{I}) &= det\Big(P^{-1}\big(A_T - \lambda \mathrm{I}\big)P\Big) \\ &= det\big(P^{-1}\big)det\big(A_T - \lambda \mathrm{I}\big)det\big(P\big) = det\big(A_T - \lambda \mathrm{I}\big) \\ &= p_T(\lambda). \end{aligned}$$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de T si, y solo si λ es una raíz de p_T.

Prueba:
observar que λ es un valor propio de T si, y solo si existe $v \in V$ no nulo tal que $T(v) = \lambda v$ lo que es equivalente a $(T - \lambda \mathrm{I})(v) = \mathbf{0}$ si, y solo si $T - \lambda \mathrm{I}$ no es inversible, lo que es equivalente a que $A_T - \lambda \mathrm{I}$ es singular para una matriz asociada A_T en cualquier base de V (proposición anterior) si, y solo si $det(A_T - \lambda \mathrm{I}) = 0$ si, y solo si λ es una raíz de p_T.

■

Notar que el polinomio característico p_T de una transformación dada, tiene grado $n = dim(V)$, dado que es de la forma

$$p_T(\lambda) = \lambda^n - traza(T)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(T),$$

notar que T tiene a lo más n valores propios.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces los vectores propios de T correspondientes a valores propios diferentes son linealmente independientes.

Prueba:
Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ valores propios de T diferentes entres sí, y $v^1, v^2, \cdots,$ los vectores propios correspondientes, entonces

$$\Big(\forall j = 1, 2, \cdots, n\Big)\Big(T(v^j) = \lambda_j v^j\Big).$$

Consideremos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ escalares tales que

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 \cdots, \alpha_n v^n = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Veamos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$:
Notar que este producto

$$(T - \lambda_1 \mathrm{I}) \cdots (T - \lambda_{j-1} \mathrm{I})(T - \lambda_{j+1} \mathrm{I}) \cdots (T - \lambda_n \mathrm{I}) \qquad (4)$$

es conmutativo, entonces multiplicamos (4) a la ecuación (3) de donde para cada $j = 1, 2, \cdots, n$ tenemos

$$\left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (T - \lambda_1 \mathrm{I})\right] (\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_n v^n) = \mathbf{0}$$

de donde para cada $j = 1, 2, \cdots, n$ obtenemos

$$\alpha_j \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (\lambda_j - \lambda_i)\right] v^j = \mathbf{0}$$

como $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ y además por definición $v^j \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\alpha_j = 0, \qquad \text{para} \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Por tanto $\{v^1, v^2, \cdots, v^n\}$ son linealmente independientes. ■

Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) = n$, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal.
Consideremos las transformaciones lineales

$$\mathrm{I}, T, \cdots, T^k,$$

con $k = n^2$, como elementos del espacio vectorial $\mathscr{L}(V)$, deben ser linealmente dependientes, esto es debido a que son $k+1$ vectores en un espacio de dimensión k, luego existen escalares $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ no todos nulos tales que

$$\alpha_0 \mathrm{I} + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_k T^k = 0.$$

es decir T es una raíz del polinomio g no nulo de la forma

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$$

El polinomio mónico de grado mínimo con esta propiedad, se llama el **polinomio minimal** de T. Denotemos por φ_T al polinomio minimal de T, el cual debe tener la forma

$$\varphi_T(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1} x^{r-1} + a_r x^r$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial, entonces para cualquier transformación $T : V \longrightarrow V$ los polinomios p_T y φ_T tienen las mismas raíces.

Álgebra Lineal I

Usando Beamer (nunca ppt)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

11 de enero del 2021

Cáculo de Valores y Vectores Propios de una Matriz $A \in \mathbb{K}(n,n)$

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}(n,n)$ una matriz, decimos que A es **diagonalizable** *si existen matrices $P, D \in \mathbb{K}(n,n)$ con P no singular y D diagonal tal que*

$$D = P^{-1}AP$$

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$, en este se tiene que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

donde

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial, entonces para cualquier transformación $T : V \longrightarrow V$ los polinomios p_T y φ_T tienen las mismas raíces.

Prueba:
Sea λ una raíz de p_A, entonces λ es un valor propio de T, por tanto existe un vector $v \in V$ no nulo tal que $Av = \lambda v$, de donde se tiene $A^2v = \lambda Av = \lambda^2 v$, también $A^3v = \lambda^3 v$ y así en forma sucesiva se tiene $A^m v = \lambda^m v$, entonces para un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$, tenemos

$$\begin{aligned} p(T)(v) &= \left(a_0\mathrm{I} + a_1 T + \cdots + a_k T^k\right)(v) \\ &= (a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_k T^k(v)) \\ &= a_0 v + a_1 \lambda v + \cdots + a_k \lambda^k v \\ &= (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_k\lambda^k)v = p(\lambda)v. \end{aligned}$$

en particular si $p = \varphi_T$, entonces tenemos

$$0 = \varphi_T(T)(v) = \varphi_T(\lambda)v,$$

y como $v \neq \mathbf{0}$, entonces $\varphi_T(\lambda) = 0$.
Por tanto p_T y φ_T poseen las mismas raíces. ■

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces su polinomio característico es

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= det(A - \lambda\mathrm{I}) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ &= (\lambda - 1)^2, \end{aligned}$$

de donde $p_A(A) = (A - \mathrm{I})^2 = 0$.

Nota

el polinomio mínimal de A, tiene la propiedad que grad$\left(\varphi_A\right) \leq n$.
En ejemplo anterior el grado de polinomio mínimal es 2, dado que $A - \mathrm{I} \neq 0$.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 48 & -10 & -10 \\ 90 & -17 & -20 \\ 135 & -30 & -27 \end{bmatrix}$.
Compruebe que grad$(\varphi_A) = 2$

Definición

Diremos que una matriz $A \in \mathbb{K}(n, n)$ es **triangulable** *si es semejante a una matriz triangular. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es* **triangulable** *si existe una base de V en la matriz asociada a T sea triangular.*

Proposición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces toda transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es triangulable.

Prueba:
Usaremos inducción matemática sobre n:

- $n = 1$ es válido.
- (**H I**) Supongamos que hasta $n - 1$ el enunciado es válido.

- Veamos que para n también es válido:
  Consideremos la transformación lineal $T^{\nabla} : V^{*} \longrightarrow V^{*}$ definida por $T^{\nabla}(f) = f \circ T$.
  Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de T^{∇} y $g \in V^{*}$ su correspondiente vector propio, es decir,

$$T^{\nabla}(g) = \lambda g.$$

  Definamos $S = \{v \in V / g(v) = 0\}$, note que S es un subespacio de V, con $dim(S) = n - 1$ y también $T(S) \subset S$.
  Por hipótesis de inducción S posee una base, digamos, $\{v^1, \cdots, v^{n-1}\}$ tal que

$$\begin{aligned} T(v^1) &= \lambda_1 v^1 \\ T(v^2) &= a_{12} v^1 + \lambda_2 v^2 \\ &\vdots \\ T(v^{n-1}) &= a_{1,n-1} v^1 + \cdots + \lambda_{n-1} v^{n-1} \end{aligned}$$

ahora agramos el vector v^n a fin de completar la base de V, con
$$T(v^n) = a_{1n} v^1 + \cdots + \lambda v^n,$$
por tanto la matriz asociada a T, en la base $\{v^1, \cdots, v^n\}$, es

$$A_T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de T es

$$\begin{aligned} p_{_T}(\lambda) &= det(A_{_T} - \lambda \mathrm{I}) \\ &= (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n) \\ &= \lambda^n - \Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n\prod_{j=1}^{n}\lambda_j \\ &= \lambda^n - traza(T)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(T). \end{aligned}$$

Ahora justificamos estos pasos en la siguiente

Proposición

Dada la matriz $A \in \mathbb{C}(n,n)$, entonces existe una matriz no singular $P \in \mathbb{C}(n,n)$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Prueba: Ejercicio. (sug, La transformación lineal $L_A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene por matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{C}(n,1)$ precisamente a A) ■

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, entonces su polinomio característico está dado por $p_{_A}(\lambda) = det(A - \lambda\mathrm{I}) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$. Notamos que A posee un único valor propio $\lambda = 1$ (multiplicidad dos). De la ecuación $Av = v$ tenemos

$$Av = A(v_1, v_2)^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4v_1 + 3v_2 \\ -3v_1 - 2v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

de donde obtenemos $v_1 + v_2 = 0$, entonces $v = (v_1, v_2)^t = (1,-1)^t$, ahora agregamos el vector $v^2 = (0,1)^t$ tal que v^1, v^2 sea una base para $\mathbb{R}^2$

Por tanto

$$\begin{aligned} L_A(v^1) &= v^1 \\ L_A(v^2) &= 3v^1 + v^2, \end{aligned}$$

de donde la matriz triangular de A es

$$P = [v^1 \ v^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposición (Cayley-Hamilton)

Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) = n$, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. entonces $p_T(T) = 0$

Prueba: Ejercicio. ■

Observación

1. *El polinomio $\varphi_T(x)$ divide a $p_T(x)$. En efecto por el algoritmo de la división de Euclides, existen polinomios g y h tales que*

$$p_T(x) = g(x)\varphi_T(x) + h(x)$$

donde $h(x) = 0$ ó $grad(h) < grad(\varphi_T)$.
Por el teorema de Cayley-Hamilton, se tiene

$$0 = p_T(T) = g(T)\varphi_T(T) + h(T) = 0 + h(T) = h(T),$$

de donde $h(T) = 0$. Entonces por la minimalidad del grado φ_T se tiene que $h(x) = 0$. Por tanto

$$p_T(x) = g(x)\varphi_T(x).$$

2. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son valores propios de T diferentes (raales o complejos) y debido a que p_T y φ_T tienen las mismas raíces, y de acuerdo a la observación anterior, tenemos

$$p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$
$$\varphi_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{d_r}.$$

Además,

$$m_1 + \cdots + m_r = n, \quad d_1 + \cdots + d_r = grad(\varphi_T)$$
$$1 \leq d_j \leq m_j, \quad j = 1, 2, \cdots, r.$$

El número m_j se llama **multiplicidad algebraíca** de λ_j. Por otro lado, asociado a cada raíz λ_j, existe un subespacio

$$V_j = \{v \in V / T(v) = \lambda_j v\}$$

cuya dimensión es la **multiplicidad geométrica** de λ_j.

Proposición

Sea λ un valor propio de una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$. Si denotamos por e y m a su multiplicidad geométrica y multiplicidad algebraíca respectivamente, entonces

$$e \leq m.$$

Prueba: Ejercicio. ■

Recordar que una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es diagonalizable si existe una base de V en donde su matriz asociada es diagonal, es decir, V posee una base formada por vectores propios correspondientes a la transformación lineal.
Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) = n$, y una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son los valores propios diferentes de T, entonces los subespacios

$$V_j = \{v \in V / T(v) = \lambda_j v\}, \quad j = 1, 2, \cdots, r,$$

tienen la propiedad

$$V_j \cap \Big[V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_r\Big] = \{\mathbf{0}\},\ j + 1, \cdots, r$$

por tanto $V_1 + \cdots + V_r$ es suma directa, y se denota

$$V_0 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

13 de enero del 2021

Cáculo de Valores y Vectores Propios de $A \in \mathbb{K}(n, n)$

Recordar que una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. Una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es diagonalizable si existe una base de V en donde su matriz asociada es diagonal, es decir, V posee una base formada por vectores propios correspondientes a la transformación lineal.
Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) = n$, y una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son los valores propios diferentes de T, entonces los subespacios

$$V_j = \{v \in V / T(v) = \lambda_j v\}, \quad j = 1, 2, \cdots, r,$$

tienen la propiedad

$$V_j \cap \Big[V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_r\Big] = \{\mathbf{0}\},\ j + 1, \cdots, r$$

por tanto $V_1 + \cdots + V_r$ es suma directa, y se denota

$$V_0 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

Proposición (Primer criterio de diagonalización)

Sea V un espacio vectorial, una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es diagonalizable si y solo si las multiplicidades algebraica y geométrica, de cada uno de sus valores propios, son iguales.

Prueba:

$\Rightarrow$) Supongamos que T es diagonalizable, y consideremos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ valores propios diferentes y definamos para cada $j = 1, 2, \cdots, r$ los subespacios

$$V_j = \{v \in V / T(v) = \lambda_j v\},$$

Una vez elegida una base para cada subespacio V_j, la unión de estas bases es una base para V_0, dado que T es diagonalizable tenemos que $V_0 = V$.

La matriz asociada T en esta base es diagonal y en su diagonal posee cada valor propio λ_j, repetidos $d_j = dim(V_j)$ veces. Entonces

$$p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{d_r}.$$

Debido a la factorización única d_j debe ser igual a la multiplicidad algebraica de λ_j; y así tenemos que las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio λ_j son iguales.

$\Leftarrow$) Supongamos que $m_j = dim(V_j)$ es la multiplicidad algebraica de λ_j. entonces

$$\begin{aligned} din(V) = n &= m_1 + \cdots + m_r \\ &= dim(V_1) + \cdots + dim(V_r) \\ &= dim(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r), \end{aligned}$$

de donde $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$. Por tanto T es diagonalizable. ■

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ *¿ Es diagonalizable?*

El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)^2,$$

en este caso es suficiente determinar la multiplicidad algebraica de $\lambda = -2$, es decir,

$$V_{\lambda=-2} = \{v \in \mathbb{K}(3,1)/Av = -2v\} = \{(2x, 2x, x)/x \in \mathbb{K}\},$$

notamos que $dim(V_{\lambda=-2}) = 1$, por tanto la multiplicidad algebraica es igual a 2 mientras que la multiplicad geométrica es igual a 1 y de esta manera A no es diagonalizable.

Proposición (Segundo criterio de diagonalización)

sea V un espacio vectorial, una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ es diagonalizable si, y solo si su polinomio minimal posee solamente raíces simples.

Prueba

$\Rightarrow$) Como T es diagonalizable, entonces $V = V_0 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.
Veamos que $\varphi_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_r)$:
Para cada $v \in V$ puede ser expresado de la forma

$$v = v^1 + \cdots + v^r$$

donde $\{v^1, v^2, \cdots, v^r\} \subset V_j$.
Como $(T - \lambda_j \mathrm{I})v^j = 0$ para $j = 1, \cdots, r$, entonces

$$(T - \lambda_1 \mathrm{I})(T - \lambda_2 \mathrm{I}) \cdots (T - \lambda_r \mathrm{I})v = 0,$$

por tanto

$$\varphi_T(T) = (T - \lambda_1 \mathrm{I})(T - \lambda_2 \mathrm{I}) \cdots (T - \lambda_r \mathrm{I}) = 0,$$

$\Leftarrow$) supongamos que $\varphi_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_r)$.
Veamos que T es diagonalizable, lo que es equivalente $V = V_0$:
Los polinomios

$$\varphi_j(\lambda) = \frac{\varphi_T(\lambda)}{\lambda - \lambda_j}, \quad j = 1, \cdots, r.$$

son coprimos (es decir, no tienen factor común), por tanto existen polinomios h_j tales que

$$\sum_{j=}^{r} \varphi_j(\lambda)h_j(\lambda) = 1,$$

entonces

$$\sum_{j=}^{r} \varphi_j(T)h_j(T) = \mathrm{I},$$

luego para todo $v \in V$ se tiene

$$v = \sum_{j=}^{r} \varphi_j(T)h_j(T)(v),$$

denotemos por $w^j = \varphi_j(T)h_j(T)(v)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}(T - \lambda_j \mathrm{I})(w^j) &= \left[(T - \lambda_j \mathrm{I})\varphi_j(T)\right] h_j(T)(v)\\ &= \varphi_T(T)h_j(T)(v)\\ &= 0h_j(T)(v) = 0.\end{aligned}$$

Luego para w^j, y para cada $j = 1, \cdots, r$ se tiene

$$v = w^1 + \cdots + w^r \in V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

de donde $V \subset V_0$, y por tanto $V = V_0$.
Por tanto T es diagonalizable.

■

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $T, L : V \longrightarrow V$ transformaciones lineales diagonalizables tales que $T \circ L = L \circ T$. Entonces existe una base de V que diagonaliza T y L simultáneamente. En particular $L \circ T$ es diagonalizable.

Prueba Ejercicio. ■

Proposición

Sean V un espacio vectorial $T_j : V \longrightarrow V$, $j = 1, \cdots, m$ una familia de transformaciones lineales diagonalizables que conmutan dos a dos. Entonces existe una base de V que las diagonaliza simultáneamente.

Prueba Ejercicio. ■

Ejemplo

Consideremos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifica fácilmente que $AB = BA$, además A y B son diagonalizable, es decir

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \quad y \quad p_B(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 3)$$

poseen raíces distintas.
Los valores propios asociados a $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$ de A son $v^1 = (1; 1)^t$ y $v^2 = (1; 2)^t$, respectivamente.

Entonces la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

diagonaliza a la matriz A así como a la matriz B.
En efecto

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $v \in V$ un vector fijo tal que $T^{q-1}(v) \neq \mathbf{0}$. Entonces

1. *Los vectores $v, T(v), \cdots, T^{q-1}(v)$ son l. i.*
2. *El subespacio $S = \mathscr{L}(\{v, T(v), \cdots, T^{q-1}(v)\})$ es invariante bajo T.*
3. *Existe un subespacio $W \subset V$ invariante bajo T tal que*

$$V = S \oplus W$$

Prueba:

1. Supongamos que

$$\alpha_1 v + \alpha_2 T(v) + \cdots + \alpha_q T^{q-1}(v) = \mathbf{0}$$

Aplicamos T^{q-1} a la última igualdad, entonces tenemos

$$\alpha_1 T^{q-1}(v) = \mathbf{0},$$

y como $T^{q-1} \neq \mathbf{0}$, entonces $\alpha_1 = 0$.
Ahora aplicamos T^{q-2} a la última igualdad, obtenmos $\alpha_2 = 0$.
Repetimos este proceso obetniéndose

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0.$$

Entonces $v, T(v), \cdots, T^{q-1}(v)$ son l.i.

2. Ejercicio.
3. Ejercicio.

■

Proposición (Unicidad)

Con las notaciones de la proposición anterior, sea $w \in V$ otro vector ($w \neq v$) tal que $T^{q-1}(w) \neq \mathbf{0}$.
Sea $S' = \mathscr{L}(\{w, T(w), \cdots, T^{q-1}(w)\})$ y $W' \subset V$ el subespacio invariante bajo T tal que $V = S' \oplus W'$, que por la proposición anterior existen índices de nilpotencia de $T : W \longrightarrow W$ y $T : W' \longrightarrow W'$ son iguales

Prueba: Ejercicio. ■

Proposición (Teorema de Estructura)

Sean V un espacio vectorial y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal nilpotente de índice q, entonces existen enteros positivos $r, q_1, q_2, \cdots, q_r$ unívocamente determinados por T, y vectores no nulos $\{v^1, \cdots, v^r\} \subset V$, tales que

1. $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_r$.
   El conjunto de enteros $r, q_1, q_2, \cdots, q_r$ se llaman **conjunto completo de invariantes** *de T.*
2. *La colección de vectores*

$$\begin{gathered} T^{q_1-1}(v^1), \cdots, T(v^1) \\ \vdots \\ T^{q_1-1}(v^r), \cdots, T(v^r) \end{gathered}$$

Criterios de Diagonalización
Diagonalización simultánea
Matrices Nilpotentes

constituyen una base de V.

3. $T^{q_1}(v^1) = \mathbf{0}, T^{q_2}(v^2) = \mathbf{0}, \cdots, T^{q_r}(v^r) = \mathbf{0}$.
4. *El conjunto completo de invariantes caracteriza T. Es decir, dos transformaciones lineales nilpotentes son semejantes si y sólo si tienen el mismo conjunto completo de invariantes.*

Prueba: Ejercicio. ■

Criterios de Diagonalización
Diagonalización simultánea
Matrices Nilpotentes

Nota

El número de elementos de la base de V dada en la proposición anterior, (2) nos dice que

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_r = n = dim(V)$$

Ahora veamos la forma matricial de una transformación lineal nilpotente. La matriz asociada a la transformación lineal nilpotente $T : V \longrightarrow V$, en la base dada en (2) de la proposición anterior, está formada por bloques

Criterios de Diagonalización
Diagonalización simultánea
Matrices Nilpotentes

Así, en el subespacio invariante $\mathscr{L}(\{T^{q_i-1}(v^i), \cdots, T(v^i), v^i\})$ la matriz asociada es

$$J_i(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de orden $q_i \times q_i$. Luego la matriz asociada a T en la base dada por (2) es

$$J(T) = \begin{bmatrix} J_1(T) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r(T) \end{bmatrix}$$

Esta matriz es llamada la **forma canónica de Jordan** *de la transformación lineal nilpotente T.*

Álgebra Lineal I

Usando Beamer ($_{\text{nunca ppt}}$)

William Carlos Echegaray Castillo

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

18 de enero del 2021

Cáculo de Valores y Vectores Propios de $A \in \mathbb{K}(n, n)$

Sean V un espacio vectorial $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, $v^1, v^2, \cdots, v^r \in V$ vectores no nulos. Recordar que la colección de vectores

$$\begin{matrix} T^{q_1-1}(v^1), & \cdots, & T(v^1), v^1 \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ T^{q_r-1}(v^r), & \cdots, & T(v^r), v^r \end{matrix} \tag{1}$$

constituyen una base de V, y $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_r > 0$, $T^{q_j}(v^j) = \mathbf{0}$, $j = 1, 2, \cdots, r$.

Así, en el subespacio invariante $\mathscr{L}(\{T^{q_i-1}(v^i), \cdots, T(v^i), v^i\})$ la matriz asociada es

$$J_i(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \\ & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de orden $q_i \times q_i$. Luego la matriz asociada a T en la base dada por (1)

$$J(T) = \begin{bmatrix} J_1(T) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r(T) \end{bmatrix}$$

Esta matriz es llamada la **forma canónica de Jordan** *de la transformación lineal nilpotente T.*

Ejemplo

consideremos la matriz

$$N = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$$

Notar que

$$N^2 = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces el índice de nilpotencia es $q = 2$, sea el vector $v^1 = (1;1)^t$, luego $Nv^1 = (-2,-3)^t$, entonces estos vectores son l.i.

Ahora formemos la matriz

$$P = [Nv^1 \; v^1] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$P^{-1}NP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

donde la matriz de cambio de base es P.

Proposición

Sean V un espacio vectorial, con $dim(V) < \infty$, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces existen subespacios invariantes U, W bajo T tales que

1. *$V = U \oplus W$.*
2. *T restringido a U es nilpotente y restringido a W es inversible.*

Prueba:

1. Si T es invertible o nilpotente, entonces la proposición es vĺida.
2. Si T no es invertible, entonces

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V / T(v) = \mathbf{0}\} \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Además, notamos que

$$\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^2) \subset \cdots$$

tal sucesión no puede ser infinita, esto es debido a que $dim(V) < \infty$

Consideremos

$$q = \min_{\substack{\mathcal{N}(T^r)=\mathcal{N}(T^{r+1}) \\ r\in\mathbb{N}}} (\{r\}).$$

Entonces

$$\mathcal{N}(T^q) = \mathcal{N}(T^{q+j}), \quad j = 1, 2, \cdots .$$

En efecto, sea $w \in \mathcal{N}(T^{q+1})$, entonces

$$T^{q+1}\Big(T^{j-1}(w)\Big) = \mathbf{0} \quad j = 2, 3, \cdots .$$

Luego por definición de q

$$T^q\Big(T^{j-1}(w)\Big) = \mathbf{0}.$$

Continuamos con este proceso $j-1$, tenemos

$$T^q(w) = \mathbf{0},$$

entonces $w \in \mathcal{N}(T^q)$ y por tanto

$$\mathcal{N}(T^{q+j}) \subset \mathcal{N}(T^q).$$

Por tanto

$$\mathcal{N}(T^q) = \mathcal{N}(T^{q+j}), \quad j = 1, 2, \cdots .$$

Definamos los subespacios

$$U = \mathcal{N}(T^q) \;\text{ y }\; W = Im(T^q)$$

estos subespacios son invariantes bajo T.
Veamos que $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$:
En efecto: Supongamos que $w \in U \cap W$, entonces existe $v \in V$ tal que $T^q(v) = w$, $(w \in W)$, además $T^q(w) = \mathbf{0}$, $(w \in U)$, entonces

$$\mathbf{0} = T^q(w) = T^q(T^q(v)) = T^{q+q}(v) = T^q(v) = w.$$

Por tanto $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

Aplicando a la transformación lineal $T^q : V \longrightarrow V$ lo siguiente

$$\begin{aligned} dim(\mathcal{N}(T^q)) + dim(Im(T^q)) &= dim(V) \\ dim(U) + dim(W) &= dim(V), \end{aligned}$$

y dado que $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, entonces

$$dim(U + W) = dim(V),$$

y por tanto $V = U \oplus W$.
Queda como ejercicio verificar que $T : U \longrightarrow U$ es nilpotente y $T : W \longrightarrow W$ es inversible.

$\blacksquare$

Proposición

Sean V un espacio vectorial, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, entonces la descomposición de T en sus partes nilpotente e inversible, establecida en la proposición anterior, es única.

Prueba Ejercicio. ■

Proposición (Forma Canónica de Jordan)

Sean V un $\mathbb{C}-$espacio vectorial, con $dim(V) < \infty$, $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ valores propios distintos de T, y $m_1, m_2, \cdots, m_r$ sus correspondientes multiplicidades algebraicas, ordenados de la forma

$$m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_r \geq 1.$$

Entonces existen subespacios V_j, $j = 1, 2, \cdots, r$ invariantes bajo T tales que

1. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$,
2. $dim(V_j) = m_j$, $j = 1, 2, \cdots, r$,
3. $T - \lambda_j \mathrm{I}$ *es nilpotente sobre* V_j, $j = 1, 2, \cdots, r$.

Prueba Ejercicio. ■

Ejemplo

Halle la forma canónica de Jordan de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -9 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico asociado de A es

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2),$$

de donde los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ de multiplicidad dos y $\lambda_2 = 2$, observe que $(A + \mathrm{I})(A - 2\mathrm{I}) \neq 0$, por tanto A no es diagonalizable,

entonces la forma canónica de Jordan de A está dada por

$$J(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para calcular la matriz P de cambio de base, procedemos como sigue: de la ecuación

$$Av^1 = (-1)v^1,$$

donde $v^1 = (v_1, v_2, v_3)^t$ es un vector propio no nulo, el cual es equivalente al sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} 7v_1 & + & v_2 & - & 9v_3 & = & -v_1 \\ -v_1 & & & & & = & -v_2 \\ 5v_1 & + & v_2 & - & 7v_3 & = & -v_3 \end{array}$$

de donde $v_1 = v_2 = v_3$.

Entonces una de las soluciones es $v^1 = (1,1,1)^t$.
Para calcular el segundo vector propio correspondiente al valor propio $\lambda_1 = -1$, lo hacemos de la siguiente forma

$$(A - (-1)\mathrm{I})w^1 = v^1,$$

de donde obtenemos que $w^1 = (0,1,0)^t$.
Finalmente de la ecuación

$$Av^3 = 2v^3$$

nos proporciona el tercer vector $v^3 = (2,-1,1)^t$, y de esta manera tenemos una base $\{v^1, w^1, v^3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

De esta manera obtenemos la matriz P de cambio de base

$$P = [v^1\ w^1\ v^3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{de donde} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -9 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = J(A) \end{aligned}$$