Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 29, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ y $x_0, x \in I$. La razón de cambio promedio (r.c.p.) de f entre x_0 y x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La razón de cambio instantánea (r.c.i.) de f entre x_0 y x es el límite (si existe) de la r.c.p. es decir

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Para la función $C(q) = 3q^2 + 5q + 10$, calcule la r.c.p. de C entre 40 y 41, y entre 40 y 42, y la r.c.i. de C en 40.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

De la definición:

- r.c.p.$_{q_0=40,\Delta q=1}C = \dfrac{\Delta C}{\Delta q} = \dfrac{248}{1} = 248$
  Entre 40 y 41 unidades, el costo aumenta a razón de 248 dolares/unidad.
- r.c.p.$_{q_0=40,\Delta q=2}C = \dfrac{\Delta C}{\Delta q} = \dfrac{502}{2} = 251$
  Entre 40 y 42 unidades, el costo aumenta a razón de 251 dolares/unidad.
- Como $C'(q) = 6q + 5$, entonces r.c.i.$_{q_0=40}C = C'(40) = 245$.
  Produciendo 40 unidades, el costo aumenta aproximadamente a razón de 245 dolares/unidad.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

En el caso de una función que pide la posición de una partícula en función del tiempo, $s = s(t)$,

- la razón de cambio promedio representa la velocidad promedio de la partícula,
- la razón de cambio instantánea es la velocidad instantánea de la partícula.

Si la distancia está en km y el tiempo en horas h, las razones de cambio se encuentran en unidades de km/h.

Ejemplo

Un globo esférico se infla con aire a razón de 200 cm^3/min. ¿Con qué rapidez cambia el radio cuando este mide 10 cm?

Resolución

Sea V volumen esfera y r la longitud del radio de la esfera.

Dato: $\dfrac{V}{t} = 200$

La razón que se pide determinar es $\dfrac{dr}{dt}\Big|_{r=10}$.

Como $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, entonces $\dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$.

Reemplazando el valor de $\dfrac{dV}{dt}$ y $r = 10$, se obtiene

$$200 = 4\pi(10)^2 \frac{dr}{dt}\Big|_{r=10}$$

Así, $\dfrac{dr}{dt}\Big|_{r=10} = \dfrac{1}{2\pi} \approx 0.16$ cm/min.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

La altura h (en metros) y el radio de la base r (en metros) de un casquete esférico de 42π m^3 de volumen satisfacen la ecuación

$$\frac{h}{6}(3r^2 + h^2) = 45$$

De acuerdo a esta relación entre h y r calcule

- $\dfrac{dr}{dh}$ cuando $h = 2$ y $r = \dfrac{122}{3}$.
- $\dfrac{dh}{dr}$ cuando $h = 3$ y $r = 5$.

Resolución

Primero comprobamos que los puntos $(h,r)=(2,\frac{122}{3})$ y $(h,r)=(3,5)$ satisfacen la ecuación.

- Derivamos la relación $\frac{h}{6}(3r^2+h^2)=45$ respecto de h,

$$\frac{1}{6}(3r^2+h^2)+\frac{h}{6}(3\cdot 2r\frac{dr}{dh}+2h)=0$$

Reemplazando,

$$3\left(\frac{122}{3}\right)+2^2+2\left(6\sqrt{\frac{122}{3}}\frac{dr}{dh}+4\right)=0$$

Despejando, $\frac{dr}{dh}=-\frac{134}{12}\sqrt{\frac{3}{122}}$.

Resolución

- Derivamos la relación $\frac{h}{6}(3r^2+h^2)=45$ respecto de r,

$$\frac{1}{6}\frac{dh}{dr}(3r^2+h^2)+\frac{h}{6}(6r+2h\frac{dh}{dr})=0$$

Despejamos,

$$\frac{dh}{dr}(6r^2+h^2+2h^2)+6hr=0$$

Así, $\frac{dh}{dr}=-\frac{2hr}{r^2+h^2}$. Reemplazamos en $(h,r)=(3,5)$,

$$\frac{dh}{dr}=-\frac{2\cdot 3\cdot 5}{5^2+3^3}=-\frac{30}{34}$$

Ejemplo

En un circuito compuesto por un f.e.m., una resistencia y un condensador se requiere que la capacitancia C del condensador y la resistencia R satisfagan la ecuación $R = e^{-\frac{1}{RC}}$. De acuerdo a esta ecuación calcule la razón de cambio en cada ítem.

- $\dfrac{dR}{dC}$ cuando $R = \dfrac{1}{2}$ y $C = \dfrac{2}{\ln 2}$.
- $\dfrac{dC}{dR}$ cuando $R = \dfrac{1}{4}$ y $C = \dfrac{2}{\ln 2}$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

Primero comprobamos que $(R, C) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{\ln 2})$ y $(R, C) = (\frac{1}{4}, \frac{2}{\ln 2})$, satisfagan la relación.

- Derivamos la relación $R = e^{-\frac{1}{RC}}$ respecto de C,

$$\frac{dR}{dC} = e^{-\frac{1}{RC}}(-1)\left(-\frac{\frac{dR}{dC} + R}{(RC)^2}\right)$$

Despejamos, $\dfrac{dR}{dC} = \dfrac{RC}{C^2(RC-1)}$ Reemplazamos,

$$\frac{dR}{dC} = \frac{\frac{1}{\ln 2}}{\frac{4}{\ln^2 2}(\frac{1}{\ln 2} - 1)} = \frac{\ln^2 2}{4(1 - \ln 2)}$$

Resolución

- Derivamos la relación $R = e^{-\frac{1}{RC}}$ respecto de R,

$$1 = e^{-\frac{1}{RC}}(-1)\left(-\frac{C + R\frac{dC}{dR}}{(RC)^2}\right)$$

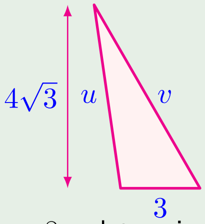
Despejamos, $\dfrac{dC}{dR} = \dfrac{C(RC-1)}{R}$ Reemplazamos,

$$\frac{dC}{dR} = \frac{\frac{2}{\ln 2}\left(\frac{1}{2\ln 2} - 1\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{\ln^2 2}(1 - 2\ln 2)$$

Ejemplo

Un proyecto requiere fabricar una placa metálica triangular de base 3 m y de altura $4\sqrt{3}$, como en la figura. Un ingeniero propone una placa de lados $u = 7$ y $v = 8$ (en metros).

El director del proyectos dice que $u = 7$ no se ajusta al diseño y pide aumentarlo ligeramente. Sin embargo, al alterar u será necesario alterar v, para preservar la base y la altura.



Calcule la razón de cambio $\dfrac{dv}{du}$ cuando $u = 7$ y $v = 8$ y determine si v aumentará o disminuirá luego de aumentar u ligeramente.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

En este caso de modelamiento, lo primero es establecer la relación entre las variables u y v. Como la base y la altura son fijas, el área de la figura también, $A = 6\sqrt{3}$.
Por otro lado podemos poner el área del triángulo en función de sus lados.

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(u+v+3)(u+v-3)(u-v+3)(-u+v+3)}$$

Derivemos la relación con respecto a u,

$$0 = \frac{1}{4}\,\frac{\frac{d}{du}[(u+v+3)(u+v-3)(u-v+3)(-u+v+3)]}{2\sqrt{(u+v+3)(u+v-3)(u-v+3)(-u+v+3)}}$$

Resolución

Luego,

$$
\begin{aligned}
0 \quad = \quad & (1+\frac{dv}{du})(u+v-3)(u-v+3)(-u+v+3) \\
& +(u+v+3)(1+\frac{dv}{du})(u-v+3)(-u+v+3) \\
& +(u+v+3)(u+v-3)(1-\frac{dv}{du})(-u+v+3) \\
& +(u+v+3)(u+v-3)(u-v+3)(-1+\frac{dv}{du})
\end{aligned}
$$

Resolución

De esta relación debemos obtener $\frac{dv}{du}$, pero como se requiere en $u=7$, y $v=8$, podemos reemplazar estos valores en la ecuación anterior.

$$\begin{aligned} 0 &= (1+\frac{dv}{du})(15-3)(-1+3)(1+3) \\ &+(15+3)(1+\frac{dv}{du})(-1+3)(1+3) \\ &+(15+3)(15-3)(1-\frac{dv}{du})(1+3) \\ &+(15+3)(15-3)(-1+3)(-1+\frac{dv}{du}) \end{aligned}$$

Resolución

Así, $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{7}{2}$. Es decir, la razón de cambio es positiva, lo que indica que cuando u aumenta ligeramente por encima de 7, v también aumenta ligeramente por encima de 8.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Determine el número de soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $x^5 - 5x^3 = -11$.

b) $x^5 - 5x^3 = 10$.

c) $x^2 - 6\ln(x+2) = -5$.

d) $\ln(x^2) + \dfrac{1}{x} = 5$.

Resolución a)

Hacemos $f(x) = x^5 - 5x^3 + 11$. El problema es entonces hallar cuantos $x \in \mathbb{R}$, existen tales que $f(x) = 0$.
Veamos la derivada, $f'(x) = 5x^4 - 15x^2$. Al factorizar obtenemos $f'(x) = 5x^2(x^2 - 3)$. De modo que tenemos tres zonas.

- $]-\infty, -\sqrt{3}]$, donde f es creciente pues $f'(x) > 0$ en $]-\infty, -\sqrt{3}]$.
- $[-\sqrt{3}, 0]$, donde f es decreciente pues $f'(x) < 0$ en $]-\sqrt{3}, 0]$.
- $[0, \sqrt{3}]$, donde f es decreciente pues $f'(x) < 0$ en $]0, \sqrt{3}]$.
- $[\sqrt{3}, +\infty]$, donde f es creciente pues $f'(x) > 0$ en $[\sqrt{3}, +\infty[$.

Resolución a)

Ahora debemos evaluar f en los puntos $\pm\sqrt{3}$, para saber si la gráfica de f corta o no el eje X.

$$f(-\sqrt{3}) = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 11 = 11 + 6\sqrt{3} > 0.$$
$$f(\sqrt{3}) = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 11 = 11 - 6\sqrt{3} > 0.$$

Además $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Por lo tanto la ecuación $x^5 - 5x^3 = -11$ solo tiene una solución.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución b)

Hacemos $f(x) = x^5 - 5x^3 - 10$. El problema es entonces hallar cuantos $x \in \mathbb{R}$, existen tales que $f(x) = 0$.
Veamos la derivada, $f'(x) = 5x^4 - 15x^2$, al factorizar obtenemos $f'(x) = 5x^2(x^2 - 3)$. De modo que tenemos tres zonas.

- $]-\infty, -\sqrt{3}]$, donde f es creciente pues $f'(x) > 0$ en $]-\infty, -\sqrt{3}[$.
- $[-\sqrt{3}, 0]$, donde f es decreciente pues $f'(x) < 0$ en $]-\sqrt{3}, 0[$.
- $[0, \sqrt{3}]$, donde f es decreciente pues $f'(x) < 0$ en $]0, \sqrt{3}[$.
- $[\sqrt{3}, +\infty]$, donde f es creciente pues $f'(x) > 0$ en $[\sqrt{3}, +\infty[$.

Resolución b)

Ahora debemos evaluar f en los puntos $\pm\sqrt{3}$, para saber si la gráfica de f corta o no el eje X.

$$f(-\sqrt{3}) = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 11 = 11 + 6\sqrt{3} > 0.$$
$$f(\sqrt{3}) = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 11 = 11 - 6\sqrt{3} > 0.$$

Además $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Por lo tanto la ecuación $x^5 - 5x^3 = 10$ tiene 3 soluciones.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Para la función $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^4}{8 - x^3}$.

a) Determine
   - Las ecuaciones de todas las asíntotas, en caso existan.
   - Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, además de los extremos relativos, en caso existan.
   - Los intervalos de concavidad, además de las coordenadas de los puntos de inflexión, en caso existan.

b) Tomando en cuenta los resultados de los items anteriores, esboce la gráfica de la función f, indicando las coordenadas de los puntos de corte con los ejes coordenados y las coordenadas de los puntos de intersección con las asíntotas, si los tuviera.

Resolución

a) Primero, notamos que $x=2$ no está en el dominio. Analizamos cerca de $x=2$ posteriormente.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{8-x^3} = -1.$
  La recta asíntota (si existe) tiene pendiente $=-1$.
- Ahora veamos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)+x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{8-x^3}+x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+8x-x^4}{8-x^3} = 0.$$

  Entonces la recta $y=-x$ es asíntota derecha.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

a)

- De modo similar: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{8-x^3}=-1$. De modo que, la recta asíntota (si existe) tiene pendiente $=-1$. Así también:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{8-x^3}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4+8x-x^4}{8-x^3}=0.$$

  Entonces la recta $y=-x$ también es asíntota izquierda.
- Calculemos ahora

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty.$$

Resolución

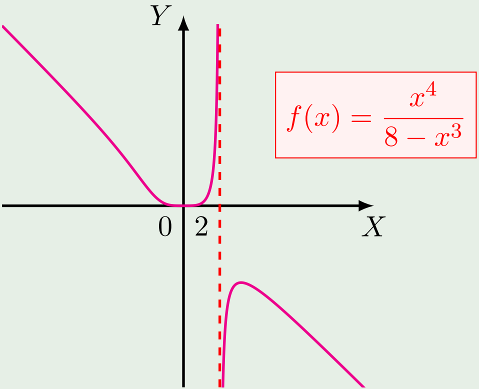
a) ■ Por otro lado, $f(x) = -x + \dfrac{8x}{8-x^3}$. Así

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{64 - 8x^3 + 24x^3}{(8-x^3)^2} \\ &= \frac{x^3(32-x^3)}{(8-x^3)^2} \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Resolución

b) Gráfica de la función f.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA