Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 1, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

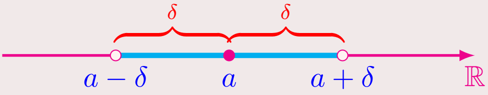
Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Vecindad abierta)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y δ un número positivo cualesquiera. La vecindad abierta de centro a y radio δ, denotada como $V_\delta(a)$, se define como el conjunto de números reales cuya distancia al valor a es menor que δ. Es decir,

$$V_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}$$

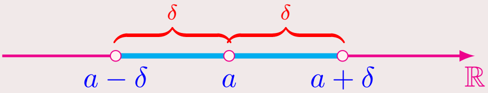


También, $V_\delta(a) =]a - \delta, a + \delta[= \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta\}$

Definición (Vecindad abierta reducida)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y δ un número positivo cualesquiera. La vecindad abierta reducida de centro a y radio δ, denotada como $V'_\delta(a)$, se define como el conjunto de números reales cuya distancia al valor a es menor que δ y diferente de a. Es decir son los números de $V_\delta(a)$ diferentes de a.

$$V'_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\}$$

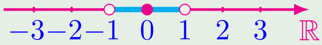


También $V'_\delta(a) = V_\delta(a) \setminus \{a\} =]a - \delta, a[\cup]a, a + \delta[$.

Ejemplo

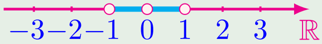
- Vecindad abierta de centro $a = 0$ y radio $\delta = 1$,

$$V_1(0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 0| < 1\} =]-1, 1[$$



- Vecindad abierta reducida de centro $a = 0$ y radio $\delta = 1$,

$$V_1'(0) = V_1(0) \setminus \{0\} =]-1, 0[\cup]0, 1[$$



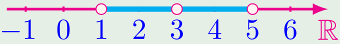
Ejemplo

- Vecindad abierta de centro $a = 0$ y radio $\delta = 1$,

$$V_2(3) = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 2\} =]3-2, 3+2[=]1, 5[$$

- Vecindad abierta reducida de centro $a = 0$ y radio $\delta = 1$,

$$V_2'(3) = V_2(3) \setminus \{3\} =]1, 5[\setminus \{3\} =]1, 3[\cup]3, 5[$$



Proposición

Demuestre que: Si $a \in \mathbb{R}$ y $0 < \delta_1 < \delta_2$, entonces

- $V_{\delta_1}(a) \subset V_{\delta_2}(a)$.
- $V'_{\delta_1}(a) \subset V'_{\delta_2}(a)$.

Definición (Punto de acumulación)

Dado $a \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que a es punto de acumulación de A si toda bola abierta reducida centrada en a tiene elementos de A.
De forma equivalente podemos decir que a es punto de acumulación de A si toda vecindad abierta centrada en a tiene puntos del conjunto A diferentes de a, esto es

$$\text{para todo } \delta > 0 : V_\delta(a) \cap A \backslash \{a\} \neq \emptyset.$$

De manera que cuando a no es punto de acumulación de A se cumple que: existe $\delta > 0$ tal que $V_\delta(a) \cap A \subset \{a\}$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

a es un punto de acumulación de A si está acompañado de otros de A.

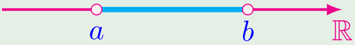
Definición (Conjunto derivado)

El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se llama conjunto derivado de A y se denota A'.

Ejemplo

- a es punto de acumulación de $V'_\delta(a)$ para cualquier $\delta > 0$.
- a es punto de acumulación del intervalo $\langle a, b]$.

$$A =]a, b]$$



Ejemplo

Si $A = [1,3] \cup \{5\}$, entonces 5 no es un punto de acumulación de A.
En efecto, para $\delta = 1$ se tiene

$$V_1(5) \cap A =]4,6[\cap \big([1,3] \cup \{5\}\big) = \{5\}$$

Por lo tanto, 5 no es punto de acumulación de $A = [1,3] \cup \{5\}$.

Ejemplo

Demuestre que el conjunto $A = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, solo tiene un punto de acumulación en 0.

Demostración: En efecto, tome $\delta > 0$ cualquiera. Como para cada número real existe un número natural mayor que dicho número, se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{\delta} < n$, de modo que $0 < \dfrac{1}{n} < \delta$, y por lo tanto $\dfrac{1}{n} \in V_\delta(0) \cap A$, cumpliendo la definición.

Ejercicio

Demuestre que ningún número real $a \neq 0$ es punto de acumulación.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Límite de una función en un punto)

Dada una función f, y un punto a que es punto de acumulación de $\mathrm{Dom}(f)$. Decimos que un $L \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f cuando x tiende a a, cuando para cualquier $\epsilon > 0$ es posible hallar $\delta > 0$ tal que

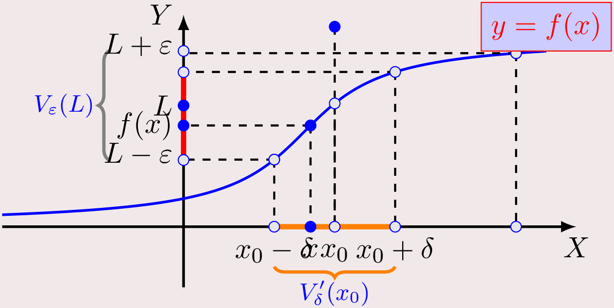
$$x \in \mathrm{Dom}(f) \ \text{ y } \ 0 < |x - a| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En ese caso escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Interpretación geométrica del limite de una función

Dado $\varepsilon > 0$, se debe encontrar $\delta > 0$ alrededor de x_0 tal que $f(V'_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)) \subset V_\varepsilon(L)$



Distintos modos de expresar la definición de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

- Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ implica $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

En caso contrario decimos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe. En símbolos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \nexists$.

¿Qué es lo que se cumple cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \nexists$?

- Cuando el límite existe: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ implica $f(x) \in V_\varepsilon(L)$.
- Cuando el límite no existe: existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ puedo hallar un x tal que $x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f)$ pero $f(x) \notin V_{\varepsilon_0}(L)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

¿Qué es lo que se cumple cuando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \nexists$?

- Cuando el límite existe:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Cuando el límite no existe:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \backslash \forall \delta > 0 : x \in V'_\delta(a) \cap \mathrm{Dom}(f) \text{ pero } |f(x) - L| \geq \varepsilon_0$$

Ejemplo

Utilice la definición y demuestre que: $\lim\limits_{x \to a} c = c$

Demostración: Dado $\epsilon > 0$ necesito hallar $\delta > 0$ de modo que $|c - c| < \epsilon$ cuando se tenga $0 < |x - a| < \delta$.
Como $|c - c| < |x - a| < \delta < \epsilon$. Así, $\delta = \epsilon$, luego
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in Dom(f) \ \wedge \ 0 < |x - a| < \delta$ implica $|c - c| < \epsilon$

Utilice la definición de limite de una función para demostrar en cada caso.

a) $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

b) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

c) $\lim\limits_{x \to -1} 2x - 3 = -5$.

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$.

Ejemplo

Utilice la definición del limite de una función para demostrar que:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$ necesito hallar $\delta > 0$ de modo que $|x^2 - 9| < \epsilon$ cuando se tenga $0 < |x - 3| < \delta$.
Como, $|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < |x + 3| \cdot \delta < \varepsilon$, debemos acotar $|x + 3|$ en el intervalo $3 - \delta < x < 3 + \delta$.
Se obtiene $|x + 3| < 6 + \delta$. Entonces si $\delta \leq 1$ se tiene $|x + 3| < 7$.
Luego, $|x^2 - 9| = |x + 3||x - 3| < |x + 3| \cdot \delta < 7\delta < \varepsilon$.

Así, $\delta = \varepsilon/7$, tenemos entonces que para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos elegir $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$ y obtenemos que

$$0 < |x - 3| < \delta \text{ implica } |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Hemos probado que:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, \delta = \mathsf{min}\{1, \varepsilon/7\} > 0 :\ x \in V'_\delta(3) \cap \mathrm{Dom}(f) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Teorema (Unicidad)

Si el límite de una función en un punto existe, entonces es único.

Observación

El enunciado indica que: Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función, $x_0 \in A'$ y existen $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Proof.

Demostración Para la demostración solo es necesario recordar una propiedad de los números reales.

Proposición

Si $a \in \mathbb{R}$ es tal que $|a| < \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ entonces a tiene que ser 0.

□

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Ron Larson - Bruce Edwards
Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
Cengage Learning