# CARACTERÍSTICA DE EULER Y COLORACIÓN DE MAPAS.

Profesores del curso:

Ronald Mass [1]

Ángel Ramírez [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

2 de agosto de 2020

# Tabla de contenidos

# Fórmula de Euler

**Teorema 1**

*Sea $G = (V, E)$ un grafo planar conexo y sea $f$ el número de caras de algún dibujo de $G$. Se cumple:*

$$|V| - |E| + f = 2.$$

*En particular, el número de caras no depende del dibujo.*

**Demostración:**

Se procede por inducción sobre el número de aristas del grafo $G$.

Si $E = \emptyset$ entonces $|V| = 1$ y $|f| = 1$, observándose que la fórmula de Euler se cumple.

Si $|E| \geq 1$, se presentan los siguientes casos:

# Fórmula de Euler (cont.)

1. El grafo $G$ no tiene ciclos. Entonces $G$ es un árbol y así $|V| = |E| + 1$ y al mismo tiempo $f = 1$ desde que un dibujo planar de un árbol tiene solamente una cara (no limitada).
2. Alguna arista $e \in E$ está contenida en un ciclo. En este caso el grafo $G - e$ es conexo. Por tanto, por hipótesis inductiva, la fórmula de Euler se cumple (al considerar el grafo que se obtiene de $G$ al remover la arista $e$). La arista $e$ el dibujo considerado de $G$ es adyacente a dos caras distintas $F$ y $F'$, por el teorema de la curva de Jordan. De aquí, ambos (el número de caras y el número de aristas) se incrementan en 1 al añadir $e$ al dibujo, mientras que el número de vértices no varía. De aquí, la fórmula de Euler se sigue cumpliendo.

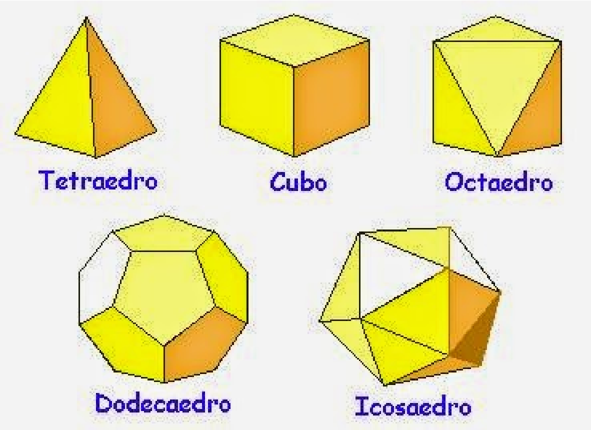
## Definición 1

*Un* **poliedro regular** *es un cuerpo convexo tridimensional limitado por un número finito de caras. Todas las caras deben ser copias congruentes del mismo polígono convexo regular y el mismo número de caras deben intersectarse en cada vértice del cuerpo.*

Una razón del gran interés para el estudio de los poliedros regulares es su excepcionalidad. Existen solamente 5 tipos de poliedros regulares:

1. El tetraedro regular.
2. El cubo.
3. El octaedro.
4. El dodecaedro.
5. El icosaedro.

# Poliedros regulares



**Proposición 1**

*Sea $G$ un grafo topológico planar en el cual cada vértice tiene grado $d$ y cada cara es adyacente a $k$ vértices, para algunos enteros $d \geq 3$ y $k \geq 3$. Entonces $G$ es isomorfo a uno de los grafos mostrados la Figura 1*

## Sólidos platónicos

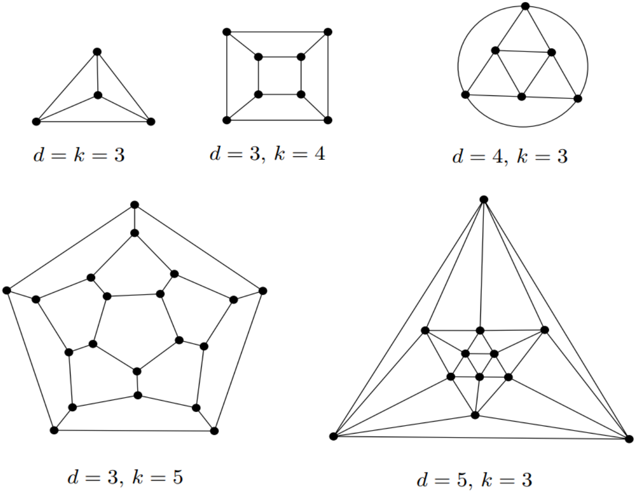



Figura 1: Grafos de los sólidos platónicos

# Demostración de la Proposición 1

Sea el grafo $G = (V, E)$ tal que $|V| = n$, $|E| = m$ y el número de caras es $f$. Del lema de Handshaking se tiene que:

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E|$$

en nuestro caso implica que $dn = 2m$.
Análogamente se obtiene: $2m = kf$.
Nosotros contamos dos veces el número de los pares ordenados $(e, F)$, donde $F$ es una cara de $G$ y $e$ es una arista que está en la frontera de $F$. Cada arista contribuye a 2 de tales pares (como cada cara es limitada por un ciclo) y cada cara $k$ pares.

# Demostración de la Proposición 1 (cont.)

Luego, expresamos $n$ y $f$ en términos de $m$ usando las relaciones anteriores para sustituirlas en la fórmula de Euler:

$$2 = n - m + f = \frac{2m}{d} - m + \frac{2m}{k}.$$

Sumando y diviendo por $2m$, resulta:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}.$$

De esta última ecuación, conocidos $d$ y $k$, los otros parámetros $n, m$ y $f$ pueden ser determinados de forma única. Es claro que $\text{mín}(d, k) = 3$, en otro caso $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$.

# Demostración de la Proposición 1 (cont.)

Para $d = 3$ obtenemos:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{6} = \frac{1}{m} > 0$$

y esto implica $k \in \{3, 4, 5\}$.
Similarmente para $k = 3$ se deduce que $d \in \{3, 4, 5\}$. De aquí una de las siguientes posibilidades deben ocurrir:

| $d$ | $k$ | $n$ | $m$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 4 | 6 | 4 |
| 3 | 4 | 8 | 12 | 6 |
| 3 | 5 | 20 | 30 | 12 |
| 4 | 3 | 6 | 12 | 8 |
| 5 | 3 | 12 | 30 | 20 |

# Demostración de la Proposición 1 (cont.)

De la tabla anterior es fácil observar que en cada uno de los casos el grafo está completamente determinado por los valores de $d, k, n, m$ y $f$ y así es isomorfo a uno de los grafos de la Figura 1. Una propiedad muy importante de grafos planares es que ellos pueden solamente tener relativamente pocas aristas: un grafo planar con $n$ vértices tiene $O(n)$ aristas. Una formulación más precisa lo da el siguiente el siguiente resultado.

## Proposición 2

*Se cumple:*

1. *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo planar con al menos 3 vértices. Entonces* $|E| \leq 3|V| - 6$. *Más aún, la igualdad se cumple para cualquier grafo planar maximal, es decir, un grafo planar tal que añadiendo cualquier nueva arista (sin variar el número de vértices) se obtiene un grafo noplanar.*
2. *Si además, el grafo planar considerado contiene un triángulo (es decir, tiene a* $K_3$ *como subgrafo) y tiene al menos 3 vértices, entonces* $|E| \leq 2|V| - 4$.

El siguiente resultado nos da más información acerca de los posibles scores de grafos planares.

## Proposición 3

*Sea $G = (V, E)$ un grafo planar 2-conexo con al menos 3 vértices. Sea $n_i$ el número de sus vértices de grado $i$, y sea $f_i$ el número de caras (en algún dibujo planar fijo) limitados por ciclos de longitud $i$. Entonces se cumple:*

$$\sum_{i\geq 1}(6-i)n_i = 12 + 2\sum_{j\geq 3}(j-3)f_j$$

*o que es lo mismo:*

$$5n_1+4n_2+3n_3+2n_4+n_5-n_7-2n_8-\ldots = 12+2f_4+4f_5+6f_6+\ldots$$

De la proposición anterior se observa que $5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12$, así todo grafo planar con al menos 3 vértices contiene al menos 3 vértices de grado no mayor que 5.

# Demostración de la Proposición 3

Observe que:

$$|V| = \sum_i n_i, \quad f = \sum_i f_i.$$

Reemplazando estas expresiones en la fórmula de Euler, se obtiene:

$$2|E| = 2(|V| + f - 2) = \sum_i 2n_i + \sum_j 2f_j - 4.$$

Por conteo similar se obtiene las siguientes relaciones:

$$\sum_i in_i = 2|E| = \sum_j jf_j.$$

# Demostración de la Proposición 3 (cont.)

De ambas expresiones para $2|E|$, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\sum_j (j-2)f_j + 4 = \sum_i 2n_i, \quad \sum_j 2f_j = \sum_i (i-2)n_i + 4.$$

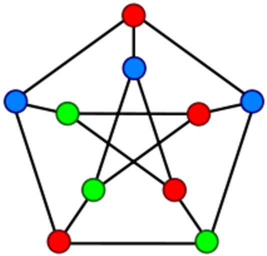
Si multiplicamos a la primera de estas igualdades por 2 para luego sustraerle la segunda, resulta:

$$\sum_i (6-i)n_i - 4 = 2\sum_j (j-3)f_j + 8.$$

# Tabla de contenidos

## Definición 2

*Sea $G = (V, E)$ un grafo, y sea $k$ un número natural. Una función $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ es llamado una* **coloración** *del grafo $G$ si $c(x) \neq c(y)$ para todo $\{x, y\} \in E$. El* **número cromático** *de $G$ denotado por $\chi(G)$, es el mínimo $k$ tal que existe un coloración $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$.*



# Observaciones:

¿Qué podemos decir de $\chi(G)$ en un grafo $G$ cualquiera?.
Lo primero, que si $G$ tiene aristas, entonces $\chi(G)$ está siempre comprendido entre 2 y el número de vértices del grafo, en efecto:

1. Por un lado, $\chi(G) \leq |V(G)|$ para todo grafo $G$, porque una coloración que siempre es válida (aunque, desde luego, poco efectiva) es asignar a cada vértice un color distinto.
2. Por otro lado, si el grafo contiene al menos una arista, entonces necesitaremos dos colores como mínimo. Es decir, si $|E(G)| \geq 1$ entonces $\chi(G) \geq 2$.

# Propiedades

1. Si $G$ contiene a $G'$ como subgrafo, entonces $\chi(G) \geq \chi(G')$.
2. Si $G$ tiene $k$ componentes conexas $G_1, G_2, \ldots, G_k$ que tienen números cromáticos $\chi(G_1), \chi(G_2), \ldots, \chi(G_k)$ respectivamente, entonces $\chi(G) = \text{máx}_{1 \leq i \leq k}\{\chi(G_i)\}$.
3. Si $G$ y $G'$ son isomorfos, entonces $\chi(G) = \chi(G')$.

# Ejemplo:

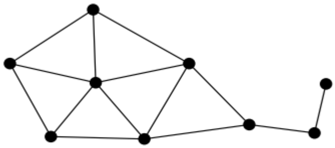
¿Cuál es el número cromático del grafo bipartito completo $K_{m,n}$ donde $m$ y $n$ son enteros positivos?

**Solución:** El número de colores necesarios puede observarse que depende de $m$ y $n$. Pero observe que solamente dos colores son necesarios, porque $K_{m,n}$ es un grafo bipartito. De aquí, $\chi(K_{m,n}) = 2$. Esto significa que podemos colorear el conjunto de $m$ vértices con un color y el conjunto de $n$ vértices con un segundo color. Observe que las aristas conectan solamente un vértice del conjunto de $m$ vértices y un vértice del conjunto de $n$ vértices, con vértices no adyacentes tienen el mismo color.

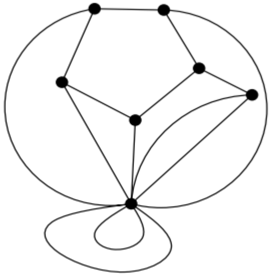
**Definición 3 (Grafo dual)**

*Sea $G$ un grafo topológico planar, es decir, un grafo planar $(V, E)$ con un dibujo planar asociado. Sea $\mathcal{F}$ de conjunto de caras de $G$. Definimos un grafo, posiblemente con lazos y múltiples aristas, de la forma $(\mathcal{F}, E, \epsilon)$, donde $\epsilon$ es definido por $\epsilon(e) = \{F_i, F_j\}$ siempre que la arista e es una frontera común de las caras $F_i$ y $F_j j$ (también permitimos $F_i = F_j$), en el caso cuando la misma cara pertenece a ambos lados de una arista dada). Este grafo $(\mathcal{F}, E, e)$ es llamado el* **dual** *(geométrico) de $G$, y es denotado por $G^*$.*

# Ejemplo grafo dual

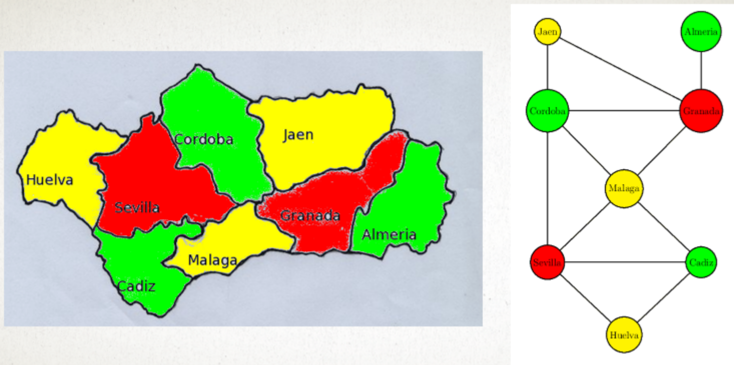


$G$

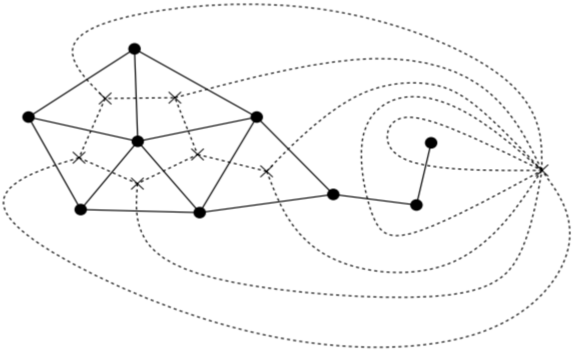


$G^*$

# Ejemplo grafo dual



El grafo dual $G^*$ puede ser dibujado junto con el dibujo del grafo $G$. Elija un punto $b_F$ dentro de cada cara $F$ de $G$ y para cada arista $e$ de $G$ dibujamos un arco cruzando $e$ y conectando los puntos $b_F$ y $b_{F'}$, donde $F$ y $F'$ son las caras adyacentes a la arista $e$. Este arco permanece completamente en las caras $F$ y $F'$. De este modo, se obtiene el dibujo planar de $G^*$.



¿$\chi(G) \leq 4$ para cualquier grafo planar $G$?

**Teorema 2**

*Si $G$ es un grafo planar, simple y conexo, entonces $\chi(G) \leq 4$.*

Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 4**

*Cualquier grafo planar satisface $\chi(G) \geq 5$.*

# Números cromáticos conocidos

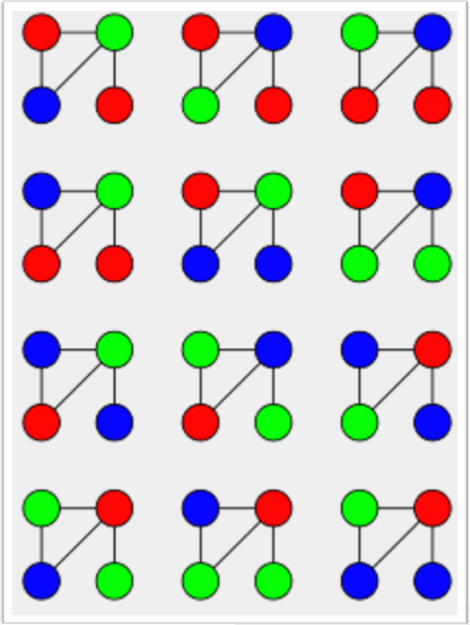
1. Grafo completo $K_n$: $\chi(K_n) = n$.
2. Grafo lineal (camino) $L_n$: $\chi(L_n) = 2$.
3. Grafo vacío $N_n$: $\chi(N_n) = 1$.
4. Ciclo $C_n$ ($n$ par): $\chi(C_n) = 2$.
5. Ciclo $C_n$ ($n$ impar): $\chi(C_n) = 3$.
6. Grafo bipartito $G$: $\chi(G) = 2$.
7. Grafo bipartito completo $K_{n,m}$: $\chi(K_{n,m}) = 2$.

# Polinomio cromático

No sólo interesa saber si se puede colorear un grafo con $k$ colores, sino también de cuántas maneras se puede colorear.
Como queremos contar y calcular, considere un grafo $G$ y para cada entero $k \geq 1$ definimos:

$$\begin{aligned} P_G(k) &= \#\{\text{coloraciones distintas de } G \\ &\quad \text{usando los colores de la colección } \{1, \ldots, k\}\} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta cuenta que no es necesario usarlos todos.
Observe que $P_G$ es una función de $k$, que resulta ser un polinomio en $k$, que llamaremos el **polinomio cromático** de $G$.



El polinomio cromático se pregunta cuántas coloraciones, y el número cromático si hay alguna, así que cuál es el número cromático debe de quedar recogido dentro del propio polinomio cromático. En efecto:

1. Con menos de $\chi(G)$ colores no podemos colorear el grafo, así que $P_G(k) = 0$ si $k < \chi(G)$.
2. Pero con exactamente $\chi(G)$ colores se puede colorear el grafo de al menos una forma, por tanto, $P_G(\chi(G)) \geq 1$.
3. De un cierto grafo $G$ ya conocemos $P_G(k)$, el número de coloraciones distintas con $k$ colores. Supongamos que ahora en nuestra paleta de colores disponemos de algunos colores más, digamos $k' > k$. ¿Cuántas coloraciones podremos formar con esos $k'$ colores?. Lo que es seguro, es que las que ya teníamos con $k$ colores, seguiremos teniéndolas ahora y seguramente algunas más. Por tanto:

$$\text{si} \quad k < k' \Rightarrow P_G(k) \leq P_G(k')$$

Resumiendo las tres observaciones anteriores, deducimos que:

$$\begin{array}{lcl} \text{Si} \quad k \geq \chi(G) & \Rightarrow & P_G(k) \geq 1, \\ \text{Si} \quad k < \chi(G) & \Rightarrow & P_G(k) = 0 \end{array}$$

Así, que si tuviéramos la expresión del polinomio cromático, podríamos obtener el valor del número cromático como el **menor valor entero** de $k$ en el que $P_G(k)$ no se anula.

# Polinomios cromáticos de algunos grafos

1. Triángulo $K_3$: $P_G(k) = k(k-1)(k-2)$.
2. Grafo completo $K_n$: $P_G(k) = k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$.
3. Árbol con $n$ vértices: $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$.
4. Ciclo $C_n$: $P_G(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$.

# Ejemplo: Polinomio cromático del grafo lineal $L_n$

Para empezar, considere el grafo lineal con tres vértices $L_3$. Con 0 o con 1 color no se puede colorear, así que $P_{L_3}(0) = 0$ y $P_{L_3}(1) = 0$. ¿Y para que número de colores $k$ general? Intentemos contar las coloraciones directamente. Tendremos $k$ posible colores para el vértice $v_1$, una vez coloreado, tendremos $k - 1$ colores disponibles para $v_2$, porque está prohibido utilizar el color que hayamos asignado al vértice $v_1$. Finalmente, para $v_3$ también hay un color prohibido, el utilizado para $v_2$, así que utilizando la regla del producto:

$$P_{L_3}(k) = k(k-1)(k-1) = k(k-1)^2.$$

Un argumento análogo nos permite concluir que, para el grafo lineal con $n$ vértices $L_n$, se cumple:

$$P_{L_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$$

Por tanto, $\chi(L_n) = 2$, como ya sabíamos.