Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias

PRÁCTICA CALIFICADA 6

Integrantes:

- **Ananau -**
- **Ananau -**
- **Ananau -**
- **Ananau -**

Docente:

- **Caytuiro Sandoval David Paul**

30 de septiembre de 2024

Matriz de Jordan

1. Matriz a trabajar para conseguir la forma de Jordan

Siendo la matriz A de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Métodos a emplear

2.1. Función Característica

Hallaremos los autovalores propios para esta matriz y anotaremos su multiplicidad algebraica. Para hallar los autovalores se tendrá que resolver la $\det[X \cdot I - A]$.

La matriz será de la forma:

$$\begin{bmatrix} x-2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

Ahora hallaremos la función característica de la matriz al reemplazar la forma $\det[X \cdot I - A]$:

$$f_x = (x-1)^4$$

Evaluamos en 0 f_x para encontrar los autovalores, reemplazando dentro de la ecuación tendremos como raíces a $\lambda = 1$ con una multiplicidad algebraica de $m = 4$. Ahora hallaremos la multiplicidad geométrica.

Para ello buscaremos aquellos autovectores que cumplan con $(A - 1 \cdot I) \cdot v = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x - y + z - w &= 0 \\ z - w &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= y \\ z &= w \end{aligned}$$

$$(x, x, w, w) = x(1, 1, 0, 0) + w(0, 0, 1, 1)$$

Entonces la multiplicidad geométrica es igual a 2 (que es distinto a la multiplicidad algebraica), entonces necesitamos completar aquellos vectores con otros dos más, siendo $L = A - 1 \cdot I$.

$$L^2 = 0$$

Entonces su índice de nilpotencia es igual a 2.

Para que estos vectores sean linealmente dependientes, se debe cumplir:

$$A^2 e_2 = -Ae_2 - e_2$$

Entonces, tenemos:

$$A^2 e_2 + Ae_2 + e_2 = 0$$

Por lo tanto, el polinomio minimal asociado a e_2 es:

$$m_{e_2}(x) = x^2 + x + 1$$

2.2. Polinomio Minimal

Para calcular el polinomio minimal, primero tomamos una base canónica de $\mathbb{R}^4$:

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

Luego, hallamos los vectores resultantes de aplicar la matriz A a los vectores de la base, denotados como:

$$mE = \{me_1, me_2, me_3, me_4\}$$

Aquí, me_i representa la aplicación de la matriz A al vector e_i de la base canónica.

Consideremos la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos Ae_i para cada e_i en la base canónica de $\mathbb{R}^4$:

2.2.1. Cálculo de m_{e_1}

$$Ie_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = e_1, \quad Ae_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix} = 2e_1 + e_2, \quad A^2e_1 = \begin{bmatrix}3\\2\\0\\0\end{bmatrix} = 3e_1 + 2e_2$$

Ahora estos vectores sean linealmente dependientes, se debe cumplir:

$$A^2e_1 = 2Ae_1 - e_1$$

Entonces, tenemos:

$$A^2e_1 - 2Ae_1 + e_1 = 0$$

Por lo tanto, el polinomio minimal asociado a e_1 es:

$$m_{e_1}(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

2.2.2. Cálculo de m_{e_2}

$$Ie_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = e_2, \quad Ae_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = -e_1, \quad A^2e_2 = \begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\0\end{bmatrix} = -2e_1 - e_2$$

Para que estos vectores sean linealmente dependientes, se debe cumplir:

$$A^2e_2 = 2Ae_2 - e_2$$

Entonces, tenemos:

$$A^2e_2 - 2Ae_2 + e_2 = 0$$

Por lo tanto, el polinomio minimal asociado a e_2 es:

$$m_{e_2}(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

2.2.3. Cálculo de m_{e_3}

$$Ie_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = e_3, \quad Ae_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix} = e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4, \quad A^2e_3 = \begin{bmatrix}2\\2\\3\\2\end{bmatrix} = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 2e_4$$

Para que estos vectores sean linealmente dependientes, se debe cumplir:

$$A^2e_3 = 2Ae_3 - e_3$$

Entonces, tenemos:

$$A^2e_3 - 2Ae_3 + e_3 = 0$$

Por lo tanto, el polinomio minimal asociado a e_3 es:

$$m_{e_3}(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

2.2.4. Cálculo de m_{e_4}

$$Ie_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = e_4, \quad Ae_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -e_1 - e_2 - e_3, \quad A^2e_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = -2e_1 - 2e_2 - 2e_3 - e_4$$

Para que estos vectores sean linealmente dependientes, se debe cumplir:

$$A^2e_4 = 2Ae_4 - e_4$$

Entonces, tenemos:

$$A^2e_4 - 2Ae_4 + e_4 = 0$$

Por lo tanto, el polinomio minimal asociado a e_4 es:

$$m_{e_4}(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Finalmente, el polinomio minimal de A es el mínimo común múltiplo de los polinomios minimal de los vectores base:

$$m_A(x) = \text{mcm}(m_{e_1}(x), m_{e_2}(x), m_{e_3}(x), m_{e_4}(x))$$

Dado que todos los polinomios minimal son iguales, tenemos:

$$m_A(x) = \text{mcm}((x-1)^2, (x-1)^2, (x-1)^2, (x-1)^2) = (x-1)^2$$

2.3. Núcleos

La dimensión del núcleo de L es igual a 2, y la dimensión del núcleo de L^2 es igual a 4.

$$\text{Nu}(L) \subseteq \text{Nu}(L^2) = \mathbb{R}^4$$

El núcleo de L está dado por:

$$\text{Nu}(L) = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\} = \{v_1, v_2\}$$

Ahora para completar la base encontraremos v_3 y v_4.
$(A - 1 \cdot I) \cdot v_3 = v_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$x - y + z - w = 1$$
$$z - w = 0$$

$$x = y + 1$$
$$z = w$$

$$(x, y, z, w) = y(1, 1, 0, 0) + w(0, 0, 1, 1) + (1, 0, 0, 0)$$
$$\rightarrow v_3 = (1, 0, 0, 0)$$

Ahora para v_4:
$(A - 1 \cdot I) \cdot v_4 = v_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x - y + z - w = 0$$
$$z - w = 1$$

$$(x, y, z, w) = y(1, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1) + (-1, 0, 1, 0)$$
$$\rightarrow v_4 = (-1, 0, 1, 0)$$

Tomamos la base de Jordan como el conjunto $P = \{v_1, v_3, v_2, v_4\}$. La matriz P sería:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Obtención de la forma de Jordan

3.1. Determinación de la Matriz Inversa mediante la Matriz Adjunta

Dada la matriz de paso P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para calcular los cofactores C_{ij}, utilizamos la fórmula:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \left| \text{Submatriz de } P \text{ eliminando la fila } i \text{ y la columna } j \right|$$

Calculamos cada cofactor individualmente:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot -1 = 1$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$C_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 = 0$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot -1 = 1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot -1 = -1$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 = 0$$

$$C_{24} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot -1 = 1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{34} = (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$C_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$C_{43} = (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$C_{44} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$$

La matriz de cofactores C es:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz adjunta C^T es la transpuesta de la matriz de cofactores C:

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

El determinante de P es:

$$\det(P) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

La matriz inversa P^{-1} se calcula como:

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} C^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz inversa P^{-1} de la matriz P se calcula como se muestra arriba. Para encontrar la forma de Jordan de J, seguimos los siguientes pasos:

3.2. Calcular $P^{-1} \cdot A$

Consideramos la multiplicación $P^{-1} \times A$:

$$P^{-1} \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos la multiplicación matriz por matriz:
El resultado es:

$$P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.3. Calcular $P^{-1} \cdot A \times P$

Consideramos la multiplicación $P^{-1} \times A \times P$:

$$P^{-1} \times A \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos cada elemento del producto matricial: El resultado es:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4. Forma de Jordan J

Por lo tanto, la forma de Jordan J es igual a:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2022-1

[Cod: BMA02] **[Curso: Cálculo Integral]**

Solucionario - Práctica Calificada N^o 5

1. Determine si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

   I. Las coordenadas del centroide de la región acotada por los gráficas de $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = 0$ son $\left(0, \dfrac{4b}{3\pi}\right)$. (1 punto)

   II. El volumen del solido generado por la rotación de la región acotado por $(x-4)^2 + y^2 = 4$ alrededor del eje Y es igual a $16\pi^2$ u^2. (1 punto)

   III. La longitud de arco de la curva $\mathscr{C} : f(x) = \cosh(x), x \in [0, 1]$ es igual a $f'(1)$. (1 punto)

   IV. El área de la superficie de revolución generada por la curva $r = \operatorname{sen}\theta$ al girar alrededor del eje polar es igual a $2\pi^2$ u^2. (1 punto)

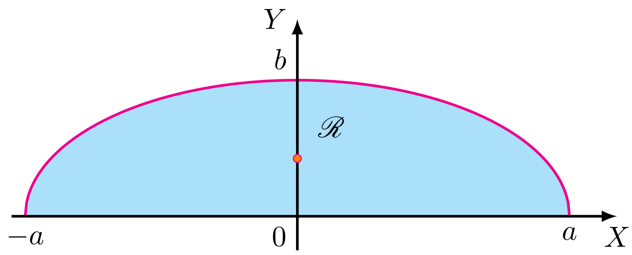
Resolución:

I. **(VERDADERO)**. Representamos la región

$$\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, -a \le x \le a\}$$

El área de la región $\mathscr{R}$ está dado por

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-a}^{a} (\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2})\, dx \\
A &= \frac{b}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, a\cos\theta\, d\theta \\
A &= \frac{ab}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\
A &= \frac{ab}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
A &= \frac{\pi ab}{2}
\end{aligned}$$



La región $\mathscr{R}$ es simétrica respecto de la recta Y, luego $\overline{x} = 0$.

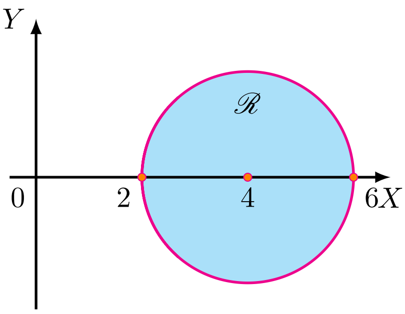
La ordenada del centroide de $\mathscr{R}$ esta dado por:

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2})^2\,dx\\
\overline{y} &= \frac{2}{ab\pi}\cdot\frac{b^2}{2a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx\\
\overline{y} &= \frac{b^2}{\pi a^3}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}\\
\overline{y} &= \frac{4b}{3\pi}
\end{aligned}$$

II. **(FALSO)**. Representamos la región acotado por $(x-4)^2+y^2=4$.

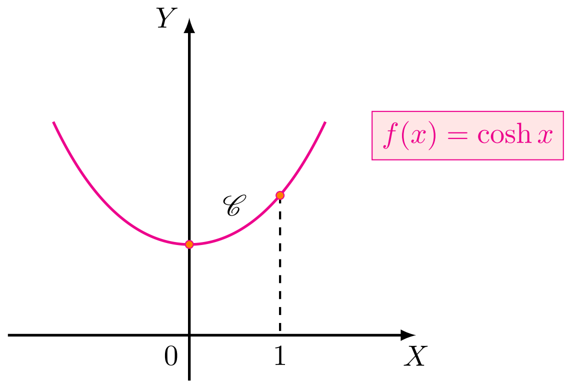
Por el teorema de Pappus, el volumen del solido generado por $\mathscr{R}$ al girar alrededor del eje Y esta dado por

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi(4)[\pi(2)^2]\\
V &= 32\pi^2
\end{aligned}$$



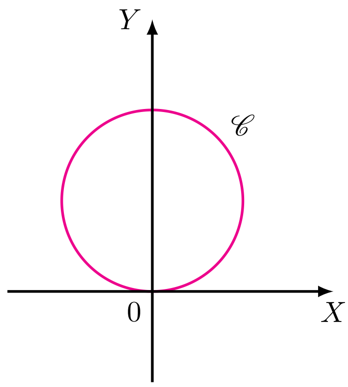
III **(VERDADERO)**. Representamos la curva $\mathscr{C}: f(x)=\cosh(x), x\in[0,1]$. Luego, $f'(x)=\operatorname{senh} x$, la longitud del arco $\mathscr{C}$, esta dado por

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\\
L &= \int_0^1\sqrt{1+\operatorname{senh}^2 x}\,dx\\
L &= \int_0^1\cosh x\,dx\\
L &= [\operatorname{senh} x]_0^1\\
L &= \operatorname{senh} 1\\
L &= f'(1)
\end{aligned}$$

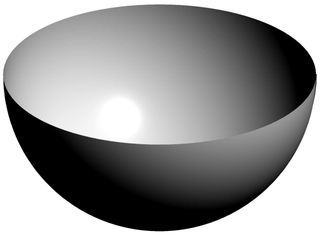


IV. **(FALSO)**. Representamos la curva $\mathscr{C}: r=\operatorname{sen}\theta$. El área de la superficie de revolución generada por la curva $\mathscr{C}$ al girar alrededor del eje polar esta dado por

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^{\pi} r\operatorname{sen}\theta\sqrt{r^2+[r']^2}\,d\theta\\
S &= 2\pi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta\\
S &= \pi\int_0^{\pi}2\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\\
S &= \pi\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta\\
S &= \pi\left[\theta-\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right]_0^{\pi}\\
S &= \pi^2
\end{aligned}$$



2. Determinar el trabajo requerido para bombear el agua que llena un recipiente hemisférico cuyo radio mide R, por encima del recipiente. **Considere:** p el peso de una unidad de volumen de agua.



(4 puntos)

Resolución: Consideramos el agua dividido en discos de espesor Δx y radio x. El incremento de fuerza para cada disco está dado por su peso

$$\Delta F = p\pi x^2 \Delta y$$

Luego,

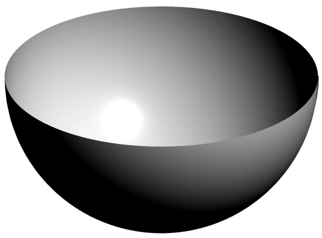
$$\begin{aligned} x^2 + (R-y)^2 &= R^2 \\ x^2 &= 2Ry - y^2 \end{aligned}$$

El incremento de trabajo está dado por

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta F(R-y) \\ \Delta W &= p\pi(2Ry - y^2)\Delta y(R-y) \\ \Delta W &= p\pi(2R^2y - 3Ry^2 + y^3)\Delta y \end{aligned}$$

Luego, el trabajo requerido para bombear el agua que llena el recipiente hemisférico esta dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_0^R p\pi(2R^2y - 3Ry^2 + y^3)\,dy \\ W &= p\pi\left[R^2y^2 - Ry^3 + \frac{1}{4}y^4\right]_0^R \\ W &= \frac{p\pi R^4}{4} \end{aligned}$$



3. Considere la curva $\mathscr{C}$ cuya ecuación polar es dado por $r = 2\operatorname{sen}^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

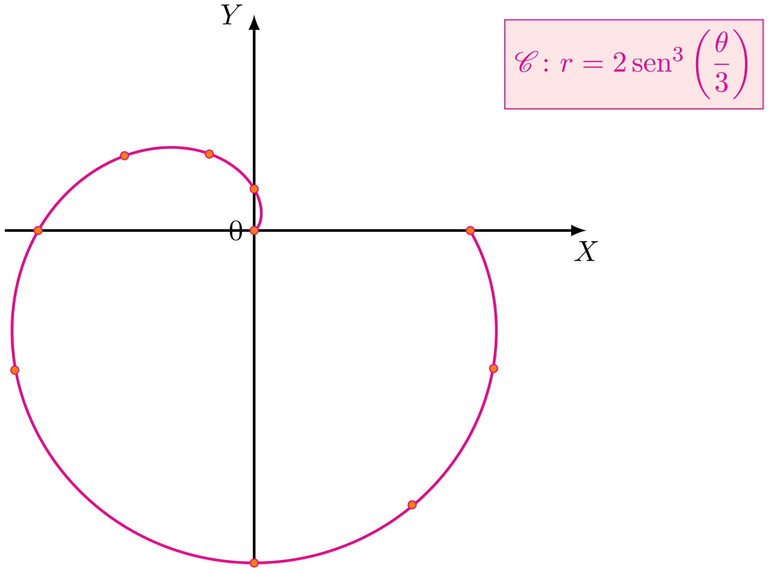
   a) Trace la gráfica de la curva $\mathscr{C}$. (1.5 puntos)

   b) Calcule la longitud de la curva $\mathscr{C}$. (2.5 puntos)

Resolución:

a) Se tabula algunos puntos de la curva $r = 2\operatorname{sen}^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$

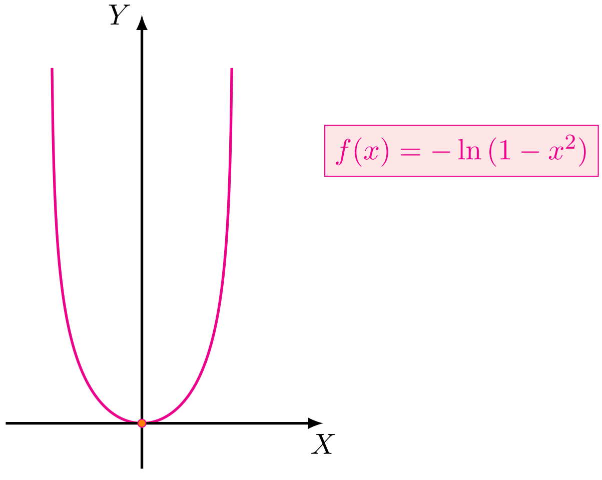
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
r	0.53	0.53	0.9	1.3	1.91	2	1.66	1.91	1.3



b) Se tiene que $r' = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$La longitud de la curva $\mathscr{C}$ esta dado por

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + [r']^2}\, d\theta \\
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^6\left(\frac{\theta}{3}\right) + 4\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)}\, d\theta \\
L &= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{3}\right)\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\right]}\, d\theta \\
L &= \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta \\
L &= \int_0^{2\pi} \left[1 - \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right] d\theta \\
L &= \left[\theta - \frac{3}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right]_0^{2\pi} \\
L &= 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

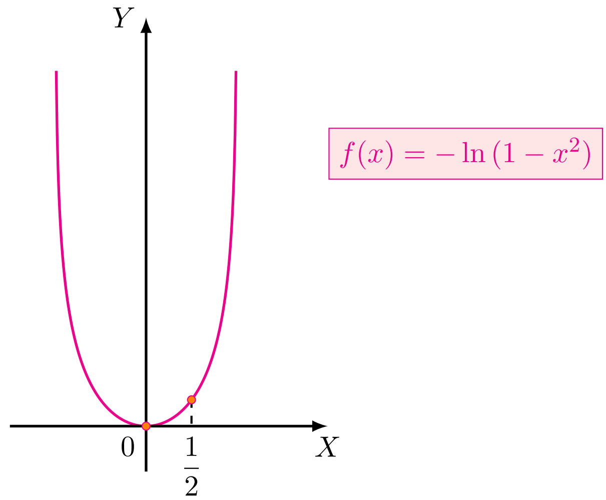
4. En la figura se muestra la gráfica de la función $f(x) = -\ln(1-x^2)$. Calcule el área de la superficie de revolución generada por la curva $\mathscr{C}: y = f(x), 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ al girar alrededor del eje Y.



(4 puntos)

Resolución: De la representación de la gráfica de $f(x) = -\ln(1-x^2)$, se tiene $f'(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$. El área de la superficie de revolución generada por la curva $\mathscr{C}: y = f(x), 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ al girar alrededor del eje Y esta dado por

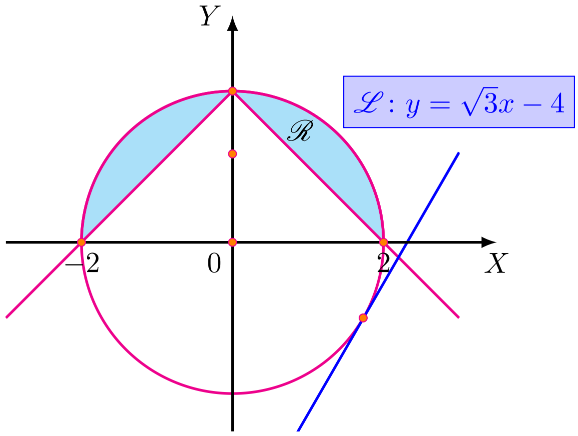
$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1+(y')^2}\, dx \\
S &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\, dx \\
S &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}}\, dx \\
S &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) dx \\
S &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x}{1-x^2} - x\right) dx \\
S &= 2\pi \left[-\ln(1-x^2) - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
S &= 2\pi \left[-\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{8}\right] \\
S &= 2\pi \left[\ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{8}\right] \\
S &\approx 1.024
\end{aligned}
$$



Por lo tanto, el área de la superficie de revolución es aproximadamente $1.024\ \mathrm{u}^2$.

5. Sea la región $\mathscr{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4, 2 - |x| \leq y\}$. Calcule el volumen del sólido generado al girar la región $\mathscr{R}$ alrededor de la recta $\mathscr{L} \colon y = \sqrt{3}x - 4$. (4 puntos)

Resolución: Representamos la región $\mathscr{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4, 2 - |x| \leq y\}$



El área de la región $\mathscr{R}$ esta dado por

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx - \int_{-2}^{2} (2 - |x|)\, dx \\
A &= \frac{\pi(2)^2}{2} - \frac{(4)(2)}{2} \\
A &= 2(\pi - 2)
\end{aligned}
$$

La región $\mathscr{R}$ es simétrica respecto del eje Y, luego $\overline{x} = 0$.

La ordenada del centroide $\mathscr{R}$ esta dado por

$$
\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{2A} \int_{-2}^{2} [\sqrt{4 - x^2}^2 - (2 - |x|)^2]\, dx \\
\overline{y} &= \frac{1}{A} \int_{0}^{2} (4x - 2x^2)\, dx \\
\overline{y} &= \frac{1}{2(\pi - 2)} \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \\
\overline{y} &= \frac{4}{3(\pi - 2)}
\end{aligned}
$$

Así, las coordenadas del centroide es $\left(0, \dfrac{4}{3(\pi - 2)}\right)$.

La distancia del centroide a la recta $\mathscr{L} \colon \sqrt{3}x - y - 4 = 0$ esta dado por

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\left| \sqrt{3}(0) - \dfrac{4}{3(\pi - 2)} - 4 \right|}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2}} \\
d &= \frac{2(3\pi - 5)}{3(\pi - 2)}
\end{aligned}
$$

Por el teorema de Pappus, el volumen del solido generado por $\mathscr{R}$ esta dado por

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi d A \\
V &= 2\pi \left[\frac{2(3\pi - 5)}{3(\pi - 2)} \right] 2(\pi - 2) \\
V &= \frac{8\pi}{3}(3\pi - 5)
\end{aligned}
$$

UNI, 18 de julio de 2022*

*Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: BMA02] **[Curso: Cálculo Integral]**

Solucionario - Práctica Calificada N^o 4

1. Determine si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

   I. Las ecuaciones polares $r = \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = \operatorname{sen}(-2\theta)$ tienen la misma gráfica. (1 punto)

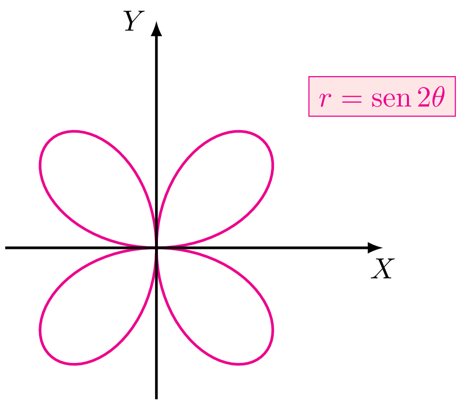
   II. El área de un pétalo de la curva rosa $r = 3\cos 3\theta$ es $\dfrac{3\pi}{2}$ u^2. (1 punto)

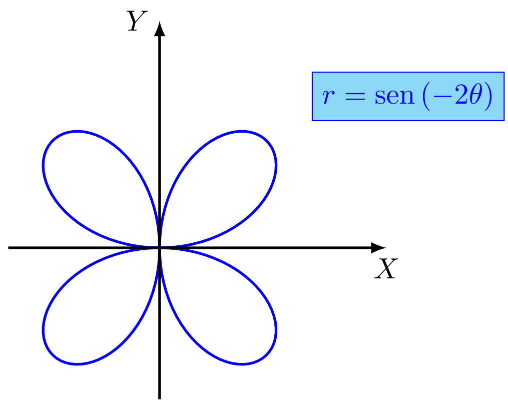
   III. La curva Folium de Descartes representada en coordenadas paramétricas por $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$ y $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$, se representa en coordenadas polares mediante $r = \dfrac{3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}$. (1 punto)

   IV. El volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región determinada por el arco de cicloide $x = (t - \operatorname{sen} t)$, $y = 1 - \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$ alrededor del eje X es $3\pi^2$ u^3. (1 punto)

Resolución:

I. **(VERDADERO)**. Las gráficas de las curvas $r = \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = \operatorname{sen}(-2\theta)$ son simétricas respecto del eje polar, el eje $\dfrac{\pi}{2}$ y el polo.





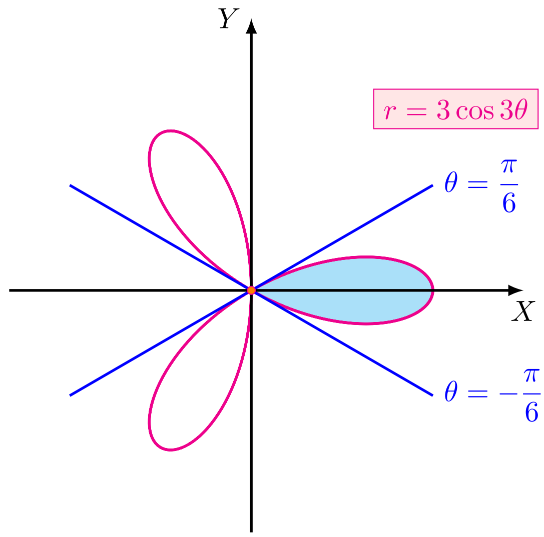
II. **(FALSO)**.

Las tangentes a la curva rosa $r = 3\cos 3\theta$ en el polo se dan cuando $f(\theta) = 0$.

$$\begin{aligned} 3\cos 3\theta &= 0 \\ 3\theta &= (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \theta &= (2k+1)\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Luego, el área del pétalo esta dado por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (3\cos 3\theta)^2\, d\theta \\ A &= \frac{9}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1+\cos 6\theta}{2}\right) d\theta \\ A &= \frac{9}{4}\left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 6\theta}{6}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ A &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$



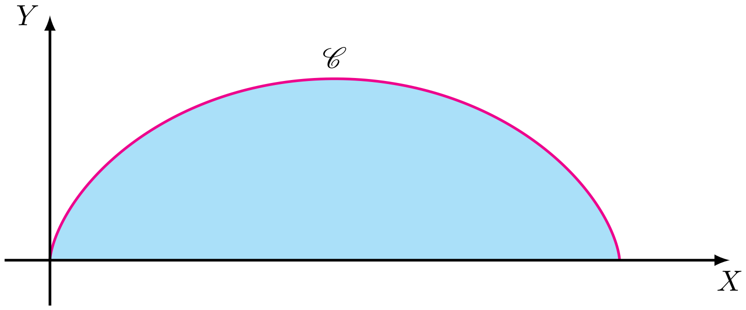
III **(VERDADERO)**. La curva Folium de Descartes representada en coordenadas paramétricas por $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$ y $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$. En coordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $y = \tan\theta$ y $\dfrac{y}{x} = \tan\theta$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \tan\theta \\ \frac{\frac{3t^2}{1+t^3}}{\frac{3t}{1+t^3}} &= \tan\theta \\ t &= \tan\theta \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} r\cos\theta &= x \\ r\cos\theta &= \frac{3t}{1+t^3} \\ r\cos\theta &= \frac{3\tan\theta}{1+\tan^3\theta} \\ r &= \frac{3\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta} \end{aligned}$$

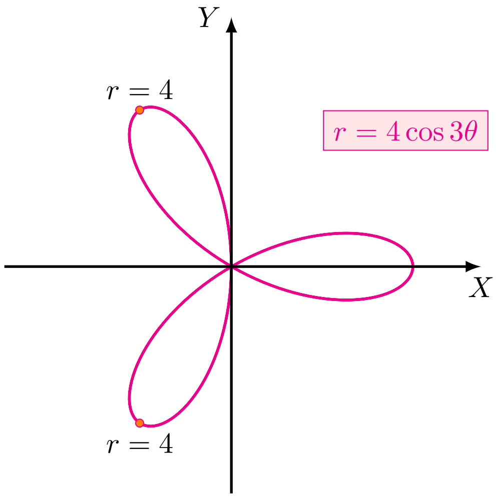
IV. **(FALSO)**. Representamos un arco de la cicloide $\mathscr{C}: \begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, t \in [0, , 2\pi]$.



El volumen del solido generado esta dado por

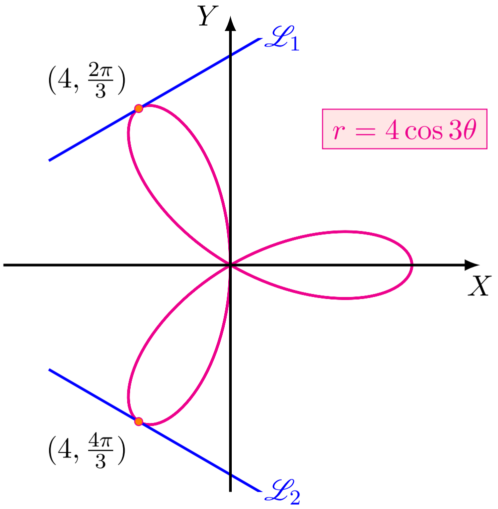
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \pi y^2 x'\, dt \\ V &= \int_0^{2\pi} \pi(1-\cos t)(1-\cos t)\, dt \\ V &= \pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt \\ V &= 5\pi^2 \end{aligned}$$

2. En la figura se muestra la gráfica con ecuación polar $r = 4\cos 3\theta$. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos indicados.



(4 puntos)

Resolución: De la figura,



$$\begin{aligned} r &= 4 \\ 4\cos 3\theta &= 4 \\ \cos 3\theta &= 1 \\ 3\theta &= 2k\pi \\ \theta &= \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

Luego, los puntos en coordenadas polares son $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ y $\left(4, \frac{4\pi}{3}\right)$, en coordenadas rectangulares son $(4\cos\frac{2\pi}{3}, 4\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3})$ y $(4\cos\frac{4\pi}{3}, 4\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3})$.

La pendiente de las rectas tangentes están dados por

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{r'\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-12\,\mathrm{sen}\,3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + 4\cos 3\theta\cos\theta}{-12\,\mathrm{sen}\,3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos 3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3\,\mathrm{sen}\,3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \cos 3\theta\cos\theta}{3\,\mathrm{sen}\,3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos 3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta} \end{aligned}$$

- En $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ la pendiente es

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{3\,\mathrm{sen}\,2\pi\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} - \cos 2\pi\cos\frac{2\pi}{3}}{3\,\mathrm{sen}\,2\pi\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} + \cos 2\pi\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}} \\ m_1 &= -\cot\frac{2\pi}{3} \\ m_1 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

- En $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ la pendiente es

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{3\,\mathrm{sen}\,4\pi\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} - \cos 4\pi\cos\frac{4\pi}{3}}{3\,\mathrm{sen}\,4\pi\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} + \cos 4\pi\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}} \\ m_2 &= -\cot\frac{4\pi}{3} \\ m_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Finalmente, las ecuaciones de las rectas tangentes están dados por

- Para la recta $\mathscr{L}_1$

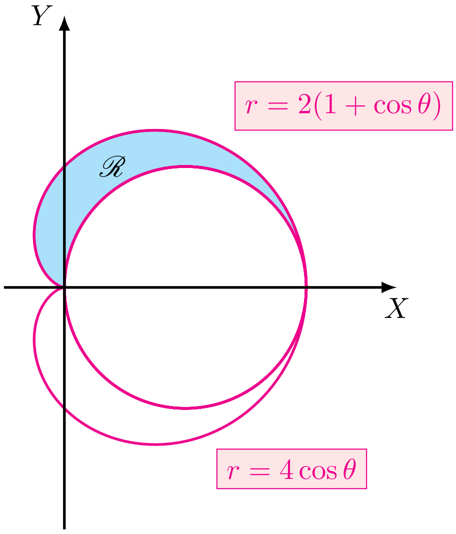
$$\begin{aligned} y - 4\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x - 4\cos\frac{2\pi}{3}) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{8}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

- Para la recta $\mathscr{L}_2$

$$\begin{aligned} y - 4\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x - 4\cos\frac{4\pi}{3}) \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{8}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

3. Sean las curvas $\mathscr{C}_1\colon r = 4\cos\theta$ y $\mathscr{C}_2\colon r = 2(1+\cos\theta)$. Calcule el área de la región determinada por las curvas $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ para todo $y \geq 0$. (4 puntos)

   Resolución: Representamos la región determinada por la circunferencia $\mathscr{C}_1\colon r = 4\cos\theta$ y la cardioide $\mathscr{C}_2\colon r = 2(1+\cos\theta)$ para todo $y \geq 0$.



El área de la región $\mathscr{R}$ esta dado por

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [2(1+\cos\theta)]^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [4\cos\theta]^2\,d\theta \\
A &= \int_0^{\pi} (3+4\cos\theta+\cos 2\theta)\,d\theta - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
A &= \left[3\theta + 4\operatorname{sen}\theta + \frac{3}{2}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{\pi} - 4\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
A &= 3\pi - 2\pi \\
A &= \pi
\end{aligned}$$

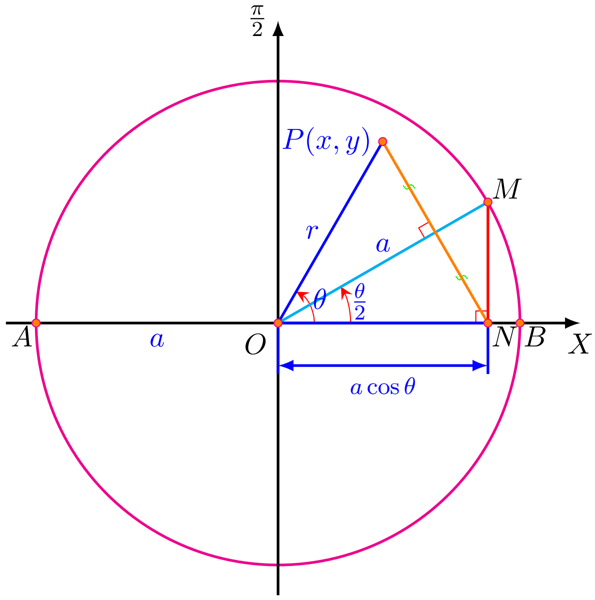
4. Dado una circunferencia de centro O cuyo radio mide a y de diámetro $\overline{AB}$. Sea M un punto que se desplaza sobre la circunferencia, N la proyección de M sobre $\overline{AB}$ y P el simétrico de N respecto de la recta $\overleftrightarrow{OM}$.

   a) Determine la ecuación en coordenadas polares del lugar geométrico descrito por P.

   (1.5 puntos)

   b) Trace la gráfica del lugar geométrico descrito por P, empleando simetrías, extensión y tabulación. (2.5 puntos)

Resolución: Si las coordenadas de P son (r, θ), entonces



a) De la figura, por el teorema de la mediatriz

$$\begin{aligned} d(O,P) &= d(O,N) \\ r &= a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

b)
- Simetrías.
  - Con el eje polar: (r,θ) por $(r,-\theta)$ se obtiene

$$\begin{aligned} r &= a\cos\left(\frac{-\theta}{2}\right) \\ r &= a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

    Por lo tanto es simétrica con respecto del eje polar.

  - Con el eje $\pi/2$: (r,θ) por $(-(-1)^n r, -\theta+n\pi)$, para $n=2$ se obtiene

$$\begin{aligned} -r &= a\cos\left(\frac{-\theta+2\pi}{2}\right) \\ r &= a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

    Por lo tanto es simétrica con respecto al eje $\frac{\pi}{2}$.

  - Con el polo: (r,θ) por $(-(-1)^n r, \theta+n\pi)$, para $n=2$ se obtiene

$$\begin{aligned} -r &= a\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{2}\right) \\ -r &= -a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ r &= a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

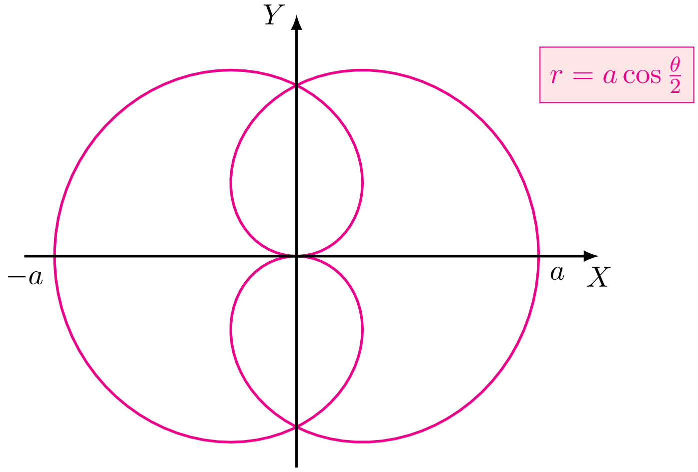
    Por lo tanto es simétrica con respecto al polo.

- Extensión. $\theta \in \mathbb{R}$ y $-a \leq r \leq a$

- Tabulación. Por ser simétrica respecto del eje $\pi/2$, es suficiente tabular $0 \leq \theta \leq \pi$:

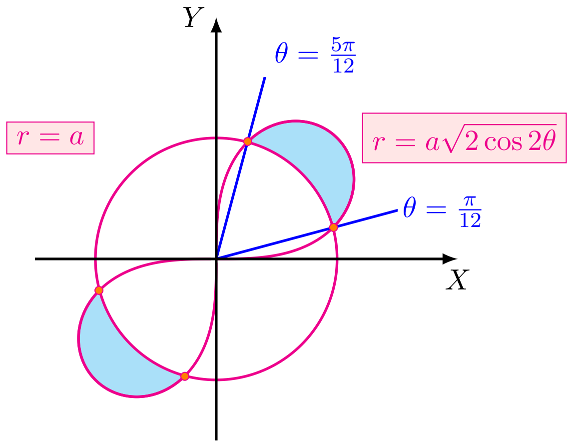
θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
r	a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	0

La gráfica es



5. Sea la región $\mathscr{R} = \{(r,\theta) \colon a \leq r \leq a\sqrt{2\operatorname{sen} 2\theta}, a > 0\}$. Calcule el volumen del sólido generado por la rotación de $\mathscr{R}$ alrededor del eje polar. (4 puntos)

Resolución: Representamos la lemniscata $r = a\sqrt{2\operatorname{sen} 2\theta}$, $a > 0$, la circunferencia $r = a$ y la región $\mathscr{R} = \{(r, \theta) \colon a \leq r \leq a\sqrt{2\operatorname{sen} 2\theta}, a > 0\}$



Determinamos los puntos de intersección, esto es

$$\begin{aligned} a\sqrt{2\operatorname{sen} 2\theta} &= a \\ \operatorname{sen} 2\theta &= \frac{1}{2} \\ 2\theta &= k\pi + (-1)^2 \left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \theta &= \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \left(\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Luego, los puntos de intersección son $(a, \frac{\pi}{12})$, $(a, \frac{5\pi}{12})$, $(a, \frac{13\pi}{12})$ y $(a, \frac{17\pi}{12})$. Finalmente, el volumen del sólido generado por la rotación de $\mathscr{R}$ alrededor del eje polar esta dado por

$$\begin{aligned} V &= 2\left[\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (a\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta})^3 \operatorname{sen}\theta \, d\theta - \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} a^3 \operatorname{sen}\theta \, d\theta\right] \\ V &= \frac{4\pi}{3}a^3 \left[2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} 2(\operatorname{sen} 2\theta)^{3/2}(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{aligned}$$

Evaluamos la integral

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (\operatorname{sen} 2\theta)^{3/2}(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

Hacemos $\theta = \dfrac{\pi}{4} - x$, luego $d\theta = -dx$. Si $\theta = \dfrac{\pi}{12}$, entonces $x = -\dfrac{\pi}{6}$ y si $\theta = \dfrac{5\pi}{12}$, entonces $x = \dfrac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)^{3/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)(-dx) \\ I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x)^{3/2}(\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx \\ I_1 &= \sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (1 - 2\operatorname{sen}^2 x)^{3/2} \cos x \, dx \end{aligned}$$

Hacemos $u = \sqrt{2}\operatorname{sen} x$, luego $du = \sqrt{2}\cos x$. Si $x = 0$, entonces $u = 0$ y si $x = \dfrac{\pi}{6}$, entonces $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - u^2)^{3/2}\, du$$

Hacemos $u = \operatorname{sen} t$, luego $du = \cos t\, dt$. Si $u = 0$, entonces $t = 0$ y si $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $t = \dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{sen}^2 t)^{3/2} \cos t\, dt \\ I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t\, dt \\ I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 dt \\ I_1 &= \frac{3\pi + 8}{32} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi}{3} a^3 \left[2\sqrt{2}\left(\frac{3\pi + 8}{32}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\ V &= \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{4} \end{aligned}$$

UNI, 04 de julio de 2022*

*Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática — Ciclo 2022-1

[Cod: BMA02] **[Curso: Cálculo Integral]**

Solucionario - Práctica Calificada N^o 3

1. Determine si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

I. El área de la región acotada por las curvas $x = 3y + 2$ y $x = y^3$ es igual a $\dfrac{27}{4}$ u^2. (1 punto)

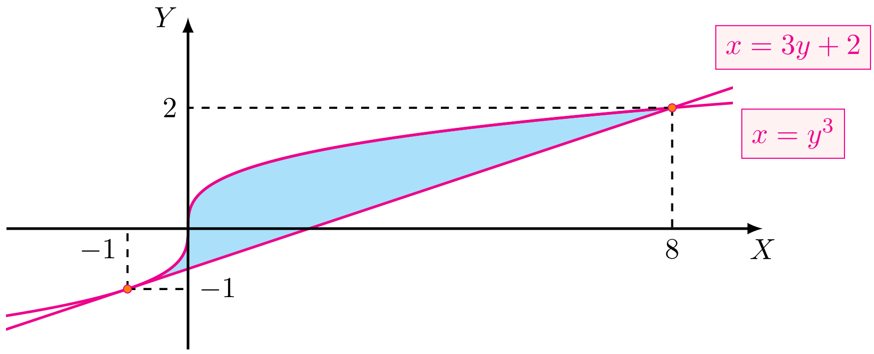
II. Si las gráficas de f y g se intersecan en el punto de abscisa $x = \dfrac{a+b}{2}$ del intervalo $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = 0$. (1 punto)

III. El volumen del sólido generado por la rotación de la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el eje X $(0 \le x \le \pi)$, alrededor del eje X es igual a 2π u^3. (1 punto)

IV. La integral $2\pi \displaystyle\int_0^2 x^3\, dx$ representa el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región acotada por $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$ alrededor del eje X. (1 punto)

Resolución:

I. **(VERDADERO)**. Representamos las curvas $x = 3y + 2$ y $x = y^3$



Determinando los puntos de intersección,

$$
\begin{aligned}
y^3 &= 3y + 2 \\
y^3 - 3y - 2 &= 0 \\
(y+1)^2(y-2) &= 0 \\
y = -1 &\ \vee\ y = 2
\end{aligned}
$$

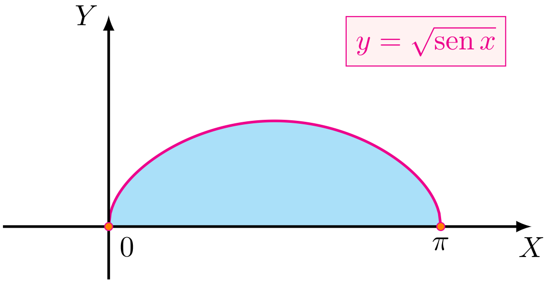
El área de la región está dado por

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} (3y + 2 - y^3)\, dy \\
A &= \left[\frac{3}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{4}y^4\right]_{-1}^{2} \\
A &= \frac{24}{7}
\end{aligned}
$$

II. **(FALSO)**. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = 2x - x^2$ para todo $x \in [0,2]$. Es claro que, las gráficas de f y g se intersecan en $(1,1)$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_a^b [x - (2x - x^2)]\, dx \\ \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \\ \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

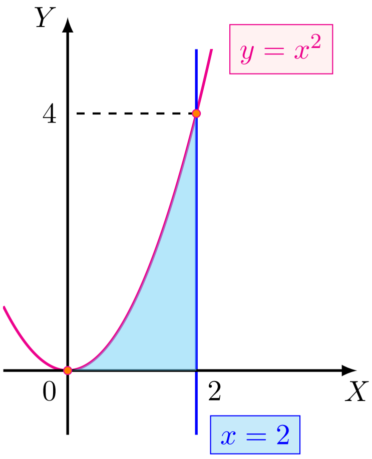
III **(VERDADERO)**. Representando la región acotada por la gráfica $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$



Por el método del disco, el volumen del sólido generado por la región alrededor del eje X esta dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \pi(\sqrt{\operatorname{sen} x})^2\, dx \\ V &= \pi\,[-\cos x]_0^\pi \\ V &= 2\pi \end{aligned}$$

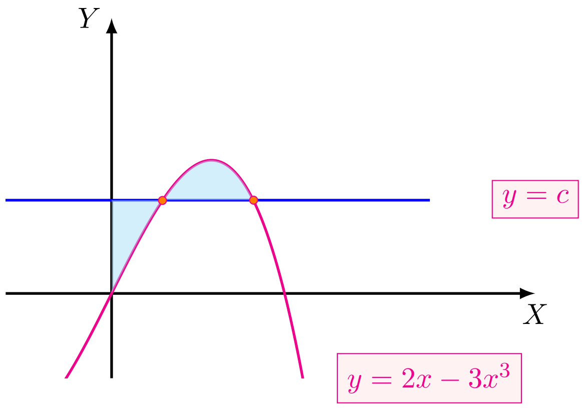
IV. **(FALSO)**. Representamos la región acotada por $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 2$.



Por el método de las capas cilíndricas, el volumen del sólido generado por la región alrededor del eje Y esta dado por

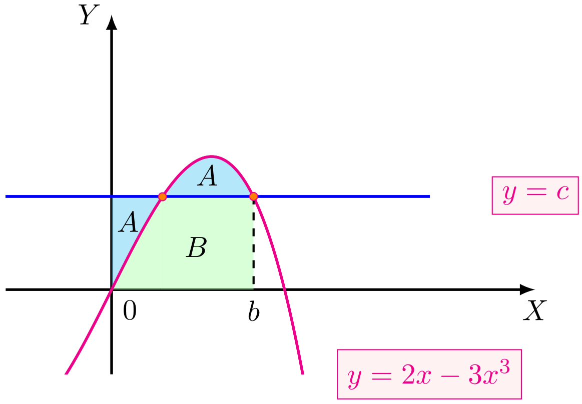
$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 2\pi x f(x)\, dx \\ V &= \int_0^4 2\pi x(x^2)\, dx \\ V &= 2\pi \int_0^4 x^3\, dx \end{aligned}$$

2. La recta horizontal $y = c$ interseca a la curva $y = 2x - 3x^3$ en el primer cuadrante tal como se muestra en la figura. Calcule el valor de c tal que las áreas de las regiones sombreadas sean iguales. (4 puntos)



Sugerencia: Iguale áreas de las regiones bajo las curvas $y = 2x - 3x^3$ y $y = c$, desde 0 hasta la abscisa del segundo punto de intersección.

Resolución: De la sugerencia dada, sea b la abscisa del segundo punto de intersección de las curvas $y = 2x - 3x^3$ y $y = c$.



$$\begin{aligned} A+B &= \int_0^b c\,dx \\ A+B &= [cx]_0^b \\ A+B &= bc \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+B &= \int_0^b (2x-3x^3)\,dx \\ A+B &= [x^2 - \frac{3}{4}x^4]_0^b \\ A+B &= b^2 - \frac{3}{4}b^4 \qquad (2) \end{aligned}$$

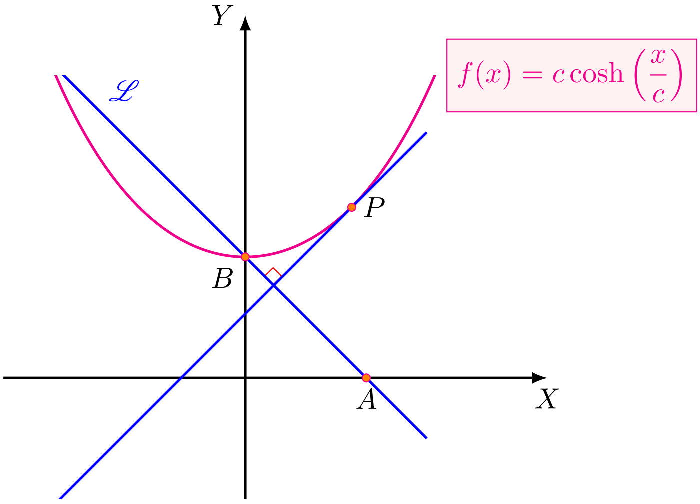
De (1) y (2), se tiene $c = b - \frac{3}{4}b^3$. Además $c = 2b - 3b^3$, luego

$$\begin{aligned} b - \frac{3}{4}b^3 &= 2b - 3b^3 \\ b\left(\frac{3}{2}b - 1\right)\left(\frac{3}{2}b + 1\right) &= 0 \\ b &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} c &= 2\left(\frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ c &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

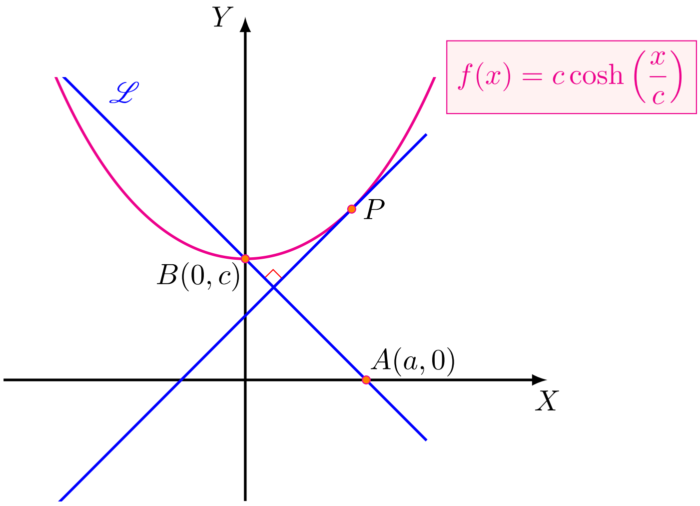
3. En la figura se muestra una catenaria dada por $f(x) = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ y la recta $\mathscr{L}$ perpendicular a la recta tangente a la catenaria en el punto $P(x_0, y_0)$. Demuestre que la longitud del segmento $\overline{AB}$ determinado por los ejes en la recta $\mathscr{L}$ es igual a y_0.



(4 puntos)

Resolución: De la regla de correspondencia de la catenaria, la pendiente de la recta $\mathscr{L}$ en el punto $P(x_0, y_0)$ esta dado por

$$
\begin{aligned}
m &= -\frac{1}{f'(x_0)} \\
m &= -\frac{1}{c\left(\frac{1}{c}\right)\operatorname{senh}\left(\frac{x_0}{c}\right)} \\
m &= -\frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{x_0}{c}\right)}
\end{aligned}
$$



Luego, $y_0 = c\cosh\left(\frac{x_0}{c}\right)$ y la ecuación de la recta $\mathscr{L}\colon y = \left(-\frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{x_0}{c}\right)}\right)x + c$. Además, $A \in \mathscr{L}$,

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(-\frac{1}{\operatorname{senh}\left(\frac{x_0}{c}\right)}\right)a + c \\
a &= c\operatorname{senh}\left(\frac{x_0}{c}\right)
\end{aligned}
$$

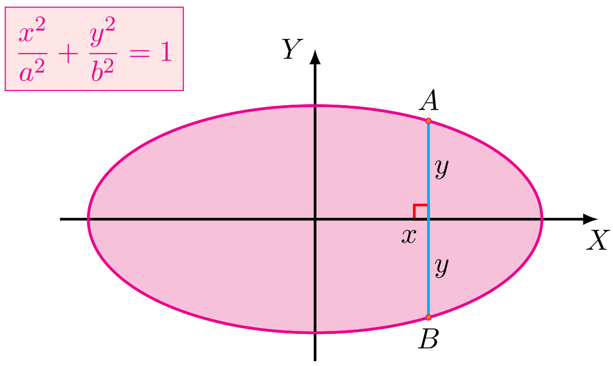
Finalmente,

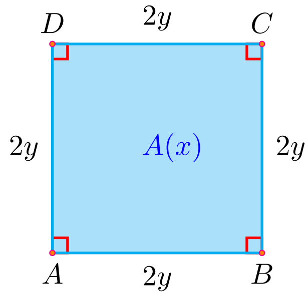
$$
\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(0-a)^2+(c-0)^2}\\
AB &= \sqrt{\left(c\operatorname{senh}\left(\frac{x_0}{c}\right)\right)^2+c^2}\\
AB &= c\cosh\left(\frac{x_0}{c}\right)\\
AB &= y_0
\end{aligned}
$$

4. Se desea construir un depósito sobre una base de terreno elíptico con ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ y con secciones transversales cuadradas perpendiculares al eje X. Calcule el volumen de capacidad de dicho depósito.

(4 puntos)

Resolución: Representamos la base del sólido y una de las secciones transversales perpendiculares al eje X.





Dado que $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, se tiene que $y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$. El área de la sección transversal esta dado por

$$
\begin{aligned}
A(x) &= (2y)^2\\
A(x) &= 4y^2\\
A(x) &= \frac{4b^2}{a^2}(a^2-x^2)
\end{aligned}
$$

Luego, el volumen del sólido está dado por

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^{a} A(x)\,dx\\
V &= \int_{-a}^{a} \frac{4b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx\\
V &= \frac{8b^2}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2-x^2)\,dx\\
V &= \frac{8b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a\\
V &= \frac{16ab^2}{3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la capacidad del depósito es de $\dfrac{16ab^2}{3}$ u^3.

5. Evalúe

$$I = \int \frac{(2+\tan^2 x)\sec^2 x}{1+\tan^3 x}\, dx$$

(4 puntos)

Resolución: Haciendo el cambio de variable $u = \tan x$, tenemos $du = \sec^2 x\, dx$. Luego,

$$I = \int \frac{2+u^2}{1+u^3}\, du$$

Por fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{2+u^2}{1+u^3} &= \frac{A}{1+u} + \frac{B+Cu}{1-u+u^2} \\ 2+u^2 &= (A+B) + (B+C-A)u + (A+C)u^2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} A+B &= 2 \\ B+C-A &= 0 \\ A+C &= 1 \end{aligned}$$

tenemos que, $A=1$, $B=1$ y $C=0$. Así,

$$\frac{2+u^2}{1+u^3} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u+u^2}$$

Finalmente.

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u+u^2}\right] du \\ I &= \int \frac{1}{1+u} du + \int \frac{1}{1-u+u^2}\, du \\ I &= \int \frac{1}{1+u} du - \int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-u\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} d\left(\frac{1}{2}-u\right) \\ I &= \ln|1+u| - \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}-u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C \\ I &= \ln|1+u| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1-2u}{\sqrt{3}}\right) + C \\ I &= \ln|1+\tan x| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1-2\tan x}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

UNI, 20 de junio de 2022*

*Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: BMA02] **[Curso: Cálculo Integral]**

Solucionario - Práctica Calificada N^o 2

1. Determine si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

I. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, entonces $\displaystyle\int_0^2 f(2x)\,dx = 20$. (1 punto)

II. El error estimado al utilizar la regla de Simpson para aproximar la integral $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ para $n = 10$ es aproximadamente 0.000115. (1.5 puntos)

III. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\,dx = \pi + \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,dx$$

(**Sugerencia:** Cambio de variable $x = \pi - u$) (1.5 puntos)

IV. Si $0 < a < b$, entonces $\ln b < \ln a$. (1 punto)

Resolución:

I. **(FALSO)**. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, entonces hacemos $2x = u$, luego $2\,dx = du$. Si $x = 0$, entonces $u = 0$ y si $x = 2$, entonces $u = 4$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(2x)\,dx &= \int_0^4 f(u)\left(\frac{1}{2}\,du\right)\\
\int_0^2 f(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^4 f(u)\,du\\
\int_0^2 f(2x)\,dx &= \frac{1}{2}(10)\\
\int_0^2 f(2x)\,dx &= 5
\end{aligned}$$

II. **(VERDADERO)**. El error estimado al utilizar al regla de Simpson está dado por

$$|E_S| \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

donde $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Si $f(x) = e^{x^2}$ para todo $x \in [0,1]$, entonces $f^{(4)}(x) = (12+48x^2+16x^4)e^{x^2}$, como $0 \leq x \leq 1$, tenemos $0 \leq f^{(4)}(x) \leq (12+48+16) = 76e$. Luego, $M = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$. Finalmente, vemos que el error es a lo mas

$$\frac{76e(1-0)^5}{180(10)^4} \approx 0.000115$$

III **(FALSO)**. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces hacemos $x = \pi - u$, luego $dx = -du$. Si $x = 0$, entonces $u = \pi$ y si $x = \pi$, entonces $u = 0$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,dx &= \int_{\pi}^{0} (\pi - u)f(\operatorname{sen}(\pi - u))\,(-du) \\
\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,dx &= -\int_{\pi}^{0} (\pi - u)f(\operatorname{sen} u)\,du \\
\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,dx &= \int_0^{\pi} (\pi - u)f(\operatorname{sen} u)\,du \\
\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,dx &= \pi\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} u)\,du - \int_0^{\pi} uf(\operatorname{sen} u)\,du \\
2\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,dx &= \pi\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\,dx \\
\int_0^{\pi} xf(\operatorname{sen} x)\,dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} x)\,dx
\end{aligned}$$

IV. **(FALSO)**. Si $a = 1$ y $b = e$, entonces $0 < a < b$, $\ln a = 0$ y $\ln b = 1$, sin embargo $\ln b > \ln a$.

2. Suponga que usted es un arquitecto que desea levantar una pared cuya parte superior es un gran arco de forma parabólica dado por

$$y = 0.1x(30 - x) \quad \text{metros}$$

donde y es la altura desde el piso y el piso x está en metros.

a) Calcule el área total aproximada de la pared utilizando la regla de Simpson con n=6.

(3 puntos)

b) Calcule el valor del error del área obtenida en el item anterior y explique el resultado.

(2 puntos)

Resolución:

a) Del dato obtenemos que el piso tiene 30 metros de longitud. Sean $a = 0$, $b = 30$, $f(x) = 0.1x(30 - x)$ y $n = 6$. Luego $h = \dfrac{30-0}{6} = 5$, $x_i = a + ih$, $i \in \{0, \ldots, 6\}$, entonces

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$	0	12.5	20	22.5	20	12.5	0

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
S_6 &= \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + 2(f(x_2) + f(x_4)) + f(x_6)\} \\
&= \frac{5}{3}\{0 + 4(12.5 + 22.5 + 12.5) + 2(20 + 20) + 0\} \\
&= 450
\end{aligned}$$

Así, el área total aproximada de la pared es 583.33 metros cuadrados.

b) Como $f(x) = 0.1x(30-x)$ entonces $f^{(4)}(x) = 0,\ x \in \langle 0, 30\rangle$, por lo tanto

$$ES_6 = -\frac{1}{180}\cdot\frac{(30-0)^5}{6^4}f^{(4)}(c)\ ,\ c\in\langle 0,30\rangle \implies ES_6 = 0$$

El resultado $ES_6 = 0$ se debe a que $f(x) = 0.1x(30-x)$ es un polinomio de grado 2 y la regla de Simpson es exacta para polinomios de grado ≤ 3.

3. Use el teorema del cambio de variable para calcular la siguiente integral definida:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x-\arctan 2x}{1+4x^2}dx$$

(5 puntos)

Resolución: Tenemos

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x-\arctan 2x}{1+4x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1+4x^2}dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan 2x}{1+4x^2}dx$$

Consideramos

$$\begin{aligned} u =&\ 1+4x^2 &\rightarrow\ du =&\ 8xdx \\ v =&\ \arctan 2x &\rightarrow\ dv =&\ \tfrac{2dx}{1+4x^2} \end{aligned}$$

Luego

$$I = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8xdx}{1+4x^2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \arctan 2x\frac{2dx}{1+4x^2}$$

Notamos que si

$$\begin{aligned} x = 0 &\ \rightarrow\ u = 1\quad ,\quad v = 0 \\ x = \tfrac{1}{2} &\ \rightarrow\ u = 2\quad ,\quad v = \tfrac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Entonces

$$I = \frac{1}{8}\int_1^2 \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} vdv$$

de esta manera

$$I = \frac{1}{8}\ln|u||_1^2 - \frac{1}{2}\frac{w^2}{2}|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln 2}{8} - \frac{\pi^2}{64}$$

4. Para $0 < x < y$, utilice el teorema del valor medio para integrales para demostrar que

$$\frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y-x} < \frac{1}{x}$$

(5 puntos)

Resolución: Sea $f(t) = \dfrac{1}{t}$ para todo $t \in [x,y]$ con $0 < x < y$. La función f es continua en $[x,y]$, por el teorema del valor medio para integrales existe, $z \in]x,y[$ tal que

$$\begin{aligned} \int_x^y f(t)\,dt &= f(z)(y-x) \\ \int_x^y \frac{1}{t}\,dt &= f(z)(y-x) \\ \ln y - \ln x &= f(z)(y-x) \\ \frac{\ln y - \ln x}{y-x} &= f(z) \end{aligned}$$

Además $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2} < 0$, luego f es una función decreciente. Luego, $x < z < y$ implica que $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{x}$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{y} < \frac{\ln y - \ln x}{y - x} < \frac{1}{x}$$

UNI, 22 de mayo de 2022*

*Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: BMA02] **[Curso: Cálculo Integral]**

Solucionario - Práctica Calificada N^o 1

1. Determine si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

   I. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x) = 4e^{\frac{x^2}{3}}$ y $G(x) = xF(x) + ae^{\frac{x^2}{3}}$ es una antiderivada de $F(x)$, entonces $a = -6$. (1 punto)

   II. Si f es una función integrable en $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. (1 punto)

   III. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$, entonces $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. (1 punto)

   IV. $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 - \left(\frac{2k-1}{2n}\right) \right] \frac{2}{n}$. (1 punto)

Resolución:

I. **(VERDADERO)**. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x) = 4e^{\frac{x^2}{3}}$ y $G(x) = xF(x) + ae^{\frac{x^2}{3}}$ es una antiderivada de $F(x)$, entonces $F'(x) = 4e^{\frac{x^2}{3}}$ y

$$\begin{aligned} G'(x) &= F(x) \\ F(x) + xF'(x) + \frac{2a}{3}xe^{\frac{x^2}{3}} &= F(x) \\ x(4e^{\frac{x^2}{3}}) + \frac{2a}{3}xe^{\frac{x^2}{3}} &= 0 \\ \frac{2x}{3}(6+a)e^{\frac{x^2}{3}} &= 0 \\ a &= -6 \end{aligned}$$

II. **(VERDADERO)**. Si f es una función integrable en $[a,b]$ y como $f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

III **(FALSO)**. Si $f(x) = 1$, $x \in [0,3]$ y $g(x) = x$, $x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 3$ y $\displaystyle\int_0^3 g(x)\,dx = 4,5$. Es claro que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$, sin embargo no se tiene $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [0,3]$.

IV. **(FALSO)**. Consideramos una partición regular para la suma de Riemann, se tiene $\Delta x = \dfrac{1}{n}$. Elegimos los puntos medios de cada subintervalo determinado por la partición, esto es $x_k^* = 0 + \left(\dfrac{2k-1}{2}\right)\Delta x = \dfrac{2k-1}{2n}$, para evaluar en $f(x) = x^2 - x$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \\ \int_0^1 (x^2 - x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 - \left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]\frac{1}{n} \end{aligned}$$

2. Dos amigos de la escuela inician cuentan y pueden notar que: $1024+243 = 1267 \leq 3125$ o sea que $5^5 \geq 2^{2.5} + 3^5$, entonces se plantean si la desigualdad $5^n \geq 2^{2n} + 3^n$ para cualquier número entero positivo $n \geq 2$. Ayude a despejar esta duda, brindando una demostración o un contraejemplo.

(4 puntos)

Resolución: Demostremos por inducción matemática que $5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$.
Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : 5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}\}$.

- Claramente $1 \in X$, pues $5^2 \geq 4^2 + 3^2$.
- Por hipótesis inductiva, consideremos que un entero positivo $k \in X$, entonces $5^{k+1} \geq 4^{k+1} + 3^{k+1}$, ahora veamos que ocurre con su sucesor $k+1$ o sea veamos si $k+1 \in X$, es decir, que pasa con 5^{k+2}.

$$5^{k+2} = 5.5^{k+1} \geq 5.(4^{k+1} + 3^{k+1}) = 5.4^{k+1} + 5.3^{k+1}$$

como $5 \geq 4$ y $5 \geq 3$ tenemos

$$5^{k+2} \geq 4.4^{k+1} + 3.3^{k+1} = 4^{k+2} + 3^{k+2}$$

con lo cual $k+1 \in X$, o sea $X = \mathbb{N}$, que es lo que queríamos probar.

Tenemos entonces que $5^{n+1} \geq 4^{n+1} + 3^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (ie $n \geq 1$). Ahora solo debemos acomodar la desigualdad con lo cual

$$5^n \geq 4^n + 3^n, \forall n \geq 2$$

que es lo mismo que

$$5^n \geq 2^{2n} + 3^n, \forall n \geq 2$$

3. Evalúe cada una de las siguientes integrales indefinidas:

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}}\,dx$ (2 puntos)

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x\arctan(\sqrt{x})}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$ (2 puntos)

Resolución:

a) Aplicamos propiedades de las integrales

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}}\,dx \\
I_1 &= \int \frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}\right)dx \\
I_1 &= \int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}}{x+1}\,dx \\
I_1 &= \underbrace{\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x+1}\,dx}_{I} + \underbrace{\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx}_{J}
\end{aligned}$$

- Calculamos I: si $2x+1=y^2$, entonces $dx = y\ dy$, así

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2y^2}{y^2+1}\,dy \\
I &= 2\left\{\int dy - \int \frac{1}{y^2+1}\,dy\right\} \\
I &= 2(y-\arctan y)+C_1 \\
I &= 2(\sqrt{2x+1}-\arctan\sqrt{2x+1})+C_1
\end{aligned}$$

- Calculamos J: si $x=z^2$, entonces $dx=2z\,dz$, así

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{2z^2}{z^2+1}\,dz \\
J &= 2(z-\arctan z)+C_2 \\
J &= 2(\sqrt{x}-\arctan\sqrt{x})+C_2
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$I = 2(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}-\arctan\sqrt{2x+1}-\arctan\sqrt{x})+C$$

b) Hacemos la sustitución $y=\arctan(\sqrt{x})$, luego $dy = \dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}\,dx$ y $x=\tan^2 y$. Reemplazamos,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{x\arctan(\sqrt{x})}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx \\
I_2 &= 2\int y\tan^2 y\,dy \\
I_2 &= 2\int y\sec^2 y\,dy - \underbrace{\int 2y\,dy}_{y^2} \\
I_2 &= 2\underbrace{\int y\sec^2 y\ dy}_{I} - y^2 + C_1
\end{aligned}$$

Aplicamos integración por partes para calcular I,

$$\begin{aligned} u &= y & dv &= \sec^2 y\, dy \\ du &= dy & v &= \tan y \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} I &= y\tan y - \int \tan y\, dy \\ I &= y\tan y + \ln|\cos y| + C_2 \end{aligned}$$

Finalmente,

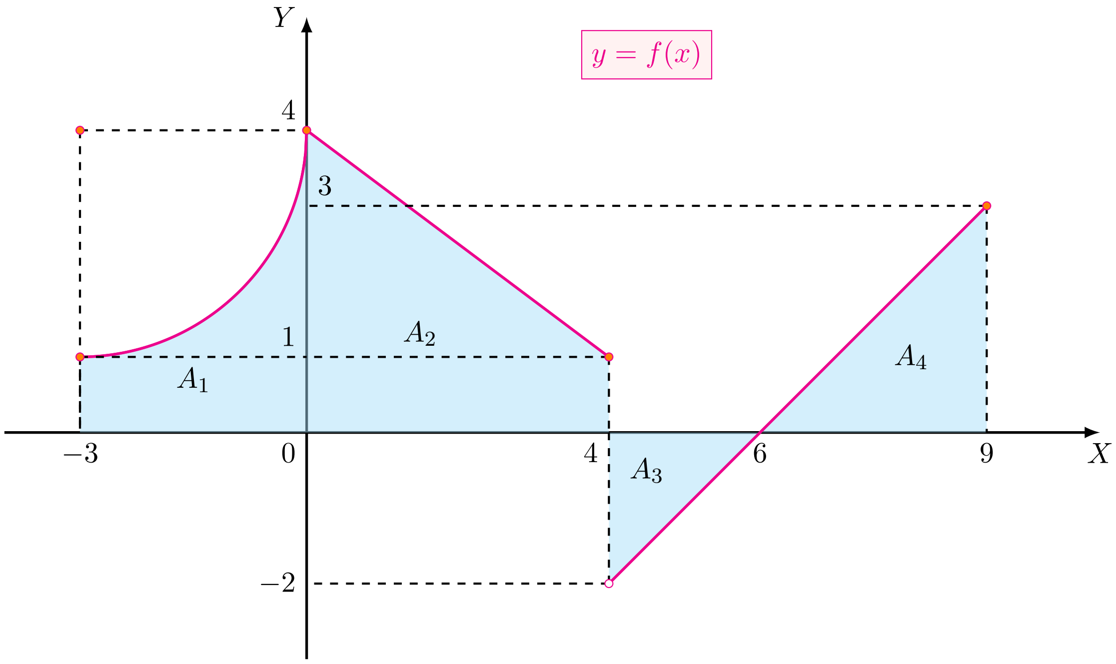
$$\begin{aligned} I_2 &= 2\big(y\tan y + \ln|\cos y|\big) - y^2 + C \\ I_2 &= 2(\sqrt{x}\arctan\sqrt{x} - \ln\sqrt{x+1}) - \arctan^2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

4. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 - \sqrt{-x^2-6x}, & \text{si } -3 \le x \le 0 \\ -\dfrac{3}{4}x + 4, & \text{si } 0 < x \le 4 \\ x - 6, & \text{si } 4 < x \le 9 \end{cases}$$

Evalúe $\displaystyle\int_{-3}^{9} f(x)\, dx$ (4 puntos)

Resolución: Representamos la función por tramos



Calculamos las áreas de las regiones representadas por A_1, A_2, A_3 y A_4:

$$\begin{aligned} A_1 &= (3)(4) - \frac{1}{4}\pi(3)^2 & A_2 &= \left(\frac{4+1}{2}\right)(4) & A_3 &= \frac{(2)(2)}{2} & A_4 &= \frac{(3)(3)}{2} \\ A_1 &= 12 - \frac{9\pi}{4} & A_2 &= 10 & A_3 &= 2 & A_4 &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\int_{-3}^{9} f(x)\,dx &= \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{4} f(x)\,dx - \int_{4}^{6} f(x)\,dx + \int_{6}^{9} f(x)\,dx \\
\int_{-3}^{9} f(x)\,dx &= A_1 + A_2 - A_3 + A_4 \\
\int_{-3}^{9} f(x)\,dx &= 12 - \frac{9\pi}{4} + 10 - 2 + \frac{9}{2} \\
\int_{-3}^{9} f(x)\,dx &= \frac{49}{2} - \frac{9\pi}{4}
\end{aligned}
$$

5. Considere el siguiente límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{32nk - 16k^2}}{n^2}$$

a) Exprese el límite anterior como integral definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$. (2 puntos)

b) Calcule el valor del límite mostrado interpretando la integral obtenida en el ítem a) como el área de una región geométrica conocida. (2 puntos)

Resolución:

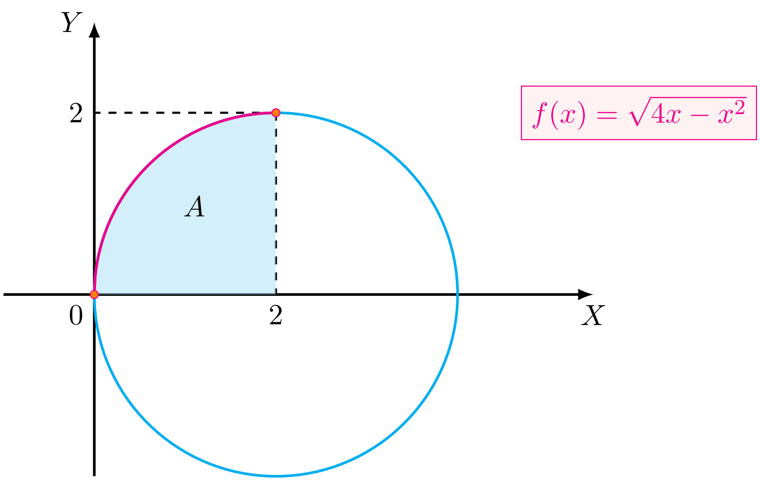
a) Expresamos el término general de la sumatoria

$$\frac{\sqrt{32nk - 16k^2}}{n^2} = \sqrt{4\left(\frac{2k}{n}\right) - \left(\frac{2k}{n}\right)^2} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)$$

Elegimos $\Delta x = \dfrac{2}{n}$ con $[a, b] = [0, 2]$ y puntos de la partición $x_k = \dfrac{2k}{n}$, luego

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{32nk - 16k^2}}{n^2} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4\left(\frac{2k}{n}\right) - \left(\frac{2k}{n}\right)^2} \cdot \left(\frac{2}{n}\right) \\
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{32nk - 16k^2}}{n^2} &= \int_{0}^{2} \sqrt{4x - x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

b) Representando la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ con $x \in [0, 2]$.



Es claro que la integral obtenida en el ítem a) representa el área de la región determinada por la gráfica de f, el eje X y la rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\, dx &= A \\ \int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\, dx &= \frac{1}{4}\pi(2)^2 \\ \int_0^2 \sqrt{4x - x^2}\, dx &= \pi \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{32nk - 16k^2}}{n^2} = \pi$$

UNI, 09 de mayo de 2022*

*Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: BMA02] **[Curso: Cálculo Integral]**

Solucionario - Examen Sustitutorio

1. Determine si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

I. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b |g(x)|\,dx$. (1 punto)

II. Toda función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tiene antiderivada. (1 punto)

III. La gráfica de $r^2 = \cos^2\theta$ son dos circunferencia. (1 punto)

IV. Si f es una función continua en $\mathbb{R}$, entonces la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ es igual a la longitud de la curva $y = \dfrac{1}{2}f(2x)$, $\dfrac{a}{2} \leq x \leq \dfrac{b}{2}$. (1 punto)

Resolución:

I. **(FALSO)**. Sean las funciones $f(x) = -3$ y $g(x) = -1$ para todo $x \in [1,3]$, es claro que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [1,3]$, sin embargo $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx > \int_1^3 g(x)\,dx$ ya que $\displaystyle\int_1^3 |f(x)|\,dx = 6$ y $\displaystyle\int_1^3 |g(x)|\,dx = 2$.

II. **(FALSO)**. La función $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in [-1,1]$ no tiene antiderivada en $[-1,1]$.

III **(VERDADERO)**. La gráfica de $r^2 = \cos^2\theta$ esta representado por las circunferencias $r = \cos\theta$ y $r = -\cos\theta$.

IV. **(FALSO)**. La longitud de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ es

$$L_1 = \int_a^b \sqrt{1 + [f']^2}\,dx$$

y la longitud de $y = g(x) = \dfrac{1}{2}f(2x)$, $\dfrac{a}{2} \leq x \leq \frac{b}{2}$ es

$$\begin{aligned}
L_2 &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \sqrt{1 + [g'(x)]^2} \\
L_2 &= \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}f'(2x)(2)} \\
L_2 &= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}}\sqrt{1 + [f'(2x)]^2}
\end{aligned}$$

Hacemos $u = 2x$, luego $du = 2dx$, así

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(u)]^2}\left(\frac{1}{2}\,du\right) \\ L_2 &= \frac{1}{2}\int_a^b \sqrt{1+[f'(u)]^2}\,du \end{aligned}$$

Por lo tanto, $L_1 = 2L_2$.

2. Sea la función

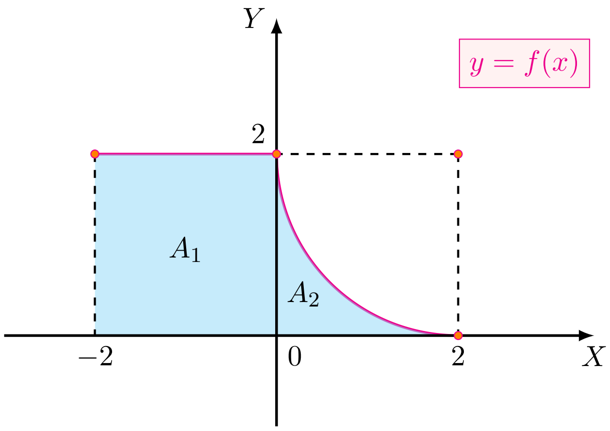
$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 2-\sqrt{4-(x-2)^2}, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$$

a) Evalúe $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ (2 puntos)

b) ¿Existe un número c en $[-2,2]$ tal que $f(c)$ es el valor promedio de f en $[-2,2]$? (2 puntos)

Resolución: Representamos la función

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 2-\sqrt{4-(x-2)^2}, & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$$



a) Calculamos las integrales como áreas de regiones conocidas

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(x)\,dx &= A_1 + A_2 \\ \int_{-2}^{2} f(x)\,dx &= (2)^2 + (2)^2 - \frac{1}{4}\pi(2)^2 \\ \int_{-2}^{2} f(x)\,dx &= 8-\pi \end{aligned}$$

b) Es claro que f es continua en $[-2,2]$, por el teorema del valor medio para integrales, existe un número $c \in [a,b]$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx &= f(c)(2-(-2))\\ 8-\pi &= 4f(c)\\ f(c) &= \frac{8-\pi}{4}\end{aligned}$$

- En $[-2,0]$, $f(c)=2$, lo cual es una contradicción, ya que $f(c)=\frac{8-\pi}{4}$
- En $[0,2]$,

$$\begin{aligned}f(c) &= \frac{8-\pi}{4}\\ 2-\sqrt{4-(c-2)^2} &= \frac{8-\pi}{4}\\ c=2-\sqrt{4-\frac{\pi^2}{16}} &\vee\ c=2+\sqrt{4-\frac{\pi^2}{16}}\notin[2,0]\end{aligned}$$

3. Considere la curva $r=\dfrac{4}{1+\cos\theta}$.

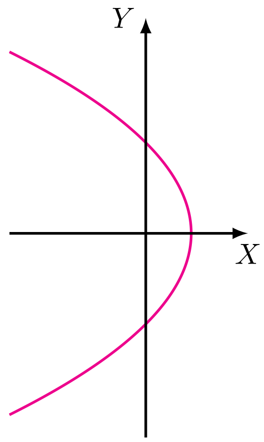
a) Represente la gráfica de la curva, utilizando puntos y simetrías. (1.5 puntos)

b) Calcule el área de la región limitada por esa curva, cuando $-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$. (1.5 puntos)

c) ¿Qué curva que usted conoce, representa? (1 punto)

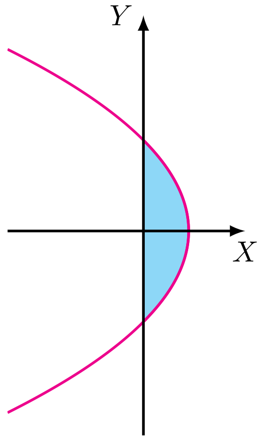
Resolución:

a) Como $r(-\theta)=r(\theta)$, entonces esa curva es simétrica respecto del eje polar. Vemos que, $r(0)=2$, como $\cos\theta$ decrece desde 1 hasta 0, cuando $0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$, entonces $r(\theta)$ crece hasta $r\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4$. Vemos que $\cos\theta$ sigue decreciendo, desde $\dfrac{\pi}{2}$ hasta π, donde $\cos\pi=-1$, luego $r(\theta)$ sigue creciendo hasta $r(\pi)=+\pi$. Así, la curva es aproximadamente.



b) El área de la región determinada por la curva y el eje $\dfrac{\pi}{2}$, esta dado por

$$\begin{aligned}
A &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta)\,d\theta \\
A &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos\theta}\,d\theta \\
A &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\theta}\,d\theta \\
A &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
A &= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\
A &= 8
\end{aligned}$$



c) De la ecuación polar $r = \dfrac{4}{1+\cos\theta}$,

$$\begin{aligned}
r + r\cos\theta &= 4 \\
r &= 4 - x \\
\sqrt{x^2+y^2} &= 4 - x \\
x^2 + y^2 &= 16 - 8x + x^2 \\
y^2 &= 16 - 8x
\end{aligned}$$

Por la tanto, la curva $\mathscr{C}$ representa una parábola.

4. Evalúe cada una de las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$ (2 puntos)

b) $\displaystyle\int \csc^3 x\,dx$ (2 puntos)

Resolución:

a) Hacemos la sustitución $x = 3\operatorname{sen}\theta$, con lo cual $dx = 3\cos\theta d\theta$, además tendríamos $\sqrt{3^2-x^2} = 3\cos\theta$ y $sen\theta = \frac{x}{3}$. Luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2\sqrt{3^2-x^2}} &= \int \frac{3\cos\theta d\theta}{3^2\operatorname{sen}^2\theta\cdot 3\cos\theta} \\
&= \tfrac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \\
&= \tfrac{1}{9}\int \csc^2\theta d\theta \\
&= -\tfrac{1}{9}\cot\theta + c
\end{aligned}$$

Según nuestras sustituciones tenemos que

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

Con lo que finalmente

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c$$

b) Integramos por partes haciendo

$$u = \sec x \ \wedge \ dv = \sec^2 x dx$$

con lo cual

$$du = \sec x \tan x dx \ \wedge \ v = \tan x$$

además recordemos

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

entonces

$$\begin{aligned}
\int \csc^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\
&= \sec x \tan x - \int (\sec^3 x - \sec x) dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln|\sec x + \tan x|
\end{aligned}$$

Finalmente

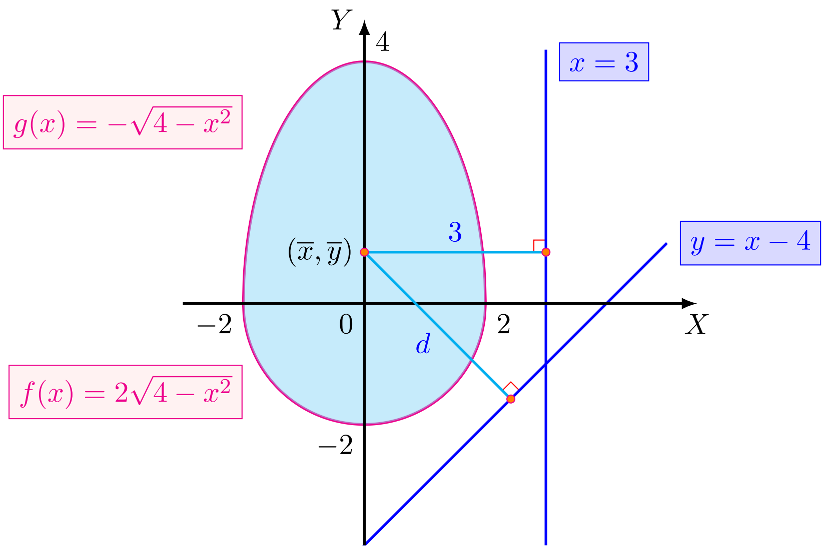
$$\int \csc^3 x dx = \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2} + c$$

5. Sea $\mathscr{R}$ la región determinada por las gráficas de las funciones $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 2\sqrt{4 - x^2}$ para todo $x \in [-2, 2]$. Calcule el volumen del sólido de revolución, obtenido al girar $\mathscr{R}$.

   a) Alrededor de la recta $x = 3$. (2 puntos)

   b) Alrededor de la recta $y = x - 4$. (2 puntos)

   Resolución: Representamos la región $\mathscr{R}$ determinada por las gráficas de las funciones $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 2\sqrt{4 - x^2}$ para todo $x \in [-2, 2]$



El área de la región esta dado por

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx \\
A &= \int_{-2}^{2} [2\sqrt{4-x^2} - (-\sqrt{4-x^2})]\, dx \\
A &= 3\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx \\
A &= 6\pi
\end{aligned}
$$

La región $\mathscr{R}$ es simétrica con respecto al Y, luego $\overline{x} = 0$. La abscisa $\overline{y}$ esta dado por

$$
\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{2A}\int_{-2}^{2} [g^2(x) - f^2(x)]\, dx \\
\overline{y} &= \frac{1}{2(6\pi)}\int_{-2}^{2} [4(4-x^2) - (4-x^2)] \\
\overline{y} &= \frac{1}{4\pi}[4x - \frac{1}{3}x^3]_{-2}^{2} \\
\overline{y} &= \frac{8}{3\pi}
\end{aligned}
$$

a) Aplicamos el teorema de Pappus

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi(3)(6\pi) \\
V &= 36\pi^2
\end{aligned}
$$

b) La distancia del centroide $\left(0, \dfrac{8}{3\pi}\right)$ a la recta $x - y - 4 = 0$ es

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{|0 - \frac{8}{3\pi} - 4|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \\
d &= \frac{2(2+3\pi)\sqrt{2}}{3\pi}
\end{aligned}
$$

Aplicamos el teorema de Pappus,

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi d A \\
V &= 2\pi\left(\frac{2(2+3\pi)\sqrt{2}}{3\pi}\right)(6\pi) \\
V &= 8\pi(2+3\pi)\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

UNI, 08 de agosto de 2022*

*Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: BMA02] **[Curso: Cálculo Integral]**

Solucionario - Examen Parcial

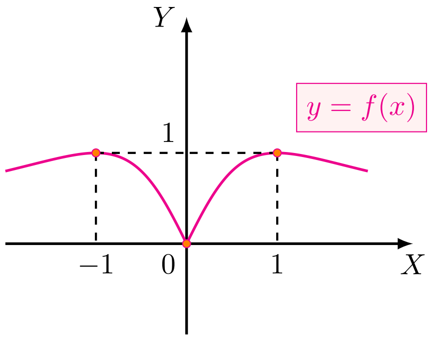
1. Determine si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

   I. $\displaystyle\int_0^n (x - [\![x]\!])\, dx = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. (1 punto)

   II. Si f es una función continua en $[a,b]$, tal que $\displaystyle\int_a^b (f(x) - x)\, dx = 0$, entonces existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = \dfrac{a+b}{2}$.

   (1.5 puntos)

   III. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par cuya gráfica se muestra en la figura tal que $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{|f'(x)|}{1+f(x)}\, dx = 2\ln(2)$.



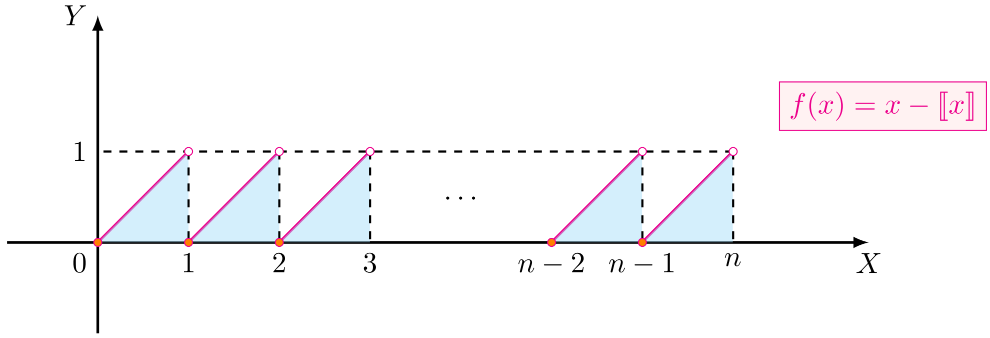
   (1.5 puntos)

   IV. Si f es continua en $[1,3]$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in [1,3]$, entonces $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx < 0$.

   (1 punto)

Resolución:

I. **(FALSO)**. Sea $f(x) = x - [\![x]\!]$, para todo $x \in [0,n]$ con $n \in \mathbb{N}$. Es claro que f es una función seccionalmente continua.



Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^n (x - [\![x]\!])\,dx &= \int_0^1 (x - [\![x]\!])\,dx + \int_1^2 (x - [\![x]\!])\,dx + \int_2^3 (x - [\![x]\!])\,dx + \ldots + \int_{n-1}^n (x - [\![x]\!])\,dx \\
\int_0^n (x - [\![x]\!])\,dx &= \frac{1\times 1}{2} + \frac{1\times 1}{2} + \frac{1\times 1}{2} + \ldots + \frac{1\times 1}{2} \\
\int_0^n (x - [\![x]\!])\,dx &= \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

II. **(VERDADERO)**. Si f es una función continua en $[a,b]$, tal que $\displaystyle\int_a^b (f(x) - x)\,dx = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b x\,dx \\
\int_a^b f(x)\,dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b \\
\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \qquad (1)
\end{aligned}$$

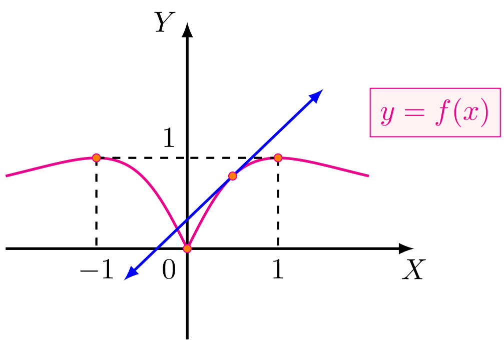
Por el teorema del valor medio para integrales, existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Luego, en (1)

$$\begin{aligned}
f(c)(b-a) &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \\
f(c) &= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

III **(VERDADERO)**. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par cuya gráfica se muestra en la figura tal que $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, entonces $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$.



Luego,

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{|f'(x)|}{1+f(x)}\,dx &= 2\int_{0}^{1} \frac{f'(x)}{1+f(x)}\,dx \\
\int_{-1}^{1} \frac{|f'(x)|}{1+f(x)}\,dx &= 2\left[\ln\left(1+f(x)\right)\right]_0^1 \\
\int_{-1}^{1} \frac{|f'(x)|}{1+f(x)}\,dx &= 2[\ln\left(1+f(1)\right)-\ln\left(1+f(0)\right)] \\
\int_{-1}^{1} \frac{|f'(x)|}{1+f(x)}\,dx &= 2[\ln 2-\ln 1] \\
\int_{-1}^{1} \frac{|f'(x)|}{1+f(x)}\,dx &= 2\ln 2
\end{aligned}
$$

IV. **(FALSO)**. Sea $f(x)=x$ para todo $x\in[1,3]$. Es claro que $f(x)>0$ para todo $x\in[1,3]$. Sin embrago $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3=4>0$.

2. Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable tal que

$$f(x)=1-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1,0)$. (3 puntos)

b) Demuestre que $f'(x)=-1$, para todo $x\in\mathbb{R}$. (2 puntos)

Resolución: Sea $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable tal que

$$f(x)=1-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$$

a) Dado que la recta tangente a la gráfica es en $(1,0)$, se tiene que $f(1)=0$. Luego,

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 1-\int_0^1 e^{1-t}f(t)\,dt \\
\int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt &= \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

Expresamos f de la siguiente forma

$$f(x)=1-e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$$

Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-e^x(e^{-x}f(x)) \\
f'(x) &= -e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt-f(x) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

En $x=1$, tenemos

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= -e\int_0^1 e^{-t}f(t)\,dt-f(1) \\
f'(1) &= -e\left(\frac{1}{e}\right)-0 \\
f'(1) &= -1
\end{aligned}
$$

Finalmente, la ecuación de la recta tangente está dado por

$$\begin{aligned} y - 0 &= (-1)(x-1) \\ y &= 1 - x \end{aligned}$$

b) De (2),

$$f'(x) = -\int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt - f(x) \tag{3}$$

Como $f(x) = 1 - \displaystyle\int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt$, para todo $x \in \mathbb{R}$, reemplazamos en (3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt - \left(1 - \int_0^x e^{x-t} f(t)\,dt\right) \\ f'(x) &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f'(x) = -1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Defina las funciones $f(x) = \cosh x$ y $g(x) = \operatorname{senh}(x)$, indique el dominio y rango.

   a) Verifique que $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen la ecuación de una hipérbola. (1.5 puntos)

   b) Determine la expresión para la función inversa de $f(x) = \cosh x$, esto es para la función $f^{-1}(x) = \operatorname{arccosh} x$ (3.5 puntos)

Resolución: Definimos

$$\begin{aligned} f(x) &= \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{dom}(f) = \mathbb{R},\ \operatorname{Ran}(f) = [1, +\infty[\\ g(x) &= \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{dom}(f) = \mathbb{R},\ \operatorname{Ran}(f) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

a) Las funciones $f(x) = \cosh x$ y $g(x) = \operatorname{senh} x$ satisfacen la ecuación $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} f^2(x) - g^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ f^2(x) - g^2(x) &= 4\frac{e^x \cdot e^{-x}}{4} \\ f^2(x) - g^2(x) &= 1 \end{aligned}$$

b) Hacemos, $f(x) = \cosh x = y$ para todo $x > 0$, Es claro que $y \geq 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= y \\ e^{2x} + 1 &= 2ye^x \\ e^{2x} - 2ye^x + y^2 &= y^2 - 1 \\ (e^x - y)^2 - \sqrt{y^2-1}^2 &= 0 \\ \underbrace{(e^x - y + \sqrt{y^2-1})}_{\neq 0}(e^x - y - \sqrt{y^2-1}) &= 0 \\ e^x &= y + \sqrt{y^2-1} \\ x &= \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \quad \text{para todo } x \in [1, +\infty[$$

4. Evalúe cada una de las siguientes integrales

a) $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{3\cos x + 4\operatorname{sen} x}\, dx$ (2.5 puntos)

b) $I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}\, dx$ (2.5 puntos)

Resolución:

a) Utilizamos la sustitución universal $z = \tan\dfrac{x}{2}$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\dfrac{2dz}{1+z^2}}{3\left(\dfrac{1-z^2}{1+z^2}\right) + 4\left(\dfrac{2z}{1+z^2}\right)} \\ I_1 &= \int \frac{2}{3 - 3z^2 + 8z}\, dz \\ I_1 &= \int \frac{2}{(3-z)(3z+1)} \end{aligned} \tag{4}$$

Por fracciones parciales,

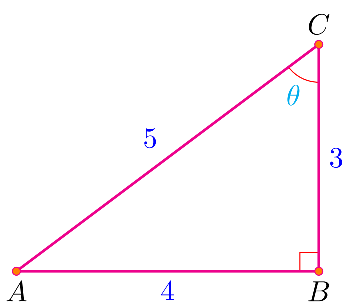
$$\frac{2}{(3-z)(3z+1)} = \frac{A}{3-z} + \frac{B}{3z+1}$$

Luego, $A = \dfrac{1}{5}$ y $B = \dfrac{3}{5}$. Reemplazamos en (4)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3-z} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3z+1}\right) dz \\ I_1 &= \frac{1}{5}\cdot\ln|3z+1| - \frac{1}{5}\cdot\ln|z-3| + C \\ I_1 &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3z+1}{z-3}\right| + C \\ I_1 &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\tan\frac{x}{2} + 1}{\tan\frac{x}{2} - 3}\right| + C \end{aligned}$$

Otra forma: Por identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} 3\cos x + 4\operatorname{sen} x &= 5\left(\frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\operatorname{sen} x\right) \\ 3\cos x + 4\operatorname{sen} x &= 5\cos(x - \theta) \end{aligned}$$



Luego,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{1}{5\cos(x-\theta)}\,dx \\
I_1 &= \frac{1}{5}\int \sec(x-\theta)\,dx \\
I_1 &= \frac{1}{5}\ln|\tan(x-\theta)+\sec(x-\theta)|+C \\
I_1 &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}(x-\theta)+1}{\cos(x-\theta)}\right|+C \\
I_1 &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{sen}x\cos\theta-\cos x\operatorname{sen}\theta+1}{\cos x\cos\theta+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\theta}\right|+C \\
I_1 &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\frac{3}{5}\operatorname{sen}x-\frac{4}{5}\cos x+1}{\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\operatorname{sen}x}\right|+C \\
I_1 &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{3\operatorname{sen}x-4\cos x+5}{3\cos x+4\operatorname{sen}x}\right|+C
\end{aligned}
$$

b) Expresamos la integral I_2 de la siguiente forma

$$I_2 = \int x^{-\frac{3}{2}}\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}}\,dx \tag{5}$$

Reconocemos en el binomio diferencial que $m=-\dfrac{3}{2}$, $n=\dfrac{3}{4}$ y $p=-\dfrac{1}{3}$. Luego, $\dfrac{m+1}{n}+p=-1\in\mathbb{Z}$.
Hacemos la sustitución $z^3=x^{-\frac{3}{4}}+1$, con lo cual $x=(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}$, así $dx=-4z^2(z^3-1)^{-\frac{7}{3}}\,dz$.
Reemplazamos en (5),

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\left[(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}\right]^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{z^3-1}\right)^{-\frac{1}{3}}(4z^2)(z^3-1)^{-\frac{7}{3}}\,dz \\
I_2 &= -4\int z\,dz \\
I_2 &= -2z^2+C \\
I_2 &= -2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2}+C
\end{aligned}
$$

UNI, 06 de mayo de 2022*

*Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2022-1**

[Cod: BMA02] **[Curso: Cálculo Integral]**

Solucionario - Examen Final

1. Determine si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

   I. $y' + x\sqrt{y} = x^2$ es una ecuación lineal de primer orden.

   (1 punto)

   II. El punto $\left(\dfrac{4}{3\pi}, \dfrac{4}{3\pi}\right)$ es el centroide de la región del primer cuadrante limitada por la gráfica de $x^2 + y^2 = 16$ y los ejes coordenados.

   (1.5 puntos)

   III. $\arctan(\operatorname{senh} x) = \operatorname{arc\,sen}(\tanh x)$

   (1.5 puntos)

   IV. Si f es una función no negativa y continua en $[0, +\infty[$ tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+f(x)}\,dx$ también converge.

   (1 punto)

Resolución:

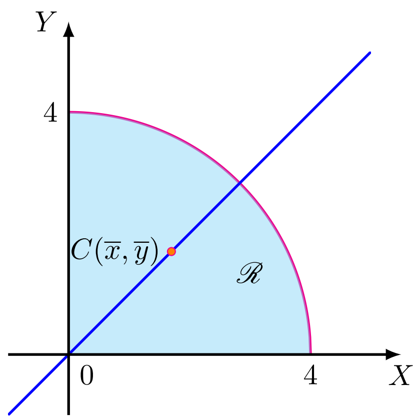
I. **(FALSO)**. $y' + xy = x^2$ es una ecuación lineal de primer orden.

II. **(FALSO)**. El área de la región R esta dado por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}\pi(4)^2 \\ A &= 4\pi \end{aligned}$$

La ordenada del centroide de $\mathscr{R}$ esta dado por

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{2(4\pi)} \int_0^4 \sqrt{16-x^2}^{\,2}\,dx \\ \overline{y} &= \frac{1}{8\pi} \int_0^4 (16-x^2)\,dx \\ \overline{y} &= \frac{1}{8\pi}\left[16x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 \\ \overline{y} &= \frac{16}{3\pi} \end{aligned}$$

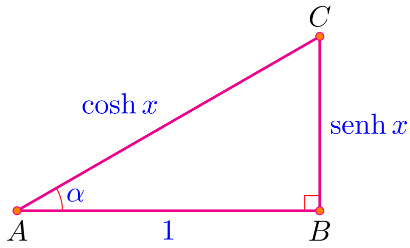


La región $\mathscr{R}$ es simétrica respecto de la recta $y = x$, así $\overline{x} = \dfrac{16}{3\pi}$.

Por lo tanto, las coordenadas del centroide son $\left(\dfrac{16}{3\pi}, \dfrac{16}{3\pi}\right)$

III **(VERDADERO)**. Sea $\alpha = \arctan(\operatorname{senh} x)$, luego $\tan\alpha = \operatorname{senh} x$. Consideramos el triángulo rectángulo ABC y la identidad $1 + \operatorname{senh}^2 x = \cosh^2 x$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha &= \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}\\
\operatorname{sen}\alpha &= \tanh x\\
\alpha &= \operatorname{arc\,sen}(\tanh x)
\end{aligned}$$



Por lo tanto,

$$\arctan(\operatorname{senh} x) = \operatorname{arc\,sen}(\tanh x)$$

IV. **(VERDADERO)**. Si f es una función no negativa y continua en $[0, +\infty[$ tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces

$$\begin{aligned}
0 &\leq f(x)\\
1 &\leq 1 + f(x)\\
\frac{1}{1+f(x)} &\leq 1\\
\frac{f(x)}{1+f(x)} &\leq f(x)
\end{aligned}$$

Por el criterio de comparación, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+f(x)}\,dx$ converge.

2. El gerente de una fábrica ha calculado que un trabajador puede producir más de 30 unidades en un día. La curva de aprendizaje del número N de unidades producidas por día después de que un nuevo empleado haya trabajado t días es $N = 30(1 - e^{kt})$. Después de 20 días en el trabajo, un trabajador produce 19 unidades.

   a) Encuentre la curva de aprendizaje de este trabajador.

   b) ¿Cuántos días pasarían antes de que este trabajador produzca 25 unidades por día?

Resolución:

a) Del dato, para $t = 20$, se tiene $N = 19$

$$\begin{aligned}
N &= 19\\
30(1 - e^{20k}) &= 19\\
30e^{20k} &= 11\\
k &= \frac{\ln 11/30}{20}\\
k &\approx -0.0502
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la curva de aprendizaje para este trabajador es

$$N \approx 30(1 - e^{-0.0502t})$$

b) Para $N = 25$, se tiene que

$$\begin{aligned} N &= 25 \\ 30(1 - e^{-0.0502t}) &= 25 \\ e^{-0.0502t} &= \frac{1}{6} \\ t &= \frac{-\ln 6}{-0.0502} \\ t &\approx 36 \end{aligned}$$

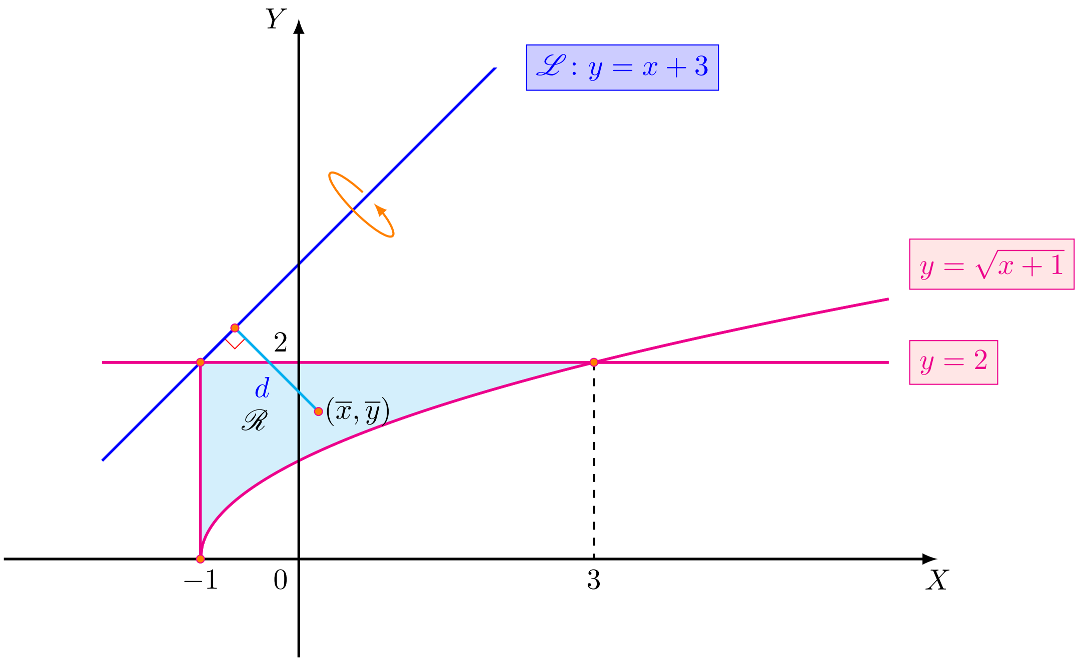
Pasarían aproximadamente 36 días.

3. Sea la región $\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x+1} \leq y \leq 2\}$.

   a) Determine las coordenadas del centroide de la región $\mathscr{R}$.

   b) Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de $\mathscr{R}$ alrededor de la recta $\mathscr{R}\colon y = x + 3$.

Resolución: Representamos la región $\mathscr{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{x+1} \leq y \leq 2\}$



El área de la región $\mathscr{R}$ esta dado por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{3} [2 - \sqrt{x+1}]\, dx \\ A &= \left[2x - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \right]_{-1}^{3} dx \\ A &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

a) El centroide $(\overline{x}, \overline{y})$ de la región $\mathscr{R}$ tiene las siguientes coordenadas

$$\begin{array}{rclcrcl}
\overline{x} & = & \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_{-1}^{3} x(2-\sqrt{x+1})\,dx & \qquad & \overline{y} & = & \dfrac{1}{2A}\displaystyle\int_{-1}^{3}[(2)^2-\sqrt{x+1}^2]\,dx \\
\overline{x} & = & \dfrac{3}{8}\left[x^2-\dfrac{2}{5}(x+1)^{5/2}+\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_{-1}^{3} & & \overline{y} & = & \dfrac{16}{3}\left[4x-\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right]_{-1}^{3} \\
\overline{x} & = & \dfrac{1}{5} & & \overline{y} & = & \dfrac{3}{2}
\end{array}$$

Así, las coordenadas del centroide son $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{2}\right)$

b) La distancia del centroide a la recta $\mathscr{L}: x-y+3=0$ esta dado por

$$\begin{array}{rcl}
d & = & \dfrac{|\frac{1}{5}-\frac{3}{2}+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} \\
d & = & \dfrac{17\sqrt{2}}{20}
\end{array}$$

Por el teorema de Pappus, el volumen del sólido generado esta dado por

$$\begin{array}{rcl}
V & = & 2\pi dA \\
V & = & 2\pi\left(\dfrac{17\sqrt{2}}{20}\right)\left(\dfrac{8}{3}\right) \\
V & = & \dfrac{68\pi\sqrt{2}}{15}
\end{array}$$

4. a) Resuelva la ecuación diferencial

$$xy'+(2+x)y=e^{-x}, y(e)=0$$

b) Calcule el área de la región limitada por las siguientes curvas $\mathscr{C}_1: r=|\operatorname{sen}\theta|$ y $\mathscr{C}_2: r=-1$.

Resolución:

a) Despejando, tenemos

$$y'+\frac{2+x}{x}y=\frac{e^{-x}}{x}, \quad y(e)=0$$

El factor integrante esta dado por

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & e^{\int \frac{2+x}{x}\,dx} \\
f(x) & = & e^{\ln x^2+x} \\
f(x) & = & x^2e^x
\end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl}
x^2e^xy(x) & = & \displaystyle\int x^2e^x\cdot\dfrac{e^{-x}}{x}\,dx \\
x^2e^xy(x) & = & \displaystyle\int x\,dx \\
x^2e^xy(x) & = & \dfrac{1}{2}x^2+C
\end{array}$$

Para $x = e$, se tiene $y(e) = 0$, luego

$$\begin{aligned} (e)^2 e^(e) y(e) &= \frac{1}{2}e^2 + C \\ 0 &= \frac{1}{2}e^2 + C \\ C &= -\frac{1}{2}e^2 \end{aligned}$$

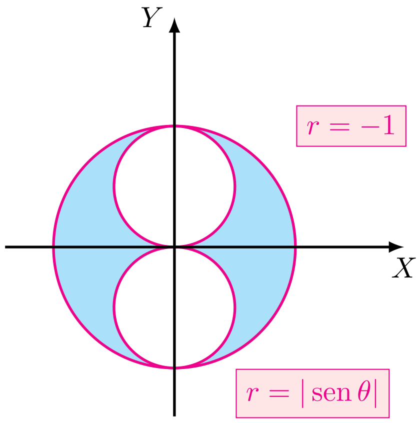
Por lo tanto la solución es

$$y(x) = \frac{x^2 - e^2}{2x^2 e^x}$$

b) Representamos la región $\mathscr{R}$ limitada por las curvas $\mathscr{C}_1 : r = |\operatorname{sen}\theta|$ y $\mathscr{C}_2 : r = -1$.

El área de la región $\mathscr{R}$ esta dado por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(-1)^2 - |\operatorname{sen}\theta|^2]\, d\theta \\ A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta \\ A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \\ A &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\ A &= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} \\ A &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



5. a) Justifique si la siguiente integral es convergente o divergente.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + x^2}\, dx$$

(2 puntos)

b) Calcule el valor de la integral

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^{4x}}\, dx$$

(2 puntos)

Resolución: Sea la integral

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + x^2}\, dx$$

a) Para todo $x \in [0, +\infty[$, se tiene $1 \le 1 + x^2 \le 2$ y $0 \le 1 + \operatorname{sen} x \le 2$. Luego,

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + x^2} \le \frac{2}{1 + x^2}$$

Veamos que la integral $\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx$ es convergente. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{2}{1+x^2}\,dx \\
\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} [2\arctan x]_0^b \\
\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx &= 2\lim_{b\to+\infty} \arctan b \\
\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx &= \pi
\end{aligned}$$

Por el criterio de comparación, la integral I es convergente.

b) Por definición

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^{4x}}\,dx \\
I_2 &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+e^{4x}}\,dx
\end{aligned}$$

Calculamos una antiderivada, para esto hacemos $u = e^{4x}$, luego $du = 4e^{4x}\,dx = 4u\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+e^{4x}}\,dx &= \int \frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{4u}\,du \\
\int \frac{1}{1+e^{4x}}\,dx &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u(u+1)}\,du \\
\int \frac{1}{1+e^{4x}}\,dx &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du \\
\int \frac{1}{1+e^{4x}}\,dx &= \frac{1}{4}[\ln|u| - \ln|u+1|] + C \\
\int \frac{1}{1+e^{4x}}\,dx &= \frac{1}{4}\left[\ln e^{4x} - \ln(e^{4x}+1)\right] + C \\
\int \frac{1}{1+e^{4x}}\,dx &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{1+e^{-4x}}\right) + C
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{1+e^{-4x}}\right)\right]_0^b \\
I_2 &= \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{1}{1+e^{-4b}}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\
I_2 &= \frac{1}{4}(0+\ln 2) \\
I_2 &= \frac{\ln 2}{4}
\end{aligned}$$

UNI, 01 de agosto de 2022*

*Hecho en LaTeX