Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Marzo 22, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

1 Función
- Funciones reales de variable real
- Funciones especiales
- Funciones trigonométricas
- Funciones trascendentes

2 Referencias

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Producto cartesiano)

Sean A y B dos conjuntos no vacíos, el producto cartesiano de A por B es:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A, y \in B\}$$

Ejemplo

Sean $A = \{\triangle, \bigcirc, \square\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$.

$$\begin{aligned} A \times B = & \{(\triangle, a), (\triangle, b), (\triangle, c), (\triangle, d), (\bigcirc, a), (\bigcirc, b), (\bigcirc, c), \\ & (\bigcirc, d), (\square, a), (\square, b), (\square, c), (\square, d)\} \end{aligned}$$

Definición (Relación)

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se dice que R es una relación de A en B, si $R \subset A \times B$.

Ejemplo

$$f = \{(\triangle, a), (\bigcirc, b), (\square, b)\} \subset A \times B \ ,$$

$$g = \{(\triangle, c), (\square, b), (\square, d)\} \subset A \times B \ .$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función)

Dados A y B dos conjuntos no vacío. Una función de A en B es un subconjunto f del producto cartesiano $A \times B$ donde para cada elemento x de A, existe a lo más un elemento y de B tal que el par ordenado (x, y) está en f.

En símbolos, f es una función de A en B si

$$\forall x \in A, \exists! y \in B : (x, y) \in f$$

Al conjunto A se le llama dominio y al conjunto B se le llama codominio.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Del ejemplo anterior, tenemos que f es una función.

$$f = \{(\triangle, a), (\bigcirc, b), (\square, b)\}.$$

Observación:

- El concepto de función también se puede definir de la siguiente manera. Una función f de A en B es un subconjunto del producto cartesiano que satisface las siguientes condiciones:

$$\text{Existencia} : \forall x \in A, \exists y \in B : (x, y) \in f.$$

$$\text{Unicidad} : \text{Si } (x, y) \in f \text{ y } (x, z) \in f, \text{ entonces } y = z.$$

Observación:

- Si f es una función de A en B y $(x, y) \in f$, se escribe $y = f(x)$ y se dice que y es la imagen de x bajo f y que x es una preimagen de y bajo f.
- f y $f(x)$ tienen diferente significado, f es la función, mientras que $f(x)$ es el valor de la función en x.
- Al dominio de f se le denota $\mathrm{Dom}(f)$ donde $\mathrm{Dom}(f) = A$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

$A = \{-1, 0, 1\}, B = \{0, 1, 2\}, f : A \to B, f(x) = x^2.$

Ejemplo

Tome los conjuntos $A = \{\text{Alumnos de la EPM}\}$ y $B = \{\text{Profesores de la EPM}\}$, considere el conjunto de pares ordenados que se pueden formar del siguiente modo

$$f = \{(x, y) \in A \times B / y \text{ es profesor de } x\}$$

En este caso f no es función.

Ejemplo

Tome los conjuntos $A = \{\text{Alumnos de la EPM}\}$ y $B = \{\text{Palabra alfanumérica de 9 caracteres}\}$, considere el conjunto de pares ordenados que se pueden formar del siguiente modo

$$f = \{(x, y) \in A \times B / y \text{ es el código UNI de } x\}$$

En este caso f es función.

Función real de variable real

Las funciones $f : X \to Y$, donde $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$ son llamadas funciones reales de variable real. Las funciones reales de variable real pueden ser bien representadas en el plano cartesiano por su gráfica.

Ejemplo

$A = \{-1, 0, 1\}, B = \{0, 1, 2\}, f : A \to B, f(x) = x^2.$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Gráfica de una función)

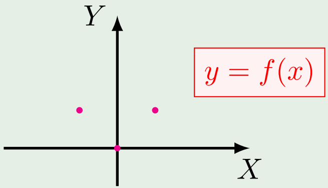
Dada $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función real de variable real. La gráfico de la función f, denotado por $\operatorname{Graf}(f)$ es el conjunto

$$\operatorname{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x \in A, y = f(x)\}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

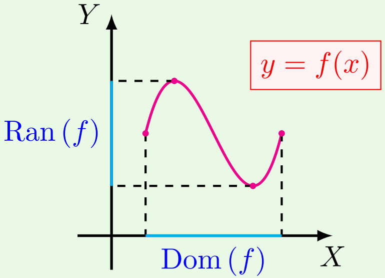
Sean $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ y la función $f\colon A \to B$ con regla de correspondencia $f(x) = x^2$. La gráfica de f es $\mathrm{Graf}(f) = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$ cuya representación es



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

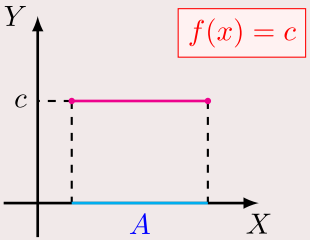
Observación:

- De la definición es claro que $(x, y) \in \mathrm{Graf}(f)$ si y solo si $y = f(x)$.
- $\mathrm{Dom}(f)$ es la proyección ortogonal de $\mathrm{Graf}(f)$ sobre el eje X.
- $\mathrm{Ran}(f)$ es la proyección ortogonal de $\mathrm{Graf}(f)$ sobre el eje Y.



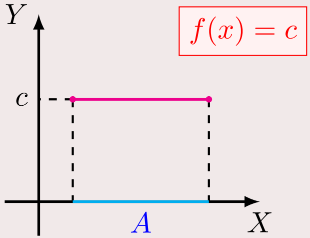
Definición (Función constante)

Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es llamada función constante si su rango es un conjunto unitario.



Definición (Función constante)

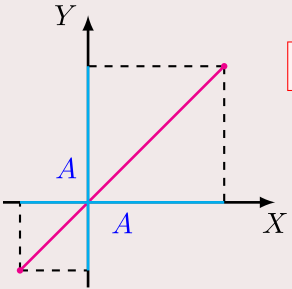
Sean c un número real y A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. La función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in A : f(x) = c$ se llama función constante.



- $\operatorname{Dom}(f) = A$.
- $\operatorname{Ran}(f) = \{c\}$.

Definición (Función identidad)

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. La función identidad sobre A se denota por $I_A : A \to \mathbb{R}$ y se define como $\forall x \in A : I_A(x) = x$.

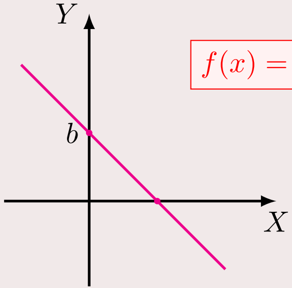


$$\boxed{I_A(x) = x}$$

- $\mathrm{Dom}(I_A) = A$.
- $\mathrm{Ran}(I_A) = A$.

Definición (Función afín)

La función afín $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y se define como $f(x) = mx + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donde $m, b \in \mathbb{R}$, son dos constantes reales.

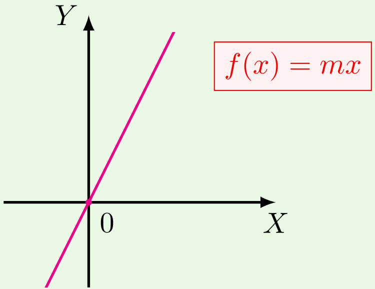


$$\boxed{f(x) = mx + b}$$

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$.

Observación:

Si $b = 0$, entonces $f(x) = mx$ se denomina función lineal.



- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R}$.

Definición (Función polinomial)

Una función P se llama polinomial si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas los coeficientes de la polinomial. El dominio de cualquier polinomial es $\mathbb{R}$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el grado de la polinomial es n.

Ejemplo

La función
$$P(x) = 3x^5 + x^4 - \frac{3}{4}x^3 + x + \sqrt{3}$$
es una polinomial de grado 5.

Definición (Función cuadrática)

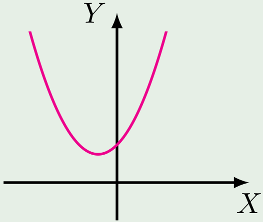
Una polinomial de grado 2 es de la forma

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

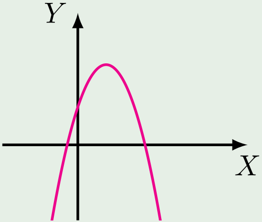
y se llama función cuadrática.
Su gráfica es siempre una parábola obtenida por desplazamientos de la parábola $y = ax^2$. La parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

Ejemplo

- $f(x) = x^2 + x + 1$



- $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$



Definición (Función cúbica)

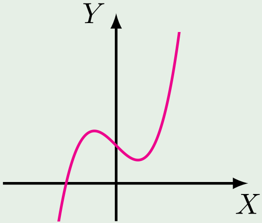
Una polinomial de grado 3 es de la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$

y se llama función cúbica.

Ejemplo

- $f(x) = x^3 - x + 1$



Definición (Función potencia)

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama función potencia. Consideramos los siguientes casos.

- $a = n$, donde n es un número entero positivo.
- $a = \dfrac{1}{n}$, donde n es un número entero positivo.
- $a = -1$

Caso I

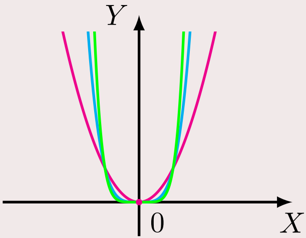
La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar.

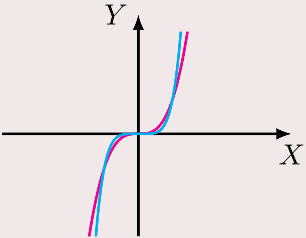
- Si n es par, entonces su gráfica es similar a la parábola $y = x^2$.
- Si n es impar, entonces es una función impar, y su gráfica es similar a la de $y = x^3$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Caso I

La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar. cuando n aumenta, la gráfica de $y = x^n$ se aplana más cerca de 0 y es más pronunciada cuando $|x| \geq 1$.

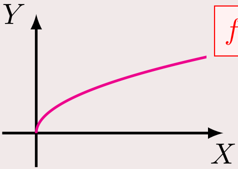


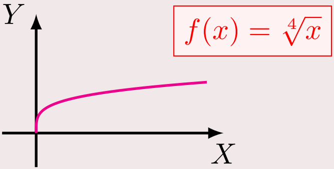


Caso II

La función $f(x) = x^{1/n}$ es una función raíz.

- Para $n = 2$ es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, con dominio en $[0, +\infty[$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $x = y^2$. Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$.

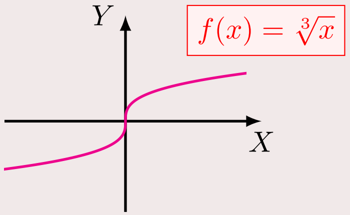


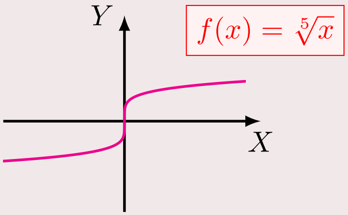


Caso II

La función $f(x) = x^{1/n}$ es una función raíz.

- Para $n = 3$ se tiene la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$. La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar $(n > 3)$ es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.

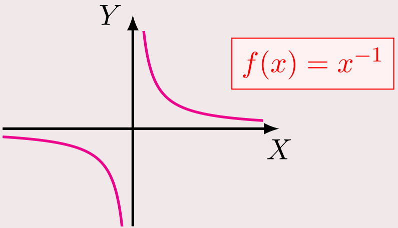




UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Caso III

La gráfica de la función recíproca $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es la gráfica que tiene la ecuación $y = \dfrac{1}{x}$ o $xy = 1$, y es una hipérbola con los ejes de coordenadas como sus asíntotas.



- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\text{Ran}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definición (Función racional)

Una función racional f es un cociente de dos funciones polinomiales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$.

Ejemplo

La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional con dominio $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Definición (Función algebraica)

Una función f se llama función algebraica si puede construirse utilizando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación, división y tomando raíces) comenzando con los polinomios. Cualquier función racional es automáticamente una función algebraica.

Ejemplo

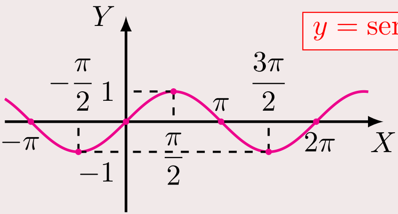
Las siguientes funciones son algebraicas

- $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
- $g(x) = \dfrac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función seno)

La función seno dado por la regla de correspondencia $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene por gráfica

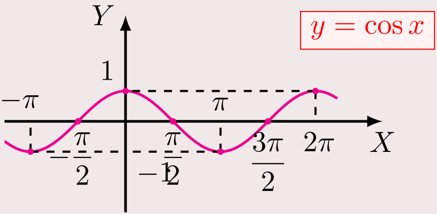


- $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\operatorname{Ran}(f) = [-1, 1]$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función coseno)

La función coseno dado por la regla de correspondencia $f(x) = \cos x$ tiene por gráfica

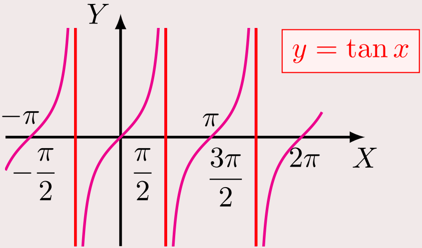


- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Ran}(f) = [-1, 1]$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Función tangente)

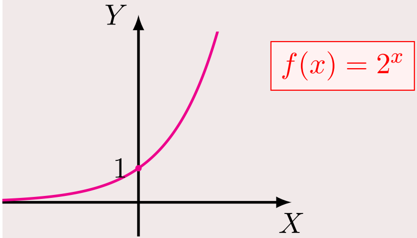
La función tangente dada por la regla de correspondencia $f(x) = \tan x$ tiene por gráfica:

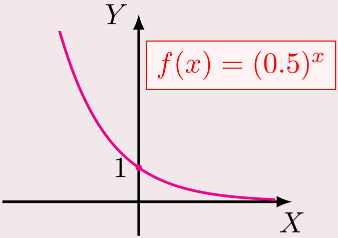


- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{ (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \right\}$.
- $\mathrm{Ran}(f) = \mathbb{R}$.

Definición (Función exponencial)

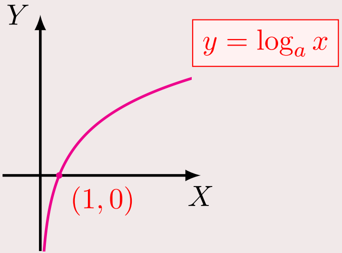
Las funciones exponenciales son funciones de la forma $f(x) = b^x$, donde la base b es una constante positiva.

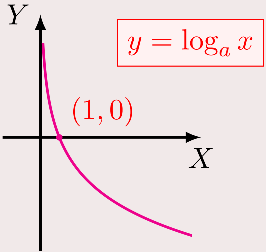




Definición (Función logarítmica)

Las funciones logarítmicas $f(x) = \log_b x$, donde la base b es una constante positiva, son las funciones inversas de las funciones exponenciales.





Sesión 01

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Ron Larson - Bruce Edwards
Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
Cengage Learning