GRAFOS. ISOMORFISMO. SUBGRAFOS. CAMINOS. CICLOS.

Profesores del curso:

Ronald Mass [1]

Ángel Ramírez [1]

[1]Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

19 de junio de 2020

Tabla de contenidos

Definición 1

Un **grafo** *G es un par ordenado (V, E) donde V es algún conjunto y E es un conjunto de subconjuntos de 2 puntos de V. Los elementos del conjunto V son llamados* **vértices** *del grafo G y los elementos de E son llamados* **Aristas** *del grafo G.*

Ejemplo:

Sea $V = \{\text{personas en una fiesta}\}$ y

$E = \{(x, y) \in V \times V \,/\, x \quad \text{conoce a} \quad y\}$.

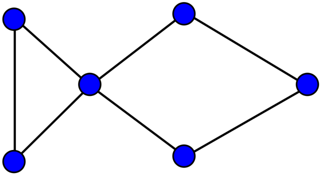
Observaciones

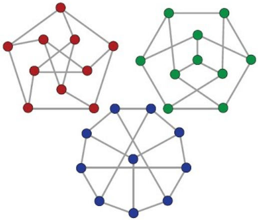
1. Consideraremos grafos con conjunto de vértices V finito.
2. $G = (V, E)$ denota un grafo con conjunto de vértices V y aristas E.
3. $V(G)$ denota el conjunto de vértices de un grafo G.
4. $E(G)$ denota el conjunto de aristas de un grafo G.
5. $\binom{V}{2}$ es el conjunto de todos los subconjuntos de 2 elementos de V, por tanto, podemos también decir que un grafo es un par (V, E) donde $E \subset \binom{V}{2}$.
6. Si $\{u, v\}$ es una arista de algún grafo G, decimos que u y v son adyacentes en G o que u es un vecino de v (o viceversa).

Representación de un grafo

Los grafos son usualmente representados en el plano como sigue:

1. Los vértices del grafo son representados por puntos.
2. Las aristas son representadas por rectas (o arcos) que unen un par de puntos.





Observaciones:

1. El rol de graficar un grafo es auxiliar.
2. En un computador no se representa un grafo por un gráfico.
3. Hay otros modos de representarlos, por ejemplo, el grafo $G = (V, E)$ donde:

$$
\begin{aligned}
V &= \{a, b, c, e, f, g\} \\
E &= \{\{a, f\}, \{a, g\}, \{g, f\}, \{g, b\}, \{g, c\}, \\
&\quad \{f, b\}, \{f, c\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}\}
\end{aligned}
$$

representa el grafo mostrado en la Figura 1.

Observaciones: (cont.)

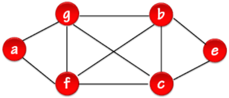


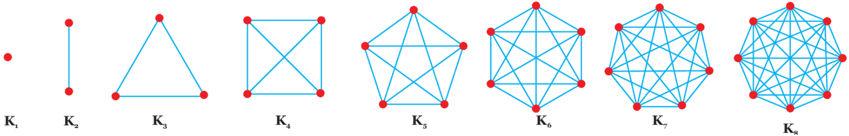
Figura 1: Representación gráfica del grafo G

4. Al graficar un grafo, visualmente las aristas deben de cruzarse lo menos posible. Los cruces pueden provocar errores como en esquemas de circuitos eléctricos u otras situaciones. Esto motiva el estudio de **grafos planares**.
5. Graficar grafos es una ayuda importante en la teoría de grafos. Dibujar grafos tanto como sea posible, ayuda a un mejor análisis. Muchas nociones son motivadas por el gráfico y dibujarlas pueden hacer las cosas más intuitivas.

Tabla de contenidos

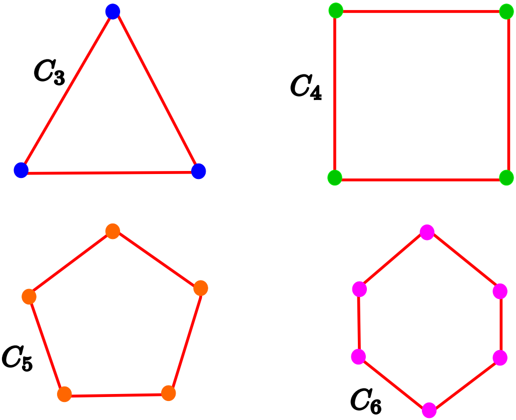
Grafo completo K_n

$$K_n = (V, E) \text{ donde } V = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ y } E = \binom{V}{2}$$



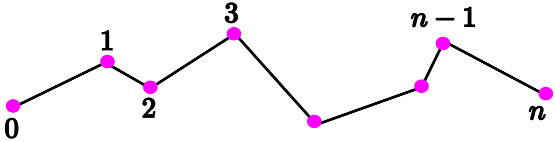
Ciclo C_n

$C_n = (V, E)$ donde $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ y
$E = \{\{i, i+1\} \,/\, i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{n, 1\}$.



Ruta (Path) P_n

$P_n = (V, E)$ donde $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ y
$E = \{\{i-1, i\} \,/\, i = 1, 2, \ldots, n\}$.



Un path P_n también es llamado **camino simple**.

Grafo bipartito $K_{n,m}$

$K_{n,m} = (V, E)$ donde $V = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\}$ y
$E = \{\{u_i, v_j\} \,/\, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m\}$.

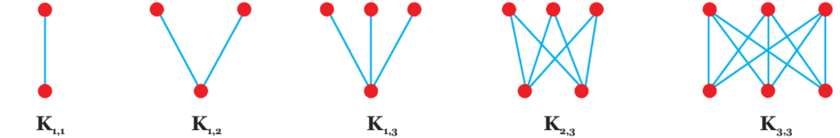


Tabla de contenidos

Dos grafos G y G' son considerados **idénticos** (o iguales) si ellos tienen el mismo conjunto de vértices y el mismo conjunto de aristas, es decir, $G = G' \Leftrightarrow V(G) = V(G')$ y $E(G) = E(G')$. Pero muchos grafos difieren solamente por el nombre de sus vértices y aristas pero tienen la misma estructura.

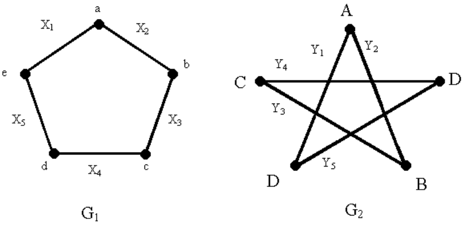
Definición 2

Dos grafos $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son llamados **isomorfos** *si existe una biyección $f : V \to V'$ tal que:*

$$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E' \quad \forall x, y \in V,\ x \neq y.$$

Tal f es llamado **isomorfismo** *entre los grafos G y G'. Dos grafos isomorfos es denotado por $G \cong G'$.*

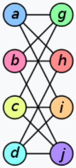
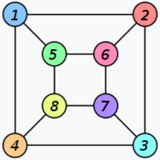
Ejemplo: Grafos Isomorfos



Un isomorfismo para los grafos anteriores G_1 y G_2 está definido por:

$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad f(c) = C, \quad f(d) = D, \quad f(e) = E$$

Ejemplo: Grafos Isomorfos

Grafo G	Grafo H	Un isomorfismo entre G y H
		$f(a) = 1$ $f(b) = 6$ $f(c) = 8$ $f(d) = 3$ $f(g) = 5$ $f(h) = 2$ $f(i) = 4$ $f(j) = 7$

Ejemplo

Dado un grafo $G = (V, E)$ definimos el **complemento** de G al grafo $G^c = (V, E^c)$ donde $e \in E^c \Leftrightarrow e \notin E$. Decimos que un grafo G es autocomplementario si G es isofomorfo a G^c. Demuestre que si G es **autocomplementario** entonces $n \equiv 0$ o $1\, mod\, 4$, donde $n = |V(G)|$. **Solución**:

Como $G \cong G^c$ entonces deben tener el mismo número de aristas y además la suma de sus números de aristas deben ser igual al número de aristas del grafo completo. Por tanto, el número de aristas de G y G^c debe ser:

$$\frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n!}{(n-2)!2!}\right) = \frac{n(n-1)}{4}.$$

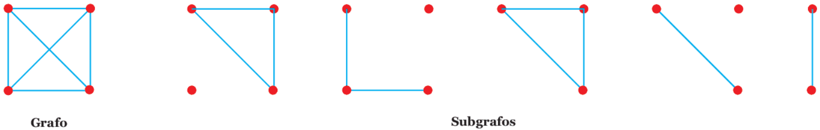
Ejemplo (cont.)

Claramente este número de aristas debe ser un entero. Así, $n(n-1)$ debe ser divisible por 4. Desde que n y $n-1$ no pueden ser ambos divisibles por 2, debemos tener que n o $n-1$ es divisible por 4. Por tanto, esto es la condición $n \equiv 0$ o $1 \, mod \, 4$.

Tabla de contenidos

Definición 3

Sean G y G' grafos. Decimos que G es un **subgrafo** *de G' si $V(G) \subset V(G')$ y $E(G) \subset E(G')$.*



Definición 4

Decimos que G es un **subgrafo inducido** *de G' si $V(G) \subset V(G')$ y $E(G) = E(G') \cap \binom{V(G)}{2}$.*

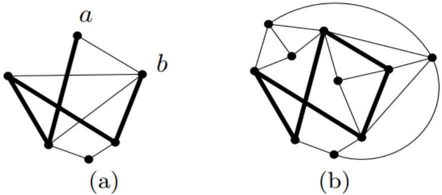


Figura 2: **(a)** Ejemplo de subgrafo. **(b)** Ejemplo de subgrafo inducido.

Ejemplo:

Determine si K_4 es un subgrafo de $K_{4,4}$. Si su respuesta es afirmativa, entonces grafique. Caso contrario, justifique.

Demostración:
Afirmamos que K_4 no es un subgrafo de $K_{4,4}$. Procedemos a demostrarlo. Sean X e Y las dos partes de $K_{4,4}$. Para cada subgrafo H de $K_{4,4}$ con 4 vértices, alguno de sus vértices están en X y los otros están en Y. Así tenemos los siguientes casos:

1. $V(H) \in X$ o $V(H) \subset Y$. Entonces H no debe tener aristas porque un grafo bipartito no tiene aristas cuyos ambos extremos están en X (respectivamente en Y). Así, H no es K_4.
2. Tres vértices de H están en X y uno está en Y(o viceversa). Entonces a lo más uno de los vértices en H tiene grado a lo más 3 y el resto de los vértices tienen grado a lo más 1. Pero, la secuencia de grados de K_4 es (3,3,3,3). Así, H no es K_4 en

Camino en un grafo

Un subgrafo de un grafo G isormorfo a algún camino P_t es llamado un **camino simple (path)** en el grafo G. Un **camino simple** en un grafo G puede ser entendido como una secuencia:

$$(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t),$$

donde $v_0, v_1, \ldots, v_t$ son vértices distintos del grafo G para cada $i = 1, 2, \ldots, t$ y además $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$.
También decimos que el camino $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$ es un **camino simple desde** v_0 **hasta** v_t de **longitud** t.
En el caso que $t = 0$, es decir, un camino de longitud cero consiste de un **único vértice**.

Ejemplo de camino

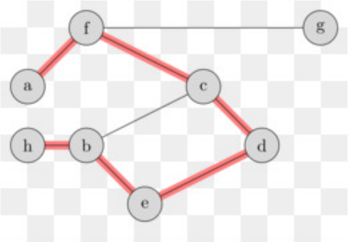


Figura 3:
$P_6 = \{a, \{a, f\}, f, \{f, c\}, c, \{c, d\}, d, \{d, e\}, e, \{e, b\}, b, \{b, h\}, h\}$.

Ciclo en un grafo

Un subgrafo de G que es isomorfo a algún ciclo C_t $(t \geq 3)$ es llamado **un ciclo** en el grafo G. También es llamado **circuito**. Un ciclo en un grafo G puede ser entendido como una secuencia:

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_{t-1}, v_{t-1}, e_t, v_0)$$

(observe que los puntos inicial y final **coinciden**), donde $v_0, v_1, \ldots, v_{t-1}$ son pares de vértices distintos del grafo G y $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ para $i = 1, 2, \ldots, t-1$ y además $e_t = \{v_{t-1}, v_0\} \in E(G)$. El número $t \geq 3$ es llamado **longitud** del ciclo.

Ejemplo de ciclo

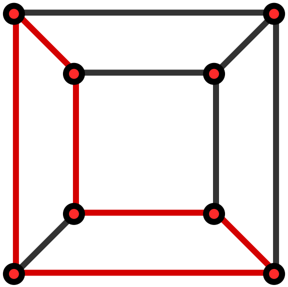


Figura 4: C_6.

Ejemplo de ciclo

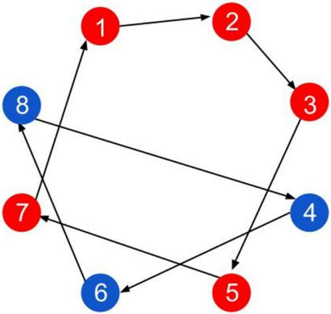


Figura 5: C_3 y C_5.

Tabla de contenidos

Grafos conexos

Decimos que un grafo G es conexo si para cualquier par de vértices $x, y \in V(G)$ se tiene que G contiene un **camino simple** desde x a y.

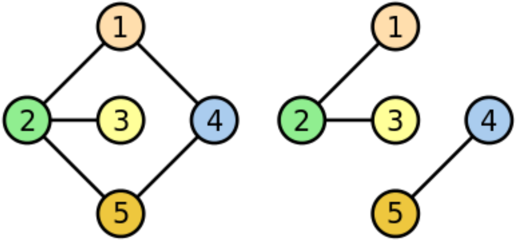


Figura 6: Grafo conexo (Izquierda). Grafo no conexo (Derecha).

Camino (WALK)

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Una secuencia

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_t, v_t)$$

es llamado **un camino** en G (o **camino de longitud** t **desde** v_0 **hasta** v_t) si se cumple que $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$ para todo $i = 1, \ldots, t$.

En un **camino** algunos vértices y aristas pueden **repetirse**, mientras que un **camino simple** está prohibido que se repiten vértices y aristas.

Ejemplo de camino

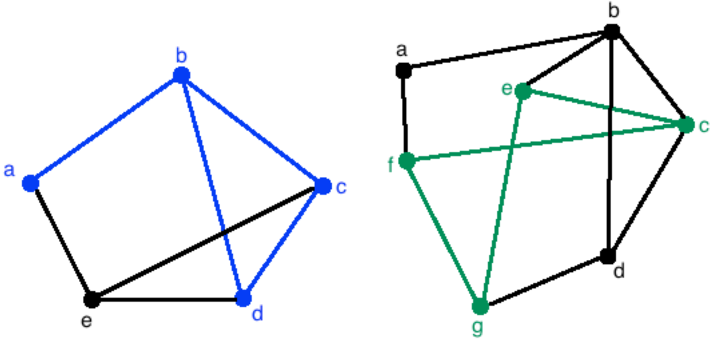


Figura 7: Camino en un grafo

Componentes de un grafo

Definimos una relación $\sim$ sobre el conjunto $V(G)$ del modo siguiente, dados $x, y \in V(G)$:

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{existe un camino desde} \quad x \quad \text{hasta} \quad y \quad \text{en} \quad G$$

Verifique que $\sim$ es una relación de equivalencia.
Sea $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ la partición en $V(G)$ generada por la relación de equivalencia $\sim$. Los subgrafos de G inducidos por los conjuntos V_i son llamados **componentes** del grafo G.

Teorema 1

Cada componente de cualquier grafo es conexa. Un grafo es conexo si y sólo si tiene una única componente.

Demostración:

De la definición de componente se tiene que ésta es conexa.
Por otro lado, si un grafo es conexo entonces es claro que tiene una única componente.
Por otra parte, para cualquier par de vértices x, y en la misma componente de un grafo G pueden ser unidos por un camino.
Cualquier camino de x a y de longitud más corta posible debe ser un camino simple.