Funciones

Profesores del curso:

LUIS ROCA [1]
JOHNNY VALVERDE [1]
FÉLIX VILLANUEVA [1]

OSWALDO VELÁSQUEZ [1]

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

7 de junio de 2020

Paridad de funciones

Definición 1 (Función par, impar)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{Dom}(f) = A$. La función f es

1. *par si, para cada $x \in A$, se cumple que $-x \in A$ y*

$$f(-x) = f(x).$$

2. *impar si, para cada $x \in A$, se cumple que $-x \in A$ y*

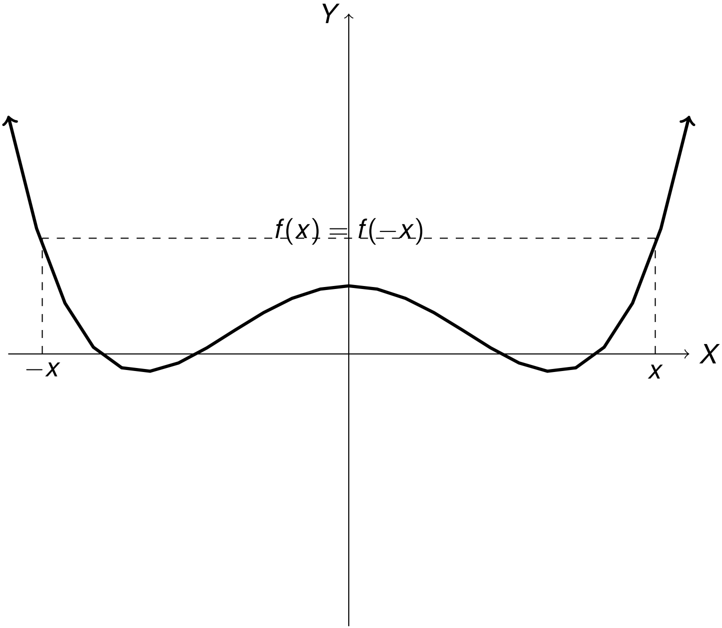
$$f(-x) = -f(x).$$

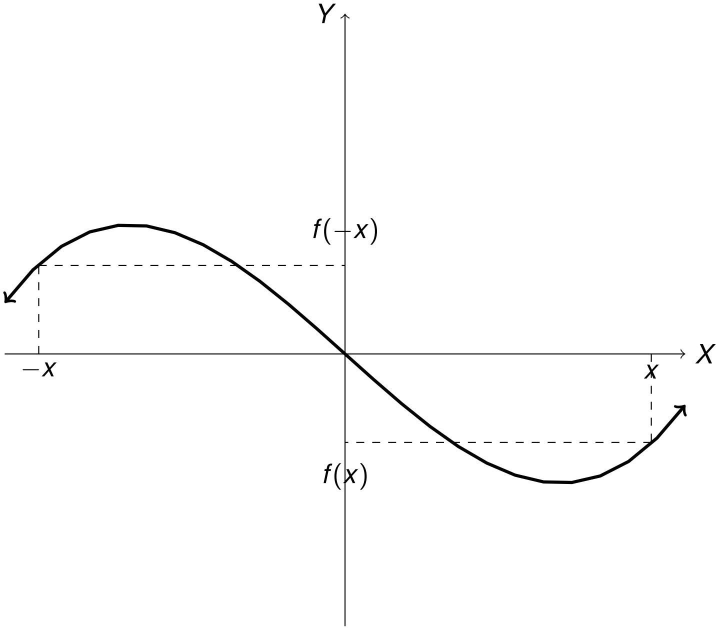
Fijado un entero $k \geq 0$, sea $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_k(x) = x^k.$$

Entonces

- Si k es par, entonces f_k es una función par
- Si k es impar, entonces f_k es una función impar


Y
X
$f(x) = f(-x)$
$-x$
x


Y
X
$f(-x)$
$-x$
x
$f(x)$

Definición 2 (Función periódica)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *con* $\mathrm{Dom}(f) = A$. *La función* f *es periódica de periodo* $T \neq 0$ *si para todo* $x \in A$, *se cumple que* $x + T \in A$ *y*

$$f(x + T) = f(x).$$

El número T *se denomina entonces periodo de la función* f. *Si existe un valor mínimo de* $T > 0$ *con esta propiedad, se denomina a* T *periodo fundamental para* f.

Periodicidad de funciones

Definición 2 (Función periódica)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ con $\mathrm{Dom}(f) = A$. La función f es periódica de periodo $T \neq 0$ si para todo $x \in A$, se cumple que $x + T \in A$ y

$$f(x+T) = f(x).$$

El número T se denomina entonces periodo de la función f. Si existe un valor mínimo de $T > 0$ con esta propiedad, se denomina a T periodo fundamental para f.

- Las funciones $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son periódicas de periodo fundamental 2π.
- La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x - [\![x]\!]$$

es periódica.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición 3

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ *con* $\mathrm{Dom}(f) = A$ *(f es una aplicación). La función f es*

1. *inyectiva si*
$$\forall x \in A, \forall y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$
2. *sobreyectiva si*
$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x).$$
Equivalentemente, $\mathrm{Ran}(f) = B$*.*
3. *biyectiva si es inyectiva y biyectiva a la vez.*

¿Cuál es el criterio gráfico para determinar que una función es inyectiva o sobreyectiva?

Definición 4

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ una función. Dado $y \in B$, la imagen inversa de y por f es el conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : y = f(x)\}.$$

Por ejemplo

- $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ si y solo si $y \in \mathrm{Ran}(f)$. Luego, f es sobreyectiva si y solo si
$$\forall y \in B, f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$
- Para $y \in \mathrm{Ran}(f)$, f inyectiva significa que $f^{-1}(y) = \{x\}$ posee un solo punto.

¿Qué significa esto gráficamente? ¿Cómo visualizo los puntos de $f^{-1}(y)$ en general?

Definición 4

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ una función. Dado $y \in B$, la imagen inversa de y por f es el conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : y = f(x)\}.$$

Por ejemplo

- $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ si y solo si $y \in \mathrm{Ran}(f)$. Luego, f es sobreyectiva si y solo si
$$\forall y \in B, f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$
- Para $y \in \mathrm{Ran}(f)$, f inyectiva significa que $f^{-1}(y) = \{x\}$ posee un solo punto.

¿Qué significa esto gráficamente? ¿Cómo visualizo los puntos de $f^{-1}(y)$ en general?

Definición 4

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ una función. Dado $y \in B$, la imagen inversa de y por f es el conjunto

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : y = f(x)\}.$$

Por ejemplo

- $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ si y solo si $y \in \mathrm{Ran}(f)$. Luego, f es sobreyectiva si y solo si
$$\forall y \in B, f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$
- Para $y \in \mathrm{Ran}(f)$, f inyectiva significa que $f^{-1}(y) = \{x\}$ posee un solo punto.

¿Qué significa esto gráficamente? ¿Cómo visualizo los puntos de $f^{-1}(y)$ en general?

Función inversa

El hecho de que para un dado valor de $y \in B$ exista un único valor de x en $f^{-1}(y)$, nos indica que la asignación de tal valor de x a y es una función. Es la función inversa

Definición 5

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ una función. Si f es inyectiva[a]*, definimos la función inversa de f, $f^* : B \to A$, de modo que*

$$y = f^*(x) \text{ si y solo si } x = f(y).$$

[a] f no requiere ser aplicación para definir inyectividad ni sobreyectividad

Nótese que

$$\mathrm{Dom}(f^*) = \mathrm{Ran}(f), \quad \mathrm{Ran}(f^*) = \mathrm{Dom}(f),$$

de modo que si f es sobreyectiva, entonces f^* resulta ser una aplicación, y si f es una aplicación, entonces f^* resulta sobreyectiva. En particular, si f es una aplicación biyectiva, entonces f^* también lo es.

Definición 6

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo. Decimos que f es

1. *creciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$;*
2. *estrictamente creciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$;*
3. *decreciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica $f(x_2) \leq f(x_2)$;*
4. *estrictamente decreciente en I si para todo par $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_2) < f(x_1)$.*

En cualquiera de estos casos, diremos que f es monótona sobre I, siendo estrictamente monótona si es estrictamente creciente o decreciente.[a]

[a] algunos autores utilizan los términos no decreciente y creciente en lugar de los respectivos crecience y estrictamente creciente, y del mismo modo para el decrecimiento

Los siguientes son ejemplos de funciones monótonas.

1. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ es estrictamente creciente, cumpliendo trivialmente la definición.
2. La función $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es estrictamente decreciente.
3. La función $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente.
4. Toda función constante es creciente y decreciente a la vez.

¿Relación entre monotonía e inyectividad?