Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 6, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Sea $X \subset \mathbb{R}$ no vacío. Denotaremos por X'_+ al conjunto de puntos de acumulación por la derecha de X, es decir:

$$x_0 \in X'_+ \iff \forall \delta > 0, \langle x_0, x_0 + \delta \rangle \cap X \neq \emptyset$$

Denotaremos por X'_- al conjunto de puntos de acumulación por la izquierda de x, es decir

$$x_0 \in X'_- \iff \forall \delta > 0, \langle x_0 - \delta, x_0 \rangle \cap X \neq \emptyset$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Para el conjunto $X =]0,1]$, se tiene que $0 \in X'_+$ y $1 \in X'_-$.

- $0 \in X'_+$. En efecto,
  Si $0 < \delta \leq 1$, entonces $]0, 0+\delta[\cap]0,1] =]0, \delta[\neq \emptyset$.
  Si $1 < \delta$, entonces $]0, 0+\delta[\cap]0,1] \neq \emptyset$.
  Por lo tanto $0 \in X'_+$.
- $1 \in X'_-$. En efecto,
  Si $0 < \delta \leq 1$, entonces $]1-\delta, 1[\cap]0,1] =]1-\delta, 1[\neq \emptyset$.
  Si $1 < \delta$, entonces $]1-\delta, 1[\cap]0,1] \neq \emptyset$.
  Por lo tanto $1 \in X'_+$.

Definición

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $x\in X=\mathrm{Dom}(f)$ y $x_0\in X'_+$. Diremos que $L\in\mathbb{R}$ es el límite por la derecha de f cuando x tiende a x_0, y escribimos

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

cuando:

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0: x\in X\ \wedge\ 0<x-x_0<\delta\Longrightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $x \in X = \mathrm{Dom}(f)$ y $x_0 \in X'_-$. Diremos que $L \in \mathbb{R}$ es el límite por la izquierda de f cuando x tiende a x_0, y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

cuando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in X \ \wedge \ 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ejemplo

Sea $f(x) = |x-1|, x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Expresamos f como una función por tramos,

$$f(x) = \begin{cases} x-1 \ , & x \geq 1 \\ 1-x \ , & x < 1 \end{cases}$$

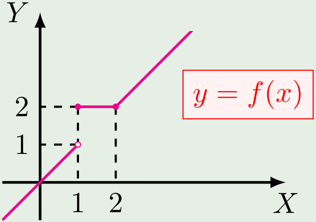
Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (x-1) \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (1-x) \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea f una función por tramos representada por la gráfica



- Calcule $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.
- ¿Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

De la figura,

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Por lo tanto, $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $X = \mathrm{Dom}(f)$ y $x_0 \in X'_+ \cap X'_-$. Entonces vale lo siguiente:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Observación

- Si alrededor de un punto los límites laterales por la derecha e izquierda existen, pero son diferentes, entonces el límite no existe.
- En el caso en que $a \in X'_- \cap X'_+$, si uno de los límites laterales no existe, entonces el límite no existe.
- Si x es punto de acumulación solo por la derecha (o solo por la izquierda), el límite existe si y solo si el límite lateral correspondiente existe.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Convención

Usaremos la siguiente convención sobre cuándo se dice que un límite existe.

Diremos que "$\lim\limits_{x\to *} f(x)$ existe" cuando

$$\lim_{x\to *} f(x) = L \quad \text{y} \quad L \text{ es un número real.}$$

Donde $x \to *$ significa cualquiera de los comportamientos de la variable x.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

Álgebra de límites

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $X = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$ y $a \in X'$ tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Entonces

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \pm M$.
2. $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x) = k \cdot L$.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \cdot M$.
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0.$

Observación: Los mismos resultados se aplican cuando $a \in X'_{\pm}$ y tomamos límite lateral $x \to a^{\pm}$.

Demostración (1).

Dado $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon' = \varepsilon/2$, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in X \wedge 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \varepsilon/2$$
$$x \in X \wedge 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \varepsilon/2$$

Elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que si $x \in X$ y $0 < |x - a| < \delta$ tenemos que $|f(x) - L| < \varepsilon/2$ y $|g(x) - M| < \varepsilon/2$.

Así,
$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ |f(x) + g(x) - (L + M)| &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ |f(x) + g(x) - (L + M)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

Proposición

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ y existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

Dado $\varepsilon > 0$ para $\varepsilon' = \varepsilon/M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - 0| < \varepsilon'$. Así, $|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Sea $x \in X$ y $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - 0| &= |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \\
|f(x)g(x) - 0| &\leq M|f(x)| \\
|f(x)g(x) - 0| &< M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \\
|f(x)g(x) - 0| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Demuestre que: $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Demostración. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $|g(x)| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Aplicamos la proposición anterior:

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Propiedades

1. $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} f(h + x_0)$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$
3. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in V'_\delta(x_0) \cap \mathrm{Dom}(f)$.

Teorema (Sandwich)

Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $X = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \cap \mathrm{Dom}(h)$ y $x_0 \in X'$. Si

i. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in X$, y
ii. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$.

entonces

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

Demostración.

Dado $\varepsilon > 0$, existen $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ tales que $x \in X$ y

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Longrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |h(x) - L| < \varepsilon \Longrightarrow L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

Elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Luego para $x \in X$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ tenemos que

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \Longrightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$$

$\square$

Ejercicios

1. Calcular $\lim_{x\to 0^+} [\![3x+1]\!]$, $\lim_{x\to 0^-} [\![3x+1]\!]$. ¿Existe $\lim_{x\to 0} [\![3x+1]\!]$?
2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x^2+2)^{[\![x]\!]} & , \ x \geq 1 \\ \sqrt[3]{x} & , \ x < 1 \end{cases}$$

¿Existe $\lim_{x\to 1} f(x)$?

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning