Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 10, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

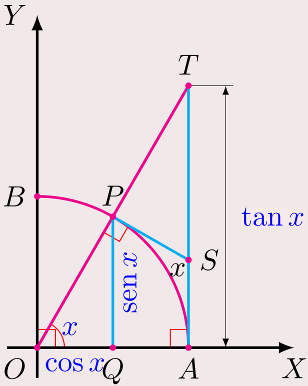
Teorema

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0 \ , \quad x \text{ en radianes}$$

Demostración

Consideremos que $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
De la figura: $0 \leq \operatorname{sen}(x) \leq x$
Además:
$\lim_{x\to 0^+} x = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} 0 = 0$
Al aplicar el teorema de Sandwich, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x) = 0$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

Luego, analicemos cuando $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$ tenemos $-x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, así

$$0 \leq \operatorname{sen}(-x) \leq -x \Longrightarrow x \leq \operatorname{sen}(x) \leq 0$$

Además, $\lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0$, al aplicar el teorema de Sandwich, se tiene $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sen}(x) = 0$.

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = 0.$$

$\square$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

$$\lim_{t \to 0} \cos(t) = 1 \ , \quad t \text{ en radianes}$$

Teorema

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1 \ , \quad t \text{ en radianes}$$

Demostración

Consideremos que $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

De la figura: $\operatorname{sen}(x) \leq x \leq \tan(x)$

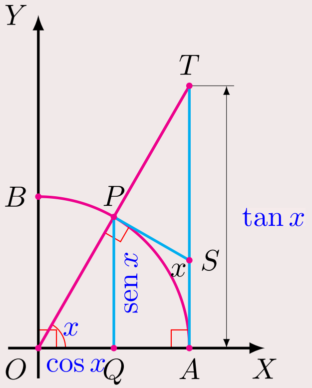
$$\cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq 1$$

Además:

$\lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$ y $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

Al aplicar el teorema de Sandwich, se tiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$$



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

Luego, analicemos cuando $x \in]-\frac{\pi}{4}, 0[$ tenemos $-x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, así

$$\operatorname{sen}(-x) \leq -x \leq \tan(-x) \Longrightarrow \cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq 1$$

Además: $\lim\limits_{x \to 0^-} \cos(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} 1 = 1$.

Al aplicar el teorema de Sandwich, se tiene $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$.

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$$

$\square$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} &= \lim_{x\to 0} 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \\
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} &= 3 \lim_{3x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} \\
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} &= 3(1) \\
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} &= 3
\end{aligned}$$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x(1+\cos(x))}\\
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\cdot\frac{x}{1+\cos(x)}\\
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\cos(x)}\\
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= (1)(1)(0)=0
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sea f una función tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Demuestre que:

a) Si $\lim_{x \to 0} f(x) = L \in \mathbb{R} \implies L = 0$

b) Existe $\lim_{x \to a} f(x), \ \forall a \in \mathbb{R}$

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Decimos que A está acotado superiormente, si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in A$ se tiene $x \leq M$.
Decimos que A está acotado inferiormente, si existe $N \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in A$, se tiene $x \geq N$.
Por último, decimos que A está acotado si lo está superior e inferiormente.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

Con esta última definición, un conjunto que no es acotado es un conjunto tal que, para todo $M \in \mathbb{R}$, posee un elemento x (que depende de M) tal que $x > M$, es decir, posee elementos tan grandes como se desee.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición (Límite más infinito)

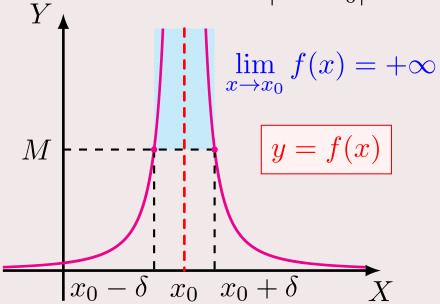
Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, y x_0 punto de acumulación de A. Decimos que f tiene límite $+\infty$ en x_0 (o cuando x tiende a x_0) si, para cada $M \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$ (que depende de M) tal que, si $x \in A$ y $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) > M$. Denotamos entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ .$$

Definición (Límite más infinito)

Es decir, $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \text{si } x \in A \ \wedge \ 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$



Definición (Límite menos infinito)

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, y x_0 punto de acumulación de A. Decimos que f tiene límite $-\infty$ en x_0 (o cuando x tiende a x_0) si, para cada $M \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$ (que depende de M) tal que, si $x \in A$ y $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $f(x) < -M$. Denotamos entonces

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \ .$$

Es decir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \text{si } x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Definición

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ significada que cuando $x \to a^+$, $f(x)$ toma valores ilimitadamente grandes-positivos.
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ significada que cuando $x \to a^-$, $f(x)$ toma valores ilimitadamente grandes-positivos.
- De manera similar se define el significado de "$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$" y "$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$".

Ejemplo

Demostrar que

$$\lim_{x\to 5} \frac{5}{|\sqrt{x-1}-2|} = +\infty$$

Ejemplo

Demostrar que

$$\lim_{x \to -3} \frac{1+x}{(x+3)^2} = -\infty$$

Proposición

Si $\lim_{x \to a} f(x) = A$ *y* $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ *con* $g(x) > 0$ *en una vecindad de* a. *Entonces*

a) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \quad A > 0, \quad \left(\dfrac{A}{0^+} = +\infty\right)$

b) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty, \quad A < 0, \quad \left(\dfrac{A}{0^+} = -\infty\right)$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 8}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{3x - 8}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \lim_{x \to 1} \frac{3x - 8}{(x-1)^2(x-2)} \\
\lim_{x \to 1} \frac{3x - 8}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{-5}{0^+(-1)} \\
\lim_{x \to 1} \frac{3x - 8}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= +\infty
\end{aligned}$$

Ejercicio

Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Si n es un número natural par, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^n}=+\infty$$

b) Si n es un número natural impar, entonces

$$\lim_{x\to a^-}\frac{1}{(x-a)^n}=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+}\frac{1}{(x-a)^n}=+\infty$$

Teorema (Composición de límites)

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ con $g(B) \subset A$, $x_0 \in B'$, $u_0 \in A'$, $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$ y $\lim\limits_{u \to u_0} = L$, además, cuando $x \neq x_0$ se tiene $g(x) \neq u_0$.

Entonces,

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = L,$$

esto es,

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L.$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

En el caso en que $\lim\limits_{x \to 0} f(u)$ exista, se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} f(x)$$

También

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(ax)$$

donde $a \neq 0$ es una constante.

Ejemplo

- Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$:

  Cuando $x \to 0^+$, vemos que $\dfrac{1}{x} \to +\infty$.

  Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to +\infty} e^t = +\infty$.

- Calcule $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$:

  Cuando $x \to 0^-$, vemos que $\dfrac{1}{x} \to -\infty$.

  Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to -\infty} e^t = 0$.

Límites trigonométricos

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \sec x = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \csc x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \csc x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \ln x = -\infty$

Límite de una función polinómica

Como consecuencia del álgebra de límites ya es fácil calcular los límites laterales de funciones polinómicas

$$P(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0$$

Luego,

- $\lim\limits_{x \to a^+} P(x) = P(a)$
- $\lim\limits_{x \to a^-} P(x) = P(a)$

Ejemplo

Evalúe

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 + x^5 - 2}{2x^5 - 3}$$

Resolución: Usando algebra de límites, se tiene

- $\lim\limits_{x\to 1^+} (x^3 + x^5 - 2) = 1 + 1 - 2 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} (2x^5 - 3) = 2 - 3 = -1 \neq 0$

Luego,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 + x^5 - 2}{2x^5 - 3} = \frac{1 + 1 - 2}{2 - 3} = 0$$

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejercicio

Utilice la definición de limite de una función para demostrar en cada caso.

a) $\lim\limits_{x \to a} x = a.$

b) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$

c) $\lim\limits_{x \to -1} (2x - 3) = -5.$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = -2.$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

Referencias

James Stewart
Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
Cengage Learning

Jon Rogawski
Cálculo - Una variable. 2da ed.
W. H. Freeman and Company

Ron Larson - Bruce Edwards
Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
Cengage Learning