Árbol de expansión de un grafo

Ronald Mas,
Angel Ramirez

20 de julio de 2020

Contenido

1. Árbol de expansión de un grafo
2. Noción de árbol de expansión mínima

Árbol de expansión de un grafo

Definición

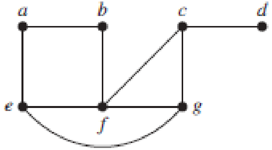
Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un árbol arbitrario de la forma $T = (V, E')$, donde $E' \subseteq E$ es llamado un árbol de expansión del grafo G. Es decir un árbol de expansión es un subgrafo de G que es un árbol y contiene todos los vértices de G.

Observaciones:

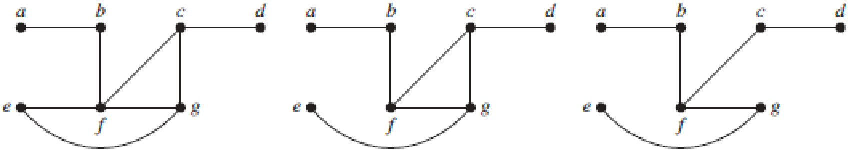
- Si G es un grafo no conexo entonces no existe un árbol de expansión para G.
- Todo grafo G conexo posee un árbol de expansión.

Ejemplo

Sea el grafo simple $G = (V, E)$:



El dibujo muestra un árbol de expansión que resulta al suprimir ciertas aristas del grafo G:



Aristas suprimidas : $\{a, e\}$ $\{e, f\}$ $\{c, g\}$

Algoritmo:(Árbol de expansión) Sea $G = (V, E)$ un grafo con $\mid V(G) \mid = n$, $\mid E(G) \mid = m$ y secuencia de grados $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$. El algoritmo construye sucesivamente conjuntos de aristas $E_0, E_1, \cdots \subseteq E$. Sea $E_0 = \emptyset$, si el conjunto E_{i-1} fue encontrado entonces el conjunto E_i es calculado como:

$$E_i = \begin{cases} E_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{, si el grafo } (V, E_{i-1} \cup \{e_i\}) \text{ no tiene ciclos} \\ E_{i-1} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

El algoritmo se detiene si E_i posee $n-1$ aristas o $i = m$. Es decir todas las aristas del grafo G han sido considerados. Denotemos por E_t el conjunto para los cuáles el algoritmo se detiene y sea $T = (V, E_t)$.

Proposición

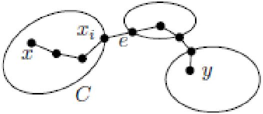
1) *Si el algoritmo anterior produce un árbol T con $n-1$ aristas entonces T es un árbol de expansión de G.*
2) *Si el algoritmo anterior produce un árbol T que tiene $k < n-1$ aristas entonces G es un grafo disconexo con $n-k$ componentes.*

Prueba:

1) Según la forma en que los conjuntos E_i fueron creados, el grafo G no tiene ciclos, si $k = \mid E(T) \mid = n-1$ entonces T es un árbol y por tanto éste es un árbol de expansión del grafo G.
2) Si $k < n-1$ entonces T es un grafo disconexo tal que cada componente es un árbol (éste es llamado un bosque). Veamos que el conjunto de vértices de las componentes del grafo T coincide con el conjunto de vértices de las componentes del grafo G.

Continua prueba:

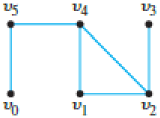
Procedamos por contradicción, supongamos que no es cierto y sean x y y vértices que pertenecen a la misma componente de G pero en distintas componentes de T, denotemos por C la componente de T conteniendo al vértice x y sea el camino $(x = x_0, e_1, x_1, e_2, \cdots, e_l, x_l = y)$ de x hacia y en el grafo G, como muestra la figura:



Sea i el último índice tal que x_i este contenido en la componente C, entonces $i < l$ y por tanto $x_{i+1} \notin C$. La arista $e = \{x_i, x_{i+1}\}$ por tanto no pertenece al grafo T, así éste tuvo que formar un ciclo con algunas de las aristas seleccionadas en T en alguna etapa del algoritmo. Por tanto el grafo $T + e$ también contiene un ciclo, pero esto es imposible ya que e conecta dos componentes distintas de T.

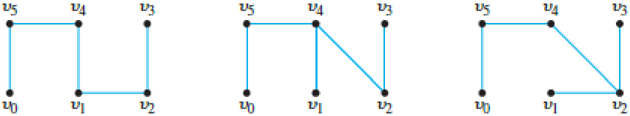
Ejemplo

Sea el grafo $G = (V, E)$:



G

Los árboles de expansión del grafo G son:



Árboles de expansión de G

EL problema del árbol de expansión mínima

Introducción:

Imagine un mapa de su región favorita de campo con unos 30 o 40 pueblos. Algunos pares de aldeas están conectadas por caminos de grava. La municipalidad decide modernizar algunas de estas carreteras adecuadas para la conducción rápida de automóviles, pero quiere invertir la menor cantidad de dinero posible con la condición de que sea posible viajar entre dos pueblos a lo largo de una carretera. De esta manera se consigue un problema fundamental llamado árbol de expansión mínimal. Esta sección está dedicada a su solución.

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo.

1) Para cada arista $e \in E(G)$ asignemos un número real no negativo $w(e)$ llamado el peso de la arista e
2) El grafo G junto con una función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ es llamada una red o malla.

Observaciones:

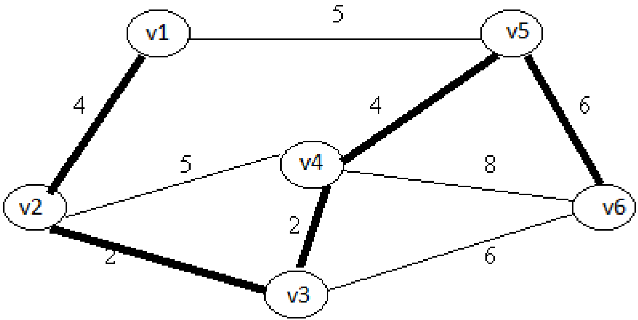
- El problema a tratar se reformula matemáticamente, dado un grafo $G = (V, E)$ con función peso no negativa w en las aristas, encontrar un subgrafo conexo de expansión (V', E') tal que la suma

$$w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$$

posea el mínimo valor posible.

Ejemplo

La siguiente red muestra un árbol de expansión mínima T que con
$V(T) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y
$E(T) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$



Es decir $w(T) = 4 + 2 + 2 + 4 + 6 = 18$.