Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Abril 24, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Contenido

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Un procedimiento incorrecto es utilizar un proceso de límite con las derivadas calculadas en intervalos abiertos y garantizar que la derivada existe si el límite de la derivada existe, es decir

$$" \lim_{x \to a^+} f'(x) = L = \lim_{x \to a^-} f'(x) \Longrightarrow f'(a) = L"$$

Ejemplo

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 1, & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{x^2}{2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

derivamos en intervalos abiertos:

$$f'(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ -x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Luego, $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$. Sin embargo, f no es continua en $x = 0$, es decir $f'(0)$ no existe.

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Cálculo de derivadas

- Si $f(x) = c$, donde c es una constante, entonces $f'(x) = 0$.
- Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$.
- Si $f(x) = cx$, donde c es una constante, entonces $f'(x) = c$.
- Si $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.
- Si $f(x) = x^{1/n},\ n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
- Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$.
- Si $f(x) = \cos(x)$, entonces $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.
- Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2},\ x \neq= 0$.

Sesión 02

Teorema (Derivada de suma, resta, producto y cociente)

Si f y g son funciones derivables en x_0, entonces:

- La suma y resta es derivable en x_0:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

- El producto es derivable en x_0:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

- Si, además, $g(x_0) \neq 0$, entonces el producto es derivable en x_0:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Ejemplo

Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$h(x) = \sqrt[3]{x}\,\mathrm{sen}(x),\ \ x \in \mathbb{R}$$

Determine $h'(x)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Derivadas de las funciones trigonométricas

- $\tan'(x) = \sec^2(x)$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots\}$
- $\cot'(x) = -\csc^2(x)$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$
- $\sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots\}$
- $\csc'(x) = -\csc(x)\cot(x)$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\}$

Sesión 02

Un límite especial

El número e es un número irracional y es uno de los números más importantes en matemática. Sus primeras cifras son:

$$2.718281828459045235\ldots$$

Se le suele llamar el número de Euler por Leonhard Euler.

El número e es un real que satisface:

- $e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$,
- $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = 1$,
- $\ln(e) = 1$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=e^x \quad\Longrightarrow\quad f'(x)=e^x$, *para todo* $x\in\mathbb{R}$.
- $f:\langle 0,+\infty\rangle\to\mathbb{R},\quad f(x)=\ln(x) \quad\Longrightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{x}$, *para todo* $x\in\langle 0,+\infty\rangle$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Dada la regla de correspondencia de la función φ, donde

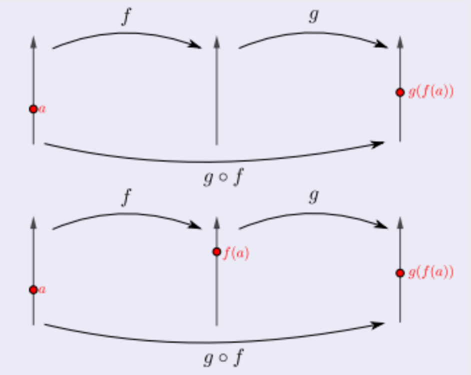
$$\varphi(x) = \frac{x^3 e^x - \ln(x)}{\sqrt{x} + 5\cos(x)}.$$

¿Es derivable en π? ¿Cuál es la derivada en caso exista?

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Teorema (Regla de la cadena)



$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad f \ \text{ es derivabe en } a \\ \bullet \quad f \ \text{ es derivabe en } f(a) \end{array}\right\} \Longrightarrow (g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Teorema (Regla de la cadena)

Sean $f : A \to \mathbb{R}$ y $f : B \to \mathbb{R}$ funciones para las cuales la composición $g \circ f$ está bien definida, es decir $f(A) \subset B$. Supongamos que f es derivable en $x_0 \in A \cap A'$ y g es derivable en $u_0 = f(x_0) \in B \cap B'$. Entonces, la composición $g \circ f$ es derivable en x_0, y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Demostración.

Supongamos que para $x \neq x_0$, se cumple que $f(x) \neq f(x_0)$. Esto excluye por ejemplo el caso en que f es constante. Escribimos $u = f(x)$ y $u_0 = f(x_0)$, por la continuidad de f, tenemos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Luego, para $h = g \circ f$ y $x \neq x_0$.

$$\begin{aligned}
\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

de donde

$$
\begin{aligned}
h'(x_0) &= lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\\
h'(x_0) &= \lim_{u\to u_0}\frac{g(u)-g(u_0)}{u-u_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\
h'(x_0) &= g'(u_0)\cdot f'(x_0)\\
h'(x_0) &= g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)
\end{aligned}
$$

Aquí usamos el teorema de composición de límites. □

Ejemplo

Sea $\varphi(x) = \ln(x^2 - 9)$. Determine la recta tangente a la gráfica de φ en $(4, \ln 7)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Con la notación de Leibniz, siendo
$y = f(u), u = u(x), y(x) = f(u(x))$, la regla se escribe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Ejemplo: La derivada de

$$y = f(x) = \cos(x^2 + 1)$$

es

$$y' = f'(x) = -\operatorname{sen}(x^2 + 1) \cdot (2x).$$

Considerando $u = x^2 + 1$, se tiene que $y = \cos(u)$ y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\operatorname{sen}(u) \cdot (2x) = -\operatorname{sen}(x^2 + 1) \cdot (2x).$$

La regla de la cadena se puede componer varias veces. Para

$$y = h(\underbrace{g(\underbrace{f(x)}_{u})}_{v=k(x)}) = h(g(u)) = h(v)$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dv} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

o

$$\begin{aligned} y' &= h'(k(x))\cdot k'(x), \\ &= h'(k(x))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x), \\ &= h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x). \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Ejemplo: ¿La función $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^2}$ es derivable en 0?

Resolución:

- x^2 es derivable en 0.
- ¿ $\sqrt[3]{\cdot}$ es derivable en 0^2 ? **No**.

Eso quiere decir que no podemos aplicar la regla de la cadena.
Para responder,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

entonces φ no es derivable en 0

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Ejemplo

Ejemplo: ¿La función $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^4}$ es derivable en 0?
Resolución:

- x^4 es derivable en 0.
- ¿$\sqrt[3]{\cdot}$ es derivable en 0^4 ? **No**.

Eso quiere decir que no podemos aplicar la regla de la cadena.
Para responder,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$$

entonces $\varphi'(0) = 0$

Que no podamos aplicar la regla de la cadena **no quiere decir** que la composición no sea derivable

Ejemplo

Halle y', si $y = \sqrt{[f(x^2)]^5 + [g(x)]^4}$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 02

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart Newblock Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e Newblock Cengage Learning
- Jon Rogawski Newblock Cálculo - Una variable. 2da ed. Newblock W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards Newblock Cálculo, Tomo I. 10ma ed. Newblock Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA