Estimaciones de los Coefcientes Binomiales

Ronald Mas,
Angel Ramirez

22 de junio de 2020

Contenido

Proposición

Si $A \subset B$ *entonces* $\mid B - A \mid = \mid B \mid - \mid A \mid$.

Prueba:
Si $A \subset B$ entonces $B = A \cup (B - A)$. Como $A \cap (B - A) = \emptyset$ entonces $\mid B \mid = \mid A \cup (B - A) \mid = \mid A \mid + \mid B - A \mid$ que concluye la prueba.

Proposición

Si A, B *y* C *son conjuntos finitos disjuntos dos a dos se cumple que:*

$$\mid A \cup B \cup C \mid = \mid A \mid + \mid B \mid + \mid C \mid$$

Prueba:
Como $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Luego

$$\begin{aligned} \mid A \cup B \cup C \mid &= \mid A \cup (B \cup C) \mid \\ &= \mid A \mid + \mid B \cup C \mid \\ &= \mid A \mid + \mid B \mid + \mid C \mid \end{aligned}$$

Teorema

Para toda sucesión $A_1, A_2, \cdots, A_n$ de conjuntos finitos se cumple que:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\cdots,n\}}{k}} |\bigcap_{i \in I} A_i| .$$

Prueba:

Procedamos por inducción:

1) Para $n = 2$ se tiene que:
   Como $A_1 \cup A_2 = [A_1 - (A_1 \cap A_2)] \cup [A_2 - (A_1 \cap A_2)] \cup [A_1 \cap A_2]$.
   Por lo resultados previos se tiene que:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= |A_1 - (A_1 \cap A_2)| + |A_2 - (A_1 \cup A_2)| + |A_1 \cap A_2| \\ &= |A_1| - |A_1 \cap A_2| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2 \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| . \end{aligned}$$

2) Supongamos que se cumple para $n-1$

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i) \cup A_n\right| \\ &= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n\right| \\ &= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|(\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i \cap A_n)\right| \end{aligned}$$

Usando la hipotesis de inducción a $\left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right|$ y $\left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i'\right|$ con $A_i' = A_i \cap A_n$.

Continua la prueba

$$
\begin{aligned}
= & \left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sum_{I\in\binom{\{1,2,\cdots,n-1\}}{k}} \mid \bigcap_{i\in I} A_i \mid\right) + \mid A_n \mid \\
& - \left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\sum_{I\in\binom{\{1,2,\cdots,n-1\}}{k}} \mid \bigcap_{i\in I\cup\{n\}} A_i \mid\right).
\end{aligned}
$$

Luego en la primera suma agregamos con los signos apropiados el tamaño de las intersecciones que no incluyan a An y en la segunda suma el tamaño de las intersecciones que incluyan a An aparecidas. Luego esto concluiria la prueba.

Ejemplo:

Para un número natural el valor de $\varphi(n)$ llamado **Indicador de Euler o función de Euler** es definido como la cantidad de números $m \leq n$ y que son coprimos con n Es decir:

$$\varphi(n) = \mid \{m \in \mathbb{N} : \ MCD(n,m) = 1\} \mid .$$

Por ejemplo, si: $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, luego

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= n- \mid A_1 \cup A_2 \mid \\
&= n- \mid A_1 \mid - \mid A_2 \mid + \mid A_1 \cap A_2 \mid \\
&= n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1 p_2} \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right).
\end{aligned}$$

Fórmula del Indicador

Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces por el teorema fundamental de la aritmética se tiene

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

con $p_1, \cdots, p_r$ primos distintos y $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Teorema

Para $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ *se tiene:*

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Álgebra de Boole

Definición

Un álgebra de Boole también llamada un álgebra Booleana es un conjunto B junto con dos operaciones:

$$+: \begin{array}{ccc} B \times B & \longrightarrow & B \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array} \qquad \cdot: \begin{array}{ccc} B \times B & \longrightarrow & B \\ (a, b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array}$$

que cumplen los siguientes axiomas:

1) $a + b = b + a \quad$ y $\quad a \cdot b = b \cdot a$.
2) $(a + b) + c = a + (b + c) \quad$ y $\quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad$ y $\quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
4) Existen elementos 0 y 1 en B tal que $a + 0 = a \quad$ y $\quad a \cdot 1 = a$.
5) Para cada $a \in B$ existe un elemento en B denotado por $\overline{a}$ llamado el complemento de a tal que $a + \overline{a} = 1 \quad$ y $\quad a \cdot \overline{a} = 0$.

Teorema

Sea B un álgebra de Boole, se cumple:

1) *El complemento $\overline{a}$ de $a \in B$ es único.*
2) *Los elementos 0 y 1 son únicos.*
3) $\overline{(\overline{a})} = a, \ \forall a \in B.$
4) *Para cada $a \in B$ se cumple que $a + a = a \quad y \quad a \cdot a = a.$*
5) *Para cada $a, b \in B$ se cumple que $a + 1 = 1 \quad y \quad a \cdot 0 = 0.$*
6) *Para cada $a, b \in B$ se cumple que $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \quad y \quad \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}.$*

Prueba del teorema

Prueba:

1) Supongamos que $a \in B$ posee otro complemento, es decir existe $x \in B$ tal que $a + x = 1$ y $a \cdot x = 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
x &= x \cdot 1 \\
&= x \cdot (a + \overline{a}) \\
&= x \cdot a + x \cdot \overline{a} \\
&= a \cdot x + x \cdot \overline{a} \\
&= 0 + x \cdot \overline{a} \\
&= a \cdot \overline{a} + x \cdot \overline{a} \\
&= \overline{a} \cdot a + \overline{a} \cdot x \\
&= \overline{a} \cdot (a + x) \\
&= \overline{a} \cdot 1 \\
&= \overline{a}.
\end{aligned}$$

Continuación de la prueba

3) $$\begin{aligned} \overline{a} + a &= a + \overline{a} \\ &= 1 \end{aligned} \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot a &= a \cdot \overline{a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como a satisface las condiciones para ser el complemento de a se tiene que $\overline{(\overline{a})} = a$.

4) Sea $a \in B$ entonces:

$$\begin{aligned} a &= a + 0 \\ &= a + (a \cdot \overline{a}) \\ &= (a + a) \cdot (a + \overline{a}) \\ &= (a + a) \cdot 1 \\ &= a + a. \end{aligned}$$

Funciones Booleanas

Definición

Dado $B = \{0, 1\}$, sea $B^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : \ x_i \in B \text{ con } 1 \leq i \leq n\}$, definamos una función booleana como:

$$\begin{array}{rccc} f: & B^n & \longrightarrow & B \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

Observaciones:

a) La variable $x \in B$ se denomina **variable booleana**.

b) En el lenguaje de las maquinas el 0 significa apagado y el 1 encendido.

Ejemplo 1:
Encuentre los valores que toma la función booleana dado por $F(x, y, z) = xy + \overline{z}$.
Solución:

x	y	z	F(x,y,z)
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Ejemplo 2:
Encontrar la función booleana de una cámara fotográfica que tiene 3 sensores y toma la foto si.

i) El sensor luz esta prendido (1) y el sensor distancia Apagado (0);
ii) El sensor sonrisa Prendido(1) y el sensor luz apagado (0)

Solución:
Sean las variables:
x:El sensor de luz
y:El sensor de sonrisa
z:El sensor de distancia

x	y	z	F(x,y,z)
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Por tanto la función booleana es:

$$F(x,y,z) = xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z}.$$