Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

Código: CM2H1

Examen Final de Matemática Discreta

Sección: A, B

Profesores: F. Jara, J. Palacios

Duración: 100 minutos.

---

1. Decir si los siguientes enunciados son verdaderos (V) o falsos (F). Justifique su respuesta.

   a) Si G es un árbol con 10 vértices y P_G es su polinomio cromático, entonces 1 es raíz de P_G de multiplicidad 9. (2.5 ptos)

   b) No existen enteros a, b tales que $2a^2 + b^2 = p$ para todo primo $p \equiv 5, 7 \mod 8$. (2.5 ptos)

2. Dado un entero impar m.

   a) Pruebe que para todo número natural $n \geq 3$, se cumple $m^{2^{n-2}} \equiv 1 \mod 2^n$. (3 ptos)

   b) Dado un numero natural $n \geq 1$. Deduzca que existe una raíz primitiva módulo 2^n solo en los casos $n = 1$ o $n = 2$. (2 pto)

3. Dada la función booleana F en las variables x, y, z que toman el valor cero o uno, tal que su valor sea uno cuando dos de sus valores x e y, no tomen simultáneamente el valor cero.

   a) Determine la tabla de verdad correspondiente. (1 pto)

   b) Exprese F en función de sus minitérminos. (2 ptos)

   c) Use el mapa de Karnaugh para simplificar la expresión encontrada en el ítem *a*). (2 ptos)

4. Construya una máquina de estado finito con salida* M sobre el alfabeto de entrada $I = \{a, b\}$ y alfabeto de salida $O = \{0, 1\}$, de modo que cada cadena de entrada tiene su cadena de salida formado por solo por ceros, salvo que contenga términos de la forma abb, que corresponden a términos de la forma 001 en la cadena de salida correspondiente. (3 ptos)

5. Teniendo en cuenta la pregunta anterior, proponga tres cadenas de entrada y escriba las cadenas de salida correspondientes. (2 ptos)

Solución:

*Una *máquina de estado finito con salida* es una tupla $M = (S, I, O, f, g, s_0)$, donde S es un conjunto finito de *estados*, I es un conjunto finito llamado *alfabeto de entrada*, O es un conjunto finito llamado *alfabeto de salida*, $f\colon S \times I \to S$ es una función llamada *función transición*, $g\colon S \times I \to O$ es una función llamada *función de salida* y $s_0 \in S$ es llamado *estado de inicio*. Se dice que $i_1 i_2 \cdots i_n$ es una *cadena de entrada* si $i_1, i_2, \cdots, i_n \in I$. Sea $s_j = f(s_{j-1}, i_j)$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Una *cadena de salida* es una cadena de la forma $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$, donde $\sigma_j = g(s_{j-1}, i_j)$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

---

1. *a*) (V). Si G es un árbol con n vértices, entonces que $P_G(t) = t(t-1)^{n-1}$. Se prueba por inducción. Se cumple para $n = 2$, en este caso $G = K_2$. Supongamos que es cierto para arboles de $n-1$ vértices. Tomamos una hoja $v \in G$. Entonces $G - \{v\}$ es un árbol con $n-1$ vértices. Por hipótesis inductiva hay $t(t-1)^{n-2}$ formas de colorear $G - \{v\}$ con a lo más t colores. Como v es una hoja, hay $t-1$ formas de colorear v. Por tanto, hay $t(t-1)^{n-1}$ formas de colorear G con a lo más t colores.

   Luego si $n = 10$ entonces 1 es raíz de P_G de multiplicidad 9.

   b) (V) Supongamos lo contrario, i.e. existen enteros a, b tales que $2a^2 + b^2 = p$ para todo primo $p \equiv 5, 7 \mod 8$. Tenemos

   $$(-1)^{(p^2-1)/8} = \left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{a^2}{p}\right) = \left(\frac{2a^2}{p}\right) = \left(\frac{-b^2+p}{p}\right) = \left(\frac{-b^2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$$

   Si $p \equiv 5 \mod 8$, de las igualdades tenemos $-1 = 1$; y si $p \equiv 7 \mod 8$, de las igualdades tenemos $1 = -1$, que es absurdo en ambos casos.

2. *a*) Por inducción sobre $n \geq 3$. Sea $m = 2k + 1$, entonces

   $$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \mod 8$$

   Así es válido para $n = 3$. Asumamos que es válido para $n - 1$, entonces

   $$m^{2^{n-3}} \equiv 1 \mod 2^{n-1}$$

   Luego existe un entero r tal que $m^{2^{n-3}} = 1 + r2^{n-1}$. Elevando al cuadrado:

   $$m^{2^{n-2}} = 1 + r2^n + r^2 2^{2(n-1)}$$

   De donde $m^{2^{n-2}} \equiv 1 \mod 2^n$.

   b) Tenemos $\varphi(2^n) = 2^{n-1}$. Si $n \geq 3$ del ítem anterior tenemos $m^{\varphi(2^n)/2} \equiv 1 \mod 2^n$, de donde $ord_{2^n}(m) \leq \varphi(2^n)/2 < \varphi(2^n)$, es decir que m no puede ser raíz primitiva. Resta los casos $n = 1$, $n = 2$. Tenemos que 1 es raíz primitiva módulo 2 y 3 es raíz primitiva módulo 4.

3. Tenemos

(a)

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(b)

$$F(x; y; z) = \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

(c)

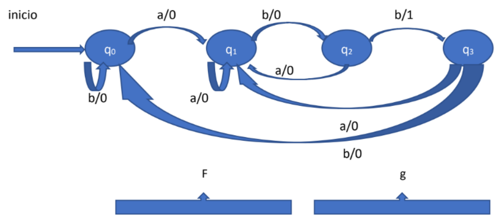
$x \setminus y$	xy	$x\bar{y}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
z	1	1		1
$\bar{z}$	1	1		1

x y

Se forman dos grupos de cuatro cuadrados adyacentes: El primer grupo conserva invariable x y el segundo y .

$$F(x; y; z) = x + y$$

4. Definimos $M = (S, I, O, F, g, q_0)$, donde $S = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $I = \{a, b\}$, $O = \{0, 1\}$, F, g como muestra la figura:



	a	b	a	b
q_0	q_1	q_0	0	0
q_1	q_1	q_2	0	0
q_2	q_1	q_3	0	1
q_3	q_1	q_0	0	0

5. La cadena de entrada *abbaaabbabab* da la cadena de salida 001000010000.

   La cadena de entrada *aaabaaa* da la cadena de salida 0000000

   La cadena de entrada *abbabb* da la cadena de salida 001001.

UNI, 10 de julio del 2023 **

**Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

Código: CM2H1 **Examen Parcial de Matemática Discreta**

Sección: A, B Profesores: J. Palacios, F. Jara

Duración: 100 minutos.

1. Sea D_n el conjunto de todos los divisores positivos de $n \in \mathbb{Z}^+$.

   a) ¿Es $(D_{40}; |)$ un conjunto parcialmente ordenado?. Donde:

   $$a\ R\ b \Longleftrightarrow a|b \quad (a \text{ divide a } b).$$

   (2 ptos)

   b) Teniendo en cuenta el ítem *a*). Realice el diagrama de Hasse. (2 ptos)

   c) Determine los maximales y minimales, máximo y mínimo el subconjunto.

   $$S = \langle 2; 4; 8; 20 \rangle.$$

   (1 pto)

2. En el contexto de comparación asintótica de funciones. Definimos

   $$T(n) = \Theta(f(n)) \quad \text{si y solo si}$$
   $$\exists (c_1; c_2; n_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}.$$

   Tal que $\forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 f(n) \leq T(n) \leq c_2 f(n)$.

   a) Describa en el plano XY el significado geométrico

   $$f(n) = \Theta(g(n))$$

   (2 ptos)

   b) Dado que $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$. Determine las constantes c_1, c_2 y n_0 tales que

   $$\forall n \geq n_0, c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$$

   (3 ptos)

3. Decir si los siguientes enunciados son verdaderos (V) o falsos (F). Justifique su respuesta.

   a) No existen grafos con infinitos vértices pero con un número finito de aristas. (2 ptos) *b)* Todo árbol con n vértices tiene exactamente $n-1$ aristas. (3 ptos)

4. Sea G un grafo con n vértices y con matriz de adyacencia A.

   a) Pruebe que G es conexo, si y solo si, cada entrada (i,j) de A^m con $i \neq j$ es no nula para algún entero $m \geq 1$. (2 ptos)

   b) Deduzca que G es conexo si y solamente si $(A+I)^{n-1}$ no tiene entradas nulas. (3 ptos)

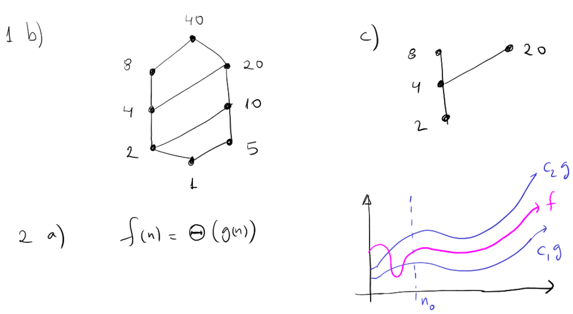
Solución:

1. *a)* Dado que $(\mathbb{Z}^+; |)$ es un conjunto parcialmente ordenado, por tanto $(D_{40}; |)$ es también parcialmente ordenado.

   b) El diagrama de Hasse de $(D_{40}; |)$ es mostrado en la figura inferior.

   c)

$$\begin{aligned}
&\text{Maximales } = \{8; 20\}\\
&\text{Minimales } = \{2\}\\
&\text{No tiene máximo}\\
&\text{Mínimo } 2.
\end{aligned}$$



2.

   a) Se muestra en la figura superior.

   b) Dividiendo por n^2 a $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c_2 n^2$

$$c_1 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2.$$

   Ahora

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 7; \quad 0 \leq \frac{1}{n} &\leq \frac{1}{7}\\
0 \geq -\frac{3}{n} &\geq \frac{-3}{7}\\
\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} &\geq \frac{1}{2} - \frac{3}{7}\\
\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} &\geq \frac{1}{14}
\end{aligned}$$

   Por tanto

$$\forall n \geq 7, \quad \frac{1}{c_1}n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq \frac{1}{2}n^2$$

   Existen $c_1 = \frac{1}{14}$ y $c_2 = \frac{1}{2}$.

3. *a)* (F). Si existen tales grafos, por ejemplo el grafo $G = (V,E)$ donde $V = \mathbb{N}$ y $E = \emptyset$.

   b) (V) Probemos por inducción. Para $n = 2$, es cierto. Supongamos que el enunciado es cierto para $n \geq 2$. Sea G un grafo de $n+1$ vértices. Consideremos una hoja v de G i.e. un vértice de grado 1. Note que $G - v$ es un grafo con n vértices, y por hipótesis inductiva $G - v$ posee $n-1$ aristas. Supongamos que u es el vértice adyacente a v. Note que G es obtenido al añadir la arista $\{u, v\}$ a $G - v$. Por tanto G tiene $(n-1)+1 = n$ aristas.

4. *a)* Supongamos que G tiene vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Por definición, el grafo G es conexo si cada par de vértices $v_i \neq v_j$ es conectado por un camino de longitud k para algún $k \geq 1$. Esta condición equivale a que la entrada (i,j) de A^k es no nula para algún $k \geq 1$. Si consideramos caminos simples podemos reducirnos a caso $1 \leq k \leq n-1$

   b) Consideremos el binomio de Newton:

$$(A+I)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} A^k$$

   Luego, tomando la entrada (i,j), tenemos

$$\left((A+I)^{n-1}\right)_{i,j} = I_{i,j} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(A^k\right)_{i,j}$$

   donde $\binom{n-1}{k} \geq 1$ para todo $k \geq 1$. Luego, deducimos que $\left((A+I)^{n-1}\right)_{i,j} \geq 1$ si $i = j$; y si $i \neq j$, tenemos

$$\left((A+I)^{n-1}\right)_{i,j} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(A^k\right)_{i,j} > 0 \text{ para algún } k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

   Finalmente se usa el ítem anterior para obtener la equivalencia deseada.

UNI, 15 de Mayo del 2023 *

*Hecho en LaTeX

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2023-1**

Código: CM2H1

Examen Sustitutorio de Matemática Discreta

Sección: A, B

Profesores: F. Jara, J. Palacios

Duración: 100 minutos.

---

1. Sea D_n el conjunto de divisores positivos de un número natural n. En $(D_{10}, |) \times (D_{18}, |)$ se considera el orden lexicográfico.

   a) Halle las cotas inferiores, cotas superiores, ínfimo y supremo, si existen, del subconjunto $S = \{(2,2),(2,3)\}$ de $(D_{10}, |) \times (D_{18}, |)$. (2 ptos)

   b) Dibuje el diagrama de Hasse de $(D_{10}, |) \times (D_{18}, |)$. (2 ptos)

   c) Sea la función $f\colon (D_{10}, |) \times (D_{18}, |) \to (D_{180}, |)$ dada por $f(a,b) = ab$.
   ¿Es f biyectiva? (1 pto)

2. Pruebe que para todo entero $r \geq 2$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que todo grafo con al menos n vértices contiene a un subgrafo isomorfo al grafo completo K_r o a su complemento $\overline{K_r}$. Provea una demostración detallada. (5 ptos)

3. Dado un primo $p > 2$. Pruebe la igualdad

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+1}{p}\right) = -1$$

(5 ptos)

4. Un motor F está controlado por tres interruptores x, y, z. Funciona cuando únicamente dos de los interruptores estén cerrados.

   a) Dado el álgebra de Boole $B = \{0,1\}$. Deduzca la tabla de verdad de la función $F\colon B^3 \longrightarrow B$, y obtenga su expresión booleana en función de minitérminos. (2,5 ptos)

   b) Reduzca F y encuentre el circuito correspondiente con sus puertas lógicas. (2,5 ptos)

Solución:

1. *a)* El conjunto de cotas superiores de $S = \Big\{(2,2),(2,3)\Big\}$ es:

$$\Big\{(2,6),(2,18),(10,1),(10,2),(10,3),(10,9),(10,18)\Big\}$$

El conjunto de cotas inferiores de $S = \Big\{(2,2),(2,3)\Big\}$ es:

$$\Big\{(2,1),(1,18),(1,9),(1,6),(1,3),(1,2),(1,1)\Big\}$$

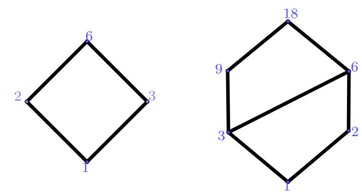
El supremo es

$$\text{mín}\Big\{(2,6),(2,18),(10,1),(10,2),(10,3),(10,9),(10,18)\Big\} = (2,6)$$

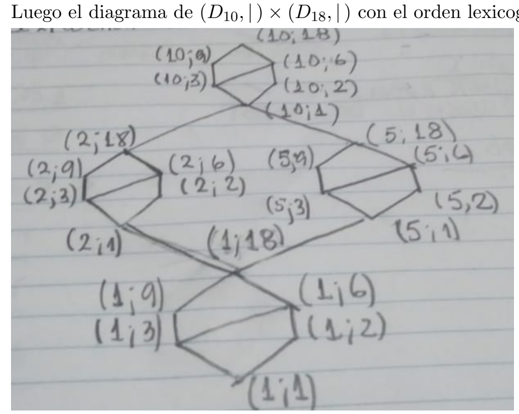
El ínfimo es

$$\text{máx}\Big\{(2,1),(1,18),(1,9),(1,6),(1,3),(1,2),(1,1)\Big\} = (2,1)$$

b) Tenemos $D_{10} = \{1,2,5,10\}$ y $D_{18} = \{1,2,3,6,9,18\}$. Sus diagramas de Hasse respectivos son:



Luego el diagrama de $(D_{10}, |) \times (D_{18}, |)$ con el orden lexicográfico es:



c) La función f no es inyectiva, pues $f(2,1) = f(1,2)$.

2. Sea $n = 2^{2r-3}$ y considere un grafo $G = (V, E)$ tal que $|V| \geq n$. Definimos inductivamente los subconjuntos $V_1, V_2, \cdots, V_{2r-2} \subset V$ y vértices $v_i \in V_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 2r-2$ tales que:

   1) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 2r-2$.

   2) $V_i \subset V_{i-1} - \{v_{i-1}\}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 2r-2$.

3) v_{i-1} es adyacente, o bien a todos los vértices de V_i, o a ningún vértice de V_i, para todo $i = 2, 3, \ldots, 2r-2$.

En efecto, tomamos V_1 como cualquier subconjunto de V de cardinal $n = 2^{2r-3}$ y $v_1 \in V_1$ arbitrario. Observe que se cumple 1) y también 2) y 3) por vacuidad.

(HI) Supongamos que tenemos V_{i-1} y $v_{i-1} \in V_{i-1}$ satisfaciendo 1), 2) y 3). Tenemos

$$|V_{i-1} - \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-2-(i-1)} - 1 = 2^{2r-1+i} - 1 > 2^{2r-2+i}$$

Sea W_i el subconjunto de $V_{i-1} - \{v_{i-1}\}$ de vértices adyacentes a v_{i-1}. Si $|W_i| \geq 2^{2r-2+i}$, entonces tomamos V_i como cualquier subconjunto de W_i de cardinal 2^{2r-2+i}.

Si $|W_i| < 2^{2r-2+i}$, entonces $|W_i| \leq 2^{2r-2+i} - 1$, luego

$$\Big|(V_{i-1} - \{v_{i-1}\}) - W_i\Big| = 2^{2r-1+i} - 1 - |W_i| \geq 2^{2r-1+i} - 1 - (2^{2r-2+i} - 1) = 2^{2r-2+i}$$

Luego tomamos V_i como cualquier subconjunto de $(V_{i-1} - \{v_{i-1}\}) - W_i$ de cardinal 2^{2r-2+i}. Note que ningún vértice de V_i es adyacente a v_{i-1}. Así tenemos la propiedad 3).

Finalmente tomando $v_i \in V_i$ arbitrario, se observa que V_i y $v_i \in V_i$ satisfacen 1), 2) y 3).

Afirmación: Entre los vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{2r-3}$, existen $r-1$ vértices con una misma propiedad en 3).

En efecto, sea P_1 el conjunto de vértices v_{i-1} que son adyacentes a todos los vértices de V_i para $i = 2, 3, \ldots, 2r-2$, y sea P_2 el conjunto de vértices v_{i-1} no son adyacentes a ningún vértice de V_i para $i = 2, 3, \ldots, 2r-2$. Por el principio del palomar, P_1 o P_2 contiene al menos $r-1$ vértices. En cada caso, elegimos los $r-1$ vértices y lo añadimos el vértice v_{2r-2}, de modo que obtenemos un subgrafo inducido H de G con r vértices. Por construcción, se observa que en el primer caso, cada par de vértices de H está conectado, por tanto H es isomorfo a K_r; mientras que en el segundo caso, ningún par de vértices de H está conectado, de donde H es isomorfo a $\overline{K_r}$. Esto concluya la prueba.

3. Notemos que $U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{\overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+1}{p}\right) &= \sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\frac{x(x+1)}{p}\right) \\
&= \sum_{x\in U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})} \left(\frac{x(x+1)}{p}\right) \\
&= \sum_{x\in U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})} \left(\frac{x^2(1+1/x)}{p}\right) \\
&= \sum_{x\in U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})} \left(\frac{1+1/x}{p}\right)
\end{aligned}$$

Se verifica sin dificultad que la función $U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ dada por $x \mapsto 1/x$ es biyectiva.

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+1}{p}\right) &= \sum_{x\in U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})} \left(\frac{1+1/x}{p}\right) \\
&= \sum_{x\in U(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})} \left(\frac{1+x}{p}\right) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\frac{1+x}{p}\right) - \left(\frac{1}{p}\right) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\frac{x}{p}\right) - 1 \\
&=
\end{aligned}$$

Como la cantidad de residuos cuadráticos modulo p y la cantidad de residuos no cuadráticos modulo p coinciden, tenemos $\sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\frac{x}{p}\right) = 0$. Por tanto,

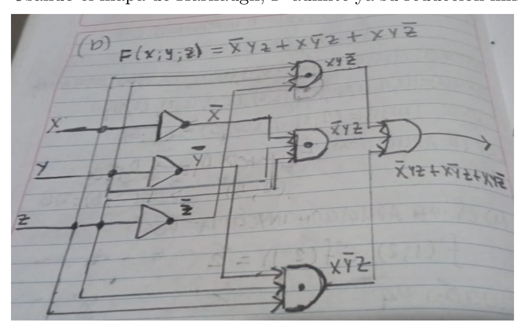
$$\sum_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{x+1}{p}\right) = 0 - 1 = -1\,.$$

4. La tabla de verdad es:

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

de donde $F(x, y, x) = \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z}$.

5. Usando el mapa de Karnaugh, F admite ya su reducción mínima. El circuito correspondiente es:



UNI, 24 de julio del 2023 *

*Hecho en LaTeX

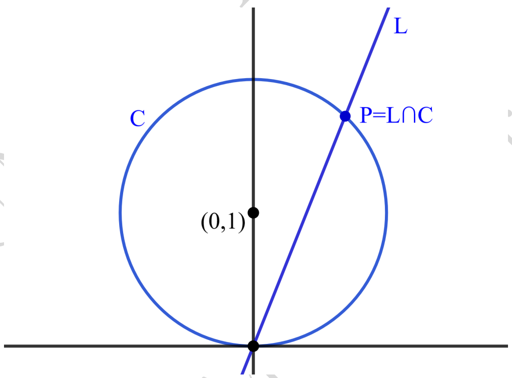
MATEMÁTICA DISCRETA
SOLUCIONARIO EXAMEN PARCIAL
20 DE OCTUBRE DE 2023

1. Para $X \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no vacío considere la siguiente relación de equivalencia:

$$u \sim v \leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } u = \lambda v.$$

a) Cuando $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ pruebe que $X/\sim$ está en biyección una circunferencia. [2 pts]

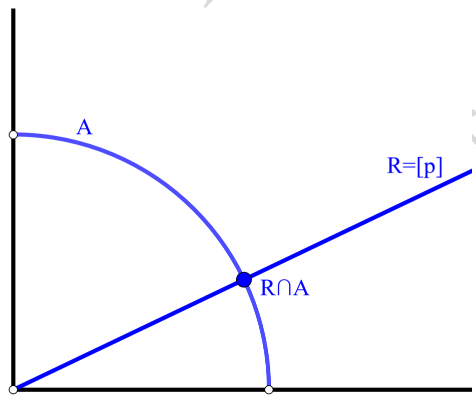
Solución. Notemos que las clases de equivalencia son rectas que pasan por el orígen a las que se le ha removido el origen,. Consideremos la circunsferencia C con centro en $(0,1)$ y radio uno. Cada clase, salvo la contenida en el eje x, corta a un único punto C.



Denotemos $E = \{(1,0)\}$. Definamos $F : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow C$ como $F([u]) \in [u] \cap C$ si $[u] \neq E$ y $F(E) = O$. Claramente es una biyección. $\square$

b) Dé un sistema de representates (s.d.r.) cuando $X = \mathbb{R}^2_+$. [2 pts]

Solución. Notemos que las clases de equivalncia son los rayos que parten del origen dentro del primer cuadrante. Si consideramos un arco A de circunsferenica (centrada en el origen) interseptado con el primer cuadrante, cara una de las clases va a cortar en un ˇnico punto a dicho arco, por tanto este sería un sistema de representantes.



$\square$

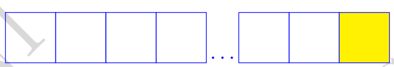
c) Cuando $X = \mathbb{N}^2$ pruebe que $\{(n, m) \in \mathbb{N}^2$ con n, m coprimos$\}$ es un s.d.r. [2 pts]

Solución. Llamemos $S = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2$ con n, m coprimos$\}$. Notemos que en $\mathbb{N}^2$, $(n_1, m_1) \sim (n_2', m_2')$ si y solo sí $\dfrac{n_1}{m_1} = \dfrac{n_2'}{m_2'}$. Para un punto $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ sabemos que $\dfrac{a}{b}$ se puede expresar de manera única como una fracción irreducible es decir $\dfrac{a}{b} = \dfrac{n}{m}$ con n, m coprimos y por tanto $(a, b) \sim (n, m) \in S$. Por la unicidad tenemos que S es un sistema de representantes. $\square$

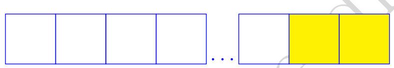
2. Considere un tablero $1 \times n$ el cual disponemos a llenar con fichas 1×1 y 1×2 (dominos) sin salirse, y F_k la secuencia de Fibonacci con $F_0 = F_1 = 1$. Pruebe que:

a) Hay F_n formas de llenar el tablero.

Solución. Sea T_n la cantidad de formas de llenar un tablero $1 \times n$, por ejemplo $T_1 = 1$ y $T_2 = 2$ ya que puede ser llenado por dos fichas 1×1 o con un solo dominó. Consideremos un tablero de $1 \times (n + 1)$, al ser llenado por nuestras fichas la útima casilla hay dos posibilidades: Es llenada por una ficha 1×1 o es llenada con un dominó. En el primer caso el resto del tablero puede ser llenado de T_n formas por defición



En el segundo caso el resto del tablero puede ser llenado de T_{n-1} formas



Por tanto el total de formas de llenar al tablero es $T_{n+1} = T_n + T_{n-1}$ por tanto cumple la misma fórmula recursiva que los números de Fibonaccio por otro lado $T_1 = 1 = F_1$ y $T_2 = 2 = F_2$ por inducción fuerte obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N} : T_n = F_n$. $\square$

b) Para todo $k \leq n/2$ el tablero se puede rellenar usando exactamente k dominos de $\dbinom{n-k}{k}$ formas.

Solución. Si un tablero $1 \times n$ al se llenado se usan k dominós, notamos que $2k \leq n$ y las $n - 2k$ casillas restantes se rellenan con fichas 1×1 en total usandose $n - k$ fichas. De estas $n - k$ fichas debemos escoger las posiciones de los k dominos y esto se puede hacer de $\dbinom{n-k}{k}$ formas. $\square$

c) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $F_n = \displaystyle\sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n-k}{k}$.

Solución. Consideremos X el conjunto de formas de llenar al tablero. Sea $\delta : X \longrightarrow \{0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ la función que cuenta cuantos dominos se usaron. Por ejemplo $\delta(0) = 1$ ya que corresponde cuando se usan n fichas 1×1. Por la parte a) tenemos que $\#X = F_n$ y por la parte b) las fibras $\#\delta^{-1}(k) = \dbinom{n-k}{k}$. Como

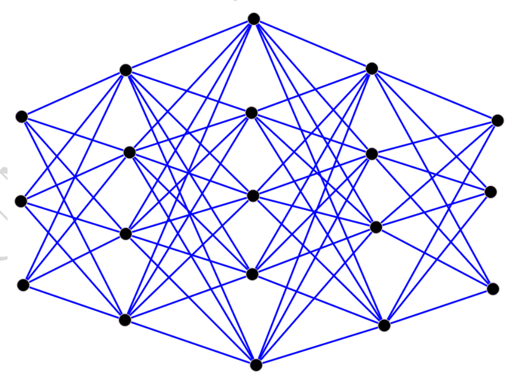
$$\#X = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \#\delta^{-1}(k)$$

obtenemos el resultado. $\square$

3. Dado $\kappa = (k_0, k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^{r+1}$ se define el grafo neuronal de tipo κ como el grafo con vértices $V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_r$ y aristas $A = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{r} [V_{j-1}, V_j]$ donde los V_i, llamados capas, son disjuntos y $\#V_i = k_i$. Fijemos $\kappa = (k_0, k_1, \ldots, k_r)$ y $0 \leq i < j \leq r$.

a) Esboze un grafo neuronal de tipo $(3, 4, 5, 4, 3)$. [1 pt]

Solución. Considere el siguiente grafo siendo las capas las columnas verticale:



□

b) ¿Cuantos subgrafos de un grafo neuronal de tipo κ son caminos de longitud mínima conectando vértices de la capa i a la capa j? [2 pts]

Solución. Digamos que $j = i+\ell$, notamos que un camino de la capa i a la capa j tiene que pasar por aristas de capas $i, i+1, \ldots, i+\ell = j$ por tanto la longitud mínima debe ser $\ell = j-i$, por cada camino debemos escoger un vértice por cada una de las capas $i, i+1, \ldots, i+\ell$ esto se puede hacer de multiplicando la cantidad de vértices de cada una de estas capas, es decir hay $\kappa_i \cdot \kappa_{i+1} \cdots \kappa_{i+\ell}$ tales caminos. □

c) ¿Cuantos subgrafos de un grafo neuronal de tipo κ son ciclos de longitud mínima pasando por vértices de la capa i a la capa j? [2 pts]

Solución. Notamos que un ciclo de longitud mínima que pase por los vértices de las capas i y j debe estar formado por dos caminos que conecten un vértice de la capa i con uno de la capa j. Para el primer caminos hay $\kappa_i \cdot \kappa_{i+1} \cdots \kappa_{i+\ell}$ elecciones, para el segundo como ya teenmos fijos los extremos hay $(\kappa_{i+1}-1)\cdots(\kappa_{i+\ell-1}-1)$ per al hacer estas elecciones estamos contando cada ciclo dos veces por tanto el total de ciclos es

$$\frac{1}{2}\kappa_i\kappa_{i+1}(\kappa_{i+1}-1)\cdots\kappa_{j-1}(\kappa_{j-1}-1)\kappa_j$$

Otra forma de hacerlo, es notar que dicho ciclo de lontigud minima va a tomar un vértice de la capa i y de la capa j y dos vértices de las capas intermedias, se puede hacer de

$$\kappa_i\binom{\kappa_{i+1}}{2}\cdots\binom{\kappa_{j-1}}{2}\kappa_j$$

formas, más los vertices escogidos de las $\ell-1$ capas intermedias se puden conectar con $\ell-2$ pares de aristas mas esto se puede de 2 formas distintas

es decir debemos multiplicar por $2^{\ell-2}$ por tanto el total de formas es

$$2^{\ell-2}\kappa_i\binom{\kappa_{i+1}}{2}\cdots\binom{\kappa_{j-1}}{2}\kappa_j$$

Noten que ambas respuestas coinciden. □

d) Sea $\mu = (u_0, u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{N}^{r+1}$ con $u_i \le k_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, r\}$. ¿Cuantos subgrafos neuronales de tipo μ contiene uno de tipo κ? [1 pt]

Solución. Para formar estos subgrafos para $p \in \{0, 1, \ldots, r\}$ debemos escoger u_p vértices de los k_p de las capa p, es decir de $\binom{k_p}{u_p}$ formas. Por tanto el total de subgrafos de tipo μ es

$$\binom{k_0}{u_0}\binom{k_1}{u_1}\cdots\binom{k_r}{u_r}$$

□

4. Sea $d \in \mathbb{N}$ y A la matriz de adyacencia del grafo completo K_d.

a) Contando recorridos de longitud dos determine A^2. [2 pts]

Solución. Enumeremos los vértices $v_1, \ldots, v_d$. Si $A^2 = [a_{i,j}]$ sabemos que $a_{i,j}$ cuenta los 2−recorridos de v_i a v_j. De v_i a v_j dichos recorridos son de la forma $v_iv_kv_j$ con $k \notin \{i,j\}$ por tanto hay $d-2$. Por otro lado de v_i a v_i los recorridos son $v_iv_kv_i$ para $k \neq i$, por tanto hay $d-1$, esto es

$$a_{ij} = \begin{cases} d-1 & \text{si } i = j \\ d-2 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

. □

b) Pruebe por inducción que $A^{n+1} = (a_n + (-1)^n)A + a_nI$ y $a_{n+1} = (d-1)\big(a_n + (-1)^n\big)$. [3 pts]

Solución. Noten que A es la matriz con 0 en la diagonal y 1 en sus otras entradas. De la parte *a*) tenemos que $A^2 = (d-2)A + (d-1)I$ así con $a_1 = d-1$ se verifica la primera identidad para el caso $n = 1$. Supongamos que $A^{n+1} = (a_n + (-1)^n)A + a_nI$, luego

$$A^{n+2} = AA^{n+1} = (a_n + (-1)^n)A^2 + a_nA = (a_n + (-1)^n)\big((d-2)A + (d-1)I\big) + a_nA$$

oten que la matriz identidad tiene coeficiente $\big(a_n + (-1)^n\big)(d-1)$ y el coeficiente de A es

$$(a_n + (-1)^n)(d-2) + a_n = (d-1)a_n + (-1)^n(d-2) = \big(a_n + (-1)^n\big)(d-1) - (-1)^n$$

es decir tomando $a_{n+1} = \big(a_n + (-1)^n\big)(d-1)$ tenemos que

$$A^{n+2} = \big(a_{n+1} + (-1)^{n+1}\big)A + a_{n+1}I$$

como se pedia probar. □

c) Para $d = 6$ determine a_4 y A^4. [1 pt]

Solución. Para $d = 6$ tenemos que $A^2 = 4A + 5I$ y $a_1 = 5$. De la relación recursiva $a_{n+1} = 5\big(a_n + (-1)^n\big)$ obtenemos $a_2 = 20$, $a_3 = 105$ y $a_4 = 521$. Por otro lado $A^4 = (a_3 - 1)A + a_3I$ es decir si $A^4 = [c_{ij}]$

$$c_{ij} = \begin{cases} 105 & \text{si } i = j \\ 104 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

□

5. **Pregunta Extra** (En caso la haga reemplaza a una de las anteriores)

Una permutación $\sigma \in S_n$ es llamada un desarreglo si $\forall k \leq n : \sigma(k) \neq k$. (Puebe interpretarse que se barajan n cartas enumeradas de 1 a n y $\sigma(k)$ es la numeración de k-esima carta).

a) Para $k \leq n$ denotamos $A_k = \{\sigma \in S_n / \, \sigma(k) = k\}$. Muestre que $\#A_k = (n-1)!$ [1 pt]

Solución. Como $\sigma(k) = k$, los valores restantes de sigma forman una permutación de $I_n \setminus \{k\}$ el cual tiene $n-1$ elementos por tanto hay $(n-1)!$ permutaciones. $\square$

b) Para $k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq n$. Muestre que [2 pts]

$$\#(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_r}) = (n-r)!$$

Solución. Noten que $\sigma \in A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_r}$ cuando $\sigma(k_1) = k_1, \sigma(k_2) = k_2, \ldots, \sigma(k_r) = k_r$ quedando $n-r$ valores de sigma los cuales forman una permutación de $I_n \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ que al tener $n-r$ elementos, deben haber $(n-r)!$ de tales permutaciones. $\square$

c) Explique como usar el principio de inclusion-exclusión para probar que el número de desarreglos en S_n cumple $D_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$. [3 pts]

Solución. Noten que el conjunto de desarreglos de S_n es el complemento de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Por el principio de inclusión exclusion tenemos

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{J \in P^*(I_n)} (-1)^{\#J-1} \#(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_r})$$

agupandor los índices con el mismo número de elementos

$$\sum_{J \in P^*(I_n)} (-1)^{\#J-1} \#(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_r}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!$$

Así la cantidad de desarreglos será

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!}$$

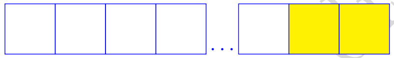
incorporando $n!$ como el termino $k = 0$ obtenemos el resultado. $\square$

Matemática discreta
Solucionario PC1
15 de septiembre 2023

1. Para $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ considere tableros $n \times n$. Se disponen de suficientes fichas 2×1 y 3×1 para colocar en el tablero llenando casillas consecutivas, ya sea vertical u horizontalmente. Pruebe que:

a) Para $2 \leq m \leq n$, toda franja de $m \times 1$ puede ser cubierta con las fichas mencionadas (pudiendo ser solo de un mismo tipo). [2 pts]

Solución. Para el caso de la franja de m casillas si $m = 2, 3$ basta colocar una ficha 2×1 y 3×1 respectivamente.
Fijemos $m \geq 3$, si asumimos cierto el resultado para franjas de k casillas con $2 \leq k \leq m$, veamos que podemos probarlo para una franja de $m+1$.
Para tal franja podemos colocar una ficha 2×1 al final faltando llenar una franja de $m-1$ casillas, lo que por hipótesis inductiva es posible llenar, por tanto podemos llenar la franja de $m+1$ casillas con las fichas mencionadas. Así por inducción fuerte siempre podemos llenar las franjas mencionadas.



$\square$

b) En general para $n \geq 3$ si escojemos una casilla cualquiera, el resto del tablero puede llenarse con las fichas mencionadas, de modo que no se salgan del tablero. (Sug. Proceda por inducción) [3 pts]

Solución. Para tableros 3×3 hay que cosniderar 3 casos: cuando se remueve una esquina, cuando se remueve la casilla central y cuando se remueve la casilla de en medio de un lado. Notar que cuando se remueve la casilla central el resto se puede llenar con 4 fichas 2×1. En los otros casos se puede rellenar con una ficha 2×1 y dos fichas 3×1.
Supongamos que es cierto para bloques $n \times n$, es decir que si quitamos una casilla podemos rellenar el resto con las ichas dadas. Para un tablero $(n+1) \times (n+1)$ al remover una casilla esta se va a encontrar en uno de los 4 subtableros $n \times n$ que admite nuestro tablero. Por inducción sabemos que podemos el subtablero $n \times n$ con las fichas dadas y por el item anterior tambien podemos llenar las dos ranjas restantes (una vertical $1 \times (n+1)$ y una horizontal $n \times 1$). En conclusion podemos llenar el tablero con la casilla removida.

El gráfico representa un tablero 11×11 cuando se remueve una ficha en el subtablero 10×10 superior izquierdo. y las dos franjas restantes. $\square$

2. Sea X un conjunto no vacío y 2^X el conjunto de funciones de X a $\{0,1\}$. Considere $\chi : P(X) \longrightarrow 2^X$ definida como $\chi(A) := \chi_A$ la función que vale 1 en puntos de A y 0 en puntos fuera de A. Pruebe que χ es una biyección. [4 pts]

Solución. $\chi : P(X) \to 2^X$ definida por $\chi(A) = \chi_A$.

- **Inyectividad:** Sean $A, B \subset X$ distintos, entonces $\exists c \in (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)$.
  En caso $c \in A \setminus B$: tenemos $\chi_A(c) = 1 \neq 0 = \chi_B$.
  En caso $c \in B \setminus A$: tenemos $\chi_B(c) = 1 \neq 0 = \chi_A$.
  En ambos casos $\chi_A \neq \chi_B$.
- **Sobreyectividad:** Sea $f : X \to \{0;1\}$, definimos $A_f := \{a \in X : f(a) = 1\}$
  Afirmación: $\chi_{A_f} = f$. En efecto, si $x \in A_f$ entonces $\chi_{A_f}(x) = 1 = f(x)$; si $x \notin A_f$ entonces $\chi_{A_f}(x) = 0 = f(x)$.

$\square$

3. Pruebe que las siguientes afirmacionaciones para números naturales:

   a) Para $n > 1$ se tiene que $n^4 + n^2 + 1$ es compuesto. [2 pts]

Solución. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$, notemos que

$$(n^2+1+n)(n^2+1-n) = (n^2+1)^2 - n^2 = n^4 + n^2 + 1 \qquad (1)$$

Como $n \in \mathbb{N}$, entonces $n^2 + 1 + n \geq 3$, por otro lado $n \geq 2$, entonces

$$n^2 + 1 - n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 3$$

luego la factorización en naturales (1) es no trivial (ningún factor es 1), por lo tanto $n^4 + n^2 + 1$ es compuesto. $\square$

   b) Si p y $q = p + 2$ son primos con $p > 3$ entonces $p + q$ es divisible por 12. [2 pts]

Solución. Sabemos que $p, q = p + 2 \in \mathcal{P}$ y $p > 3$, luego $p + q = p + (p+2) = 2p + 2$.
Afirmamos que p es impar. En efecto, si p es par entonces $p = 2$ y $q = 4$ no es primo, contradiciendo la parte de las hipótesis.
Ahora mostremos que $4 \mid 2p + 2$ y $3 \mid 2p+2$.

- $\underline{4 \mid 2p + 2}$**:** Notemos que existe $k \in \mathbb{N}$ y $k \geq 3$ tal que $p = 2k - 1$, pues si $k = 1$ o $k = 2$ se sigue que $p = 1$ o $p = 3$ respectivamente. Por lo tanto $p + q = 2p + 2 = 2(2k-1) + 2 = 4k$.
- $\underline{3 \mid 2p + 2}$**:** Afirmamos que $p = \overset{\circ}{3} + 2$. En efecto si $p = \overset{\circ}{3} + 1$, tenemos $q = p + 2 = (\overset{\circ}{3} + 1) + 2 = \overset{\circ}{3}$, luego $q \notin \mathcal{P}$, contradiciendo la hipótesis.
  Luego $p + q = 2p + 2 = 2(\overset{\circ}{3} + 1) + 2 = \overset{\circ}{3}$.

Finalmente $p + q = \overset{\circ}{mcm(4;3)} = \overset{\circ}{12}$. $\square$

4. Considere la relación en $\mathbb{R}$: $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$. Pruebe que:

   a) $\sim$ es una relación de equivalencia. [2 pts]

Solución.

- **Reflexiva:** Sea $x \in \mathbb{R}$, como $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ se tiene que $x \sim x$.
- **Simétrica:** Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x \sim y$, entonces $x - y \in \mathbb{Z}$ y por tanto $y - x = -(x-y) \in \mathbb{Z}$, de donde $y \sim x$.
- **Transitiva:** Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x - y, y - z \in \mathbb{Z}$ y por tanto $x - z = (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Z}$, de donde $x \sim z$.

Concluímos que la relación dada $\sim$ es de equivalencia. $\square$

   b) $[0,1[$ es un sistema de representantes. [1 pt]

Solución. Denotemos $\widetilde{x} := \{y \in \mathbb{R} : y \sim x\}$ la clase de equivalencia de x, $\mathcal{C} := \{\widetilde{x} : x \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de las clases de de equivalencia.
Definimos la "función":

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{C} & \to & [0;1[\\ & \widetilde{x} & \mapsto & x - \lfloor x \rfloor \end{array}$$

veamos que está bien definida y es una biyección.

- **Buena definición:** Sean $x_1, x_2 \in \widetilde{x}$, veamos que $\varphi(\widetilde{x_1}) = \varphi(\widetilde{x_2})$. En efecto, tenemos $x - x_1, x - x_2 \in \mathbb{Z}$, luego $k = x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$ de donde

$$\varphi(\widetilde{x_1}) = x_1 - \lfloor x_1 \rfloor = x_2 + k - \lfloor x_2 + k \rfloor = x_2 - \lfloor x_2 \rfloor = \varphi(\widetilde{x_2}).$$

- **Biyectividad:** Dado $x \in [0;1[$ se tiene $\lfloor x \rfloor = 0$, de donde

$$\varphi(\widetilde{x}) = x - \lfloor x \rfloor = x,$$

luego φ es sobreyectiva.
Sea $x, y \in \mathbb{R}$, tales que $\varphi(\widetilde{x}) = \varphi(\widetilde{y})$ mostremos que $\widetilde{x} = \widetilde{y}$. En efecto, como $x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$ se sigue $x - y = \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$, de donde $\widetilde{x} = \widetilde{y}$, luego φ es inyectiva.

$\square$

c) El cociente $\mathbb{R}/\sim$ está en biyección con una circunferencia. [2 pts]

Solución. Recuerde que $\mathbb{R}/\sim = \{\widetilde{x} : x \in \mathbb{R}\}$. Denotamos $\mathcal{C}_1$ la circunferencia de radio 1. Notamos que la función $\psi : [0;1[\to \mathcal{C}_1$ definida por $\psi(t) = (\cos(2\pi t); \sin(2\pi t))$ es un biyección. $\square$

5. **(Pregunta extra)** Pruebe que hay infinitos primos de la forma múltiplos de 4 más 3.
(*En caso la haga reemplaza alguna de las anteriores*)

Solución. Procediendo por reducción al absurdo.
Suponga $\mathcal{P}_3 = \{p \in \mathcal{P} : p = \mathring{4} + 3\}$ es finito, denote $N = \max_{p \in \mathcal{P}_3}\{p\}$. Considere

$$M := 3 + 4 \prod_{\substack{p \in \mathcal{P}\setminus\{3\} \\ p \leq N}} p = 3 + \mathring{4} > N \tag{2}$$

Afirmación 1: $M \notin \mathcal{P}_3 \to \exists q \in \mathcal{P}_3, [q \mid M]$. En efecto, si todos los divisores de M fueran $\mathring{4} + 1$ entonces $M = \mathring{4} + 1$ contradiciendo la ecuación (2).
Afirmación 2: $\forall q \in \mathcal{P}_3, [q \nmid M]$. En efecto, en caso $q = 3$ la afirmación es cierta pues 3 no aparece en el producto de números primos en (2); caso contrario $q \in \mathcal{P}_3 \setminus \{3\}$ se tiene $q \in \mathcal{P}\setminus\{3\}$ con $q \leq N$, es decir $q \mid \prod_{\substack{p \in \mathcal{P}\setminus\{3\} \\ p \leq N}} p$, por lo tanto si $q \mid M$ entonces $q \mid 3 = M - \prod_{\substack{p \in \mathcal{P}\setminus\{3\} \\ p \leq N}} p$, de donde $q = 3$ (absurdo).
De la afirmación 2 y la contrapuesta de la afirmación 2 se deduce que $M \in \mathcal{P}_3$ y $N < M < N$ (absurdo). $\square$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
CICLO 2023-I

PRACTICA CALIFICADA 1 DE MATEMÁTICA DISCRETA

---

1. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifique su respuesta. (4pts)
   (a) La unión de dos relaciones de equivalencia es una relación de equivalencia.
   (b) La composición[1] de dos relaciones de equivalencia es una relación de equivalencia.
   (c) La unión de dos ordenes parciales es un orden parcial.
   (d) La composición de dos ordenes parciales es un orden parcial.
2. Sea R una relación sobre $\mathbb{R}$. Dar un ejemplo con gráfica de cada uno de los siguientes: (6pts)
   (a) R reflexiva, pero no simétrica ni antisimetrica.
   (b) R simétrica, pero no reflexiva ni antisimetrica.
   (c) R antisimetrica, pero no reflexiva ni simétrica.
3. Se define la relación $\sim$ sobre el conjunto $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ como

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si y sólo si } a \times d = b \times c.$$

   Dicha relación $\sim$ es de equivalencia y permite construir los números racionales.
   Responda y justifique: (4pts)
   a) ¿Es cierto que $\mathbb{Q} = \{[(a, b)] : (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : MCD(a, b) = 1\}$?.
   b) ¿Por que decimos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$?.
4. Sea $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ y para $a, b \in A$ defina $a \preccurlyeq b$ si y sólo si a/b es un entero. (6pts)

[1]Si R y S son dos relaciones sobre un conjunto A, la *composición* $S \circ R$ se define como el conjunto de los pares $(x, z) \in A \times A$ tales que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in S$

a) Pruebe que $\preccurlyeq$ define un POSET en A.

b) Dibuje el diagrama de Hasse para $\preccurlyeq$.

c) Liste todos los elementos mínimo, máximo, minimal y maximal.

d) ¿Es un orden total?. Justifique la respuesta o dar un contraejemplo.

Solución:

1. (a) (F) Falla en la transitividad. Considere las relaciones de equivalencias sobre $\{1,2,3\}$: $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ y $S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$. Note que $(1,2),(2,3) \in R \cup S$ pero $(1,3) \notin R \cup S$.

   (b) (F) Falla en la simetría. Considere las relaciones de equivalencias sobre $\{1,2,3\}$: $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$ y $S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$. Note que $(1,3) \in S \circ R$ pero $(3,1) \notin S \circ R$.

   (c) (F) Falla en la transitividad. Considere las relaciones de orden sobre $\{1,2,3\}$: $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ y $S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,3)\}$. Se tiene que $(1,2),(2,3) \in R \cup S$ pero $(1,3) \notin R \cup S$.

   (d) (F) Falla en la antisimetria. Considere las relaciones de orden sobre $\{1,2,3\}$: $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ y $S = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$. Note que

   $$S \circ R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)\}$$

   Tenemos $(1,2),(2,1) \in S \cup R$ pero $1 \neq 2$.

2. (a) Un ejemplo de una relación R reflexiva, pero no simétrica ni antisimetrica se muestra en la Figura (1).

   (b) Un ejemplo de una relación R simétrica, pero no reflexiva ni antisimetrica. se muestra en la Figura (2).

   (c) Un ejemplo de una relación R antisimetrica, pero no reflexiva ni simétrica se muestra en la Figura (3).

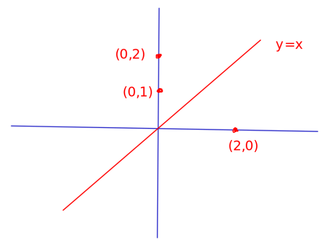


Figure 1:

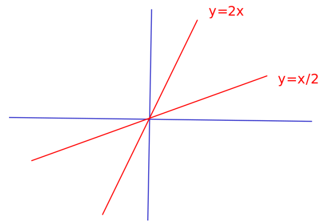


Figure 2:

3. a) Si es cierto, sea $[(a,b)]$ se presentan dos casos:
   - Si $MCD(a,b) = 1$ no habría nada que probar.
   - Si $MCD(a,b) > 1$ entonces existe $d = MCD(a,b) > 1$ tal que $a = d\alpha$ y $b = d\beta$ con α, β primos entre si. Como $(\alpha,\beta) \sim (a,b)$ entonces $[(a,b)] = [(\alpha,\beta)]$.

   b) El motivo es por que existe una copia de $\mathbb{Z}$ que esta en $\mathbb{Q}$ el cuál esta dado por
   $$\mathbb{Z}' = \{[(a,1)] : \; a \in \mathbb{Z}\}$$
   El significado de copia es un isomorfismo de $\mathbb{Z}'$ a $\mathbb{Z}$ dado por $[(a,1)] \mapsto a$

4. a)
   - Reflexiva
   $$a \preccurlyeq a \; \forall a \in A.$$
   - Simétrica
   Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq a$ entonces $a = b$.

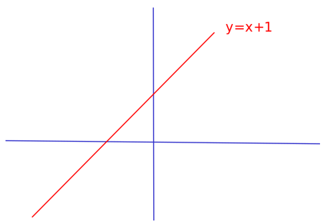
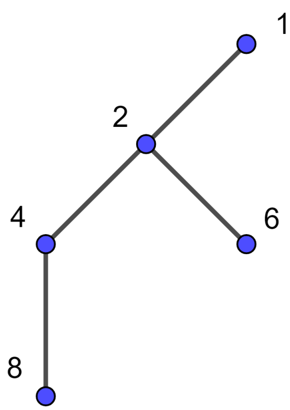


Figure 3:

- Transitiva
  Si $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq c$ entonces $a = kb$ y $b = rc$ con k, r enteros luego $a = (kr)c$, es decir $a \preccurlyeq c$.

Por tanto $\preccurlyeq$ es una relación de orden parcial.



b)

c) Elementos mínimales: 6 y 8
   Mínimo elemento: No existe
   Elementos maximales: 1
   Máximo elemento: 1

d) No es una relación de orden total ya que 6 y 8 son elementos no comparables.

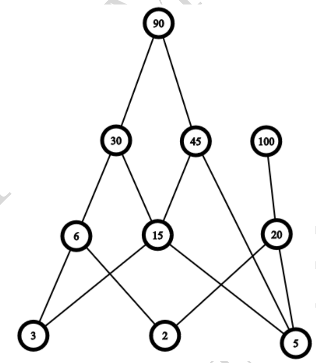
UNI, 10 de abril del 2023.

Matemática discreta
Solucionario PC2
29 de septiembre 2023

1. Considere $A = \{2, 3, 5, 6, 15, 20, 30, 45, 90, 100\}$ con el orden $a \prec b$ si $a \mid b$.

   a) Dé su diagrama de Hasse indicando solo las aristas que corresponden a vértices consecutivos. [1 pt]

   Solución.



$\square$

   b) Determine si tiene mínimo, máximo, sus los elementos maximales y minimales. [1 pt]

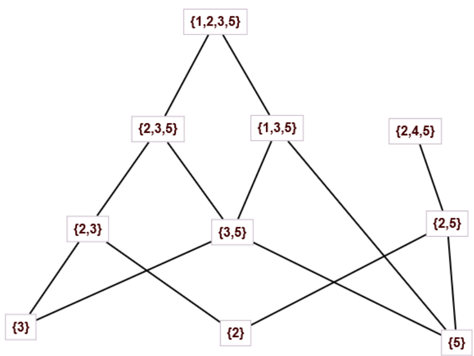
   Solución. Tiene dos maximales 90, 100 y tres minimales 2,3,5 en particular no tiene ni máximo ni mínimo. $\square$

   c) Determine cuantas cadenas de longitud máxima hay en A. [1 pt]

   Solución. Notamos que la longitud máxima de las cadenas es 3 las cuales comienzan en un minimal y terminan en el maximal 90, de ellas tres comienzan en 3, una en 2 y dos 5 por tanto hay 6. Explicitamente:{3,6,30,90},{3,15,30,90},{3,15,45,90},{2,6,30,90},{5,15,30,90},{5,15,45,90}. $\square$

   d) Determine si existe un subcojunto de $P(I_5)$ tal que ordenado con la inclusión es isomorfo a A. [2 pts]

Solución. Como $P(I_5)$ tiene máximo y mínimo para encontrar tal subconjunto, este no puede tener a $\varnothing$ ni a I_5 como elementos y como 2,3,5 estan en extremos de cadenas de longitud 4 solo les pueden corresponder unitarios digamos que les corresponden $\{2\},\{3\},\{5\}$ respectivamente. El siguiente grafo corresponde al ismorfismo buscado, haciendo corresponder cada vertivce con su respectivo del diagrama de Hasse.



Noten que escogemos que a 100 le corresponda $\{2,4,5\}$ para evitar que este contenido en $\{1,2,3,5\}$ y no haya una arista entre ambos nodos. Explicitamente el isomorfismo $f : A \longrightarrow P(I_5)$ viene dado por $f(n) = \{\text{divisores primos de } n\}$ para $n \leq 30$ y $f(45) = \{1,3,5\}, f(90) = \{1,2,3,5\}, f(100) = \{2,4,5\}$, $\square$

2. Sea X un conjunto de n elementos y $n \geq k$. Considere $P_k(X)$ el conjunto de particiones de X de k partes y $S_k(X) = \{f : X \longrightarrow I_k : \ f \text{ es sobreyectiva } \}$. Para $f \in S_k(X)$ defina $\psi(f)$ como el conjunto de fibras de f.

   a) Verifique que para $f \in S_k(X)$ se tiene que $\psi(f) \in P_k(X)$. [1 pt]

   Solución.
   Sea $f \in S_k(X)$, se tiene $f : X \to I_k$ sobreyectiva y luego las fibras de f son
   $$\psi(f) = \left\{f^{-1}(\ell) : \ \ell \in \{1 \ldots, k\}\right\}$$
   lo que forma una partición de X con k partes pues son disjuntas, luego $\psi(f) \in P_k(X)$. $\square$

   b) Pruebe que función $\psi : S_k(X) \longrightarrow P_k(X)$ es sobreyectiva. [1.5 pts]

   Solución.
   Sea $\mathcal{A} = \{A_1,\ldots,A_k\} \in P_k(X)$. Definimos la 'función' $g : X \longrightarrow I_k$ como $g(x) = j$ si $x \in A_j$.
   Buena definición de g: Notemos que si $x \in A_i$ y $x \in A_j$ esto solo se puede si $i = j$ ya que $\mathcal{A}$ es una partición.
   Sobreyectividad de g: Como para cada $j \leq k$ tenemos que $A_j \neq \varnothing$ existe $a \in A_j$ y por tanto $g(a) = j$, así g es sobreyectiva, es decir $g \in S_k(X)$.
   Sobreyectividad de ψ:
   Afirmamos que $\psi(g) = \{A_1,\ldots,A_k\}$. Por definición $\psi(g) = \{g^{-1}(1),\ldots,g^{-1}(k)\}$. Por otro lado para $1 \leq j \leq k$ tenemos $g^{-1}(j) = A_j$ ya que $x \in A_j$ si y solo sí $g(x) = j$, equivalentemente $x \in g^{-1}(j)$. Como $\mathcal{A} = \{A_1,\ldots,A_k\} \in P_k(X)$ es una partición cualquiera, concluimos que ψ es sobreyectiva. $\square$

   c) Pruebe que las fibras de ψ tienen $k!$ elementos. [1.5 pts]

   Solución. Consideremos $\mathcal{A} = \{A_1,\ldots,A_k\} \in P_k(X)$ y $g : X \longrightarrow I_k$ como en el ítem anterior, es decir $g(x) = j$ si $x \in A_j$, así tenemos que $g \in \psi^{-1}(\mathcal{A})$.
   Consideremos B_k el conjunto de permutaciones de I_k, ciertamente por cada $\sigma \in B_k$ tenemos que $\sigma \circ g \in S_k(X)$ y $\psi(\sigma \circ g) = \psi(g) = \mathcal{A}$.
   Por otro lado si $\sigma \circ g = \sigma' \circ g$ entonces $\sigma = \sigma'$ (por ser g sobreyectiva), por tanto $k! = \#B_k \leq \#\psi^{-1}(\mathcal{A})$.
   Afirmamos que:
   $$\psi^{-1}(\mathcal{A}) = \{\sigma \circ g / \, \sigma \in S_k\}$$
   En efecto, tomemos $h \in \psi^{-1}(\mathcal{A})$ y consideremos $a_j \in A_j$. Como $h(a_1), h(a_2), \ldots h(a_k)$ son los números $1,2,\ldots,k$ la función $\sigma : I_k \longrightarrow I_k$ definida como $\sigma(j) = h(a_j)$ es una biyección y por definición $\sigma \circ g(a_j) = h(a_j)$, lo cual implica que $\sigma \circ g = h$ ya que ambas uniones son constates en las partes de $\mathcal{A}$. De aquí concluimos que $k! = \#\psi^{-1}(\mathcal{A})$ $\square$

   d) Pruebe que $\#P_k(X) = \frac{1}{k!}\#S_k(X)$. [1 pt]

   Solución. Por la descomposición de fibras de ψ tenemos
   $$\begin{aligned} \#S_k(X) &= \textstyle\sum_{\mathcal{A} \in P_k(X)} \#\psi^{-1}(\mathcal{A}) \\ &= \textstyle\sum_{\mathcal{A} \in P_k(X)} k! \\ &= \#P_k(X) \cdot k! \end{aligned}$$
   concluímos despejando el términe $\#P_k(X)$. $\square$

3. Se tienen n galletas de chocolate y m de vainilla para distribuir en r niños.

   a) Si $r \leq n+m$ de cuantas maneras se pueden distribuir las galletas de modo que todo niño reciba al menos una galleta. [2 pts]

   Solución.
   Notemos que este conteo se puede modelar mediante separadores. Consideremos que colocamos en una linea horizontal las $m+n$ galletas por tanto queda $m+n-1$ espacios entre ellas Simbolizandolas con $*$ cada galleta tenemos:

   $**$

   En los $m+n-1$ colocamos $r-1$ separadores. Por ejemplo para repartir 60 galletas en 7 grupos colocamos 6 separadores:

   $****|*********|**********|*****************|*******|*******$

   En general estos separadores se pueden distribuir en $\binom{m+n-1}{r-1}$ formas dandonos todas las maneras de distribuir las $m+n$ galletas a r niños. $\square$

b) Si hay suficientes galletas ($2r \leq n$ y $r \leq m$) de cuantas maneras se pueden distribuir las galletas de modo que todo niño reciba al menos dos de chocolate y una de vainilla. [1.5 pts]

Solución. Como e el caso aterior para distribuir m galletas en r niños esto se puede hacer de $\binom{m-1}{r-1}$ formas de modo que todos tengan al menos una. Para distribuir n galletas en r niños de modo que tengan todos al menos 2, podemos pensar que primero le damos una cada uno quedando $n-r$ galletas por ditribuir a los r niños, lo cual es posible ya que $n-r \geq r$, y esto se puede hacer de $\binom{n-r-1}{r-1}$ formas. Al hacer las dos distribuciones de manera simultánea esto se puede hacer de $\binom{m-1}{r-1}\binom{n-r-1}{r-1}$ formas. $\square$

c) Si hay 100 galletas de chocolate y 18 niños se puede garantizar que uno de los niños recibirá al menos 6 de chocolate? justifique su respuesta. [1,5 pts]

Solución.
Sí existe algún niño con al menos 6 galleta.
Suponga lo contrario, es decir todo niño recibe a lo más 5 galletas.
Luego la cantidad de galletas repartidas no excede $5 \times 18 = 90$ galletas, contradiciendo el hecho de haber repartido 100 galletas.
Otra forma: Usando la fórmula vista en clase el mínimo garantizado es

$$\left\lfloor \frac{100-1}{18} \right\rfloor + 1 = 6$$

$\square$

4. Sea la proposición:
Para cualquier número real α y cualquier entero positivo N, existen enteros p y q tales que

$$1 \leq q \leq N \quad \text{y } |q\alpha - p| < \frac{1}{N}$$

Aplique el principio del palomar indicando claramente los n palomares y los más de n objetos a repartir para probar la proposición precedente. [5 pts]

Solución. Proceda con el principio del palomar:

- Palomares: $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right[$, $k \in \{0, \ldots, N-1\}$
- Palomas: $\{\ell\alpha - \lfloor \ell\alpha \rfloor : \ell \in \{1, \ldots, N+1\}\}$, donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x.

Observe que dos puntos de un mismo palomar están a distancia inferior a $1/N$.
Luego tenemos $N+1$ palomas en N palomares, de donde $\exists i, j \in \{1, \ldots, N+1\}$ distintos, sin pérdida de generalidad podemos suponer $j < i$:

$$\left| i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor - (j\alpha - \lfloor j\alpha \rfloor) \right| = \left| \underbrace{(i-j)}_{q}\alpha + \underbrace{\lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor}_{p} \right| < \frac{1}{N}$$

Basta escoger $q := i - j$ y $p := \lfloor j\alpha \rfloor - \lfloor i\alpha \rfloor$. $\square$

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática
Ciclo 2023-I

Practica Calificada 1 de Matemática Discreta

1. Demuestre que para todo $n \geq 1$ se cumple: (5 puntos)
$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

2. Use el principio de inclusión-exclusión para determinar la cantidad de números telefónicos de 10 dígitos, usando los dígitos $\{1, 2, \ldots, 9\}$, tal que aparecen los números $1, 2$ y 3. El orden y la definición adecuada de los conjuntos será considerado en la calificación. (5 puntos)

3. Hallar el número de permutationes de las letras $ABCDEFGHI$ que contenga la cadena DEF. Justifique su procedimiento rigurosamente. (5 puntos)

4. Dado un numero real α y un entero $n \geq 1$. Probar que existe un numero racional p/q tal que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{nq}$. Use el principio del palomar. (Sugerencia: use el hecho que $0 = \{0\alpha\}, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$ están en el intervalo $[0, 1\rangle$, donde $\{x\}$ denota la parte fraccionaria de x, por ejemplo $\{\pi\} = 3$) (5 puntos)

Solución:

1. a) Para probar la cota superior, la idea es analizar los pares i y $(n++1-i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.
Observe que cuando $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces $n+1-i$ toma los valores $n, n-1, \ldots, n$. Por tanto, el producto:
$$\prod_{i=1}^{n} i(n+1-i)$$
contiene el factor $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ exactamente dos veces y así, es exactamente igual a $(n!)^2$. Entonces tenemos:
$$n! = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i(n+1-i)}.$$

A partir de la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad \text{para todo} \quad a, b > 0,$$

elegimos $a = i$ y $b = n + 1 - i$ resultando:

$$\sqrt{i(n+1-i)} \leq \frac{i + (n+1-i)}{2} = \frac{n+1}{2},$$

y así, para $n!$ se obtiene:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i(n+1-i)} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{n+1}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

lo cual prueba la cota superior.

b) Para probar la cota inferior es suficiente mostrar que $i(n+1-i) \geq n$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Para $i = 1$ e $i = n$ se tiene $i(n+1-i) = n$. Para todo $i = 2, 3, \ldots, n-1$ observe que el producto $i(n+1-i)$ contiene un factor por lo menos mayor que $n/2$ y el otro factor no menor que 2, por tanto, el producto $i(n+1-i) \geq n$ para todo i. Entonces:

$$n! \geq \sqrt{n^n} = n^{n/2},$$

lo cual prueba la cota inferior.

2. Definimos los conjuntos:

- A : conjunto de números telefónicos usando los dígitos $\{1, \ldots, 9\}$.
- A_1 : conjunto de números telefónicos en los cuales el 1 no aparece.
- A_2 : conjunto de números telefónicos en los cuales el 2 no aparece.
- A_3 : conjunto de números telefónicos en los cuales el 3 no aparece.

Por tanto, nos piden calcular:

$$|A \backslash (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|. \tag{1}$$

Note que $|A| = 9^{10}$ y $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 8^{10}$. Por otra parte, para $1 \leq i < j \leq 3$, se tiene que $|A_i \cap A_j| = 7^{10}$. También se tiene que $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 6^{10}$. Entonces, usando el principio de inclusión-exclusión se obtiene lo establecido en el problema.

3. Note que el conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$ es biyectivo a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Por tanto una permutación de $ABCDEFGHI$ se identifica con una permutación en $Sym(9)$. Luego, una permutación que contiene DEF se identifica con una permutacion σ de $Sym(9)$ tal que $\sigma(i) = 4, \sigma(i+1) = 5, \sigma(i+2) = 6$ para algún $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Sea P_i el conjunto de permutationes con tal propiedad. No es dificil notar que cada P_i es biyectivo a $Sym(6)$ que tiene cardinal $6!$. Entonces el conjunto de permutaciones deseadas es:

$$P = \bigcup_{i=1}^{7} P_i$$

Como la unión es disjunta, tenemos

$$|P| = \left|\bigcup_{i=1}^{7} P_i\right| = \sum_{i=1}^{7} |P_i| = \sum_{i=1}^{7} 6! = 7!\,.$$

La respuesta es $7!$.

4. Particionamos el intervalo $[0, 1\rangle$ en n partes de igual longitud:

$$[0, 1/n\rangle, [1/n, 2/n\rangle, \ldots, [(n-1)/n, 1\rangle$$

Note que hay $n+1$ números $0 = \{0\alpha\}, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \ldots, \{n\alpha\}$ están en el intervalo $[0, 1\rangle$ en el intervalo $[0, 1\rangle$. Por el principio del palomar dos tales números deben estar en un mismo subintervalo, es decir existen dos enteros $m \geq 0$ y $q \geq 1$ tales que $\{m\alpha\}$ y $\{(m+q)\alpha\}$ están en un mismo subintervalo . Sea $p = q\alpha - \{q\alpha\}$.

Luego

$$|q\alpha - p| = |\{q\alpha\}| < 1/n$$

Finalmente, $|\alpha - p/q| = |\{q\alpha\}| < 1/nq$.

UNI, 23 de abril del 2023.

MATEMÁTICA DISCRETA
SOLUCIONARIO PC3
13 DE OCTUBRE DE 2023

1. Probar que para $1 \le k \le n$ se cumple

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

[5 pts]

Solución. □

2. Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas, justifique su respuesta:

   a) Existe un grafo con secuencia de grados $(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$. [1pt]

   Solución. Falso. No existe ya que la suma de la secuencia de grados siempre es par, igual al doble de las aristas. □

   b) El grafo C_5 es autocomplementario. [1pt]

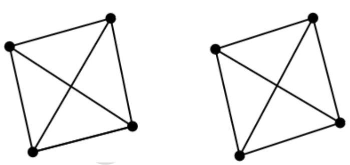
   Solución. Verdad. Ya que el grafo complementario es la estrella de 5 puntas formada por las diagonales del pentagono, la cual es isomorfa a C_5. □

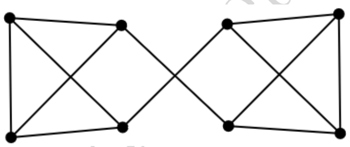
   c) Si un grafo es conexo entonces su complementario es conexo. [1pt]

   Solución. Falso. Por ejemplo considere el grao bipartito $K_{2,2}$ el cual es conexo pero su complemnetario tiene dos componentes, por tanto no es conexo. □

   d) Existen dos grafos de 8 vértices no isomorfos entre sí de modo que todos sus vértices tienen grado 3. [2pts]

   Solución. Verdad. Por ejemplo consideremos los siguientes grafos

G: 

H: 

   ambos tienen 8 vértices todos de grados 3 siembargo no pueden ser isomorfos ya que G es no conexo y H si lo es. □

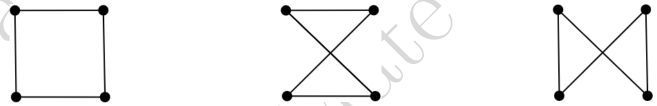
3. Considere el grafo completo de n-vértices K_n y $r \le n$.

   a) ¿Cuántos subgrafos de K_n son isomorfos a un C_3? [0.5 pt]

   Solución. Notemos que los subgrafos de tipo C_3 de K_n están determinados por sus 3 vértices, así la cantidad de estos es la catidad de subconjuntos de 3 elementos de los vértices, es decir $\binom{n}{3}$. □

   b) ¿Cuántos subgrafos de K_n son isomorfos a un C_r? [2.5 pts]

   Solución. Primero veamos el caso $r = n$ es decir ¿Cuántos r-ciclos se pueden formar con r vértices? Llamemos a_r a esta cantidad. Por ejemplo $a_3 = 1$, $a_4 = 3$ ya que



   corresponden a los 4 ciclos de K_4. En general por cada r ciclo y un vértice adicional podemos formar $r+1$-ciclos por cada una de las r aristas cambiando esta arista por una par conectando a sus extremos con el nuevo vértice, siendo estos todos los posibles, es decir $a_{r+1} = ra_r$. De aquí podemos notar que $a_r = \frac{1}{2}(r-1)!$.
   En el caso general podemos escoger $\binom{n}{r}$ cojuntos de r-vérticies en K_n, para cada elección podemos formar a_r ciclos distintos, por tanto el total de r-ciclos es

$$\binom{n}{r}\frac{1}{2}(r-1)!$$

   . □

   c) ¿Cuántos subgrafos de K_n son isomorfos a un K_r? [0.5 pt]

   Solución. Para formar subgrafos isomorfos a K_r basta tomar r-vértices, esto de puede hacer de $\binom{n}{r}$ formas. □

   d) ¿Cuántos subgrafos de K_n son isomorfos a un $K_{r,s}$? donde $s \le n-k$. [1.5 pt]

   Solución. Para formar grafos bipartitos tenemos que escoger 2 subcojuntos disjuntos de r y s vértices respectivamete, para el primero hay $\binom{n}{r}$ elecciones y para el segundo con los $n-r$ vértices restantes hay $\binom{n-r}{s}$ por tanto el total de formas es

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{s} = \frac{n!}{r!s!(n-r-s)!}$$

   esto siempre y cuando $r \ne s$. Cuando $r = s$ estamos contando doble cada subgrafo, por tanto en este caso hay

$$\frac{1}{2}\binom{n}{r}\binom{n-r}{r} = \frac{n!}{r!r!(n-2r)!}$$

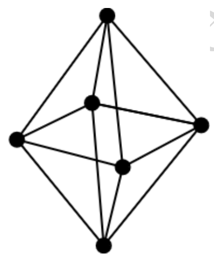
□

4. Dado un grafo $G = (V, A)$ se deie el grafo dual como $G' = (A, A')$ donde

$$A' = \{\{\alpha, \beta\} \in C_2(A) / \, \alpha \cap \beta \neq \varnothing\}$$

   a) Para un grafo K_4 esboze su grafo dual K_4' y de su secuencia de grados. [2 pts]

   Solución. Como K_4 tiene 6 aristas, K_4' tiene 6 vertices dos de ellos correspondiendo a las diagoales de K_4 las cuales se conectan con los otros 4 vértices de K_4'. Graficando podemos pensar en un octaedro siendo los vertices superior e inferior los que corresponden a las diagonales de K_4



   Su secuencia de grados es $(4, 4, 4, 4, 4, 4)$. □

   b) Si G es conexo pruebe que G' es conexo. [3 pts]

   Solución. Tomemos dos vértices α, β de G', queremos probar que hay un recorrido en G' que los conecta. Vistos como aristas de G tenemos que $\alpha = \{a_1, a_2\}$ y $\beta = \{b_1, b_2\}$. Si comparten un vertice en común por definición hay una arista entre α y β en G' y por tanto estan conectados. En caso no compartan un vértice en común, como G es conexo existe un camino que conecta a_1 con b_1, digamos $c_0c_1c_2 \ldots c_n$ con $a_1 = c_0$ y $b_1 = c_n$ de modo que $\theta_i = \{c_{i-1}, c_i\}$ es arista de G. En G' tenemos que θ_1 esta conectada con α ya que comparten a a_1 y θ_n esta conectada con β ya que comparten a b_n, es más cada θ_i esta conectada con θ_{i+1} ya que comparte a c_i, por tanto $\theta_1\theta_2 \ldots \theta_n$ es un recorrido en G' que conecta α con β, es decir G' es conexo. □

5. **Pregunta Extra** (en caso la haga reemplaza a una de las anteriores)
   Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $\tau(n) =$ la cantidad de divisores de n. Pruebe que: [5 pts]

$$\sum_{n \le x} \tau(n) = \sum_{d \le x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor = x \ln(x) + O(x)$$

Solución. □

MATEMÁTICA DISCRETA
SOLUCIONARIO PC3
13 DE OCTUBRE DE 2023

---

1. Probar que para $1 \le k \le n$ se cumple

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le \binom{n}{k} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

[5 pts]

Solución. Notemos que $\binom{n}{k} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j}$ y para $0 \le j < k$ tenemos

$$\frac{n-j}{k-j} > \frac{n}{k} \iff k(n-j) > n(k-j) \iff nj < kj$$

por tanto $\binom{n}{k} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{k-j} \ge \left(\frac{n}{k}\right)^k$.

Para la otra desigualdad partimos de $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) \le \frac{n^k}{k!}$, así bastaría probar que $\frac{n^k}{k!} \le \left(\frac{en}{k}\right)^k$ o equivalentemente que $k! \ge \left(\frac{k}{e}\right)^k$ para lo cual procedemos por inducción.

Para $k = 1$ es evidente, por otro lado si asumimos que $k! \ge \left(\frac{k}{e}\right)^k$ tenemos que

$$(k+1)! = (k+1)k! \ge (k+1)\left(\frac{k}{e}\right)^k$$

Afirmamos que $(k+1)\left(\frac{k}{e}\right)^k \ge \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$. Claramente es equivalente a

$$\left(\frac{k}{e}\right)^k \ge \frac{(k+1)^k}{e^{k+1}} \iff e \ge \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \iff e^{1/k} \ge 1 + \frac{1}{k}$$

siendo esta última desigualdad cierta ya que $e^x \ge 1 + x$ para cualquier $x \ge 0$. De la afirmación anterior sigue $(k+1)! \ge \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}$ como se quería demostrar. □

2. Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas, justifique su respuesta:

   a) Existe un grafo con secuencia de grados $(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$. [1pt]

Solución. Falso. No existe ya que la suma de la secuencia de grados siempre es par, igual al doble de las aristas. □

b) El grafo C_5 es autocomplementario. [1pt]

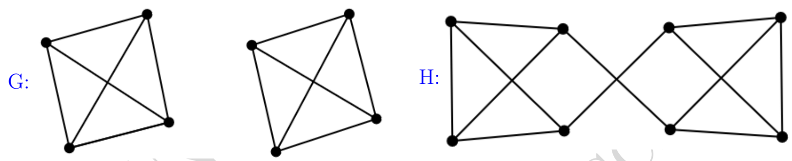
Solución. Verdad. Ya que el grafo complementario es la estrella de 5 puntas formada por las diagonales del pentagono, la cual es isomorfa a C_5. □

c) Si un grafo es conexo entonces su complementario es conexo. [1pt]

Solución. Falso. Por ejemplo considere el grao bipartito $K_{2,2}$ el cual es conexo pero su complemnetario tiene dos componentes, por tanto no es conexo. □

d) Existen dos grafos de 8 vértices no isomorfos entre sí de modo que todos sus vértices tienen grado 3. [2pts]

Solución. Verdad. Por ejemplo consideremos los siguientes grafos



ambos tienen 8 vértices todos de grados 3 siembargo no pueden ser isomorfos ya que G es no conexo y H si lo es. □

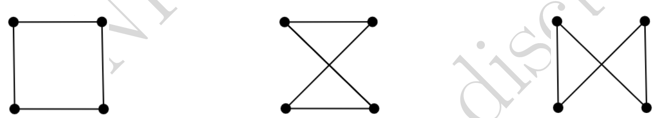
3. Considere el grafo completo de n-vértices K_n y $r \leq n$.

a) ¿Cuántos subgrafos de K_n son isomorfos a un C_3? [0.5 pt]

Solución. Notemos que los subgrafos de tipo C_3 de K_n están determinados por sus 3 vértices, así la cantidad de estos es la catidad de subconjuntos de 3 elementos de los vértices, es decir $\binom{n}{3}$. □

b) ¿Cuántos subgrafos de K_n son isomorfos a un C_r? [2.5 pts]

Solución. Primero veamos el caso $r = n$ es decir ¿Cuántos r-ciclos se pueden formar con r vértices? Llamemos a_r a esta cantidad. Por ejemplo $a_3 = 1$, $a_4 = 3$ ya que



corresponden a los 4 ciclos de K_4. En general por cada r ciclo y un vértice adicional podemos formar $r+1$-ciclos por cada una de las r aristas cambiando esta arista por una par conectando a sus extremos con el nuevo vértice, siendo estos todos los posibles, es decir $a_{r+1} = ra_r$. De aquí podemos notar que $a_r = \frac{1}{2}(r-1)!$.

En el caso general podemos escoger $\binom{n}{r}$ cojuntos de r-vérticies en K_n, para cada elección podemos formar a_r ciclos distintos, por tanto el total de r-ciclos es

$$\binom{n}{r}\frac{1}{2}(r-1)!$$

. □

c) ¿Cuántos subgrafos de K_n son isomorfos a un K_r? [0.5 pt]

Solución. Para formar subgrafos isomorfos a K_r basta tomar r-vértices, esto de puede hacer de $\binom{n}{r}$ formas. □

d) ¿Cuántos subgrafos de K_n son isomorfos a un $K_{r,s}$? donde $s \leq n-k$. [1.5 pt]

Solución. Para formar grafos bipartitos tenemos que escoger 2 subcojuntos disjuntos de r y s vértices respectivamete, para el primero hay $\binom{n}{r}$ elecciones y para el segundo con los $n-r$ vértices restantes hay $\binom{n-r}{s}$ por tanto el total de formas es

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{s} = \frac{n!}{r!s!(n-r-s)!}$$

esto siempre y cuando $r \neq s$. Cuando $r = s$ estamos contando doble cada subgrafo, por tanto en este caso hay

$$\frac{1}{2}\binom{n}{r}\binom{n-r}{r} = \frac{n!}{r!r!(n-2r)!}$$

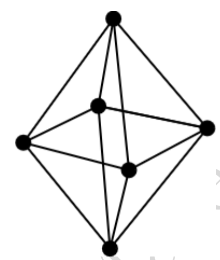
□

4. Dado un grafo $G = (V, A)$ se deie el grafo dual como $G' = (A, A')$ donde

$$A' = \{\{\alpha, \beta\} \in C_2(A) / \alpha \cap \beta \neq \varnothing\}$$

a) Para un grafo K_4 esboze su grafo dual K_4' y de su secuencia de grados. [2 pts]

Solución. Como K_4 tiene 6 aristas, K_4' tiene 6 vertices dos de ellos correspondiendo a las diagoales de K_4 las cuales se conectan con los otros 4 vértices de K_4'. Graficando podemos pensar en un octaedro siendo los vertices superior e inferior los que corresponden a las diagonales de K_4



Su secuencia de grados es $(4,4,4,4,4,4)$. $\square$

b) Si G es conexo pruebe que G' es conexo. [3 pts]

Solución. Tomemos dos vértices α, β de G', queremos probar que hay un recorrido en G' que los conecta. Vistos como aristas de G tenemos que $\alpha = \{a_1, a_2\}$ y $\beta = \{b_1, b_2\}$. Si comparten un vertice en común por definición hay una arista entre α y β en G' y por tanto estan conectados. En caso no compartan un vértice en común, como G es conexo existe un camino que conecta a_1 con b_1, digamos $c_0c_1c_2\ldots c_n$ con $a_1 = c_0$ y $b_1 = c_n$ de modo que $\theta_i = \{c_{i-1}, c_i\}$ es arista de G. En G' tenemos que θ_1 esta conectada con α ya que comparten a a_1 y θ_n esta conectada con β ya que comparten a b_n, es más cada θ_i esta conectada con θ_{i+1} ya que comparte a c_i, por tanto $\theta_1\theta_2\ldots\theta_n$ es un recorrido en G' que conecta α con β, es decir G' es conexo. $\square$

5. **Pregunta Extra** (en caso la haga reemplaza a una de las anteriores)
Para $n \in \mathbb{N}$ definimos $\tau(n) =$ la cantidad de divisores de n. Pruebe que: [5 pts]

$$\sum_{n\le x}\tau(n) = \sum_{d\le x}\left\lfloor \frac{x}{d}\right\rfloor = x\ln(x) + O(x)$$

Solución. Para la primera igualdad y $n \le x$ consideremos

$$A_n = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / \, xy = n\}$$

Así $\#A_n = \tau(n)$. Sea $A = \bigcup_{n\le x} A_n$, como son disjuntos tenemos que $\#A = \sum_{n\le x}\tau(n)$. Sea $p : A \longrightarrow \mathbb{N}$ la segunda proyección, es decir $p(x,y) = y$. Notamos que la imagen de p esta en $[1,x]$ y por la descomposición en fibras de p tenemos

$$\#A = \sum_{d\le x}\#p^{-1}(d)$$

y $(a,d) \in p^{-1}(d) \Longleftrightarrow ad \le n \Longleftrightarrow a \le \dfrac{n}{d}$ por tanto $\#p^{-1}(d) = \left\lfloor \dfrac{n}{d}\right\rfloor$ y $\#A = \sum_{d\le x}\left\lfloor \dfrac{x}{d}\right\rfloor$.

Para la segunda igualdad usaremos que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x\rfloor = x - \{x\}$ donde $\{x\} \in [0;1[$.
Así tenemos

$$\sum_{d\le x}\left\lfloor \frac{x}{d}\right\rfloor = \sum_{d\le x}\frac{x}{d} - \left\{\frac{x}{d}\right\} = x\sum_{d\le x}\frac{1}{d} - \sum_{d\le x}\left\{\frac{x}{d}\right\}$$

Claramente el segundo término en la última igualdad es $O(x)$, así que solo falta estimar el término $\sum_{d\le x} f(d)$ con $f(x) = 1/x$

$$\sum_{d\le x} f(d) = \frac{\lfloor x\rfloor}{x} + \ln(x) - \int_1^x \frac{\{x\}}{x^2}\,dx = \ln(x) + O(1)$$

$\square$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA CICLO 2023–I

PRACTICA CALIFICADA 3 DE MATEMÁTICA DISCRETA

1. Determine la veracidad de las siguientes proposiciones: (5 puntos)

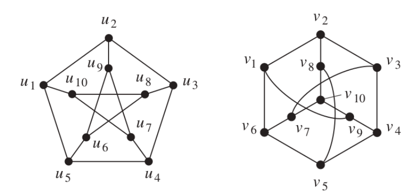
   a) Existe un grafo completo K_n para algún $n \in \mathbb{N}$ que contiene un subgrafo G que es isomorfo a G^c.

   b) Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$K_m + K_n = K_{m+n}.$$

2. En caso exista, dibuje 6 árboles generadores no isomorfos del grafo de Petersen.
Justifique su respuesta. (5 puntos)

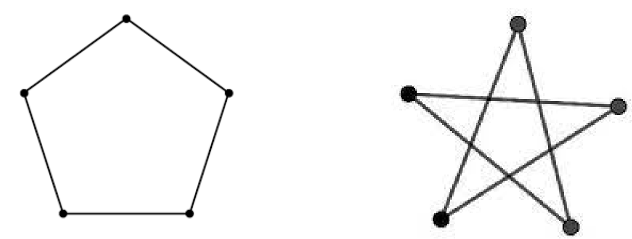
3. Determinar si los siguientes grafos son o no isomorfos. Justifique su respuesta. (5 pts)



4. Encontrar los autovalores de la matriz de adyacencia grafo completo K_n para todo $n \ge 2$. (5 puntos)

Solución:

1. a) Verdadero:
Considere el grafo K_5 y los subgrafos que se muestran en la figura:

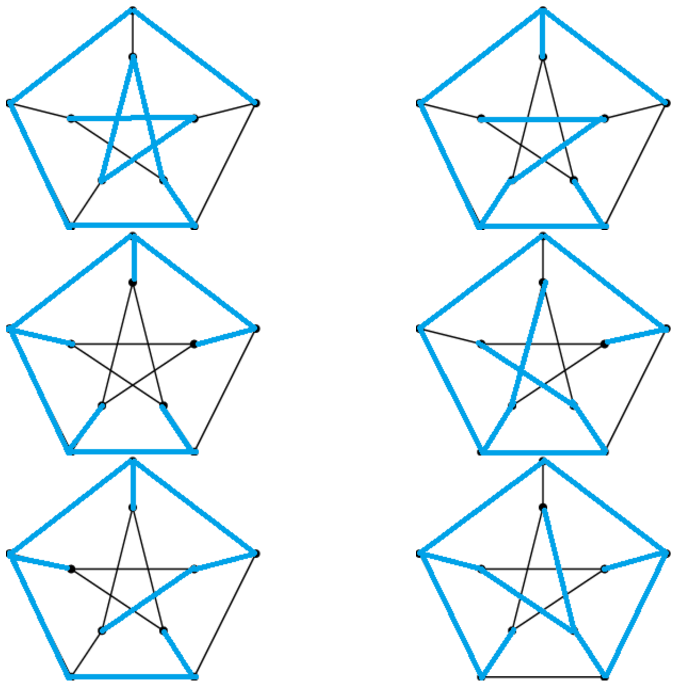


Es claro que son complementarios, faltaría sólo verificar que son isomorfos.

b) Falso:
Considere el caso de dos grafos iguales a K_2 la suma de ellos sería K_2.

2. Los siguientes árboles generadores no son isomorfos con secuencia de grados:

- (1,1,2,2,2,2,2,2,2,2)
- (1,1,1,1,2,2,2,2,3,3) hay dos grafos no isomorfos: un grafo con dos vértices de grado 3 vecinos y el otro grafo muestra dos vértices de grado 3 que no son isomorfos.
- (1,1,1,1,1,2,2,3,3,3) hay dos grafos no isomorfos: un grafo con tres vértices de grado 3 vecinos y el otro grafo muestra tres vértices de grado 3 que no son isomorfos.
- (1,1,1,2,2,2,2,2,2,3)



3. Considere la función $f\colon \{u_1, u_2, \ldots, u_{10}\} \to \{v_1, v_2, \ldots, v_{10}\}$ dada por

$$\begin{aligned} u_1 &\mapsto v_1\\ u_2 &\mapsto v_2\\ u_3 &\mapsto v_3\\ u_4 &\mapsto v_4\\ u_5 &\mapsto v_9\\ u_6 &\mapsto v_{10}\\ u_7 &\mapsto v_5\\ u_8 &\mapsto v_7\\ u_9 &\mapsto v_8\\ u_{10} &\mapsto v_6 \end{aligned}$$

Observe que f es una biyección que preserva aristas, es decir es un isomorfismo de grafos. Hay otros isomorfismos, por ejemplo la siguiente función:

$$\begin{aligned} u_1 &\mapsto v_1\\ u_2 &\mapsto v_2\\ u_3 &\mapsto v_3\\ u_4 &\mapsto v_7\\ u_5 &\mapsto v_6\\ u_6 &\mapsto v_5\\ u_7 &\mapsto v_{10}\\ u_8 &\mapsto v_4\\ u_9 &\mapsto v_8\\ u_{10} &\mapsto v_9 \end{aligned}$$

es también un isomorfismo de grafos.

4. Sea J la matriz $n \times n$ que tiene 1 en todas sus entradas. La matriz de adyacencia de K_n es $J - I$. Se verifica que el polinomio caracteristico de $J - I$ es

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^{n-1}(\lambda - n + 1),$$

de donde los autovalores pedidos son -1 y $n - 1$.

Matemática discreta
Solucionario PC4
3 de Noviembre 2023

---

1. Sea $G=(V,E)$ un grafo de al menos 2 vértices y A su matriz de adyacencia. Pruebe que:
   a) $tr(A^2)=2\#E$
   b) $tr(A^3)=6\#\Delta$ donde Δ es el conjunto de 3 ciclos de G.

Solución.

a) Consideremos $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$. $A=[a_{ij}]$ es una matriz $n\times n$ tenemos que si $A^2=[c_{ij}]$ sabemos que c_{ii} cuenta los recorridos de longitud 2 que comienzan y terminan en el vértice v_i, más esto es posible solo si se recorre una arista de ida y de vuelta por tanto c_{ii} cuenta los vertices vecinos a v_i es decir $c_{ii}=deg(v_i)$. Por el lema del handshake tenemos

$$2\#E=\sum_{i=1}^{n} deg(v_i)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=tr(A^2)$$

b) Si $A^3=[t_{ij}]$ sabemos que t_{ii} cuenta los recorridos de longitud 3 que comienzan y terminan en el vértice v_i más esto es posible solo si recorre un triangulo de la forma $v_iv_jv_kv_i$ ya que $v_j\neq v_k$ (no consideramos lazos), más este trianfulo es recorrido dos veces $v_iv_kv_jv_i$ por tanto $t_{ii}=2\#\Delta_i$ dodne Δ_i es el conjunto triangulos que tienen a v_i como vértices.

$$tr(A^3)=\sum_{i=1}^{n} t_{ii}=2\sum_{i=1}^{n}\#\Delta_i$$

en la ultia suma cada triangulo es contado 3 veces por tanto $\sum_{i=1}^{n}\#\Delta_i=3\#\Delta$ coo se pedia deostrar.

□

2. Sea G un grafo conexo. La excentricidad de un vértice v se define como $e(v)=\max\limits_{u\in V(G)} d(u,v)$. El radio del grafo $r(G)$ es mínimo valor de la excentricidad y los vértices centrales son los de exentricidad $r(G)$.
   a) Pruebe que la excentridad máxima es el diametro del grafo.
   b) Pruebe que $diam(G)\le 2\,r(G)$.
   c) De un ejemplo de un grafo donde $diam(G)<2\,r(G)$.
   d) De un ejemplo de un árbol con 3 vértices centrales y 5 hojas.

Solución.

a) Sea m la excentricidad máxima, como $m=e(v)$ para algún vértice existe un vértice u tal que $m=d(u,v)$. Si cualquier otro par de vertices a,b tuviesemos $d(a,b)>m$ entonces $e(a)\ge m$ lo que contradice la maximalidad de m. Por tanto m es la ayor distancia posible entre dos vértices, es decir $m=diam(G)$.

b) Sean $u,v,w\in V$ con $d(u,v)=diam(G)$ y $e(w)=r(G)$. Por desigualdad triangular

$$d(u,v)\le d(u,w)+d(w,v)\le e(w)+e(w)=2r(G).$$

c) Consideremos un G un camino de longitud 3. La exetricidad de sus dos extremos es 3 y de los otros vértices es 2. Así su diámetro es 3 y su radio es 2.

d) Este caso no es posible, ya que un árbol tiene a lo más dos vértices centrales. Para ver esto consideremos un árbol G y γ un camino de longitud máxima m con extremos p y q. Si v esta en el centro de G es un árbol sabemos que hay un único camino que conecta a q con v y a p con v, as este define un camino que conecta p con q, por unicidad debe ser γ. En particular v es un vértice de γ y por ser central en G debe estar en el centro de γ, y por ser γ un camino su centro tiene a la más dos puntos.

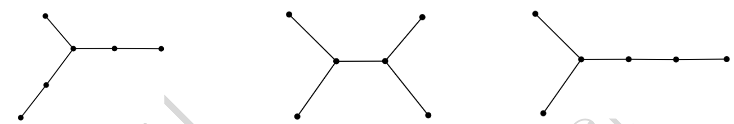
□

3. Determine el máximo de árboles de órden 6 no isomorfos entre sí :
   a) Si solo tienen vértices de grado 1 y 2.
   b) Si tienen un vértice de grado 3.
   c) Si tienen un vértice de grado 4.

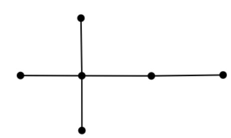
Solución.

a) Al tener vértices de grado 1 o 2 necesariamente es un camino, el máximo es 1.

b) Si v es un vértioce de grado 3, este tiene 3 vecinos faltaría conectarlos con 2 vértices restantes. Este se puede hacer conectando a 2 de los vecinos con los 2 restantes, conectando a uno de los vecinos con los dos restantes o conectando a uno de los vecinos con uno de los faltantes y a este con el último. Así obtenemos 3 grafos no isomorfos entre sí.



c) Si tiene un vértice de grado 4, con sus vecinos serían 5 vértices faltando uno el cual debe estar conectado con uno de estos vecinos. En este caso todos los arboles son isomorfos entre sí por tanto el máximo es 1.



$\square$

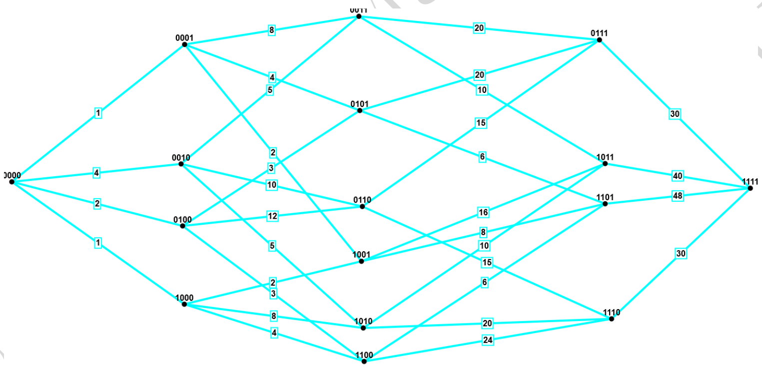
4. Considere el grafo cuyos vértices son cadenas $a_4a_3a_2a_1$ donde a_i son 0 o 1 y con arístas entre dos vértices cuando difieren en solo un término. Para definir el peso de una arista considere $p: V \longrightarrow \mathbb{N}$ como $p(a_4a_3a_2a_1) = 2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}2^{a_4}$ y $w: E \longrightarrow \mathbb{N}$ como $w(\alpha) = |p(u) - p(v)|$ cuando $\alpha = \{u, v\}$.

   a) Esboze el grafo indicando los pesos de las aristas.

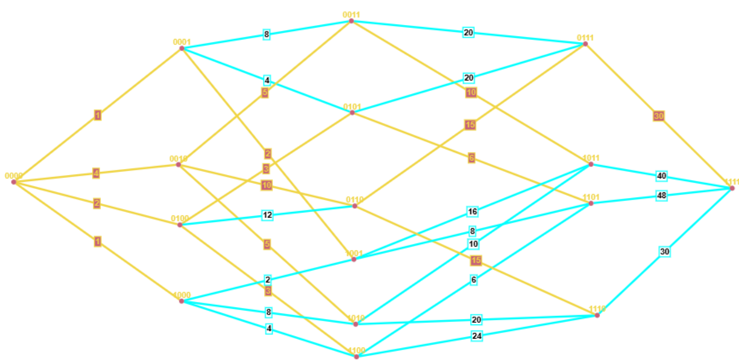
   b) Mediante el algoritmo de Druscal determine un arbol de expasión de peso mínimo.

Solución.

a) El grafo ponderado pedido es:



b) Un árbol de expansión mínima es



$\square$

5. **Pregunta Extra** (en caso la haga reemplaza a una de las anteriores)

Sea $G = (V, E)$ un grafo con $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Denotemos $i \to j$ cuando $i < j$ y $\{v_i, v_j\} \in E$. Se define $q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \to j}(x_j - x_i)^2$. Si A es la matriz de adyacencia del grafo y $D = diag(\deg(v_1), \ldots, \deg(v_n))$ pruebe que:

$$q(x) = x(D - A)x^t$$

Solución. Considere I la matriz de incidecnia con signos, se vio en clase que la matriz de Laplace es

$$I \cdot I^t = D - A$$

Sea $Q(x) = x(D - A)x^t$, de lo anterior $Q(x) = (xI)(xI)^t = \|xI\|^2$, por tanto bastaría deterimar xI. Notemos que el vector xI tiene por componente j a xI_j donde I_j es la columna j de I, por otro lado la columna j de I componentes nulas salvo en los indices de los vértices que tiene por extremos a la arista j, digamos que sean los vertices $i < k$, siendo 1 y -1 respectivaente. Vectorialemente:

$$x \cdot I_j = (\ldots, x_i, \ldots, x_k, \ldots)\begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} = x_i - x_k$$

Sumando todas componentes obtenemos $Q(x) = q(x)$ como se pedía probar. $\square$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA CICLO 2023–I

PRACTICA CALIFICADA 4 DE MATEMÁTICA DISCRETA

1. Pruebe que el grafo de Petersen no es planar. (5 puntos)

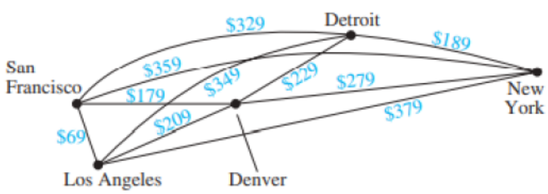
2. Pruebe que el polinomio cromático del grafo:

   (a) $P(K_n, t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-(n-1))$.

   (b) $P(C_n, t) = (t-1)^n + (-1)^n(t-1)$.

   (5 puntos)

3. Del siguiente grafo. (5 puntos)

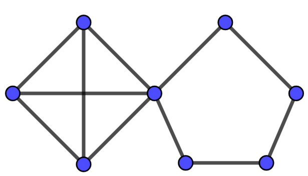
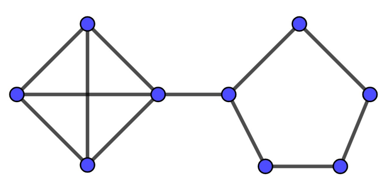


   a) Encuentre una ruta con la menor tarifa aérea total que visite cada una de las ciudades. Justifique.

   b) Determine la matriz de Dijkstra.

   c) El subgrafo del precio más cómodo para viajar desde San Francisco hacia New York.

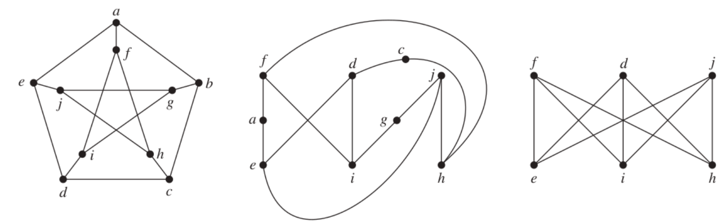
4. Determine el polinomio cromático en cada grafo: (5 puntos)

a)  b) 

(Sugerencia use la Pregunta 2)

Solucion:

1. Por el teorema de Kuratowski, basta que el grafo de Petersen contenga un subgrafo homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$. En efecto, ocurre este ultimo caso:



2. (a) En el grafo completo K_n se cumple que $P(K_n, t)$ coincide con el cardinal de las funciones inyectivas $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$. De donde,

$$P(K_n, t) = t(t-1)(t-2)\cdots(t-(n-1))$$

   (b) Se usa inducción sobre n. Es cierto para $n = 3$. Supongamos que es cierto para $n-1$. Sea e una arista de C_n. Sean $C_n - e$ el grafo que resulta al eliminar la arista e y sea $C_n \dot{e}$ el grafo que resulta al contraer e. Observe que $C_n - e \cong L_n$ es el grafo lineal y $C_n \cdot e \cong C_{n-1}$.
   Como los vértices extremos de e no pueden ser coloreados con el mismo color se tiene que $P(C_n, t) = P(C_n - e, t) - P(C \cdot e, t)$. Por otro lado, L_n se puede colorear con dos colores, es mas $P(L_n, t) = t(t-1)^{n-1}$. Por hipótesis inductiva tenemos

$$\begin{aligned}
P(C_n, t) &= P(C_n - e, t) - P(C \cdot e, t) \\
&= P(L_n, t) - P(C_{n-1}, t) \\
&= t(t-1)^{n-1} - (t-1)^{n-1} - (-1)^{n-1}(t-1) \\
&= (t-1)(t-1)^{n-1} + (-1)^n(t-1) \\
&= (t-1)^n + (-1)^n(t-1)
\end{aligned}$$

3. a)

E(G)	Peso
e_1	69
e_2	179
e_3	189
e_4	229

El grafo que resulta del cuadra muestra la ruta con la menor tarifa.

b)

	San Francisco(SF)	Los Angeles(LA)	Denver(DV)	New York(NY)	Detroit(DT)	
SF	-	69 (SF)	179 (SF)	359 (SF)	329 (SF)	SF-LA
SF-LA	-	-	179 (SF)	359 (SF)	329 (SF)	SF-DV
SF-DV	-	-	-	359 (SF)	329 (SF)	SF-DT
SF-DT	-	-	-	359 (SF)	-	SF-NY

b)

c) 

4. Sean k colores

a) El número de maneras diferentes de pintar C_5 es $P_{C_5}(k)$ donde el vértices común entre los grafos K_4 y C_5 se pueden pintar de k formas diferentes, luego se tiene que los otros vértices de K_4 se puede pintar de $(k-1)(k-2)(k-3)$, por tanto el prolinomio crómatico del grafo $K_3 \cup C_5$ esta dada por:

$$P(k) = \frac{P_{K_4} \cdot P_{C_5}}{k}$$

b) Sea $e = \{u, v\} \in E(G)$ la arista común entre K_4 y C_5. Como el vértice v se pudo pintar de k formas diferentes entonces u se puede pintar de $k-1$ formas diferentes, luego el siguiente vértice en K_4 también se puede pintar de $k-1$ formas diferentes y por último los demás vértices de $(k-2)(k-3)$, por tanto el prolinomio crómatico del grafo $K_3 \cup P_2 \cup C_5$ esta dada por:

$$P(k) = \frac{P_{K_4} \cdot P_{C_5}}{k}(k-1)$$

Matemática discreta
Solucionario PC5
11 de Noviembre 2023

1. Considere un poliedro convexo de n vértices con caras h caras hexagonales y p pentagonales sin ninguna otra cara) con la propiedad de que cada vértice adjacente a exactamente 3 caras. Pruebe que:

a) El doble de las aristas es $5p + 6h$.

b) El doble de las aristas es el triple de los vértices.

c) La cantidad de petágonos es exactamente 12.

d) Si adiciolamente pedimos que cada cara pentagonal es adyacente solo a caras hexagonales el mínimo de hexágonos necesarios es 20.

Solución.

a) El total de aristas de las caras pentagonales es $5p$ y de las hexagonales es $6h$. La suma de la cantidad de aristas de todas las caras es $5p + 6h$, más en esta suma cada arista es contada 2 veces ya que aparece en exactamente 2 caras contiguas, por es igual al doble de aristas.

b) Como cada vértice adjacente a exactamente 3 caras, en el concurren 3 aristas, es decir el grado de cada vértice es 3, en particular la suma de grados es doble de aristas debe coincidir con el triple de vértices.

c) Sea n la cantidad de vértices, a la cantidad de aristas y c la cantidad de caras. Así $c = p + h$, $2a = 5p + 6h$ y $3n = 2a$, por la relación de Euler

$$2 = n - a + c = \frac{2a}{3} - a + c = -\frac{1}{6}(5p + 6h) + p + h = \frac{p}{6}$$

por tanto $p = 12$.

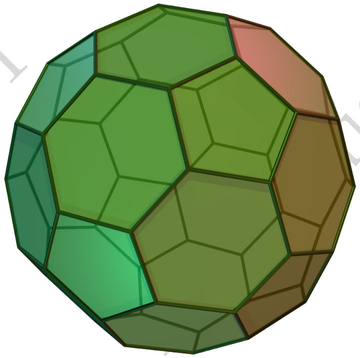
d) Sea r la cantidad de aristas comunes entre pentágonos y hexágonos y s la cantidad de aristas comunes entre dos hexágonos. Como el total de aristas es $r + s$

$$r + s = a = \frac{1}{2}(60 + 6h) = 30 + 3h$$

Como cada pentágono es adyacente solo a caras hexagonales teneos que $r = 5 \times 12 = 60$. Por otro lado como cada hexágono tiene a lo más 3 pentágonos vecinos, debe tener por lo menos 3 hexágonos vecinos. Por tanto si sumamos las arístas entre hexágonos $2s \geq 3h$

$$30 + 3h = r + s \geq 60 + \frac{3h}{2}$$

de ahí $h \geq 20$. Este es el mínimo ya que correponde a la configuracion de caras pentagonales y hexagonales de una pelota de fútbol.



$\square$

2. Sean $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ dos grafos con al menos una arista con polinomios cromáticos $p_1(x)$ y $p_2(x)$. Definimos $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, A_1 \cup A_2)$ Pruebe que:

   a) Si solo comparten un vértice $V_1 \cap V_2$ entonces $p_{G_1 \cup G_2}(x) = p_1(x)p_2(x)/x$

   b) Si no comparten vértices y tomamos dos vértices $v_i \in V_i$ para el grafo $G = G_1 \cup G_2 + \{v_1, v_2\}$ tenemos $p_G(x) = p_1(x)p_2(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

   c) En el caso del grafo G del item b) se cumple $X(G) \leq \text{máx}\{X(G_1), X(G_2)\}$.

Solución.

a) Sea $v_1V_1 \cap V_2$ el vértice común. Para $k\mathbb{N}$ notemos que por cada k-coloración de G_1 se fija el color de v, quedando por colorear G_2 con ese color de v fijado.

Afirmamos que la cantidad de k-coloraciones para G_2 con el color de v fijado es $\dfrac{p_2(k)}{k}$.
Para ver esto notemos que dados dos colores distintos, las cantidades de k-coloraciones de G_2 con v coloreado con el primer color y con v coloreado con el segundo color es la misma, ya que podeos establecer una biyección entre ambos conjutos cabiando el primer color con el segundo y viceversa. Si N es este número común de coloraciones, tendriaos que $kN = p_2(k)$ por tanto $N = \dfrac{p_2(k)}{k}$.
Como por cada k-coloración de G_1 hay N k-coloraciones posibles para G_2, el total de k-coloraciones para G es

$$p_G(k) = p_1(k)N = \frac{1}{k}p_1(k)p_2(k)$$

b) Sea $\alpha = \{v_1, v_2\}$. Por la fórmula de eliminación-contracción tenemos que

$$p_G(x) = p_{G \setminus \alpha}(x) - p_{G/\alpha}(x).$$

Como G_1 y G_2 no están conectados en $G \setminus \alpha$ tenemos que $p_{G\setminus\alpha}(x) = p_1(x)p_2(x)$, por otro lado G/α correponde al caso en que G_1 y G_2 compartan un único vértice, por la parte anterior tenemos que $p_{G/\alpha}(x) = \dfrac{1}{x}p_1(x)p_2(x)$. Restando ambos obteneos el resultado pedido.

c) Recordemos que para un grafo H su número cromático $X(H)$ es el primer natural en el cual su polinomio cromático no se anula, es más para $k \geq X(H)$, $p_H(k) > 0$. Si $m = X(G_i)$ es el mayor de ambos, en particular $m \geq 2$ (ya que tienen una arista) y como $p_G(x) = \frac{1}{x}p_1(x)p_2(x)(x-1)$, $p_G(m) > 0$ por tanto $m \geq X(G)$.

$\square$

3. Determine justificando su respuesta:

   a) Un sistema de representantes para las clases invertibles módulo 36.

   b) Usando el algoritmo de Euclides obtenga enteros a, b tal que $93a + 112b = 1$.

   c) La lista de números del 1 al 6 cuyas potencias generan $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{\times}$.

   d) Si para $a, b \in \mathbb{N}$ es posible que $a^4 | b^3$ si $a \nmid b$.

   e) El menor k natural de manera que $7^k \equiv 1 \mod 25$

Solución.

a) Basta considerar números del 1 al 36 coprimos con 36, es decir impares y no múltiplos de 3. Explícitamente:

$$1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35$$

b) Por divisiones sucesivas:

$$\begin{aligned} 112 &= 93 + 19 \\ 93 &= 5 \cdot 19 - 2 \\ 19 &= 9 \cdot 2 + 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 &= 19 - 9 \cdot 2 \\ &= 19 - 9(5 \cdot 19 - 93) = -44 \cdot 19 + 9 \cdot 93 \\ &= -44(112 - 93) + 9 \cdot 93 = -44 \cdot 112 + 53 \cdot 93 \end{aligned}$$

c) Como $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{\times}$ tiene representantes 1,2,3,-3,-2,-1. Como $2^3 = 8 \equiv 1 \mod 7$ y $(-3)^3 = -27 \equiv 1 \mod 7$ descartamos a 2,-3 y támbien trivialmente a 1 y -1. Solo quedan 3 y -2, para verificarlo veamos sus potencias:

a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
3	2	-1	-3	2	1
-2	-3	-1	2	3	1

por tanto si generan a $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{\times}$.

d) Si $a^4 \mid b^3$ los divisores primos de a van a ser divisores primos de b, si estos son $p_1, \ldots, p_r$ tenemos que $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ y $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r} N$ donde N es coprimo con a. Como $a^4 \mid b^3$ tenemos $4\alpha_i \leq 3\beta_i$, luego $\alpha_i \leq \dfrac{3}{4}\beta_i < \beta_i$ más esto significa que $a \mid b$.

e) Como $7^2 = 49 \equiv -1 \mod 25$ tenemos que $7^4 \equiv 1 \mod 25$. 4 es el mínimo ya que $7^3 = 7 \cdot 7^2 \equiv -7 \mod 25$.

$\square$

4. Si $x^2 + y^2 = z^2$ en $\mathbb{Z}$, pruebe que:

a) Al menos uno de los valores x, y, z es divisible por 3 .

b) Al menos uno de los valores x, y, z es divisible por 5 .

c) xyz es divisible por 4 .

d) $xyz \equiv 0 (\text{mód} 60)$.

Solución.

a) Como todo número entero es congruente a 0,1,-1 módulo 3 notamos que todo cuadrado debe ser congruente a 0 o 1. En caso z no sea divisible por 3 tenemos que $z^2 \equiv 1 \mod 3$ esto fuerza a que o bien x o bien y sean divisibles por tres, que si ambos no lo son simultaneaente $x^2 + y^2 \equiv 2 \mod 3$ y por tanto no podría ser igual a z^2. Podemos concluir que en general al menos uno de ellos es divisible por 3. Esto lo podemos ver en la siguiente tabla de restos de $x^2 + y^2$ módulo 3:

+	0	1
0	0	1
1	1	2

b) Como todo número entero es congruente a $0, \pm 1, \pm 2$ módulo 5 notamos que todo cuadrado debe ser congruente a 0,1 o 4. La siguiente tabla corresponde los posibles restos que da $x^2 + y^2$ módulo 5:

+	0	1	4
0	0	1	4
1	1	2	0
4	4	0	3

En caso z no sea divisible por 5 tenemos 2 casos $z^2 \equiv 1$ o $4 \mod 5$ más en la tabla esto solo se da cuando x^2 o y^2 son 0 módulo 5 (primera fila y primera columna respectivamente).

c) Basta considerar 3 casos: Si x e y son pares no hay nada que probar. Si x e y son impares no se puede dar ya que en ese caso $x^2 + y^2 \equiv 2 \mod 4$ el cual no puede ser z^2. Finalmente uno es par y el otro impar, digamos x es par e y impar, tenemos que z es impar luego en este caso existen a, b, c enteros de modo que $x = 2a$, $y = 2b + 1$, $z = 2c + 1$. Luego como

$$(2c+1)^2 = x^2 + y^2 = 4a^2 + (2b+1)^2$$

simplificando obtenemos:

$$c(c+1) = a^2 + b(b+1)$$

Notamos que $c(c+1)$ y $b(b+1)$ siempre son pares por tanto a es par y $x = 2a$ es múltiplo de 4 por tanto xyz lo és.

$\square$

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2022–II

PRACTICA CALIFICADA 5 DE MATEMÁTICA DISCRETA

---

1. Resolver la ecuación: (4 puntos)

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \mod 5 \\ x &\equiv 1 \mod 8 \\ x &\equiv 4 \mod 9 \end{aligned}$$

2. Determine si los siguiente enunciados son verdaderos (V) o falsos (F). Justifique su respuesta. (6 puntos)

   (a) Existen raíces primitivas módulo n para todo entero $n \geq 25$.

   (b) La ecuación
   $$4x^4 \equiv 5 \mod 7$$
   tiene 4 soluciones distintas módulo 7.

3. Sean p y q números primos enteros positivos tales que (5 puntos)

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{230} + \frac{1}{231}$$

Encuentre un divisor primo de p con 3 cifras. Justifique su respuesta.

4. Pruebe que la ecuación (5 puntos)

$$(p-1)! + 1 = p^m$$

no tiene solución para todo p número primo mayor que 5 y m entero positivo.

Solución:

1. Se usa el teorema chino del resto. La respuesta es $x \equiv 193 \mod 360$.

2. (a) (F). Por ejemplo no existen raíces primitivas modulo 30.

   (b) (F). La ecuación no tiene solución. Tenemos que $\phi(7) = 6$ y 3 es raíz primitiva módulo 7. Aplicando ind_3 a la ecuación, tenemos

   $$ind_3(4) + 4ind_3(x) \equiv ind_3(5) \mod 6$$

   Por otro lado, $ind_3(4) = 4$ y $ind_3(5) = 5$. Luego

   $$4 + 4ind_3(x) \equiv 5 \mod 6$$

   así

   $$4ind_3(x) \equiv 1 \mod 6$$

   de donde 4 es inversible módulo 6 que es un absurdo.

3.
$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{231}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{230})\\ &= (\frac{1}{116}+\frac{1}{231})+(\frac{1}{117}+\frac{1}{230})+\cdots+(\frac{1}{173}+\frac{1}{174})\\ &= 347(\frac{1}{116\times 231}+\frac{1}{117\times 230}+\cdots+\frac{1}{173\times 174})\end{aligned}$$

Como 347 es un número primo entonces p posee como divisor a 347.

4. Para todo p número primo mayor que 5 se tiene
$$2<\frac{p-1}{2}<p-1$$
así,
$$(p-1)^2 = 2\frac{p-1}{2}(p-1) \mid (p-1)!.$$
Supongamos que existan p primo mayor que 5 y m entero positivo tal que
$$(p-1)!+1=p^m$$
se tiene que
$$(p-1)^2 \mid (p^{m-1})$$
Al dividir ambos por $p-1$ se tiene
$$(p-1) \mid (p^{m-1}+p^{m-2}+\cdots+p+1).$$
Por otro lado, como $(p-1) \mid (p^k-1)$ entonces $p^k \equiv 1\,(mod\,p-1)$ para todo $k=0,1,2,\ldots$, esto quiere decir que
$$p^{m-1}+p^{m-2}+\cdots+p+1 \equiv m\,(mod\,p-1)$$
por tanto $(p-1) \mid m$, así $m \geq p-1$. Es decir
$$p^m \geq p^{p-1} > (p-1)^{p-1} > (p-1)!,$$
por tanto $p^m > (p-1)!+1$, ello es una contradicción.