Cálculo Diferencial

Juan Cribillero Aching

Mayo 27, 2024

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

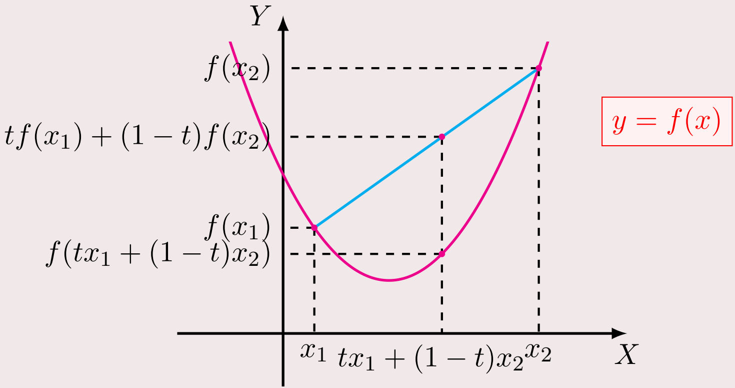
Definición (Función convexa)

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$, diremos que f es convexa en I si para todo par de puntos x_1, $x_2 \in I$ y para cualquier $0 \leqslant t \leqslant 1$ se cumple que

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Interpretación geométrica de una función convexa



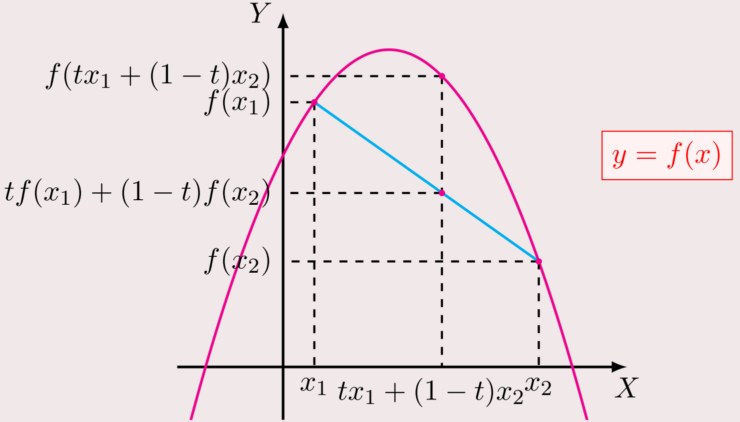
Definición (Función cóncava)

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$, diremos que f es cóncava en I si para todo par de puntos x_1, $x_2 \in I$ y para cualquier $0 \leqslant t \leqslant 1$ se cumple que

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Interpretación geométrica de una función cóncava



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

- Notamos que f es cóncava si $-f$ es convexa y viceversa.
- La gráfica de una función convexa está por debajo de cualquiera de sus secantes.
- La gráfica de una función cóncava esta sobre cualquiera de sus secantes.

Teorema

Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en I. Entonces

- *f es convexa en I si y solo si para todo*

$$x_1, x_2 \in I : f'(x_2)(x_1 - x_2) \leqslant f(x_1) - f(x_2)$$

- *f es cóncava en I si y solo si para todo*

$$x_1, x_2 \in I : f'(x_2)(x_1 - x_2) \geqslant f(x_1) - f(x_2)$$

Demostración.

- $(\longrightarrow)$ Si $x_1 = x_2$ la desigualdad se cumple. Supongamos que $x_1 \neq x_2$ entonces como f es convexa

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \forall t \in]0,1[$$

luego, $\dfrac{f(x_2 + t(x_1 - x_2)) - f(x_2)}{t} \leqslant f(x_1) - f(x_2)$ si hacemos $h = t(x_1 - x_2)$ y pasamos al límite,

$$(x_1 - x_2) \lim_{h \to 0} \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h} \leqslant f(x_1) - f(x_2)$$

donde consideramos el caso de las derivadas laterales si es necesario.

Demostración.

($\longleftarrow$) Sean x_1, $x_2 \in I$ y $t \in [0,1]$. Denotamos $x_t = tx_1 + (1-t)x_2 \in I$ entonces

$$f'(x_t)(x_1 - x_t) \leqslant f(x_1) - f(x_t) \implies f(x_t) \leqslant f(x_1) - (1-t)f'(x_t)(x_1 - x_2)$$

y

$$f'(x_t)(x_2 - x_t) \leqslant f(x_2) - f(x_t) \implies f(x_t) \leqslant f(x_2) - tf'(x_t)(x_2 - x_1)$$

luego

$$tf(x_t) + (1-t)f(x_t) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Demostración.

Vemos que si f es convexa y diferenciable en I entonces para $a \in I$

$$f(a) + f'(a)(x-a) \leqslant f(x) \quad \forall x \in I$$

es decir la gráfica de f esta sobre cualquiera de sus rectas tangentes. $\square$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Observación

Además si a es un punto critico de f entonces $f'(a) = 0$ y por lo tanto $f(a) \leqslant f(x), \forall x \in I$, es decir f alcanza un valor mínimo en a.

Teorema

Sea I *un intervalo y* $f : I \to \mathbb{R}$ *dos veces diferenciable en* I*. Entonces*

- f *es convexa en* I *si y solo si* $f''(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$
- f *es cóncava en* I *si y solo si* $f''(x) \leqslant 0$, $\forall x \in I$

Demostración

$(\longleftarrow)$ Sean x_1 y x_2 en I, luego

$$f'(x_2)(x_1 - x_2) \leqslant f(x_1) - f(x_2)$$

y

$$f'(x_1)(x_2 - x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1)$$

si sumamos ambas desigualdades

$$(f'(x_2) - f'(x_1))(x_1 - x_2) \leqslant 0$$

es decir f' es no decreciente y por lo tanto $f''(x) \geqslant 0$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración

($\longrightarrow$) Sean x_1, x_2 en I, y aplicamos el teorema de valor medio (f' es continua y diferenciable)

$$\frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} = f''(c) \geqslant 0$$

por lo tanto f' es no decreciente. Nuevamente aplicamos el teorema de valor medio:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \text{ para algún } c \text{ entre } x_1 \text{ y } x_2$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Demostración.

si $x_1 < x_2$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geqslant f'(x_1) \implies f(x_2) - f(x_1) \geqslant f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

si $x_1 > x_2$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \leqslant f'(x_1) \implies f(x_2) - f(x_1) \geqslant f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

en cualquier caso f es convexa. $\square$

Ejemplo

- $f(x) = e^x$ es convexa, pues $f''(x) = e^x > 0$
- $f(x) = \ln x$ es cóncava pues $f''(x) = -1/x^2 < 0$
- $f(x) = \cosh x$ es convexa pues $f''(x) = \cosh(x) > 0$
- $f(x) = \operatorname{senh} x$ es convexa en $[0, +\infty[$ y cóncava en $]-\infty, 0]$

Ejemplo

Sea $f : [1,6] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 100$$

Calculamos f''

$$f''(x) = 12(x^2 - 4x + 1) = 12(x - (\sqrt{3} + 2))(x - (-\sqrt{3} + 2))$$

Luego f es convexa en $\left[\sqrt{3} + 2, 6\right]$.

Sesión 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Referencias

- James Stewart
  Cálculo de una variable - Trascendentes tempranas. 8e
  Cengage Learning
- Jon Rogawski
  Cálculo - Una variable. 2da ed.
  W. H. Freeman and Company
- Ron Larson - Bruce Edwards
  Cálculo, Tomo I. 10ma ed.
  Cengage Learning

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA