Universidad Nacional de Ingeniería **Miercoles, 04 de septiembre de 2024**
Facultad de Ciencias **Semestre: 2024-II**
Escuela Profesional de Matemática

Práctica Dirigida N° 1

Curso: Álgebra lineal I CM1B2

Sea E un $\mathbb{K}-$espacio vectorial

1. Muestre que V, con la suma y producto definidos, es un $\mathbb{K}-$espacio vectorial

   a) Dado $\mathcal{X}$ conjunto, sean $V = P(\mathcal{X})$ conjunto potencia y $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$.
   $+\ :\ B + C := (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$
   $\cdot\ :\ 0 \cdot B := \emptyset,\ 1 \cdot B = B$

   b) Sean $V = (0, +\infty)$ y $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$
   $\boxplus\ :\ a \boxplus b := a.b$
   $\boxdot\ :\ q \boxdot a := a^q$

   c) Sean $V = \mathbb{K}^n$, $v \in V$ y $\mathbb{K}$ un cuerpo
   $\oplus\ :\ x \oplus y := x + y - v$
   $\odot\ :\ r \odot x := r.(x - v) + v$

2. Determinar si los siguientes conjuntos son subespacios de V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial.

   a) $S = \{a(i+1) \,|\, a \in \mathbb{R}\}$, con $V = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   b) $S = \{Z \in V \,|\, \sum_{i=1}^{n} Z_{i,i} = 0,\ Z_{1,n} = 0\}$, con $V = M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

   c) $S = \{f \in V \,|\, f'' + 3f' = 0\}$, con $V = C^{\infty}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

   d) $S = \{(a_1, \cdots a_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, a_1.a_2 = 0\}$

3. Sea $S, T \subseteq \mathbb{R}^4$ subespacios tales que
   $$S = span(\{(1,2,1,0),\ (1,-1,0,1)\})$$
   $$T = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 - 3x_3 = 0\}$$
   Hallar U subespacio tq $S \cap T \subsetneq U \subsetneq T$.

4. Dados $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \subseteq E$. Mostrar que
   $$span(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = span(\mathcal{X}) + span(\mathcal{Y})$$
   ¿Se cumple que si $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$, entonces $span(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) = span(\mathcal{X}) \cap span(\mathcal{Y})$?

5. Dados F_1, F_2 subespacios vectoriales de E. Si existe $a \in E$ tal que $a + F_1 \subseteq F_2$, mostrar que $F_1 \subseteq F_2$

6. Determinar los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los conjuntos son l.i.

   a) $\{(1,2,k), (1,1,1).(0,1,1-k)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
   b) $\{(k,1,0), (3,-1,2), (k,2,-2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$
   c) $\{k, x^2 + x, x^2 - k, k^2, x\} \subseteq \mathbb{R}[x]$
   d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
   e) $\{exp(x), kx, sen(x)\} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

7. Muestre que

   a) Si B es una base de E tal que $B = B_1 \cap B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ entonces $E = span(B_1) \oplus span(B_2)$

   b) Si $E = F_1 \oplus F_2$, B_1 y B_2 son bases de F_1 y F_2 resp. entonces $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ y $B_1 \cup B_2$ es una base de E.

8. Sea $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, considerando
   $U = \{f \in E \,|\, f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}\}$,
   $V = \{f \in E \,|\, f(-1) = f(0) = f(1) = 0\}$.
   Mostrar que $U \oplus V = E$.

9. Determinar T subespacio de E tal que $S \oplus T = E$

   a) $S = span\{(1,0,1,0), (1,2,0,1), (2,2,1,1)\}$
   b) $S = \{Z \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, traz(Z) = 0\}$.
   c) $S = span\{3, 1 + x^2\}$, $E = \mathbb{R}_4[x]$.
   d) $S = span\{1, x\}$, $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

10. Sean U, W, S subespacios de E. Mostrar que $E = U \oplus W \oplus S$ si y solo si $dim(E) = dim(U) + dim(W) + dim(S)$

11. Sea S subespacio de E. Mostrar que

    a) Si $[v_1], \cdots, [v_n]$ son l.i. en $\frac{E}{S}$ entonces $v_1, \cdots, v_n$ son l.i. en E.

    b) Si $W \oplus S = E$ y $w_1, \cdots, w_m$ son l.i. en $W \Rightarrow [w_1], \cdots, [w_m]$ son l.i. en $\frac{E}{S}$.

12. Sean S_1, $S_2 \subseteq E$ subespacios. Muestre que si $E = S_1 + S_2$ y $F = S_1 \cap S_2$ entonces $E/F = S_1/F \oplus S_2/F$.

13. Sea $E = \mathbb{R}_3[x] = span(\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\})$ y el subespacio $S = span(\{3+2x+x^2, -2-3x+x^3, 1-x+x^2+x^3\})$

    a) Determinar una base de E/S

    b) Determinar la expresión de $[1+x+x^2]$ como combinacion lineal en una base de E/S.

14. Sea $\{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de E y $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, Mostrar que

$$F := \left\{ v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$$

    F es un subespacio de E y $dim(E) = n-1$

15. Determinar la dimensión de los siguientes subespacios

    a) $U = \{X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

    b) $U = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f \in span\{1, x, x^2, x^3\}, f(2) = f(-1)\}$

    c) $U = span\{(1,k,1), (-1,k,1), (0,1,k)\}$, con $k \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$

    d) $U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \in span(\{(1,2)\})\}$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

    e) $U = \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid X_{ij} = -X_{ji}\}$

16. Dado $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible y $b \in \mathbb{R}^n$ no nulo. Mostrar que es posible intercambiar alguna columna de A con b y reobtener una matriz invertible.

17. Dado S subespacio de E, con $[v_1], \cdots, [v_n]$ una base de E/S. Se define la función $\phi : E \to S \times E/S$ como, dado $v \in E$, $\phi(v) = (v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, [v])$, donde $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ cumplen que $[v] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [v_i]$

    a) Mostrar que ϕ esta bien definido

    b) Mostrar que ϕ es lineal

    c) Determinar la imagen y núcleo de ϕ

18. Indique y justifique si es verdadero (V) o falso (F) las siguientes afirmaciones:
    Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial

    a) Dados $v, w \in V$ y $k \in \mathbb{K}$, se cumple que $span\{v, w\} = span\{v, w + k.v\}$

    b) Dados$u, v, w \in V$. Si u, v, w son l.i. entonces $u+v, u-v, u+w$ es l.i.

    c) Dado F subespacio de V, existe W subespacio de V tal que $W + F = \{0\}$

    d) Dado $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $\alpha.v = 0$ entonces $\alpha = 0$ o $v = 0$

    e) Dado $v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Existe $T : V \to \mathbb{K}$ aplicación lineal tal que $T(v) = \alpha$, $T(w) = \beta$.

19. Determinar cuales de las aplicaciones son lineales

    a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_2 - 2x_2 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_3)$

    b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1 + x_2, |x_1|)$

    c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \overline{z}$, con $\mathbb{C}$ un $\mathbb{K}-$espacio vectorial con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

    d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = iz$, con $\mathbb{C}$ un $\mathbb{K}-$esp. vectorial con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

    e) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$,
    $f(A) = A_{11}A_{22} - A_{12} - A_{21}$

20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aplicación lineal tal que $f(1,1,0) = 2$, $f(0,1,1) = -2$ y $f(1,1,1) = 0$. Determinar el núcleo de f y $f(1,0,0) + f(0,2,2)$.