FÍSICA I: BFIOIC

2022-1

Prof. Dr. Marco Cuyubamba

SEMANA 5

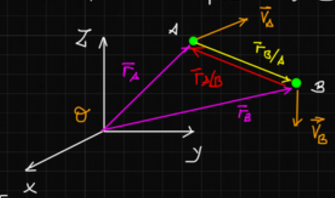
Movimiento relativo

Vemos que respecto del observador O, la piedra se mueve vertical hacia abajo, mientras que respecto a O' se mueve por una trayectoria curva

OBS

La trayectoria de los móviles dependen del sistema de referencia (SR)

* Sean los cuerpos A y B y un observador O



Se usa la notación:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{A/O}$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}_{B/O}$$

Sistema coordenado xyz

Siendo O fijo a tierra.

$\vec{r}_{B/A}$: posición de B respecto de A

Para las velocidades, se tiene:

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad ; \quad \vec{V}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt}$$

Mientras que $\vec{V}_{B/A}$ es la velocidad de B respecto de A

$$\vec{V}_{B/A} = \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}$$

y $\vec{V}_{A/B}$ es la velocidad de A respecto de B.

$$\vec{V}_{A/B} = \frac{d\vec{r}_{A/B}}{dt} = -\frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt}$$

$\rightarrow$ $\vec{V}_{A/B} = -\vec{V}_{B/A}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{misma magnitud, aunque} \\ \text{orientación contraria} \end{array} \right.$

OBS

Sabemos que

$$\vec{V}_{B/A} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{B/A} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

$$\vec{V}_{B/A} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

Siendo: $\boxed{\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A}$

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

* Para la aceleración, se tiene

$$\vec{V}_{B/A} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_{B/A} = \frac{d}{dt}\vec{V}_B - \frac{d}{dt}\vec{V}_A$$

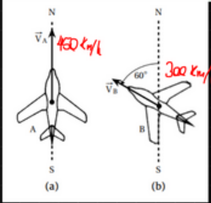
$$\boxed{\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A}$$

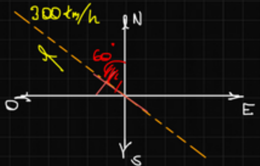
y $\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$

$$\left\{ \vec{a}_{B/A} = -\vec{a}_{A/B} \right.$$

Ejemplo

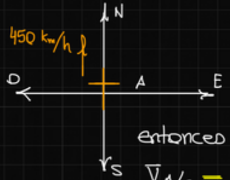
Un aeroplano A (Figura 2) vuela hacia el Norte a 450 km/h con respecto a la tierra. Simultáneamente otro avión B vuela en la dirección N 60°W a 300 km/h con respecto a la tierra. Encontrar la velocidad de A con respecto a B y de B con respecto a A.





Sol

Se el sistema



$$\vec{V}_A = 450\,\hat{N}\ \text{km/h}$$

$$\vec{V}_B = 300\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{O} + \frac{1}{2}\hat{N}\right)$$

entonces

$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$

$$\vec{V}_{A/B} = 450\,\hat{N} - 150\sqrt{3}\,\hat{O} - 150\,\hat{N}$$

$$\vec{V}_{A/B} = 300\,\hat{N} - 150\sqrt{3}\,\hat{O}$$

Entonces;

$$|\vec{V}_{A/B}| = 300\sqrt{1 + 3/4}$$

$$|\vec{V}_{A/B}| = 396{,}86\ \text{km/h}$$

Se observa que:

Sabemos que:

$$\frac{|\vec{V}_B|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{|\vec{V}_{A/B}|}{\operatorname{sen}60°}$$

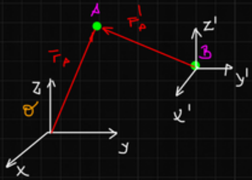
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{300 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{396{,}86} = 0{,}654$$

$\alpha = \operatorname{arcsen}(0{,}654)$

$\alpha = 40{,}8°$ → ∴ La velocidad de A respecto de B es 396,86 km/h N 40,8 E

OBS

Si tenemos dos móviles A y B y consideramos que B es un nuevo observador de ejes x'y'z', entonces



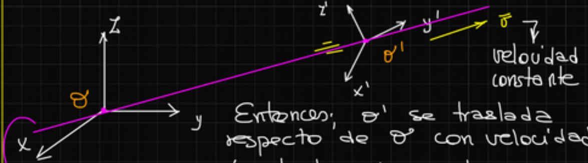
$$\vec{V}_{A/B} = \vec{V}'_A$$

$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}'_A$$

Luego, generalmente se usará la nomenclatura para observadores S u O para sistemas xyz y S' u O' para sistemas x'y'z'

Movimiento relativo con traslación uniforme

Sean los sistemas O y O' que se mueven uno respecto del otro con traslación uniforme



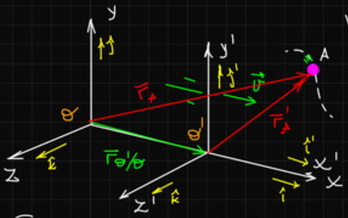
Entonces, O' se traslada respecto de O con velocidad constante y no rota.

Siempre es posible colocar un eje de movimiento y escoger convenientemente el sentido de los ejes coordenados

Si la traslación es uniforme ($\vec{v}$ = cte), entonces elegimos el eje de movimiento como eje x común (sin pérdida de generalidad

OBS

Respecto a los vectores unitarios podemos observar que $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ y $\{\hat{\imath}', \hat{\jmath}', \hat{k}'\}$ conforman la misma base canónica



Vamos a considerar que en $t = 0s$, ambos sistemas coinciden

Se observa que: $\vec{r}_A = \vec{r}_A' + \vec{r}_{O'/O}$

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A' + \cancelto{0}{\vec{r}_{O'/O}(0)} + \vec{v}\,t$$

$$\boxed{\vec{r}_A = \vec{r}_A' + \vec{v}\,t}$$ donde $\vec{v}$ es la velocidad de O' respecto de O

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_A' = \vec{r}_A - \vec{v}\,t}$$

$$x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}' = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} - vt\hat{\imath}$$

$$x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} - vt\hat{\imath}$$

entonces: encontramos lo siguiente

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$ transformaciones de Galileo

OBS

Estamos considerando "tiempo absoluto", esto quiere decir que ambos relojes (de O y de O') están sincronizados. Es decir, el tiempo transcurrido por un observador es el mismo tiempo transcurrido por cualquier otro observador. La idea de tiempo y espacio están completamente disociados

OBS

La idea de tiempo absoluto es un modelo suficientemente consistente para sistemas O' que tiene una velocidad $v \ll c$, donde c es la velocidad de la luz

$$c \approx 3 \times 10^8 \ m/s$$

ya que para $v \approx c$, experimentalmente se observa la dependencia espacio-temporal

En este régimen ($v \approx c$), las transformaciones de Galileo no son válidas y surgen las llamadas transformaciones de Lorentz

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

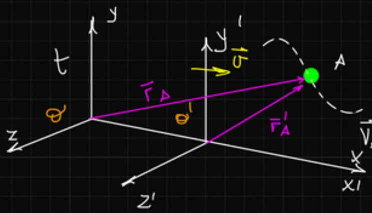
transformaciones de Lorentz

Se observe que si $\frac{v}{c^2}$ y $\frac{v^2}{c^2}$ son muy pequeñas las transformaciones de Lorentz se convierten en las transformaciones de Galileo

OBS

A partir de ahora, consideraremos las transformaciones Galileanas.

Con respecto a la velocidad, respecto de O tenemos lo siguiente



$$\vec{r}_A = x_A \hat{i} + y_A \hat{j} + z_A \hat{k}$$

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

$$\vec{V}_A = \frac{dx_A}{dt}\hat{i} + \frac{dy_A}{dt}\hat{j} + \frac{dz_A}{dt}\hat{k}$$

respecto de O

Ahora, respecto de O':

$$\vec{r}_A' = x_A' \hat{i}' + y_A' \hat{j}' + z_A' \hat{k}'$$

$$\vec{V}_A' = \frac{d\vec{r}_A'}{dt'} = \frac{dx_A'}{dt}\hat{i} + \frac{dy_A'}{dt}\hat{j} + \frac{dz_A'}{dt}\hat{k}$$

Observamos que

$$\vec{V}_A' - \vec{V}_A = \left(\frac{dx_A'}{dt} - \frac{dx_A}{dt}\right)\hat{i} + \cancelto{0}{\left(\frac{dy_A'}{dt} - \frac{dy_A}{dt}\right)}\hat{j} + \cancelto{0}{\left(\frac{dz_A'}{dt} - \frac{dz_A}{dt}\right)}\hat{k}$$

Luego;

$$\vec{V}_A' - \vec{V}_A = -\vec{v}$$

Entonces; $\boxed{\vec{V}_A' = \vec{V}_A - v\,\hat{i}}$ $\left\{\begin{array}{l} V_{Ax}' = V_{Ax} - v \\ V_{Ay}' = V_{Ay} \\ V_{Az}' = V_{Az} \end{array}\right.$

Ejm:

Si A se mueve paralelo al eje Z respecto de O,

$$\vec{V}_A = 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + V\,\hat{k}$$

entonces, respecto de O'

$$\vec{V}_A' = V\hat{k} - v\,\hat{i} \qquad \left\{\begin{array}{l} V_{xA}' = -v \\ V_{yA}' = 0 \\ V_{zA}' = V \end{array}\right.$$

$$V_A' = \sqrt{V^2 + v^2}$$

Para la aceleración, se tiene:

$$\vec{V}_A' = \vec{V}_A - \vec{v}$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \vec{a}_A' = \vec{a}_A - \cancel{\frac{d\vec{v}}{dt}}^{\,0};$$

debido que O' se mueve uniformemente respecto de O

$$\rightarrow \boxed{\vec{a}_A' = \vec{a}_A}$$

, las aceleraciones medidas por O y O' son las mismas para cualquier sistema en mov. traslacional uniforme respecto de O.

En otras palabras, la aceleración en una cant. física vectorial invariante bajo una transform. de coordenadas de mov. uniforme

OBS

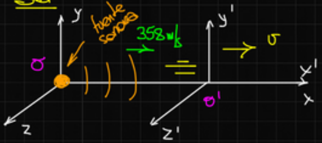
En física es importante encontrar cantidades invariantes para preservar la coherencia experimental.

Ejemplo

La velocidad del sonido en aire quieto a 25 °C es de 358 m/s. Encontrar la velocidad medida por un observador que se mueve a 90 km/h. = 25 m/s
Suponer que la fuente se encuentra en reposo relativo a la tierra y el observador O′ siempre está en dirección del eje X.

- (a) alejándose de la fuente,
- (b) acercándose hacia la fuente,
- (c) perpendicular a la dirección de propagación en el aire,
- (d) en una dirección tal que el sonido parece propagarse perpendicularmente a la dirección del observador O′

Sol



a) Alejándose de la fuente

$$\vec{V}_s' = \vec{V}_s - \vec{v}$$

$$\vec{V}_s' = 358\,\hat{i} - 25\,\hat{i}$$

$$\vec{V}_s' = 333\,\hat{i}\ \text{m/s}$$

b) Acercándose a la fuente:

$$\vec{V}_s' = \vec{V}_s - \vec{v}$$

$$\vec{V}_s' = 358\,\hat{i} - (-25\,\hat{i})$$

$$\vec{V}_s' = 383\,\hat{i}\ \text{m/s}$$

c) Perpendicular a la dirección de propagación del aire

$$\vec{V}_s' = \vec{V}_s - \vec{v}$$

$$\vec{V}_s' = 358\,\hat{j} - 25\,\hat{i}$$

$$|\vec{V}_s'| = \sqrt{358^2 + 25^2}$$

$$|\vec{V}_s'| \cong 358{,}9\ \text{m/s}$$

$$\tan\alpha' = \frac{V_y'}{V_x'} = \frac{358}{-25}$$

$$\tan\alpha' = -14{,}32$$

$$\alpha' \cong 94^{\circ}$$

a) Alejándose de la fuente

$\vec{V}_s' = \vec{V}_s - \vec{U}$

$\vec{V}_s' = 358\,\hat{i} - 25\,\hat{i}$

$\vec{V}_s' = 333\,\hat{i}$ m/s

$|\vec{V}_s'| = \sqrt{358^2 + 25^2}$

$|\vec{V}_s'| \cong 358{,}9$ m/s

$\tan\alpha' = \dfrac{V_y'}{V_x'} = \dfrac{358}{-25}$

$\tan\alpha' = -14{,}32$

$\alpha' \cong 94°$

d) Perpendicular a la dirección de propagación de O'.

$\vec{V}_s' = \vec{V}_s - \vec{U}$

$V'\hat{j} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} - 25\hat{i}$

$V'\hat{j} = \underbrace{(V_x - 25)}_{0}\hat{i} + V_y\hat{j}$

$V_x = 25$ m/s

$V_y = V'$

Además, se sabe: $\sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 358$

$\sqrt{25^2 + V'^2} = 358$

$\rightarrow V' \approx 357{,}1$ m/s

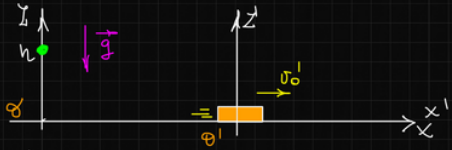
Entonces; $\vec{V}_s = 25\,\hat{i} + 357{,}1\,\hat{j}$

$\tan\alpha = \dfrac{357{,}1}{25} \cong 14{,}285$

$\alpha \cong 86°$

Ejemplo

En el sistema O (por ejemplo el suelo) se deja caer una masa puntual según el eje z desde una altura h. Describa la trayectoria descrita por la masa para el observador O′ (por ejemplo que está en un vagón), que se mueve hacia adelante con velocidad $v_{O'}$



Respecto de O:

$\vec{x}_0 = h\hat{k}$

$\vec{v}_0 = \vec{0}$

$\vec{g} = -g\hat{k}$

Sabemos que:

$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

$\vec{x}(t) = \left(h - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{k}$

$x(t) = 0$

$y(t) = 0$

$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$

Respecto de O′:

$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{x}_v$

$\vec{x}' = \left(h - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{k} - v_0' t\,\hat{i}$

Entonces:

$x'(t) = -v_0 t \longrightarrow t = -\frac{x'}{v_0}$

$y'(t) = 0$

$z'(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$

Entonces

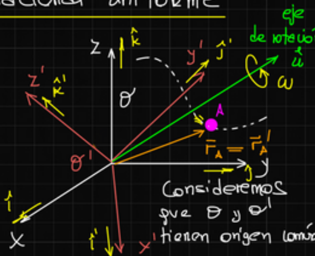
$z' = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{-x'}{v_0'}\right)^2$

$$\boxed{z' = h - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0'^2}x'^2}$$

Una parábola en el plano $x'z'$

Movimiento relativo rotacional uniforme

Consideremos ahora dos observadores O y O′ pero rotan uno respecto del otro pero sin movimiento de traslación relativo



Consideremos que O y O′ tienen origen común entonces, O observa a O' rotando con velocidad angular $\vec{\omega}$, mientras que O' observa a O rotar con velocidad angular $\vec{\omega}' = -\vec{\omega}$

- Para la partícula A, respecto de O:

$$\vec{r}_A = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{V}_A = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad \cdots (\alpha 1)$$

- Para la partícula A, respecto de O':

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \quad \cdots (\alpha 2)$$

$$\vec{V}_A' = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' \quad \cdots (\alpha 3)$$

Ahora vamos a derivar respecto de t a $(\alpha 2)$

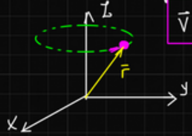
$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \underline{\frac{dx'}{dt}}\hat{i}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + \underline{\frac{dy'}{dt}}\hat{j}' + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + \underline{\frac{dz'}{dt}}\hat{k}' + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} \quad \cdots (*)$$

De $(\alpha 3)$ en $(*)$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_A' + \left(x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + \hat{k}\frac{d\hat{k}'}{dt} \right) \quad \cdots (**)$$

obs

Recordemos que:



$$\boxed{\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$; en general se cumple para un vector $\vec{A}$

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

Entonces;

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\hat{i}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{i}' \\ \frac{d\hat{j}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{j}' \\ \frac{d\hat{k}'}{dt} &= \vec{\omega} \times \hat{k}' \end{aligned}\right\} \cdots (\beta)$$

Substituimos (β) en $(**)$, tenemos

$$\vec{V}_A = \vec{V}_A' + \left(x'\vec{\omega} \times \hat{i}' + y'\vec{\omega} \times \hat{j}' + z'\vec{\omega} \times \hat{k}' \right)$$

por lo tanto,

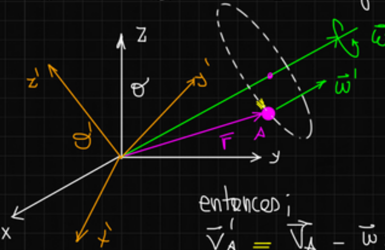
$$\boxed{\vec{V}_A = \vec{V}_A' + \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

donde $\vec{V}_A'$ es la velocidad del móvil A respecto de O'

$$\vec{V}_A' = \vec{V}_A - \vec{\omega}\times\vec{r}$$

OBS

Si A es una partícula que rota en trayectoria circular respecto de O y con el mismo eje de rotación con velocidad angular $\vec{\omega}'$



entonces;

$$\vec{V}_A' = \vec{V}_A - \vec{\omega}\times\vec{r}$$

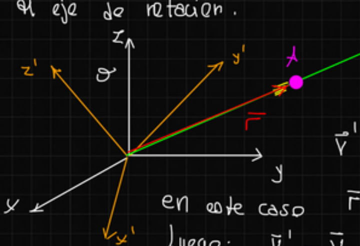
$$\vec{V}_A' = \vec{\omega}'\times\vec{r} - \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{V}_A' = (\vec{\omega}' - \vec{\omega})\times\vec{r}$$

Si $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$; entonces $\vec{V}' = \vec{0}$, lo cual indica que si A rota alrededor del mismo eje con la misma velocidad angular de rotación del sistema O', respecto a este, la partícula A no se mueve.

OBS

Si la partícula A se desplaza paralela al eje de rotación.



$\vec{\omega} = \omega\hat{u}$

Entonces; $\vec{v} = v\hat{u}$

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{\omega}\times\vec{r}$$

en este caso $\vec{r} \parallel \vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{0}$

luego; $\underline{\vec{V}' = \vec{V}}$

En este caso, ambos sistemas O y O' miden la misma velocidad porque la partícula solo se mueve sobre el eje de rotación

Para la aceleración:

Respecto a O; se tiene al movil A donde

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\hat{i} + \frac{dV_y}{dt}\hat{j} + \frac{dV_z}{dt}\hat{k}$$

ahora; veamos respecto de O'

$$\vec{a}_A' = \frac{dV_x'}{dt}\hat{i}' + \frac{dV_y'}{dt}\hat{j}' + \frac{dV_z'}{dt}\hat{k}' \quad \cdots (*)$$

Derivamos la expresión de la velocidad

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_A = \frac{d}{dt}(\vec{V}_A' + \vec{\omega}\times\vec{r}_A)$$

$$\frac{d\vec{V}_A}{dt} = \frac{d\vec{V}_A'}{dt} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_A}{dt} \quad \cdots (\square)$$

Por otro lado, tenemos;

$$\vec{V}_A' = V_x'\hat{i}' + V_y'\hat{j}' + V_z'\hat{k}'$$

$$\frac{d\vec{V}_A'}{dt} = \left(\underline{\frac{dV_x'}{dt}}\hat{i}' + V_x'\frac{d\hat{i}'}{dt}\right) + \left(\underline{\frac{dV_y'}{dt}}\hat{j}' + V_y'\frac{d\hat{j}'}{dt}\right) + \left(\underline{\frac{dV_z'}{dt}}\hat{k}' + V_z'\frac{d\hat{k}'}{dt}\right)$$

Entonces;

$$\frac{d\vec{V}_A'}{dt} = \vec{a}_A' + V_x'(\vec{\omega}\times\hat{i}') + V_y'(\vec{\omega}\times\hat{j}') + V_z'(\vec{\omega}\times\hat{k}'$$

$$\frac{d\vec{V}_A'}{dt} = \vec{a}_A' + \vec{\omega}\times\vec{V}'$$

Entonces; substituímos en $(\square)$;

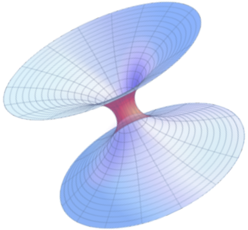
$$\vec{a} = \vec{a}_A' + \vec{\omega}\times\vec{V}_A' + \vec{\omega}\times\vec{V}_A$$

$$\vec{a} = \vec{a}_A' + \vec{\omega}\times\vec{V}_A' + \vec{\omega}\times(\vec{V}_A' + \vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}_A' + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{V}_A'}_{\text{aceleración coriolisis}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{aceleración centrípeta}}}$$

GRACIAS

Y MUCHOS ÉXITOS



$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$