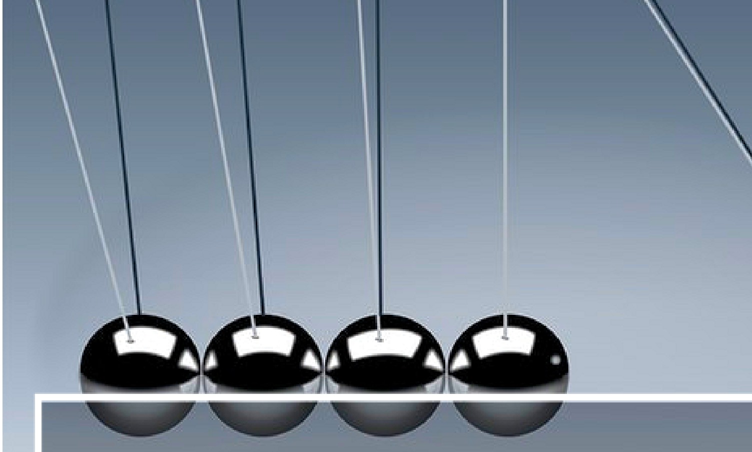
FÍSICA I: BFIOIC

2022-1

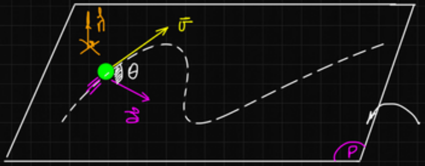
Prof. Dr. Marco Cuyubamba



SEMANA 4

Movimiento curvilíneo

Para un movimiento bidimensional, se tiene



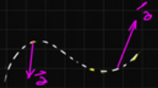
donde $\hat{\eta} = \dfrac{\bar{a} \times \bar{v}}{|\bar{a} \times \bar{v}|}$, para preservar el mov. bidimensional

$\theta \neq 0°, 180°$

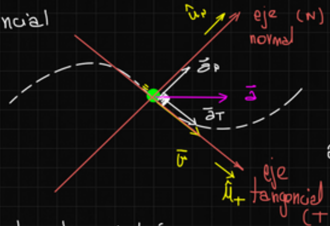
Obs

· La $\bar{v}$ es tangente a la trayectoria

· La $\vec{a}$ es entrante a la curvatura



En general, podemos descomponer la aceleración en componentes normal y tangencial



$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T}$$

aceleración

aceleración normal o centrípeta

aceleración tangencial

1) Coordenadas intrínsecas

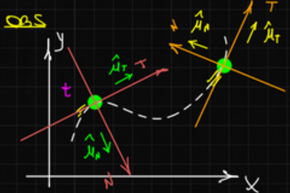
Siendo $B = \{\hat{\mu}_T, \hat{\mu}_N\}$ base en $\mathbb{R}^2$, es decir sea $\vec{x}$ un vector en el plano xy, entonces

$\exists\ \alpha$ y β / $\vec{x} = \alpha\hat{\mu}_T + \beta\hat{\mu}_N$

La base $B = \{\hat{\mu}_T, \hat{\mu}_N\}$ es ortonormal

$$\begin{cases} \hat{\mu}_T \cdot \hat{\mu}_N = 0 \\ \hat{\mu}_T \cdot \hat{\mu}_T = \hat{\mu}_N \cdot \hat{\mu}_N = 1 \end{cases}$$

OBS



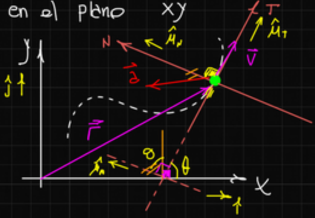
Debido a que el sistema es móvil, entonces

$\hat{\mu}_T = \hat{\mu}_T(t)$

$\hat{\mu}_N = \hat{\mu}_N(t)$

variables en t.

Entonces; sea el movimiento de una partícula en el plano xy



Siendo θ el ángulo que forma el eje tangencial y el eje X.

$\theta = \theta(t)$

$\hat{\mu}_T = \cos\theta\,\hat{i} + \text{sen}\,\theta\,\hat{j}$

$\hat{\mu}_N = -\text{sen}\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$

Se observa:

$\dot{\hat{\mu}}_T = -\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\,\hat{i} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{j}$

$\dot{\hat{\mu}}_T = \dot{\theta}\,(-\text{sen}\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$

$\boxed{\dot{\hat{\mu}}_T = \dot{\theta}\,\hat{\mu}_N}$

$\dot{\hat{\mu}}_N = -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{i} - \text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\,\hat{j}$

$\dot{\hat{\mu}}_N = -\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\hat{i} + \text{sen}\,\theta\,\hat{j})$

$\boxed{\dot{\hat{\mu}}_N = -\dot{\theta}\,\hat{\mu}_T}$

Se observa que la velocidad se expresa

$\vec{v} = \underbrace{v}_{\text{Rapidez}}\,\hat{u}_T$

Luego:

$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$

$\vec{a} = \dot{v}\,\hat{u}_T + v\,\dot{\hat{u}}_T$

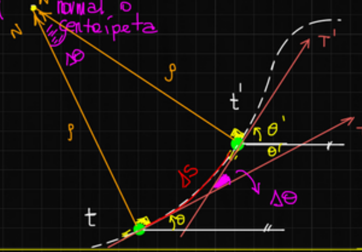
$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T}_{\text{aceleración tangencial}} + \underbrace{v\dot{\theta}\,\hat{u}_N}_{\text{aceleración normal o centrípeta}} \;\cdots (M) \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_T = \dfrac{dv}{dt}\,\hat{u}_T \\ \vec{a}_N = v\dot{\theta}\,\hat{u}_N \end{cases}$

OBS

Vamos a analizar una pequeña trayectoria de la partícula

$\Delta t = t' - t$

$\Delta\theta = \theta' - \theta$



Sabemos que: $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\theta\,\rho}{\Delta t}$

En el límite: $\underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}} = \lim_{\Delta t\to 0} \rho\,\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

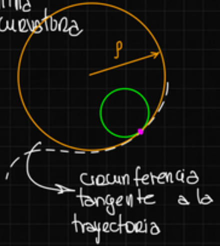
En el límite, ρ es máximo y fijo

$$v = \rho \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \boxed{v = \rho\dot{\theta}} \quad \ldots(\alpha 2)$$

Reemplazando $(\alpha 2)$ en $(\alpha 1)$,

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{u}_N}$$

ρ se denomina radio de curvatura



OBS

El radio de curvatura, es el radio de la circunferencia que "mejor se ajusta" a la trayectoria en cada punto

OBS

Sea el movimiento curvilíneo, donde

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_T$$

$$\vec{a} = \dot{v}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{u}_N$$

$$\rightarrow \vec{a}\times\vec{v} = \left(\dot{v}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{u}_N\right)\times\left(v\,\hat{u}_T\right)$$

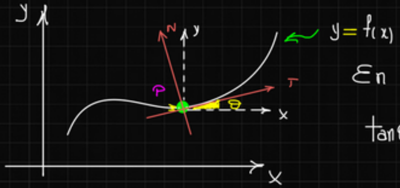
$$\vec{a}\times\vec{v} = \frac{v^3}{\rho}\,\underbrace{\hat{u}_N\times\hat{u}_T}$$

$\hookrightarrow$ es unitario

$$|\vec{a}\times\vec{v}| = \frac{v^3}{\rho} \rightarrow \boxed{\rho = \frac{v^3}{|\vec{a}\times\vec{v}|}}$$

OBS

Sea la siguiente trayectoria representada por la función $y = f(x)$



En el punto P,

$$\tan\theta = \left.\frac{df}{dx}\right|_P = f'\Big|_P$$

Sea $P=(x,y)$ un punto arbitrario de la curva $y=f(x)$

$\tan\theta = \frac{df}{dx}$

$\frac{d}{dt}(\tan\theta) = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dx}\right)$

$\sec^2\theta\,\dot\theta = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dt}$

$\sec^2\theta\,\dot\theta = f''\dot x$

$(1+\tan^2\theta)\,\dot\theta = f''\dot x$

$\Rightarrow \dot\theta = \frac{f''\dot x}{(1+f'^2)}$ ... (α3)

Por otro lado,

$\vec V = \dot x\hat\imath + \dot y\hat\jmath$ en cartesianas

$V = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}$

$V = \dot x\sqrt{1+\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)^2}$

$V = \dot x\sqrt{1+f'^2}$ ... (α4)

Entonces; reemplazando (α4) y (α3) en (α2)

$$\rho = \frac{V}{\dot\theta} = \frac{\cancel{\dot x}\sqrt{1+f'^2}}{\frac{f''\cancel{\dot x}}{(1+f'^2)}}$$

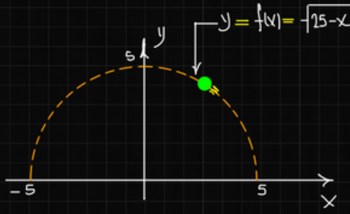
Por lo tanto,

$$\boxed{\rho = \frac{(1+f'^2)^{3/2}}{|f''|}}$$ radio de curvatura en cada punto x.

donde f es la ec. de la trayectoria de la partícula

Ejm!

Sea una partícula que se mueve a lo largo de siguiente trayectoria. Hallar ρ



Sol

$f' = \frac{1}{\cancel{2}}(25-x^2)^{-1/2}(-\cancel{2}x)$

$f' = -x(25-x^2)^{-1/2}$ ..... (θ1)

$f'' = -\left[(25-x^2)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(25-x^2)^{-3/2}(-\cancel{2}x)\right]$

$f'' = -(25-x^2)^{-3/2}\left[(25-\cancel{x^2}) + \cancel{x^2}\right]$

$$V = \dot{x}\sqrt{1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2}$$

$$V = \dot{x}\sqrt{1+f'^2} \quad \cdots (\alpha 4)$$

Entonces; reemplazando $(\alpha 4)$ y $(\alpha 3)$ en $(\alpha 2)$

$$\rho = \frac{V}{\dot{\theta}} = \frac{\cancel{\dot{x}}\sqrt{1+f'^2}}{\dfrac{f''\cancel{\dot{x}}}{(1+f'^2)}}$$

trayectoria. Hallar ρ

Sol

$$f' = \frac{1}{\cancel{2}}(25-x^2)^{-1/2}(-\cancel{2}x)$$

• $f' = -x(25-x^2)^{-1/2} \quad \cdots\cdots (\theta 1)$

$$f'' = -\left[(25-x^2)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(25-x^2)^{-3/2}(-\cancel{2}x)\right]$$

$$f'' = -(25-x^2)^{-3/2}\left[(25-\cancel{x^2}) + \cancel{x^2}\right]$$

• $f'' = -25(25-x^2)^{-3/2} \quad \cdots\cdots (\theta 2)$

Entonces; de $(\theta 1)$ y $(\theta 2)$,

$$\rho = \frac{\left(1+x^2(25-x^2)^{-1}\right)^{3/2}}{25(25-x^2)^{-3/2}} = \frac{\left(25\,\cancel{(25-x^2)^{-1}}\right)^{3/2}}{\cancel{(25-x^2)^{-3/2}}}$$

$$\rho = 5$$

Ejm:

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$\rightarrow \quad \rho(x) = \dfrac{(1+4x^2)^{3/2}}{2}$ → función radio de curvatura

En $x = 0$: $\rho_{min} = 1/2$

En $x = 2$: $\rho(2) =$

OBS

Sabemos que: $v = (\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}$; donde x e y son las comp. cartesianas de la posición

$$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}$$

entonces;

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{-1/2}(\cancel{2}\dot{x}\ddot{x}+\cancel{2}\dot{y}\ddot{y})$$

$$\boxed{a_T = \frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}}}$$

Por otro lado, $a_N = \frac{v^2}{\rho}$, entonces;

$$\rho = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|} = \frac{\left(1+\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\right|}$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{\cancel{\dot{x}^3}}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{\left|\frac{1}{\cancel{\dot{x}}}\left(\frac{\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}}{\cancel{\dot{x}^2}}\right)\right|} = \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}$$

Entonces;

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}} \rightarrow \boxed{a_N = \frac{|\ddot{y}\dot{x}-\dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{1/2}}}$$

Coordenadas polares

Siendo

$\hat{e}_r$: unitario con orientación radia saliente

$\hat{e}_\theta$: unitario con direcció en el sentido del aumento de θ

El conjunto $B' = \{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$ conforma una base ortonorm para el espacio vectorial. Es decir

$\forall \vec{A} \in V$, se cumple que $\vec{A} = A_r\hat{e}_r + A_\theta\hat{e}_\theta$

Por otro lado, se observa

$$\left.\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j} \\ \hat{e}_\theta &= -\operatorname{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{aligned}\dot{\hat{e}}_r &= \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta \\ \dot{\hat{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\,\hat{e}_r\end{aligned}}$$

Vemos que: $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$; donde r es la distancia radial.

Entonces

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r$$

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{\dot{r}\,\hat{e}_r}_{\text{componente radial}} + \underbrace{r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta}_{\text{componente angular}}} \equiv V_r\,\hat{e}_r + V_\theta\,\hat{e}_\theta$$

$V_r = \dot{r}$ → determina cuán rápido cambia la distancia radial de la partícula

$V_\theta = r\dot{\theta}$ → determina cuán rápido cambia angularmente la posición de la partícula respecto a la dirección radial

Además, $V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$

Por otro lado, se tiene que:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\,\dot{\hat{e}}_r + (r\dot{\theta})^{\cdot}\,\hat{e}_\theta + (r\dot{\theta})\,\dot{\hat{e}}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r$$

Luego:

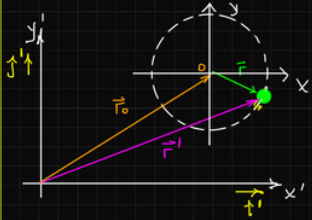
$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\,\hat{e}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}_{a_\theta}\,\hat{e}_\theta$$

donde ; $a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$: módulo de la aceleración

OBS

- $\dot{\theta}$ se le conoce como velocidad angular
- $\ddot{\theta}$ se le conoce como aceleración angular

Movimiento Circular



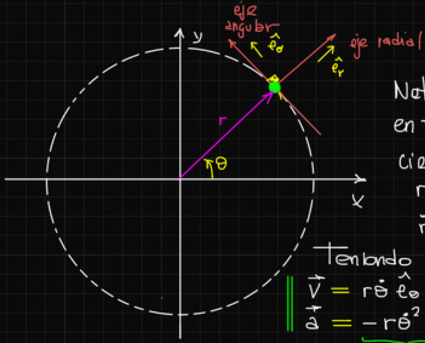
Se observa que:

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_o + \vec{r}$$

$$\vec{v}\,' = \vec{v}$$

$$\vec{a}\,' = \vec{a}$$

Por lo tanto, la $\vec{v}$ y $\vec{a}$ de la partícula será la misma bajo los sistemas xy o x'y'



Notamos que en un movimiento circular

$r = cte$

$\dot r = \ddot r = 0$

Teniendo que:

$$\vec V = r\dot\theta\,\hat e_\theta$$

$$\vec a = \underbrace{-r\dot\theta^2\,\hat e_r}_{\text{aceleración centrípeta o normal}} + \underbrace{r\ddot\theta\,\hat e_\theta}_{\text{aceleración tangencial}}$$

Se define la velocidad angular

$$\boxed{\vec w = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}\,\hat u}$$

donde

$$\hat u = \frac{\vec a\times\vec V}{|\vec a\times\vec V|}$$

plano de movimiento

$\vec w \perp$ plano

OBS

Veamos el sgte cálculo

$$\vec w\times\vec r = \dot\theta\,\hat k\times r\,\hat e_r$$

$$\vec w\times\vec r = \dot\theta\, r\,\hat k\times(\cos\theta\,\hat i + \operatorname{sen}\theta\,\hat j)$$

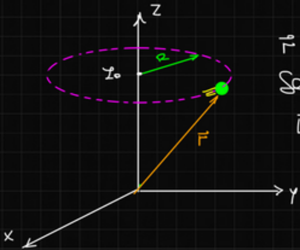
$$\vec w\times\vec r = \dot\theta\, r\,(\cos\theta\,\hat j - \operatorname{sen}\theta\,\hat i)$$

$$\vec w\times\vec r = \dot\theta\, r\,\hat e_\theta$$

Se demuestra que: $\boxed{\vec V = \vec w\times\vec r}$ en un mov. circular

OBS

Se cumple también en un movimiento rotacional



$$\vec r = z_0\,\hat k + R\,\hat e_r$$

Se observa que

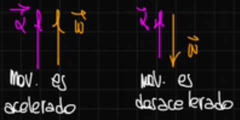
$$\vec w\times\vec r = \dot\theta\,\hat k\times(z_0\,\hat k + R\,\hat e_r)$$

$$= \dot\theta\, R\,\hat k\times\hat e_r$$

Se define la aceleración angular como

$$\boxed{\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}}$$

Se observa que $\vec{\alpha}$ es perpendicular al plano de movimiento



Luego, las ecuaciones se expresan como

$$v_\theta = r\omega$$
$$a_r = -r\omega^2 = -\frac{v^2}{r}$$
$$a_\theta = r\alpha$$

A) Para $\alpha = cte$

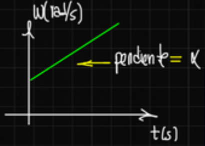
a_θ es constante

$\alpha = \dot{\omega} = cte$

Se integra; $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha\int_0^t dt$$

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha t}$$



Para la posición angular

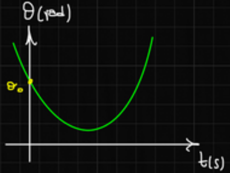
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\,dt$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

Ecuación de movimiento del MCUV



B) Para $\omega = cte$

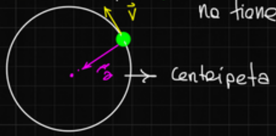
Entonces $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$

luego

$$\vec{V} = r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r$$

Un movimiento con $\omega = cte$, no tiene aceleración tangencial



A) Para $\alpha = cte$

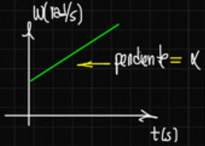
· a_θ es constante

· $\alpha = \dot{\omega} = cte$

Se integra ; $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha \int_0^t dt$$

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 + \alpha t}$$

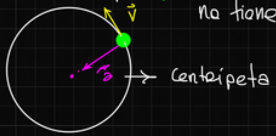


Entonces $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$

luego

$\vec{V} = r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$

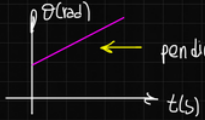
$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\hat{e}_r$ → Un movimiento con $\omega = cte$, no tiene aceleración tangencial



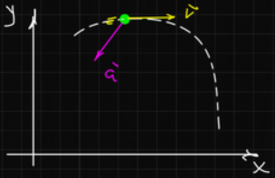
Si $\omega = \frac{d\theta}{dt} = cte$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega\, dt \rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega t}$$

Ecuación de movimiento del MCU



Movimiento bidimensional con $\vec{a} = cte$



Sabemos que $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = cte$

tiene como solución

$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a}\,t}$$

Si integramos nuevamente

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2}$$

↳ ec. de movimiento

OBS

Como el movimiento se desarrolla en el plano xy, entonces

$$\begin{cases} \vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} \\ \vec{v} = \dot{x}\,\hat{i} + \dot{y}\,\hat{j} \\ \vec{a} = \ddot{x}\,\hat{i} + \ddot{y}\,\hat{j} \end{cases}$$

Se tiene que

$$x\,\hat{i} + y\,\hat{j} = (x_0\,\hat{i} + y_0\,\hat{j}) + (\dot{x}_0 t\,\hat{i} + \dot{y}_0 t\,\hat{j}) + \frac{1}{2}(\ddot{x}\,t^2\,\hat{i} + \ddot{y}\,t^2\,\hat{j})$$

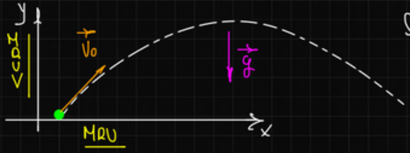
Luego;

$$x(t) = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$
$$y(t) = y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

→ Podemos describir este movimiento por medio de 2 MRUVs

Para $a_x = 0$ y $a_y = g$

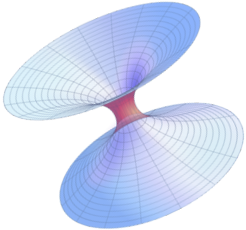
Se tiene el movimiento de proyectiles:



Se desprecian los efectos del aire.

GRACIAS

Y MUCHOS ÉXITOS



$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$