Def.: Sea V e.v. sobre K y $A \subseteq V$, se llama anulador de A al conjunto

$$A^0 = \mathrm{Ann}(A) = \{ f \in V^* \, / \, f(u) = 0 \,;\, \forall u \in A \}$$

Prop.: Sea V e.v. sobre K y $A \subseteq V$, se cumple

1) $A^0 < V^* \,;\, \forall A \subseteq V$

2) $V^0 = \{0\}$

3) $\{0\}^0 = V^*$

4) Si $A \setminus \{0\} \neq \emptyset \rightarrow A^0 \neq V^0$

5) Si $A \subseteq B \subseteq V \rightarrow A^0 \supseteq B^0$

Prueba:

1) Sean $f, g \in A^0$ y $\alpha, \beta \in K$

$\rightarrow (\alpha f + \beta g)(u) = \alpha f(u) + \beta g(u)$
$= 0 \,;\, \forall u \in A$

$\rightarrow \alpha f + \beta g \in A^0 \,;\, \forall \alpha, \beta \in K \,;\, \forall f, g \in V^*$

2) $\subseteq$: Sea $f \in V^0 \rightarrow f(u) = 0 \,;\, \forall u \in V$

$\rightarrow f = 0$

5) Sea $f \in B^\circ \to f(u) = 0 \,;\, \forall u \in B$

$\to f(u) = 0 \,;\, \forall u \in A$ (ya que $A \subseteq B$)

$\to f \in A^\circ$

$V^* \simeq V$

Prop: Sean V un K-esp. vect con $\dim V < +\infty$ y $S < V$ se cumple:

1) $\frac{V^*}{S^\circ} \simeq S^*$ 2) $\dim V = \dim S + \dim S^\circ$

P: 1) Sea $f \in V^*$, defino $g : S \to K$
$u \mapsto f(u)$

$*$ $g(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u + \beta v)$
$= \alpha f(u) + \beta f(v) \,;\, \forall \alpha, \beta \in K$

$\to g \in S^*$

2) $\underbrace{\dim V^*}_{} = \underbrace{\dim S^*}_{} + \dim S^\circ$

$\dim V = \dim S + \dim S^\circ$

Defino $\psi : V^* \longrightarrow S^*$
$\qquad f \longmapsto g$

* ψ es sobrey : Sea la base de V $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_t\}$ donde $\{u_1, \dots, u_r\}$ es base de S

Si $S' = \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_t\}) \rightarrow V = S \oplus S'$

Defino $f : V \rightarrow K$ con $h \in S^*$
$\qquad v \mapsto h(u)$

Se verifica que $f \in V^*$, luego $\psi(f) = g = h$

* Si $\psi(f) = 0 \rightarrow g(u) = 0 \rightarrow f(u) = 0 ; \forall u \in S$
$\rightarrow f \in S^0 \rightarrow Nu(\psi) = S^0$

$\therefore$ Por TFTL $\dfrac{V^*}{S^0} \simeq S^*$ $\lrcorner //$

Prop: Si $\dim V < +\infty$ y $S < V \rightarrow S^{\circ\circ} = S$

D: Ejerc.

Def: Sea $T: U \rightarrow V$ t.l., definamos la transpuesta de T denotada por T^{∇} como la t.l. $T^{\nabla}: V^* \rightarrow U^*$ tal que $T^{\nabla}(f) = f \circ T$; $\forall f \in V^*$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f \circ T"'] & V \arrow[d, "f"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Prop: 1) $(\alpha T)^{\nabla} = \alpha T^{\nabla}$; $\forall \alpha \in K$

2) $(T+L)^{\nabla} = T^{\nabla} + L^{\nabla}$ con $T, L: U \rightarrow V$ t.l.

3) $(L \circ T)^{\nabla} = T^{\nabla} \circ L^{\nabla}$ donde $U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{L} W$

4) Si T es invers. $\rightarrow (T^{-1})^{\nabla} = (T^{\nabla})^{-1}$

5) Si $I: U \rightarrow U$ es identidad en U $\rightarrow I^{\nabla}: U^* \rightarrow U^*$ es identidad en U^*

P.: 1) $(\alpha T)^{\nabla}(f) = f \circ (\alpha T)$

$$= \alpha\, f \circ T = \alpha T^{\nabla}(f);\ \forall f \in V^*;\ \forall \alpha \in K$$

2) $(T+L)^{\nabla}(f) = f \circ (T+L)$

$$= f \circ T + f \circ L$$

$$= T^{\nabla}(f) + L^{\nabla}(f);\ \forall f \in V^* \rightarrow (T+L)^{\nabla} = T^{\nabla} + L^{\nabla}$$

Prop.: Sea $T: U \rightarrow V$ t.l. se tiene que

1) $[T(U)]^{0} = N(T^{\nabla})$

2) $T^{\nabla}(V^*) \subseteq [N(T)]^{0}$

3) Si U y V son de dimensión finita $\rightarrow \dim T(U) = \dim T^{\nabla}(V^*)$

4) Con las mismas cond. de 3) $[N(T)]^{0} = T^{\nabla}(V^*)$

P:

1) $f \in [T(U)]^{\circ} \leftrightarrow f(T(u)) = 0 \; ; \forall u \in U$

$\leftrightarrow (f \circ T)(u) = 0 \; ; \forall u \in U$

$\leftrightarrow \underbrace{f \circ T} = 0$

$\leftrightarrow T^{\nabla}(f) = 0$

$\leftrightarrow f \in N(T^{\nabla})$

2) Si $f \in T^{\nabla}(V^{*})$, $\exists g \in V^{*} / T^{\nabla}(g) = f$

luego $f(u) = g \circ T(u) = g(0) = 0 \; ; \forall u \in N(T)$

$\rightarrow f \in N(T)^{\circ}$