FÍSICA I: BFIOIC

2022-1

Prof. Dr. Marco Cuyubamba

SEMANA 3

Propiedades

Sea los vectores $\vec{a}(\lambda)$ y $\vec{b}(\lambda)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$; se tiene

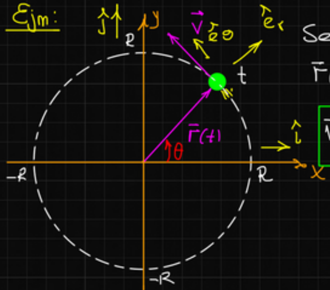
a) $\dfrac{d}{d\lambda}(k\vec{a}) = k\dfrac{d\vec{a}}{d\lambda}$

b) $\dfrac{d}{d\lambda}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \dfrac{d\vec{a}}{d\lambda}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dfrac{d\vec{b}}{d\lambda}$

c) $\dfrac{d}{d\lambda}\left(f(\lambda)\,\vec{a}(\lambda)\right) = \dfrac{df}{d\lambda}\vec{a} + f(\lambda)\dfrac{d\vec{a}}{d\lambda}$

d) $\dfrac{d}{d\lambda}(\vec{a}\times\vec{b}) = \dfrac{d\vec{a}}{d\lambda}\times\vec{b} + \vec{a}\times\dfrac{d\vec{b}}{d\lambda}$

Ejm:



Se observa que

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta_{(t)}\,\hat{i} + R\,\mathrm{sen}\,\theta_{(t)}\,\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}} \;:\; \text{velocidad}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\theta)\,\hat{i} + \cancel{(R\cos\theta)\frac{d\hat{i}}{dt}}^{\,0} + \frac{d}{dt}(R\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{j} + \cancel{(R\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{d\hat{j}}{dt}}^{\,0}$$

$$\vec{v} = R\frac{d}{dt}(\cos\theta(t))\,\hat{i} + R\frac{d}{dt}(\mathrm{sen}\,\theta(t))\,\hat{j}$$

$$\vec{v} = -R\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}\,\hat{i} + R\cos\theta\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega}\,\hat{j}$$

$$\vec{v} = -R\omega\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{i} + R\omega\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{v} = R\omega\,(\underbrace{-\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}}_{\hat{e}_\theta}) \longrightarrow \boxed{\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta}$$

Entonces;

$$\hat{e}_\theta = -\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{j}$$

$\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = 0$

↳ vectores perpendiculares

$\rightarrow \dfrac{d\hat{e}_r}{dt} = -\operatorname{sen}\theta \dfrac{d\theta}{dt}\hat{\imath} + \cos\theta \dfrac{d\theta}{dt}\hat{\jmath}$

$$\boxed{\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta}$$

$\rightarrow \dfrac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\imath} - \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\,\hat{\jmath}$

$$\boxed{\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r}$$

En coordenadas polares;

$$\vec{r}(t) = R\,\hat{e}_r$$

$$\vec{V}(t) = R\omega\,\hat{e}_\theta = R\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = R\frac{d}{dt}(\dot{\theta}\hat{e}_\theta)$$

$$\vec{a} = R\left(\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{e}_\theta + \dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}\right)$$

$$\vec{a} = R\left(\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta - \dot{\theta}^2\,\hat{e}_r\right)$$

Cambio de coordenadas

Sea el vector $\vec{A} = \underbrace{|\vec{A}|\cos(\alpha+\theta)}_{A_x}\hat{\imath} + \underbrace{|\vec{A}|\operatorname{sen}(\alpha+\theta)}_{A_y}\hat{\jmath}$

$\vec{A} = \underbrace{|\vec{A}|\cos\alpha}_{A_x'}\,\hat{\imath}' + \underbrace{|\vec{A}|\operatorname{sen}\alpha}_{A_y'}\,\hat{\jmath}'$

Vectores unitarios:

$$\hat{\imath}' = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\jmath}' = -\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

Entonces

$$\vec{A} = A_x'\,\hat{\imath}' + A_y'\,\hat{\jmath}'$$

$$\vec{A} = A_x'(\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}) + A_y'(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$$

$$\vec{A} = \underbrace{(A_x'\cos\theta - A_y'\operatorname{sen}\theta)}_{A_x}\hat{\imath} + \underbrace{(A_x'\operatorname{sen}\theta + A_y'\cos\theta)}_{A_y}\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \quad A_x = A_x'\cos\theta - A_y'\operatorname{sen}\theta$$

$$A_y = A_x'\operatorname{sen}\theta + A_y'\cos\theta$$

$$\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x'\\ A_y'\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}A_x'\\ A_y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_x\\ A_y\end{pmatrix}}$$

Matriz de rotación
u operador de rotación

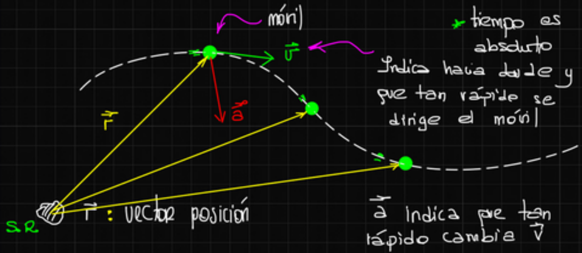
$$R_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Siendo A_x' ; A_y' componentes de $\vec{A}$ en el sistema $x'y'$.

Cinemática de una partícula

Vamos a estudiar el movimiento de los cuerpos sin importar las causas

* tiempo es absoluto



Se sabe que

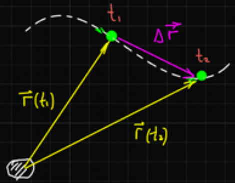
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt}\\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\end{aligned}}$$

$\rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}$

$\rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

El vector posición nos describirá el movimiento del móvil

Desplazamiento ($\Delta\vec{r}$)



$$\boxed{\Delta\vec r = \vec r(t_2) - \vec r(t_1)}$$

↳ desplazamiento del móvil entre los instantes t_1 y t_2

OBS

Un desplazamiento "pequeño" se puede modelar por medio de un diferencial

$$\boxed{d\vec r = \vec r(t+dt) - \vec r(t)}$$

pequeño intervalo de tiempo

$$d\vec r = \dot{\vec r}\, dt$$

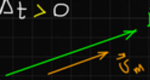
$$\boxed{d\vec r = \vec v\, dt}$$

Velocidad media (vectorial)

$$\boxed{\vec v_m = \frac{\Delta\vec r}{\Delta t}}$$

razón de cambio media

$\Delta t > 0$



Rapidez media

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\boxed{\tilde v = \frac{S}{\Delta t}}$$

escalar

Se observa que

$$S \geq |\Delta\vec r|$$

$$\frac{S}{\Delta t} \geq \left|\frac{\Delta\vec r}{\Delta t}\right|$$

$$\boxed{\tilde v \geq |\vec v_m|}$$

de tiempo

$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}\, dt$$

$$\boxed{d\vec{r} = \vec{v}\, dt}$$

Se observa que

$$s \geq |\Delta \vec{r}|$$

$$\frac{s}{\Delta t} \geq \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right|$$

$$\boxed{\tilde{v} \geq |\vec{v}_m|}$$

Aceleración media

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$$

Razón de cambio media de la velocidad

OBS

En general podemos describir el movimiento mediante la ecuación

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}$$

$$\boxed{\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}}$$ Ecuación diferencial de movimiento

i: Si $\vec{a} = \vec{0}$ (MRU)

tenemos que: $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}}$

$$\underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{0}\hat{i} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{0}\hat{j} + \underbrace{\frac{dv_z}{dt}}_{0}\hat{k} = \vec{0}$$

Es decir, v_x ; v_y y v_z son constantes por tanto

$$\boxed{\vec{v} = cte}$$

Además ;

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = cte$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

Entonces : $\frac{dx}{dt} = v_x$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_x\, dt = v_x \int_{t_0}^{t} dt$$

$$x\Big|_{x_0}^{x} = v_x\, t\Big|_{t_0}^{t}$$

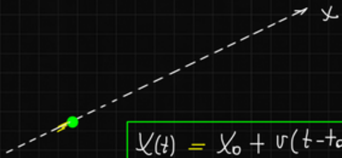
$$x - x_0 = v_x(t - t_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_x(t-t_0) \\ y(t) &= y_0 + v_y(t-t_0) \\ z(t) &= z_0 + v_z(t-t_0) \end{aligned}} \equiv \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t-t_0)}$$

ecuación de movimiento del MRU

OBS

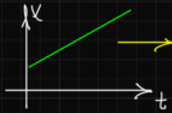
En un MRU; el movimiento se desarrolla en línea recta



$$\boxed{x(t) = x_0 + v(t-t_0)}$$

ec. de movimiento del MRU

Área $= |\Delta \vec{r}|$



pendiente $= v$

2. Si $\vec{a} = cte \neq \vec{0}$

Tenemos que: $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$

$$\frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

Entonces: $\displaystyle\int_{v_{x0}}^{v_x} dv_x = \int_{t_0}^{t} a_x\, dt$

$$v_x\Big|_{v_{x0}}^{v_x} = a_x t\Big|_{t_0}^{t}$$

$$v_x - v_{x0} = a_x(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0} + a_x(t-t_0) \\ v_y(t) &= v_{y0} + a_y(t-t_0) \\ v_z(t) &= v_{z0} + a_z(t-t_0) \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0)}$$

Por otro lado; $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \left(\vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0)\right) dt$$

$$\rightarrow \vec{r}\,\Big|_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0\,dt + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t-t_0)\,dt$$

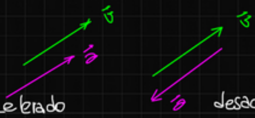
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0\,t\,\Big|_{t_0}^{t} + \vec{a}\int_{t_0}^{t} (t-t_0)\,dt$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t-t_0) + \vec{a}\int_{0}^{t-t_0} (t-t_0)\,d(t-t_0)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{\vec{a}}{2}(t-t_0)^2$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2}$$

Si $\vec{v}$ y $\vec{a}$ son colineales



decimos que es un MRUV

Entonces;

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \\ v(t) &= v_0 + a t \end{aligned}}$$

Ec. de mov. del MRUV

OBS

Sabemos que en un movimiento unidimensional

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \quad \text{Regla de la cadena}$$

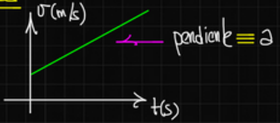
$$a = v\frac{dv}{dx}$$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$; considerando aceleración constante

$$\frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v} = a\,x\Big|_{x_0}^{x}$$

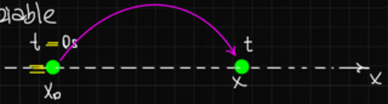
$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a(x-x_0) \rightarrow \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x}$$

OBS



3. acelerración variable $\vec{a} \neq cte$

En un movimiento unidimensional con aceleración variable



a) Sabemos que $a = \frac{dv}{dt}$

$$\rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\, dt$$

$$V(t) - V_0 = \int_0^t a\, dt$$

$$\rightarrow \boxed{V(t) = V_0 + \int_0^t a\, dt}$$

Una vez determinada la velocidad, calculamos la posición

$$V = \frac{dx}{dt} \rightarrow \int_0^t v\,dt = \int_{x_0}^{x} dx$$

$$\rightarrow X(t) = X_0 + \int_0^t v\,dt$$

Luego

$$X(t) = X_0 + \int_0^t V(t')\,dt'$$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \left[V_0 + \int_0^{t'} a\, dt'' \right] dt'$$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t V_0\, dt' +$$

$$X(t) = X_0 + V_0 t + \int_0^t \int_0^{t'} a\, dt''\, dt' \rightarrow$$

Para $a(t)$ $\rightarrow$

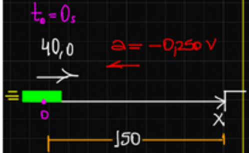
b) Para $a(v)$:

En este caso,

$$a(v) = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_0^t dt = \int_{V_0}^{v} \frac{dv}{a(v)}$$

$$\boxed{t = \int_{V_0}^{V} \frac{dv}{a(v)}}$$

- Ejemplo : un buque que se desplaza con una rapidez constante de 40,0 m/s avista el muelle a una distancia de 150m y apagan los motores, si desde ese instante el agua le genera una desaceleración de la forma a = -0,250 V, determine:
- La velocidad y posición del buque como función del tiempo
- ¿Llega el buque a chocar con el muelle?
- de hacerlo ¿ conque con que rapidez lo hace?
- (Asuma el origen de coordenadas en la posición en que el buque apaga sus motores)



$$a = \frac{dV}{dt}$$

$$dt = \frac{dV}{-0{,}250\,V}$$

$$-0{,}250\int_0^t dt = \int_{V_0}^{V} \frac{dv}{V}$$

$$-0{,}250\,t = Ln|v|\Big|_{V_0}^{V} = Ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

$$\rightarrow \frac{V(t)}{V_0} = e^{-0{,}250\,t}$$

$$V(t) = 40{,}0\, e^{-0{,}250\,t} \quad \cdots \; (*)$$

De (*); se tiene que

$$V(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^x dx = 40{,}0 \int_0^t e^{-0{,}250\,t}\, dt$$

$$x(t) = 40{,}0 \left[\frac{e^{-0{,}250\,t}}{-0{,}250}\right]_0^t$$

$$x(t) = 160\left(-e^{-0{,}250\,t} - (-1)\right)$$

$$x(t) = 160\left(1 - e^{-0{,}250\,t}\right)$$

OBS

Para determinar si el buque choca con el muelle, $V(t) = 0$; de (*)

$$40{,}0\, e^{-0{,}250\,t} = 0$$

En $t \to \infty$ se detiene

$$\star \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 160 \lim_{t\to\infty}\left(1 - e^{-0{,}250\,t}\right) = 160$$

Entonces; el buque si colisiona con el muelle.

Entonces

$$V(t) = 40{,}0\, e^{-0{,}250t}$$

$$x(t) = 160\left(1 - e^{-0{,}250t}\right)$$

$$x(t) = 160\left(1 - \frac{v}{40{,}0}\right)$$

$$\rightarrow \quad V(x) = 40{,}0 - 0{,}250\, x$$

En $x = 150$ m :
$$V(150) = 40{,}0 - 0{,}250(150)$$
$$V(150) = 2{,}50 \text{ m/s}$$

- Ejemplo 2:
- El aire frena a los objetos que se mueve a través suyo con una aceleración proporcional con el cuadrado de su rapidez, a causa de ello la aceleración de un ciclista que baja por una pendiente resulta ser:

$a(v) = 1{,}44 - 0{,}0025\, v^2 \left(\frac{m}{s^2}\right)$, donde la velocidad se expresa en m/s. Determine:

- a) velocidad del ciclista como función de la distancia (si la velocidad es nula cuando x = 0)
- b) determine también la máxima velocidad que alcanza el ciclista

c) Aceleración dependiente de la posición

Cuando la aceleración depende de x

$$a(x) = \frac{dv}{dt}$$

$$a(x) = \frac{dv}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v}$$

$$\int_{x_0}^{x} a(x)\, dx = \int_{v_0}^{v} v\, dv \;\rightarrow\; \left.\frac{v^2}{2}\right|_{v_0}^{v} = \int_{x_0}^{x} a(x)\, dx$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)\, dx}$$

EJEMPLO:
Una partícula de masa m se mueve con una aceleración de la forma $a = -\beta x$ (a en m/s^2 y x en m) si en el instante $t = 0$ parte del reposo desde la posición $x(0) = A$, determine la posición y velocidad de la partícula como función del tiempo

Solución

Entonces ; $a(x) = -\beta x$

$$-\beta x = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^v v\,dv = -\beta\int_A^x x\,dx$$

$$\frac{v^2}{\cancel{2}} = -\beta\left(\frac{x^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_A^x$$

$$v^2 = -\beta\,(x^2 - A^2) \quad ; \quad \text{siendo } \beta > 0$$

$$v = \sqrt{\beta\,(A^2 - x^2)} \quad ; \quad \text{si } \beta = w^2$$

$$v(x) = w\sqrt{A^2 - x^2} \quad \cdots \quad (\alpha)$$

- Además, se sabe

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$w\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^t w\,dt = \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

$$wt = \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} \quad \cdots \quad (\gamma)$$

Para la Integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} \quad ; \quad x = A\,\text{sen}\,\theta$$

$$dx = A\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{A\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{A^2 - A^2\text{sen}^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\cancel{A\cos\theta}\, d\theta}{\cancel{A\cos\theta}} = \int d\theta = \theta = \text{arcsen}\left(\frac{x}{A}\right)$$

De (γ); se tiene

$$wt = \text{arcsen}\left(\frac{x}{A}\right)\Big|_A^x$$

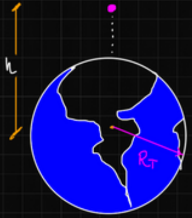
$$wt = \text{arcsen}(x/A) - \underbrace{\text{arcsen}(1)}_{\pi/2}$$

$$x(t) = A\,\text{sen}\,(wt + \pi/2)$$

$V(t) = A\omega \cos(\omega t + \pi/2)$

EJEMPLO 2:
Una masa m esta suspendida entre dos cintas elásticas, que están ambas estiradas hasta cerca de su limite de elasticidad. La aceleración en esta caso no es lineal sino que esta dada por $a(x) = -3x - 5x^3$ (x en m y a en m/s²), calcula la velocidad máxima de la masa si tiene una velocidad v = -4,00 m/s al pasar por x = 1,00 m

Caida libre



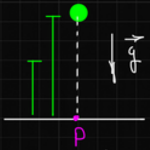
- Para que ocurra un mov. de caida libre, se debe cumplir

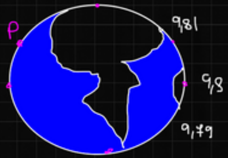
$h \ll R_T$

Entonces, analizamos cerca de la superficie de la tierra

- Minimizar los efectos del aire

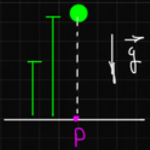
Tenemos una aceleración de la gravedad fija en cada punto de la superficie de la tierra

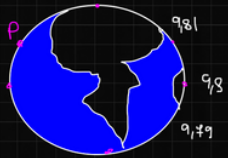




$\vec{g} = -g\,\hat{j}\ \mathrm{m/s^2}$; donde g es el módulo de $\vec{g}$

fija en cada punto de la superficie de la tierra





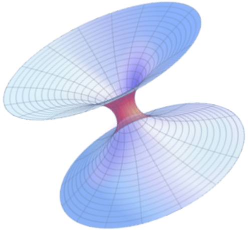
$\vec{g} = -g\,\hat{j}\ m/s^2$; donde g es el módulo de $\vec{g}$

Bajo estas consideraciones, el movimiento de caída libre es un MRUV

$$\boxed{\begin{aligned} y_{(t)} &= y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2 \\ v_{(t)} &= v_0 + g t \end{aligned}}$$

GRACIAS

Y MUCHOS ÉXITOS



$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$