FÍSICA I: BFIOIC

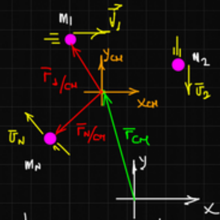
2022-1

Prof. Dr. Marco Cuyubamba

SEMANA 11

Momento lineal respecto al CM

Sea un sistema de N partículas



Se sabe que:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Respecto al laboratorio

entonces, para la partícula i-ésima:

$$\vec{r}_{i/CM} = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM}$$

luego

$$\vec{r}_{CM/CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{i/CM}$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM})$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{CM}$$

$$\vec{r}_{CM/CM} = \vec{r}_{CM} - \frac{\vec{r}_{CM}}{\cancel{M}} \cancel{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \vec{0}$$

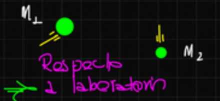
Además, de manera análoga se demuestra que:

$$\vec{V}_{CM/CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_{i/CM} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P}_{sist/CM} = \vec{0}}$$ para todo sistema de partículas

OBS

Para un sistema de 2 partículas



$$\vec{V}_{1/CM} = \vec{V}_1 - \vec{V}_{CM}$$

$$\vec{V}_{2/CM} = \vec{V}_2 - \vec{V}_{CM}$$

$$\vec{V}_{1/CM} = \vec{V}_1 - \left(\frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1+m_2}\right)$$

$$\vec{V}_{1/CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$$

$$\boxed{\vec{V}_{1/CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_{1/2}} \qquad \boxed{\vec{V}_{2/CM} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_{2/1}} \qquad \vec{V}_{2/1} = -\vec{V}_{1/2}$$

entonces, respecto al CM,

respecto al CM

OBS

Se observa también de

$$\vec{P}_{sist/CM} = \vec{0}$$

$$m_1 \bar{v}_{1/CM} + m_2 \bar{v}_{2/CM} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_{1/CM} = \frac{-m_2}{m_1} \bar{v}_{2/CM}$$

Energía cinética respecto al CM

Sea un sistema de N partículas, cuya i-ésima verifica:

Sistema referencia de laboratorio

$$K_i^{(cm)} = \frac{1}{2} m_i V_{i/CM}^2$$

↳ Respecto al CM

donde

$\vec{r}_{i/CM}$ es la posición de la partícula i-ésima respecto al CM

Se sabe

$$K_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2$$

↳ respecto al laboratorio

Sabemos que: $\vec{V}_i = \vec{V}_{i/CM} + \vec{V}_{CM}$; entonces

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \underbrace{V_i^2}_{\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i}$$

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left(V_{i/CM}^2 + V_{CM}^2 + 2\, \vec{V}_{i/CM} \cdot \vec{V}_{CM} \right)$$

$$K = K^{(cm)} + \frac{V_{CM}^2}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i} + \vec{V}_{CM} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_{i/CM}}_{\vec{0}}$$

$$\boxed{K^{(cm)} = K - \frac{1}{2} M V_{CM}^2}$$

; en general $K^{(cm)} \leq K$

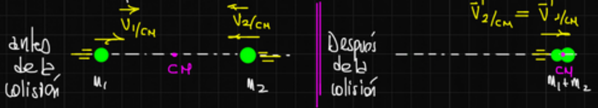
$K^{(cm)}$: respecto al CM

K: respecto al lab

$\frac{1}{2} M V_{CM}^2$: Energía cinética del centro de masa

Colisión frontal completamente inelástica respecto al CM

Se el esquema



Sabemos:

$$m_1\bar{V}_{1/CM} + m_2\bar{V}_{2/CM} = \vec{0}$$

$$(m_1+m_2)\bar{V}'_{1/CM} = \vec{0} \rightarrow \boxed{\vec{V}_{1/CM} = \vec{V}_{2/CM} = \vec{0}}$$

OBS

$$\bar{V}'_{1/CM} = \bar{V}'_1 - \vec{V}'_{CM} = \bar{0} \rightarrow \vec{V}'_1 = \bar{V}'_{CM}$$

Además; se sabe que:

$$\bar{V}'_1 = \frac{m\bar{V}_1 + m_2\bar{V}_2}{m_1+m_2}$$

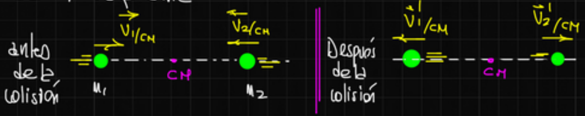
OBS

Recordemos que

$$\bar{V}_{CM} = \vec{V}'_{CM}$$

Colisión frontal elástica respecto al CM

Se el esquema



Se conserva $\vec{P}_{sist/CM} = \vec{0}$

$$m_1\bar{V}_{1/CM} + m_2\bar{V}_{2/CM} = \bar{0} \rightarrow \bar{V}_{1/CM} = -\frac{m_2}{m_1}\bar{V}_{2/CM}$$

$$m_1\bar{V}'_{1/CM} + m_2\vec{V}'_{2/CM} = \bar{0} \rightarrow \bar{V}'_{2/CM} = -\frac{m_1}{m_2}\bar{V}'_{1/CM}$$

Además; $K^{(cm)} = K'^{(cm)}$; se puede demostrar que

$$\bar{V}_{1/CM} + \bar{V}'_{1/CM} = \bar{V}_{2/CM} + \bar{V}'_{2/CM}$$

$$-\frac{m_2}{m_1}\bar{V}_{2/CM} + \bar{V}'_{1/CM} = \vec{V}_{2/CM} - \frac{m_1}{m_2}\bar{V}'_{1/CM}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}'_{1/CM} = \frac{m_2}{m_1}\vec{V}_{2/CM}}$$

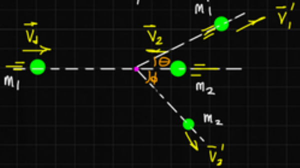
$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}'_{2/CM} = \frac{m_1}{m_2}\bar{V}_{1/CM}}$$

Si $m_1 = m_2$; las velocidades se intercambi respecto al CM

Colisión bidimensional (no frontal) respecto al CM

Veamos los esquemas respecto a laboratorio y respecto al CM, antes y después de la colisión

Respecto a laboratorio



Respecto al CM

Se observa que: $\vec{V}_1' = \vec{V}'_{1/CM} + \vec{V}_{CM}$

$$V_1'\cos\theta = V_{CM} + V'_{1/CM}\cos\psi$$

$$V_1'\,\text{sen}\,\theta = V'_{1/CM}\,\text{sen}\,\psi$$

entonces;

$$\tan\theta = \frac{V'_{1/CM}\,\text{sen}\,\psi}{V'_{1/CM}\cos\psi + V_{CM}}$$

$$\rightarrow \tan\theta = \frac{\text{sen}\,\psi}{\cos\psi + \frac{V_{CM}}{V'_{1/CM}}} \quad \ldots (*)$$

Analizando el caso en que m_2 esté inicialmente en reposo respecto a laboratorio ($\vec{V}_2 = \vec{0}$); entonces;

$$\vec{V}_{CM} = \vec{V}'_{CM} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\cancel{\vec{V}_2}^{\,0}}{m_1+m_2}$$

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \vec{V}'_{CM} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1} \quad \ldots (\alpha 1)$$

Además; sabemos que $\vec{V}_{2/CM} = \cancel{\vec{V}_2}^{\,\vec{0}} - \vec{V}_{CM}$

$$\boxed{\vec{V}_{2/CM} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1} \quad \ldots (\alpha 2)$$

Analogamente; se tiene $\boxed{\vec{V}_{1/CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_1} \quad \ldots (\alpha 3)$

Respecto al CM

Se observa que: $\vec{V}'_1 = \vec{V}'_{1/CM} + \vec{V}_{CM}$

$$V'_1 \cos\theta = V_{CM} + V'_{1/CM} \cos\psi$$

$$V'_1 \operatorname{sen}\theta = V'_{1/CM} \operatorname{sen}\psi$$

$$V_{CM} - V'_{CM} = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = \vec{V}'_{CM} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1} \quad \cdots (\alpha 1)$$

Además; sabemos que $\vec{V}_{2/CM} = \cancel{\vec{V}_2}^{\vec{0}} - \vec{V}_{CM}$

$$\boxed{\vec{V}_{2/CM} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1} \quad \cdots (\alpha 2)$$

Analogamente; se tiene $\boxed{\vec{V}_{1/CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_1} \quad \cdots (\alpha 3)$

· Si la colisión es elástica

$$K^{(cm)} = K'^{(cm)}$$

$$\frac{1}{2}m_1 V^2_{1/CM} + \frac{1}{2}m_2 V^2_{2/CM} = \frac{1}{2}m_1 V'^2_{1/CM} + \frac{1}{2}m_2 V'^2_{2/CM} \quad \cdots (\alpha 4)$$

· Se cumple también que:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \vec{V}_{1/CM} + m_2 \vec{V}_{2/CM} = 0 \rightarrow V_{1/CM} = \frac{m_2}{m_1} V_{2/CM} \\ m_1 \vec{V}'_{1/CM} + m_2 \vec{V}'_{2/CM} = 0 \rightarrow V'_{1/CM} = \frac{m_2}{m_1} V'_{2/CM} \end{array}\right\} \cdots (\alpha 5)$$

Substituyendo $(\alpha 5)$ en $(\alpha 4)$

$$V'_{1/CM} = V_{1/CM} \quad \Big| \quad V'_{2/CM} = V_{2/CM}$$

Entonces; substituyendo $(\alpha 2)$ y $(\alpha 3)$

$$\frac{V_{CM}}{V'_{1/CM}} = \frac{V_{CM}}{V_{1/CM}} = \frac{\frac{m_1}{\cancel{m_1+m_2}}\cancel{V_1}}{\frac{m_2}{\cancel{m_1+m_2}}\cancel{V_1}} = \frac{m_1}{m_2}$$

Por lo tanto; de $(*)$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\cos\psi + \frac{m_1}{m_2}}}$$

Si $m_1 = m_2$

$$\rightarrow \tan\theta = \tan\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$\rightarrow \theta = \frac{\psi}{2}$$

Tarea

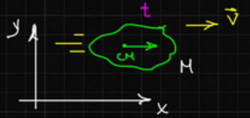
Considerando colisión elástica, no frontal y $\vec{V}_2 = \vec{0}$ (m_2 en reposo inicialmente). Demostrar

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} = -\frac{4 m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

donde $\frac{\Delta K}{K}$ la razón en que cambia la energía cinética de m_1.

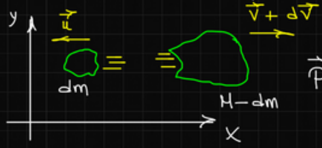
Sistema de masa variable

Sea un sistema de masa M que se mueve a una velocidad $\vec{V}$ respecto a laboratorio



$$\vec{P}_{sisT} = M\vec{V}$$

en el instante $t+dt$, un elemento diferencial de masa dm se separa



$$\vec{P}_{sist} = dm\,\vec{u} + (M-dm)(\vec{V}+d\vec{V})$$

entonces;

$$d\vec{P} = dm\,\vec{u} + (M-dm)(\vec{V}+d\vec{V}) - M\vec{V}$$

$$d\vec{P} = dm\,\vec{u} + M\,d\vec{V} - \vec{V}\,dm - \cancel{dm\,d\vec{V}}^{\,\vec{0}}$$

$$d\vec{P} = dm(\vec{u}-\vec{V}) + M\,d\vec{V}$$

Se sabe que;

$$\boxed{\vec{F}_{exT} = \frac{d\vec{P}}{dt}} \rightarrow \vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{V}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{u}-\vec{V})$$

donde $\frac{dm}{dt}$ es la rapidez con que la masa extraída aumenta

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{dm}{dt}$$

Siendo $\frac{dM}{dt}$ la rapidez con que el sistema pierde masa ; entonces

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dM}{dt}(\vec{v}-\vec{u})}$$

equivalentemente . . .

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}) - \vec{u}\frac{dM}{dt}$$

Se puede observar que si la masa del sistema no cambia (es decir que $\frac{dM}{dt}=0$), la expresión se reduce a la 2da ley de Newton convencional ($\vec{F}_{ext} = M\vec{a}$)

$$\vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_{el}\frac{dM}{dt}$$

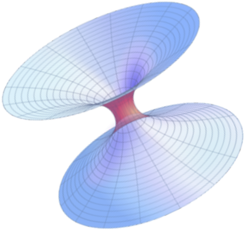
$\vec{v}_{rel}$: velocidad relativa de la masa saliente respecto al sistema inicial.

$$\Rightarrow \quad M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{reacción} \quad ; \quad \vec{F}_{reacción} = \vec{v}_{el}\frac{dM}{dt}$$

$\vec{F}_{reacción}$ es la fuerza de reacción ejercida sobre el sistema por la masa que sale de él.

GRACIAS

Y MUCHOS ÉXITOS



$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$