Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2025–I

Curso: Álgebra lineal 1-CM1B2

PRÁCTICA DIRIGIDA 2

---

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.
   (a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, f(x_1,x_2,x_3)=(2\cdot x_1-7\cdot x_3,0,3\cdot x_2+2\cdot x_3)$
   (b) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, f(z)=\bar{z}$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial)
   (c) $f:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R},\quad f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$

2. Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones
   (a) $t:K^{n\times m}\to K^{m\times n}, t(A)=A^t$
   (b) $\delta:C^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R}), \delta(f)=f'$
   (c) $\epsilon_\alpha:K[X]\to K, \epsilon_\alpha(f)=f(\alpha)$ donde $\alpha\in K$

3. (a) Probar que existe una única transformación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1)=(-5,3)$ y $f(-1,1)=(5,2)$. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$.
   (b) ¿Existirá una transformación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1)=(2,6), f(-1,1)=(2,1)$ y $f(2,7)=(5,3)$?
   (c) Sean $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

   $$\begin{array}{lll} f(1,0,1)=(1,2,1), & f(2,1,0)=(2,1,0), & f(-1,0,0)=(1,2,1)\\ g(1,1,1)=(1,1,0), & g(3,2,1)=(0,0,1), & g(2,2,-1)=(3,-1,2)\end{array}$$

   Determinar si $f=g$.

4. Consideramos la transformación lineal $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z,w)=(x-y-z+w,0)$. Determine la dimensión del núcleo y la imagen de f.

5. Sea $f:V\to W$ una transformación lineal y sean x y y en V tales que $f(x)=z$. Sabiendo que $f(y)=0_w$, demostrar que $f(x+y)=z$.

6. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(-x,-y)$. Demuestre que es una transformación lineal.

7. La función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ es lineal, y verifica $f(1,2)=(-1,0,2)$, $f(2,1)=(0,2,-1)$. Determinar las imágenes de los vectores $(3,3)$ y $(0,-1)$.

8. Consideremos un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, y dos transformaciones lineales $f:V\to K$ y $g:V\to K$. Sea $F:V\to K^2$ tal que $F(v)=(f(v),g(v))$. Demuestre que F es una transformación lineal.

9. Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada tranformación lineal del ejercicio 1. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}.

10. Sean $g : V \to V'$ y $f : V' \to V''$ transformaciones lineales. Probar:

    (a) $\mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$.

    (b) Si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Nu}(f \circ g)$.

    (c) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

    (d) Si $\mathrm{Im}(g) = V'$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$.

11. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $\mathrm{Im}(f) = S$ y $\mathrm{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos:

    (a) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/ x_1 + x_2 - x_3 + 2 \cdot x_4 = 0\}, T =< (1, 2, 1) >$

    (b) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/ x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}, T =< (1, -2, 1) >$

12. Sea $S \subset (\mathbb{R}^3)^*$ el subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* : \varphi(1, -1, 2) = 0\}$. Encontrar una base de S.

13. Dada la base B del K-espacio vectorial V, hallar su base dual en cada uno de los siguientes casos:

    (a) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, -1), (2, 0)\}$.

    (b) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

    (c) $V = \mathbb{R}_3[X]$, $B = \{-X + 2, X - 1, X^2 - 3X + 2, X^3 - 3X^2 + 2X\}$.

14. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n.

    (a) Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in V^* - \{0\}$. Demostrar que $\mathrm{Nu}(\varphi_1) = \mathrm{Nu}(\varphi_2) \iff \{\varphi_1, \varphi_2\}$ es linealmente dependiente.

    (b) Sean $\varphi_i (1 \leq i \leq r)$ formas lineales en V^* y sea $\varphi \in V^*$ tales que

    $$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \ldots = \varphi_r(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = 0$$

    Probar que $\varphi \in \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_r \rangle$.

    (c) Sean $\varphi_i (1 \leq i \leq n)$ formas lineales en V^*. Probar que

    $$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \text{ es base de } V^* \iff \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Nu}(\varphi_i) = 0$$

15. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2.x_1 + 3.x_2 - x_3$ y sea $E^* = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la canónica.

    (a) Calcular las coordenadas de φ en E^*.

    (b) Calcular las coordenadas de φ en la base $B^* = \{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_2, \delta_1\}$.

    (c) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2 \cdot x_1 + 3.x_2 - x_3 = 0\}$ y sea $B \subset \mathbb{R}^3$ la base $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, -1, 0)\}$. Encontrar una ecuación para S en la base B. (Sugerencia: notar que B^* es la base dual de B y no hacer ninguna cuenta.)

16. Sean $B = \{(1,1),(1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$ y $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ con $\varphi_1(x,y) = \frac{x+y}{2}$ y $\varphi_2(x,y) = \frac{x-y}{2}$, su base dual.

    (a) Hallar las coordenadas del vector $v = (7,9) \in \mathbb{R}^2$ en la base B.

    (b) Hallar las coordenadas de $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ dada por $\varphi(x,y) = 3x + 5y$ en la base B^*.

17. Sean B y B_1 las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $B_1 = \{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$. Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1,-3,2)$ respecto de B^*, calcular sus coordenadas respecto de B_1^*.

18. Si $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \langle(1,0,1)\rangle$ hallar una base de $\frac{V}{S}$.

19. Si $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \langle(-1,1,1,-1),(2,1,0,1)\rangle$ hallar una base de $\frac{V}{S}$.

20. Sea V un K-espacio vectorial y S un subespacio de V. Pruebe que el anulador S° de S es un subespacio de V^*.

21. Pruebe que si S_1 y S_2 subespacios de un espacio vectorial V, entonces $\frac{S_1}{S_1 \cap S_2} \approx \frac{S_1+S_2}{S_2}$.

22. Sea $f : K^n \to K^m$ una transformación lineal. Probar

    (a) Si f es inyectiva, entonces $n \leq m$.

    (b) Si f es sobreyectiva, entonces $n \geq m$.

    (c) Si f es un isomorfismo, entonces $n = m$.

23. En $\mathbb{R}^3$, hallar la base dual de $(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)$.

24. Sean $u = (a,b)$, $v = (c,d)$ tales que $ad - bc = 1$. Hallar la base dual de $\{u, v\}$ en $\mathbb{R}^2$.

Lima, 16 de abril del 2025.