FÍSICA I: BFIOIC

2022-1

Prof. Dr. Marco Cuyubamba

SEMANA 13

Oscilaciones

Se estudian sistemas cuya resultante se expresa como

$$\boxed{\vec{F} = -\lambda \vec{x}}$$

donde $\lambda > 0$ es una constante de proporcionalidad

OBS

- La fuerza $\vec{F}$ se denomina fuerza recuperadora o restauradora
- Es un movimiento unidimensional

$\Rightarrow$ Si $\vec{F} = \vec{0}$ entonces $\vec{x} = \vec{0}$; por tanto, $\vec{x}$ se mide respecto a la posición de equilibrio (PE)

Se observa

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}$$

m: masa uniforme

$$\vec{a} = -\frac{\lambda}{m}\vec{x}$$

$$\vec{a} + \frac{\lambda}{m}\vec{x} = \vec{0}$$

$$\boxed{\ddot{\vec{x}} + \frac{\lambda}{m}\vec{x} = \vec{0}}$$

$\vec{x} = x\hat{i}$; $\omega^2 = \frac{\lambda}{m}$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \quad \ldots \text{(I)}$$

Ecuación diferencial del MAS

Se propone como solución ; $x(t) = e^{rt}$; $r \in \mathbb{C}$

$\dot{x}(t) = r e^{rt}$

$\ddot{x}(t) = r^2 e^{rt}$

$$\Rightarrow r^2 e^{rt} + \omega^2 e^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(\underbrace{r^2 + \omega^2}_{0}) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \pm i\omega} \rightarrow \text{son 2 soluciones}$$

OBS

Sea la ecuación diferencial lineal de 2^{do} orden

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \quad \ldots (*)$$

Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de $(*)$; entonces

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

Nosotros tenemos dos soluciones,

$$x_1(t) = e^{+i\omega t}$$
$$x_2(t) = e^{-i\omega t}$$

$\Rightarrow$ La solución de (□) es:

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales

Luego;

$$x(t) = c_1\big(\cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)\big) + c_2\big(\cos(\omega t) - i\,\mathrm{sen}(\omega t)\big)$$
$$x(t) = (c_1 + c_2)\cos(\omega t) + i(c_1 - c_2)\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

Se definen nuevas variables:

$$\left.\begin{aligned} M &= c_1 + c_2 \\ N &= i(c_1 - c_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = M\cos(\omega t) + N\,\mathrm{sen}(\omega t)}$$

Solución general del MAS

OBS

Se acostumbra a realizar el siguiente cambio de variable

$$\begin{cases} M = A\,\mathrm{sen}\,\delta \\ N = A\cos\delta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x(t) = A\,\mathrm{sen}\,\delta\cos\omega t + A\cos\delta\,\mathrm{sen}\,\omega t$

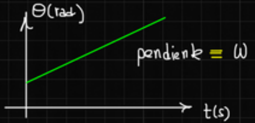
$$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \delta)} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$$

Solución del MAS; donde en principio, A y δ son constantes arbitrarias establecidas en el instante inicial

FASE

Se denomina fase al argumento de la función trigonométrica

$$\theta(t) = \omega t + \delta$$



ω: frecuencia angular
$\theta(0) = \delta$: fase inicial

$$X(t) = (C_1 + C_2)\cos(\omega t) + i(C_1 - C_2)\,\text{sen}(\omega t)$$

Se definen nuevas variables:

$$\left.\begin{array}{l} M = C_1 + C_2 \\ N = i(C_1 - C_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{X(t) = M\cos(\omega t) + N\,\text{sen}(\omega t)}$$

Solución general del MAS

donde

A: amplitud

Periodo

Se denomina **periodo** al intervalo de tiempo mínimo que debe transcurrir para que se adquieran las mismas condiciones iniciales.

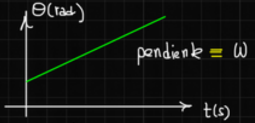
$$X(t+T) = X(t)$$

constantes arbitrarias establecidas en el instante inicial

FASE

Se denomina fase al argumento de la función trigonométrica

$$\theta(t) = \omega t + \delta$$



ω: frecuencia angular
$\theta(0) = \delta$: fase inicial

$$A\,\text{sen}(\omega(t+T)+\delta) - A\,\text{sen}(\omega t+\delta) = 0$$

$$A\left(\text{sen}(\omega(t+T)+\delta) - \text{sen}(\omega t+\delta)\right) = 0$$

$$2A\cos\left(\omega t+\delta+\frac{\omega T}{2}\right)\underbrace{\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2n\pi}{\omega} = \left\{ \frac{2\pi}{\omega};\ \frac{4\pi}{\omega};\ \ldots \right\}$$

entonces;

$$\boxed{P = \frac{2\pi}{\omega}}\ (s)$$ periodo de oscilación

Además; $x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2\,\text{sen}(\omega t + \delta)$$

OBs

La ecuación diferencial, se puede expresar:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\frac{dV}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$$\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$$\int_0^V V\,dV = -\omega^2\int_A^x x\,dx$$

$$\frac{V^2}{\cancel{2}} = \frac{-\omega^2}{\cancel{2}}(x^2 - A^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$$

indica 2 posibles orientaciones

(+)

(-)

Sistema masa-resorte

* Horizontal

Notamos que

$$\vec{F}_R = -k\,\vec{x}$$

k: constante de rigidez del resorte.

$$\Rightarrow x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$$

* Vertical

Del equilibrio

$$ky_o = mg$$

$$mg - k(y + y_o) = m\ddot{y}$$

$$(mg - ky_o) - ky = m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y + \overset{0}{\cancel{\left(\frac{k}{m}y_o - g\right)}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} + \omega^2 y = 0} \longrightarrow \text{Es un MAS}$$

OBS

Con respecto a la energía:

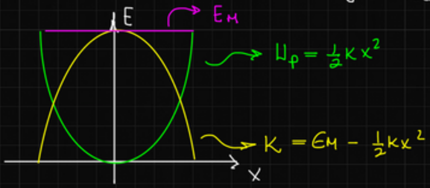
$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

$$\frac{dE}{dt} = m \dot{x} \ddot{x} + K x \dot{x}$$

$$= m \dot{x} \underbrace{\left(\ddot{x} + \frac{K}{m} x \right)}_{0} \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = 0}$$

$\therefore$ Se conserva la energía mecánica



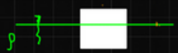
Prob

Determinar

a) Periodo de oscilación

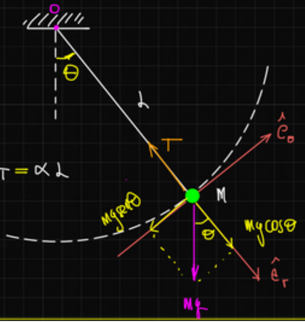
b) Ecuación diferencial de movimiento

De un bloque de masa M que está sumergido un 70% en un líquido de densidad ρ



↳ cubo de lado L

Péndulo simple



$$a_T = \alpha L$$

En el eje tangencial

$$-mg \operatorname{sen}\theta \, \hat{e}_\theta = m \vec{a}_T$$

$$-mg \operatorname{sen}\theta \, \hat{e}_\theta = m L \alpha \, \hat{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \left(\alpha + \frac{g}{L} \operatorname{sen}\theta \right) \hat{e}_\theta = \vec{0}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \operatorname{sen}\theta = 0}$$

obteniendo la ec. diferencial de movimiento del péndulo. Esta ecuación **NO** representa un MAS.

Hagamos la siguiente aproximación; se sabe

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \equiv \operatorname{sen} x \approx x \quad ; \text{ para } x \text{ pequeño}$$

Entonces; bajo esta aproximación de pequeñas oscilaciones, se tiene que: $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, luego

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta \cong 0}$$

ec. diferencial del péndulo simple

donde, $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ es la frecuencia angular del péndulo que es constante. también se cumple

$$\boxed{\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_{máx} \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \\ \Omega(t) &= \omega \theta_{máx} \cos(\omega t + \delta) \\ \alpha(t) &= -\omega^2 \theta_{máx} \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \end{aligned}}$$

; OBS

Tener en cuenta que estas ecuaciones son válidas para oscilaciones de amplitud pequeña

Se sabe también:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

; independiente de la masa del péndulo

; El periodo depende de la aceleración de la gravedad $\vec{g}$, de manera local.

$\forall p \in V$; donde V es una región pequeña del espacio

$\vec{g}_p = cte$

Vamos a definir como onda a las perturbaciones que se propagan en un medio

Esta perturbación se mide a partir de cantidades físicas

Cuando esta perturbación se propaga en un medio, a ello se denomina onda.

→ medio material (aire, sólido, fluido, ...)

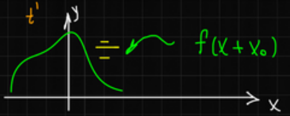
→ medio no material (vacío)

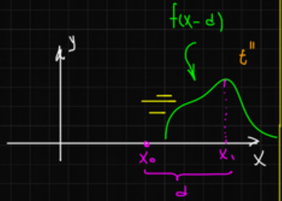
OBS

Toda onda que se propague en un medio material se denomina onda mecánica

Función de onda

Vamos a estudiar la propagación de una onda por medio de un modelo matemático





entonces, debido que hasta la fecha, no se ha encontrado ondas aceleradas, se propone en el modelo que

$$\Delta x = v\,t$$

velocidad de propagación de la onda

→ Toda onda tendrá como función de onda, la siguiente forma

$$f(x \pm vt)$$

componente espacial — componente temporal

OBS

Nos vamos a centrar en las funciones del tipo armónicas {sen, cos, ...}

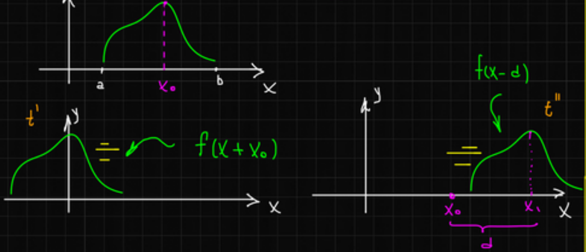
$$\boxed{f_{(x,t)} = A \operatorname{sen}[k(x \mp vt) + \delta]}$$

→ función de onda armónica

A : amplitud (m)

k : número de onda (m^{-1}) ; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

δ : ángulo de desfase



OBS

Nos vamos a centrar en las funciones del tipo armónicas { sen, cos, }

$$\boxed{f_{(x,t)} = A \operatorname{sen}[K(x \mp vt) + \delta]} \rightarrow \text{función de onda armónica}$$

A : amplitud (m)

K : número de onda (m^{-1}) ; $K = \frac{2\pi}{\lambda}$

δ : ángulo de desfase

$$T = \frac{1}{f}$$

OBS

La velocidad de propagación depende de las características del medio.

tenemos que;

$$f(x,t) = A \operatorname{sen}[Kx \mp Kv\,t + \delta] \;; \quad K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$f(x;t) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}x \mp \frac{2\pi}{T}t + \delta\right] \qquad Kv = \omega = 2\pi f$$

− : propagación +x

+ : propagación −x

OBS

Cuando las partículas del medio realizan una oscilación completa, la onda se propaga una longitud de onda: $\lambda = vT$

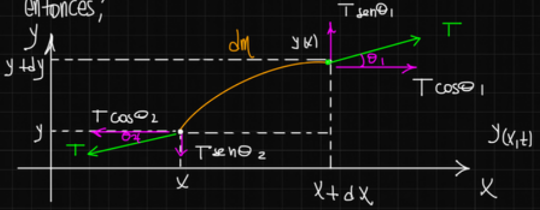
$$\rightarrow \boxed{v = \lambda f}$$

OBS

Veamos el caso particular de una onda mecánica en una cuerda.

Vamos a estudiar este movimiento de manera diferencial

entonces;



En la vertical, se tiene que:

$$T\,\text{sen}\theta_1 - T\,\text{sen}\theta_2 = dm\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

OBS

Como estamos tomando un elemento diferencial, entonces, los ángulos θ_1 y θ_2 son pequeños

$$\text{sen}\theta_1 \approx \tan\theta_1$$
$$\text{sen}\theta_2 \approx \tan\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad T\underbrace{\tan\theta_1} - T\tan\theta_2 = dm\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\underbrace{T\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right]} = dm\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\cancel{dx} = \mu\,\cancel{dx}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad ;$$

donde μ es la densidad lineal

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

ecuación de onda

donde v es la velocidad de propagación de la onda

Para el caso de la cuerda

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

TAREA

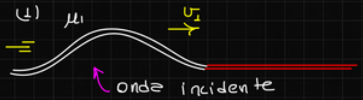
Verificar que: $y(x,t) = A\,\text{sen}(kx \mp kvt + \delta)$ satisface la ecuación de onda

OBS

Las ondas mecánicas realizan ciertos fenómenos denominados fenómenos ondulatorios tales como reflexión, transmisión, polarización, interferencia, difracción

Reflexión y transmisión

Este tipo de fenómenos ocurren cuando hay una interfaz



La onda incidente se propaga por el medio (1)

Tenemos 2 posibles casos:

1 $\mu_1 < \mu_2$:

La onda reflejada se invierte

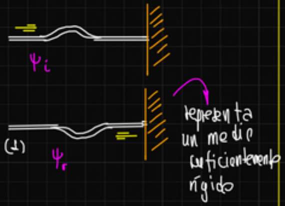
2 $\mu_1 > \mu_2$

la onda reflejada no se invierte

OBS

* Si la cuerda esta atada a una pared

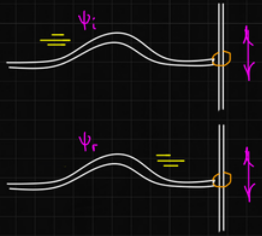
⇒ La onda transmitida se anula rápidamente



OBS

* Si la cuerda está atada a un punto libre

⇒ La onda transmitida NO se invierte



Superposición e interferencia

Las ondas pueden estar en un mismo punto del espacio

Debido a ello, la onda ψ_1 y ψ_2 se combinarán en el punto del espacio donde coexistan formando una nueva onda ψ

$$\boxed{\psi = \psi_1 + \psi_2}$$

donde

ψ_1 y ψ_2 representa a las funciones de onda, de estas ondas

Sean dos ondas armónicas cuyas funciones de onda.

$$\psi_1(x,t) = \psi_{01}\,\text{sen}(k_1 x - \omega_1 t + \delta_1)$$

$$\psi_2(x,t) = \psi_{02}\,\text{sen}(k_2 x - \omega_2 t + \delta_2)$$

en un mismo medio, la onda $\psi(x,t)$ que verifica el principio de superposición

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$$

CASO 1:

Si $\begin{cases} k_1 = k_2 = k \\ \omega_1 = \omega_2 = \omega \\ \psi_{01} = \psi_{02} = \psi_0 \\ \delta_1 \neq \delta_2 \end{cases}$

$$\psi_{(x,t)} = 2\psi_0 \cos\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right) \operatorname{sen}\left[kx - \omega t - \left(\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\right]$$

a) Si ψ_1 y ψ_2 están en fase

$$\frac{\delta_1-\delta_2}{2} = n\pi \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

entonces, en este caso

$$\psi_{(x,t)} = \pm 2\psi_0 \operatorname{sen}\left[kx - \omega t - \left(\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\right]$$

Se denomina interferencia constructiva

b) Si ψ_1 y ψ_2 verifican que

$$\frac{\delta_1-\delta_2}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad n: 0, 1, 2, \dots$$

entonces; $\cos\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right) = 0$

entonces; $\psi_{(x,t)} = 0$ Se denomina interferencia destructiva

nodos : ceros de la superposición

CASO 2

Si
$$k_1 \neq k_2$$
$$\omega_1 \neq \omega_2$$
$$\psi_{01} = \psi_{02} = \psi_0$$
$$\delta_1 = \delta_2 = \delta$$

Si hacemos superposición

$$\psi_{(x,t)} = 2\psi_0 \cos\frac{1}{2}\left[(k_1-k_2)x - (\omega_1-\omega_2)t\right] \operatorname{sen}\frac{1}{2}\left[(k_1+k_2)x - (\omega_1+\omega_2)t + 2\delta\right]$$

Se denomina factor de modulación

OBS

Este factor de modulación (amplitud) varía en el tiempo y en el espacio,

La amplitud máxima $\cos\frac{1}{2}\left[(k_1-k_2)x - (\omega_1-\omega_2)t\right] = \pm 1$

b) Si ψ_1 y ψ_2 verifican que

$$\frac{\delta_1-\delta_2}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad n: 0, 1, 2, \ldots$$

entonces; $\cos\left(\frac{\delta_1-\delta_2}{2}\right) = 0$

entonces; $\psi(x,t) = 0$ → Se denomina interferencia destructiva

$- (\omega_1+\omega_2)t + 2\delta \,]$

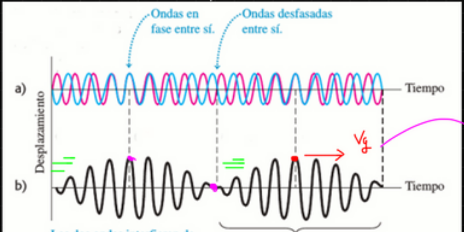
Se denomina factor de modulación

OBS

Este factor de modulación (amplitud) varía en el tiempo y en el espacio,

La amplitud máxima $\cos\frac{1}{2}\left[(k_1-k_2)x - (\omega_1-\omega_2)t\right] = \pm 1$

Si fijamos la posición y analizamos el cambio en el tiempo



Las dos ondas interfieren de manera constructiva cuando están en fase, y de manera destructiva cuando están medio ciclo fuera de fase. La intensidad de la onda resultante sube y baja, formando pulsos.

pulsos en propagación

El máximo del pulso se desplaza con la velocidad de grupo

$$\boxed{V_g = \frac{d\omega}{dK}}$$

Como $\omega = K v$; v : velocidad de fase

entences;

$$V_g = \frac{d}{dK}(Kv) = v + K\frac{dv}{dK}$$

Si la velocidad de fase es independiente de k; entences

$$V_g = v$$

Observaciones Importantes

En el problema del cohete

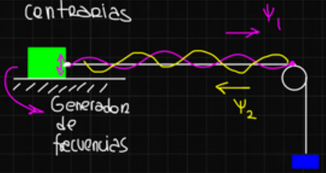
$*$ M  $\rightarrow$ $M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \underbrace{\vec{F}_{reacción}}_{\vec{V}_{el}\cdot\frac{dM}{dt}}$ $\rightarrow$ fuerza empuje

$*$ Peso aparente en fluidos

$W_a = mg - E$

Ondas estacionarias

Sean ondas que se propagan en direcciones contrarias



Siendo

$\Psi_1(x,t) = \Psi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$

$\Psi_2(x,t) = \Psi_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t)$

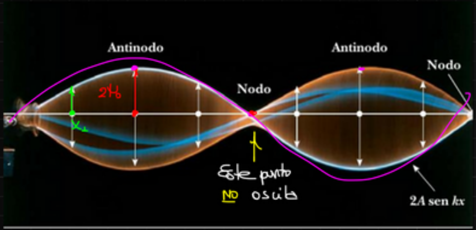
De la superposición

$\Psi(x,t) = \Psi_1(x,t) + \Psi_2(x,t)$

$$\boxed{\Psi(x,t) = \underbrace{2\Psi_0 \operatorname{sen}(kx)}_{\text{Amplitud }(x)}\ \underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{Oscilación }(t)}}$$

$\rightarrow$ OBS
En una onda estacionaria, la parte espac[…] y temporal están disociad[…]

Entonces, cada punto de la cuerda oscila con una amplitud $A(x) = 2\Psi_0 \operatorname{sen}(kx)$



a) Si: $kx = n\pi$; $n = 0, 1, \dots$

$A(x) = 0$ (nodo)

$\hookrightarrow$ Interferencia destructiva

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}x = n\cancel{\pi} \rightarrow \boxed{x_{nodos} = n\frac{\lambda}{2}}$$

b) Si: $kx = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, 1, \ldots$

$$A(x) = \pm 2\psi_0 \quad \text{(antinodos)}$$

$\hookrightarrow$ Interferencia constructiva

$$\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow \boxed{x_{anti} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}}$$

<u>Obs</u>

En la cuerda se establecen los llamados modos normales o modos de vibración, los cuales son patrones naturales de vibración. Cada modo tiene una frecuencia característica denominada frecuencia de resonancia

a) f_1

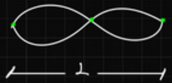
- modo fundamental
- Primer modo normal
- Primer armónico

$L = \frac{\lambda}{2}$

$\boxed{\lambda = 2L}$

$\boxed{f_1 = \frac{v}{2L}}$

b)

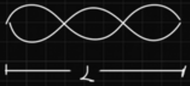


- Segundo armónico
- Primer sobretono

$\boxed{\lambda = L}$

$\boxed{f_2 = \frac{v}{L}}$

c)



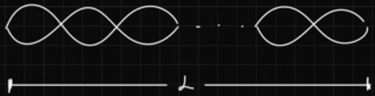
- Tercer armónico
- Segundo sobretono

$\boxed{\lambda = \frac{2}{3}L}$

$\boxed{f_3 = \frac{3v}{2L}}$

$\vdots$

En general, podemos obtener n-armónicos en una cuerda



donde

$\boxed{\lambda = \frac{2L}{n}}$

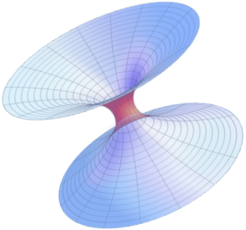
$\boxed{f_n = \frac{n}{2L}v}$

tal que, en una cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

GRACIAS

Y MUCHOS ÉXITOS



$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$