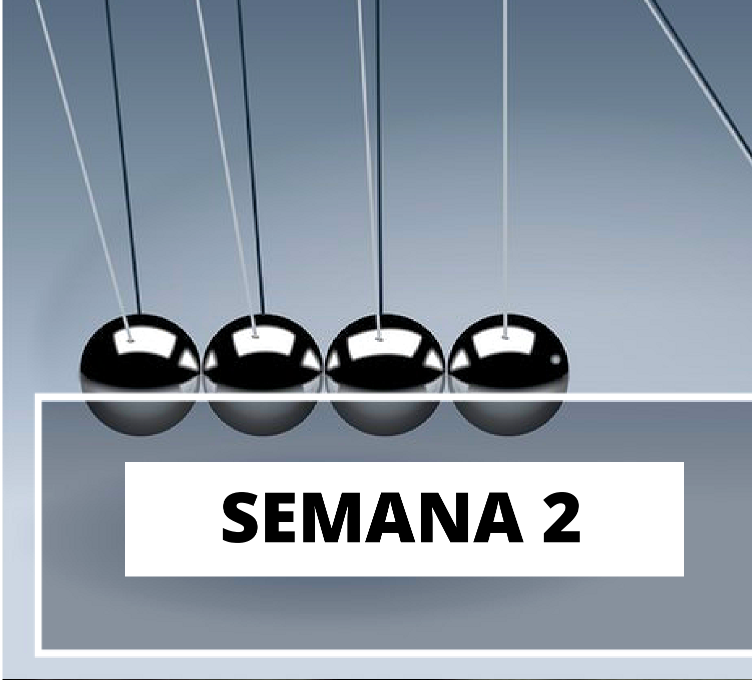
FÍSICA I: BFIOIC

2022-1

Prof. Dr. Marco Cuyubamba



SEMANA 2

Sistemas de referencia (S.R)

Son cuerpos

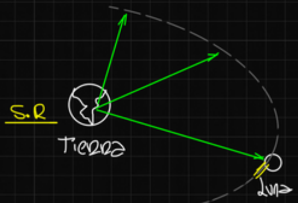
OBS

- Un punto NO es S.R

NO es S.R

OBS

Todo cuerpo es estudiado por otro cuerpo



OBS

Los SR si pueden estar en movimiento

Sistema de coordenadas (S.C)

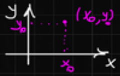
Son herramientas matemáticas para estudiar cantidades físicas

OBS

La medida NO debe depender del S.C.

Ejm:

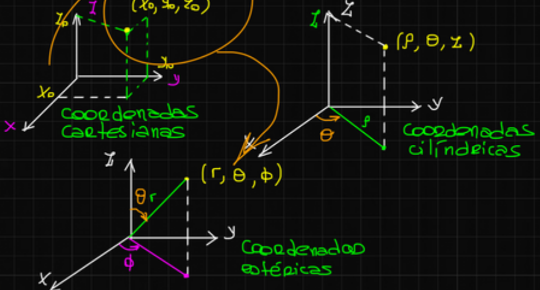
- Sistema cartesiano



Coordenadas cartesianas

Coordenadas polares

Ejm: En 3D:



Se sabe que tenemos cantidades físicas

* Escalares → Se representa mediante un número

OBS

Sea $f(x,y,z)$ está definida en una región $R \subset \mathbb{R}^3$ tal que

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

entonces f se denomina campo escalar

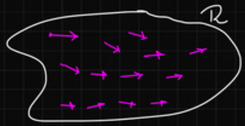
Ejm:

El campo de temperatura $T(x,y,z)$ es un campo escalar

* Vectores → Se representan mediante una terna

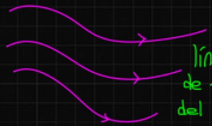
OBS

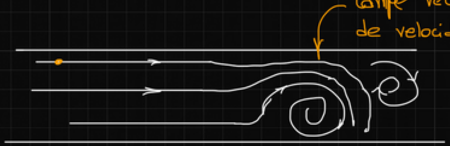
Sea $\vec{A}(x,y,z)$ que está definida sobre una región $R \subset \mathbb{R}^3$ tal que



$\vec{A}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

entonces $\vec{A}$ se denomina campo vectorial





Todo vector debe satisfacer una ley de transformación

$$\boxed{A'_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j}$$

* Tensores → Se representan mediante muchas cantidades

Cada punto es representable por un tensor

$T(\bar{x}, \bar{y})$ es caracterizado por sus elementos T_{ij}

OBS

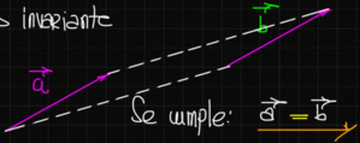
Todo tensor debe satisfazer una ley de transformación

$$\boxed{T'_{ij} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_i'}{\partial x_l} \frac{\partial x_j'}{\partial x_k} T_{lk}}$$

→ derivada parcial

OBS

Todo vector es invariante por traslación

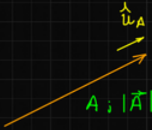


Se cumple: $\vec{a} = \vec{b}$

OBS

Los vectores se operan de manera distinta a los números reales

Todo vector: $\boxed{\vec{A} = |\vec{A}|\, \hat{u}_A}$



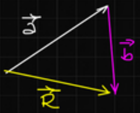
$\vec{A}$: vector

A ; $|\vec{A}|$: módulo de $\vec{A}$

$\hat{u}_A$: vector unitario de $\vec{A}$

$$\boxed{\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}}$$ Vector unitario

Suma de vectores:

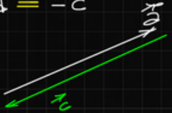


$$\boxed{\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}}$$

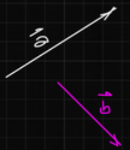
OBS

Se define $\vec{c}$ como opuesto de $\vec{a}$ tal que

$\vec{a} = -\vec{c}$



→ Para restar vectores, se aplica la suma al opuesto de uno de ellos

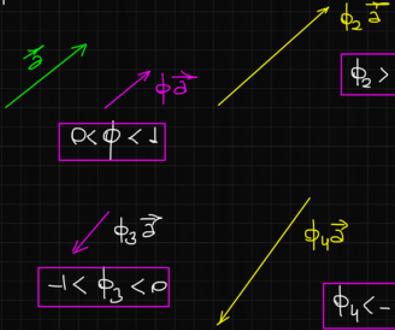


$\vec{D} = \vec{a} + (-\vec{b})$

$\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$

Multiplicación por un escalar

Sea ϕ una cantidad escalar tal que $\phi\vec{a}$ es un vector



$\boxed{0<\phi<1}$

$\boxed{\phi_2>1}$

$\boxed{-1<\phi_3<0}$

$\boxed{\phi_4<-1}$

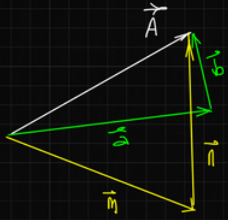
Propiedades

Sea ϕ, λ cantidades escalares y $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ vectoriales

- $\phi(\vec{a}+\vec{b}) = \phi\vec{a}+\phi\vec{b}$
- $\frac{1}{\phi}\vec{a}$; existe siempre que $\phi \neq 0$
- $m\vec{a}+n\vec{a} = (m+n)\vec{a}$

Componente de un vector

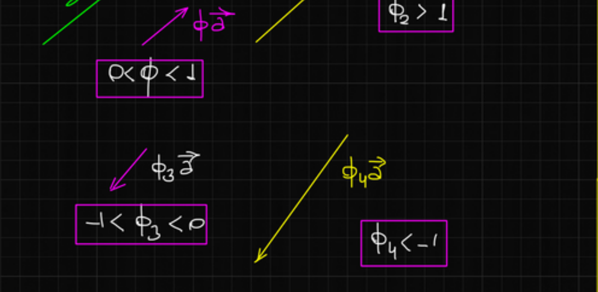
Sea un vector $\vec{A}$; donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son componentes del vector $\vec{A}$

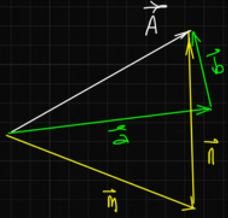


$\vec{a}$ y $\vec{b}$

- $\vec{m}$ y $\vec{n}$ son componentes de $\vec{A}$

$\Rightarrow$ Existen infinitas maneras de descomponer un vector





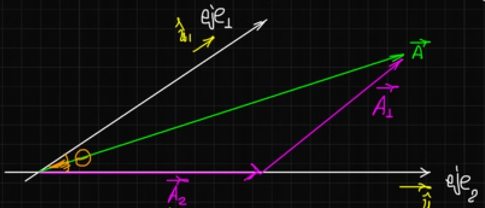
componentes del vector $\vec A$

$\vec a$ y $\vec b$

· $\vec m$ y $\vec n$ son componentes de $\vec A$

$\Rightarrow$ Existen infinitas maneras de descomponer un vector

Caracterizamos los ejes 1 y 2 tal que



Siendo $\vec A = \vec A_1 + \vec A_2$; donde $\vec A_1$ y $\vec A_2$ son componentes de $\vec A$ respecto a los ejes 1 y 2 respectivamente

OBS:

$\vec A_1 = |\vec A_1|\,\hat u_1 \rightarrow \vec A = |\vec A_1|\,\hat u_1 + |\vec A_2|\,\hat u_2$

$\vec A_2 = |\vec A_2|\,\hat u_2$

Siendo $\hat u_1$ y $\hat u_2$ unitarios.

OBS

Si $\theta = 90$; entonces tenemos un sistema rectangular.

Entonces;

$\vec A = \vec A_x + \vec A_y$; donde

$\vec A_x = |\vec A_x|\,\hat i = |\vec A|\cos\alpha\,\hat i$

$\vec A_y = |\vec A_y|\,\hat j = |\vec A|\,\text{sen}\,\alpha\,\hat j$

entonces; $\vec A = |\vec A|\cos\alpha\,\hat i + |\vec A|\,\text{sen}\,\alpha\,\hat j$

$$\vec A = |\vec A|\underbrace{\left(\cos\alpha\,\hat i + \text{sen}\,\alpha\,\hat j\right)}_{\hat u_A}$$

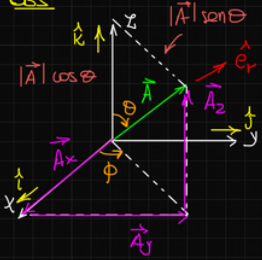
luego

$$\boxed{\hat u_A = \cos\alpha\,\hat i + \text{sen}\,\alpha\,\hat j}$$

Se observa que $|\hat u_A| = \sqrt{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}$

$|\hat u_A| = 1$

OBS



Entonces;

$\vec A = |\vec A_x|\,\hat i + |\vec A_y|\,\hat j + |\vec A_z|$

Se observa que

$|\vec A_z| = |\vec A|\cos\theta$

$|\vec A_x| = |\vec A|\,\text{sen}\,\theta\cos\phi$

$|\vec A_y| = |\vec A|\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi$

entonces;

$$\vec A = |\vec A|\underbrace{\left(\text{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat i + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\hat j + \cos\theta\,\hat k\right)}_{\hat e_r}$$

Siendo

$$\boxed{\hat e_r = \text{sen}\,\theta\cos\phi\,\hat i + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\,\hat j + \cos\theta\,\hat k}$$

Vector unitario radial

Además;

$$|\hat e_r| = \sqrt{\underbrace{(\text{sen}\,\theta\cos\phi)^2 + (\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi)^2}_{\text{sen}^2\theta} + \cos^2\theta}$$

$|\hat e_r| = 1$

Productos entre vectores

Tenemos 2 tipos de producto entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = C \rightarrow$ cantidad escalar

$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{D} \rightarrow$ cantidad vectorial

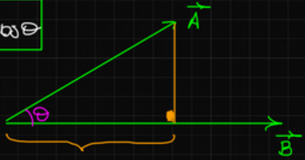
Producto escalar

Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tal que se le asocia una cantidad escalar a $\vec{A}\cdot\vec{B}$

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta}$$

Es decir

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \text{Proy}_{B}\vec{A}\cdot|\vec{B}|$$



$$\text{Proy}_{B}\vec{A} = |\vec{A}|\cos\theta$$

Propiedades

Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores y $k \in \mathbb{R}$.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (commutan)

b) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (distributivo)

c) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

d) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos 0$
$= |\vec{a}|^2 \geq 0$

e) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; entonces $\vec{a} \perp \vec{b}$

Obs

Expresando en coordenadas cartesianas, sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tal que

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

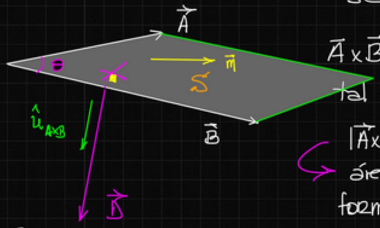
$\rightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x(\hat{i}\cdot\hat{i}) + a_xb_y\cancel{(\hat{i}\cdot\hat{j})} + \cdots$$
$$a_yb_y(\hat{j}\cdot\hat{j})\cdots + a_zb_z(\hat{k}\cdot\hat{k})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Producto vectorial

Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tal que se le asocia al producto binario $\vec{A}\times\vec{B}$, un vector $\vec{D}$



Se define

$$\vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}\times\vec{B}|\,\hat{u}_{A\times B}$$

tal que

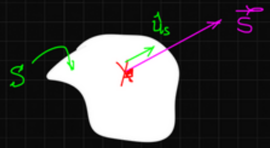
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\,\text{sen}\,\theta$$

área del paralelogramo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Siendo $\vec{D} = \vec{A}\times\vec{B}$ es perpendicular al plano formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$

OBS

Se puede definir el vector área; de la siguiente manera

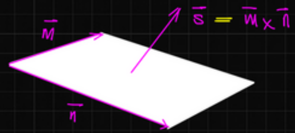


$\vec{S}$ es un vector perpendicular a la superficie cuyo módulo corresponde al área de la superficie

$$\vec{S} = S\,\hat{u}_s$$

OBS

Si es un cuadrilátero



Propiedades

Sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, tal que

a) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ (no conmuta)

b) Siendo $\vec{c}$ coplanar a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se cumple

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}$$

c) Si $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ y $\vec{a}\neq 0$ y $\vec{b}\neq 0$; entonces $\vec{a}$ y $\vec{b}$ colineales

d) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}$

e) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

f) Sea $\hat{n} = \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$, vector unitario normal al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

OBS

En representación cartesiana, se tiene

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

$$\rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\hat{i} + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}(-\hat{j}) + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\hat{k}$$

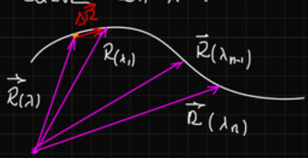
$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\hat{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}$$

OBS

$\hat{i}\times\hat{i} = 0$	$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$	$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$
$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$	$\hat{j}\times\hat{j} = 0$	$\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$
$\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$	$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$	$\hat{k}\times\hat{k} = 0$

Derivada de un vector

Sea un vector $\vec{R}$ parametrizado sobre una curva con λ.



$$\Delta\vec{R} = \vec{R}(\lambda_1) - \vec{R}(\lambda)$$
$$\lambda_1 = \lambda + \Delta\lambda$$
$$\rightarrow \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta\lambda} = \frac{\vec{R}(\lambda+\Delta\lambda) - \vec{R}(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

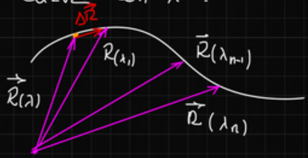
En el límite $\Delta\lambda \rightarrow 0$, se tiene

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\hat{i} + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}(-\hat{j}) + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\bar{a}\times\bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

Sea un vector $\vec{R}$ parametrizado sobre una curva con λ.



$$\Delta\vec{R} = \vec{R}(\lambda_1) - \vec{R}(\lambda)$$

$$\lambda_1 = \lambda + \Delta\lambda$$

$$\rightarrow \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta\lambda} = \frac{\vec{R}(\lambda+\Delta\lambda) - \vec{R}(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

En el límite $\Delta\lambda \to 0$, se tiene

$$\boxed{\frac{d\vec{R}}{d\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\vec{R}(\lambda+\Delta\lambda) - \vec{R}(\lambda)}{\Delta\lambda}}$$

→ Este vector depende de λ, entonces este sería la derivada respecto a un escalar λ.

OBS

Si $\frac{d\vec{R}}{d\lambda}$ existe en un dominio de λ; entonces, podemos hallar $\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2}$

representando $\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2}$ qué tan rápido cambia la rapidez de cambio de $\vec{R}$ respecto a λ

$$\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\vec{R}}{d\lambda}\right)$$

* Si un vector $\vec{R}(\lambda) = R_x(\lambda)\hat{i} + R_y(\lambda)\hat{j} + R_z(\lambda)\hat{k}$ entonces,

$$\frac{d\vec{R}}{d\lambda} = \frac{dR_x}{d\lambda}\hat{i} + \frac{dR_y}{d\lambda}\hat{j} + \frac{dR_z}{d\lambda}\hat{k}$$

Propiedades

Sea los vectores $\vec{a}(\lambda)$ y $\vec{b}(\lambda)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$; se tiene

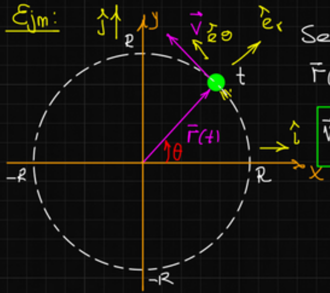
a) $\dfrac{d}{d\lambda}(k\,\vec{a}) = k\,\dfrac{d\vec{a}}{d\lambda}$

b) $\dfrac{d}{d\lambda}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \dfrac{d\vec{a}}{d\lambda}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dfrac{d\vec{b}}{d\lambda}$

c) $\dfrac{d}{d\lambda}(f(\lambda)\,\vec{a}(\lambda)) = \dfrac{df}{d\lambda}\,\vec{a} + f(\lambda)\,\dfrac{d\vec{a}}{d\lambda}$

d) $\dfrac{d}{d\lambda}(\vec{a}\times\vec{b}) = \dfrac{d\vec{a}}{d\lambda}\times\vec{b} + \vec{a}\times\dfrac{d\vec{b}}{d\lambda}$

Ejm:



Se observa que

$\vec{r}(t) = R\cos\theta_{(t)}\,\hat{i} + R\,\mathrm{sen}\,\theta_{(t)}\,\hat{j}$

$\boxed{\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}}$: velocidad

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos\theta)\,\hat{i} + (R\cos\theta)\cancelto{0}{\frac{d\hat{i}}{dt}}$$

$$+ \frac{d}{dt}(R\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\hat{j} + (R\,\mathrm{sen}\,\theta)\cancelto{0}{\frac{d\hat{j}}{dt}}$$

$$\vec{v} = R\frac{d}{dt}(\cos\theta(t))\,\hat{i} + R\frac{d}{dt}(\mathrm{sen}\,\theta(t))\,\hat{j}$$

$$\vec{v} = -R\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{w}\,\hat{i} + R\cos\theta\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{w}\,\hat{j}$$

$$\vec{v} = -Rw\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{i} + Rw\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{v} = Rw\,(\underbrace{-\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}}_{\hat{e}_\theta})$$

Entonces;

$\hat{e}_\theta = -\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$

$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\hat{j}$

$\hat{e}_r\cdot\hat{e}_\theta = 0$

↳ vectores perpendiculares

$$\rightarrow \frac{d\hat{e}_r}{dt} = -\operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dt}\hat{i} + \cos\theta \frac{d\theta}{dt}\hat{j}$$

$$\boxed{\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta}$$

$$\rightarrow \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{i} - \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}\,\hat{j}$$

$$\boxed{\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r}$$

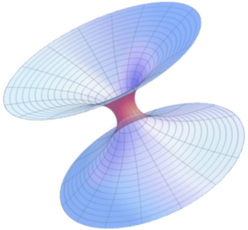
En coordenadas polares;

$$\vec{r}(t) = R\,\hat{e}_r$$

$$\vec{V}(t) = R\omega\,\hat{e}_\theta$$

GRACIAS

Y MUCHOS ÉXITOS



$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$