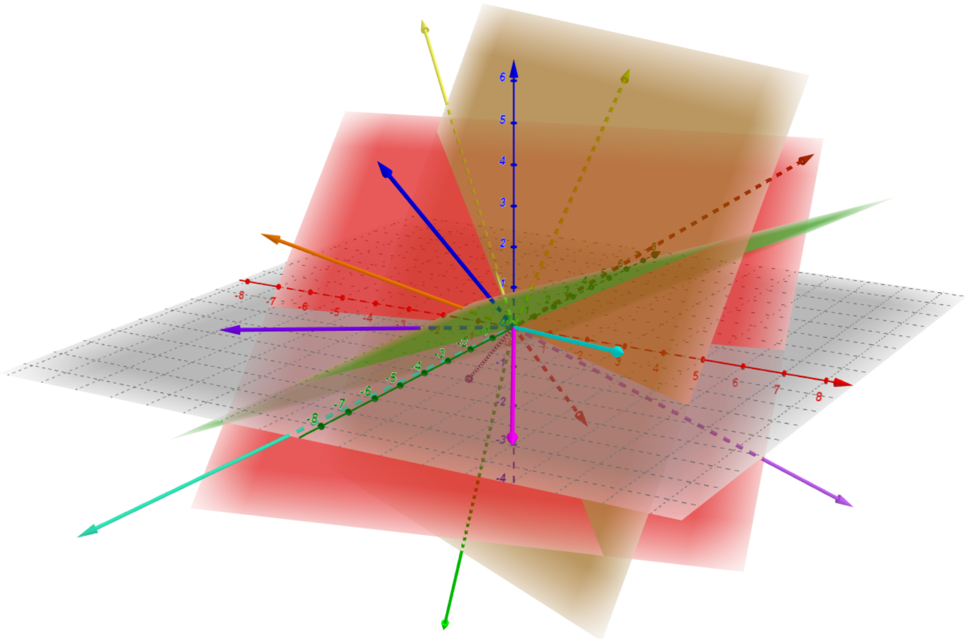
Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias (EPM)

Apuntes de Álgebra Lineal I



¿Listo para no trikear?

Autor: D. Caytuiro

2021

Índice general

Capitulo N° 1

Unidad 0

$$\mathbb{K}$$

1.1. Preliminares

1.1.1. Cuerpo

Definición 1.1.1. *Sea $\mathbb{K}$ un conjunto no vacío, donde se definen las dos operaciones binarias siguientes:*

$$\begin{array}{ccccccc} + & : & \mathbb{K} & \times & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \cdot & : & \mathbb{K} & \times & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \end{array}$$

Decimos que $(\ \mathbb{K},\ +,\ \cdot\ )$ es un cuerpo, si cumple las siguientes propiedades:

$$\left.\begin{array}{l} i)\ \lambda + \eta = \eta + \lambda;\ \forall\ \lambda,\ \eta \in \mathbb{K}.\ \textbf{(Conmutatividad)} \\ ii)\ \lambda + (\eta + \mu) = (\lambda + \eta) + \mu;\ \forall\ \lambda,\ \eta,\ \mu \in \mathbb{K}.\ \textbf{(Asociatividad)} \\ iii)\ \exists\ 0 \in \mathbb{K} \ /\ \lambda + 0 = 0 + \lambda = \lambda,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}.\ \textbf{(Neutro aditivo)} \\ iv)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \exists\ \eta \in \mathbb{K} \ /\ \lambda + \eta = 0.\ \textbf{(Inverso aditivo)} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \mathbb{K} \text{ es un grupo} \\ \text{abeliano} \\ \text{aditivo} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} v)\ \lambda \cdot \eta = \eta \cdot \lambda;\ \forall\ \eta,\ \lambda \in \mathbb{K}.\ \textbf{(Conmutatividad)} \\ vi)\ \lambda\,(\eta \cdot \mu) = (\lambda \cdot \eta)\,\mu;\ \forall\ \lambda,\ \eta,\ \mu \in \mathbb{K}.\ \textbf{(Asociatividad)} \\ vii)\ \exists\ 1 \in \mathbb{K} \ /\ \lambda \cdot 1 = 1 \cdot \lambda = \lambda;\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}.\ \textbf{(Neutro multiplicativo)} \\ viii)\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\},\ \exists\ \eta \in \mathbb{K} \ /\ \lambda \cdot \eta = 1.\ \textbf{(Inverso multiplicativo)} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \mathbb{K} \text{ es un grupo} \\ \text{abeliano} \\ \text{multiplicativo} \end{array}$$

$ix)\ \lambda \cdot (\eta + \mu) = \lambda \cdot \eta + \lambda \cdot \mu;\ \forall\ \lambda,\ \eta,\ \mu\ \in \mathbb{K}.$ **(Distributiva)**

Ejemplo 1.1.1. *Tenemos los siguientes ejemplos de cuerpos:*

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ *son cuerpos*
- $\mathbb{Z}$ *no es cuerpo, pero es un anillo*
- *Los conjuntos* $\mathbb{Z}_n = \{\mathring{n}, \mathring{n} + 1, \ldots, \mathring{n} + (n-1)\}$. *Por ejemplo:*

$$\lceil \mathbb{Z}_3 = \{\mathring{3}, \mathring{3} + 1, \mathring{3} + 2\} \rfloor$$

¿Serán cuerpos?. Para responder esto veamos lo siguiente.

1.1.2. Clases de Equivalencia

Definición 1.1.2. *Una función $\sim$ es una relación, si su conjunto de partida es igual a su conjunto de llegada. Es decir:*

$$\sim \ : \ A \ \longrightarrow \ A$$

Definición 1.1.3. *Una relación $\sim$ definida en A es de equivalencia si cumple las siguientes propiedades:*

- ***Reflexiva:*** *Si $a \sim a, \ \forall \ a \in A$.*
- ***Simétrica:*** *Si $a \sim b \ \rightarrow \ b \sim a, \ \forall \ a, \ b \in A$.*
- ***Transitiva:*** *Si $a \sim b \ \wedge \ b \sim c \ \rightarrow \ a \sim c, \ \forall \ a, \ b, \ c \in A$.*

Definición 1.1.4. *Si $\sim$ es de equivalencia en el conjunto A, podemos definir el conjunto cociente por $\sim$ como:*

$$A/\sim \ := \ \{[a] \ : \ a \in A\}$$

Donde:

$$\underbrace{[a] \ = \ \{x \in A \ : \ a \sim x\}}_{\text{Clase de equivalencia de } a}$$

Ejemplo 1.1.2. *Dado $n \in \mathbb{N}$, en $\mathbb{Z}$ podemos definir la siguiente relación. Dados $a, \ b \in \mathbb{Z}$:*

$$a \equiv b \bmod n \leftrightarrow a \ - \ b = \mathring{n}. \ (a \equiv_n b)$$

En este caso decimos a es congruente con b modulo n.

Proposición 1.1.1. *La relación $\equiv_n$ es de equivalencia.*

Demostración. Para que $\equiv_n$ sea de equivalencia debe cumplir las tres propiedades:

- **Reflexiva:**

$$0 = \mathring{n}$$
$$a - a = \mathring{n}$$
$$\rightarrow a \equiv_n a, \ \forall a \in A$$

- **Simétrica:**

$$a \equiv_n b$$
$$a - b = \mathring{n}$$
$$(-1) \cdot (a - b) = \mathring{n}$$
$$b - a = \mathring{n}$$
$$\rightarrow b \equiv_n a, \ \forall a, b \in A$$

- **Transitiva:**

$$a \equiv_n b \wedge b \equiv_n c$$
$$a - b = \mathring{n} \wedge b - c = \mathring{n}$$
$$\rightarrow (a - b) + (b - c) = \mathring{n}$$
$$a - c = \mathring{n}$$
$$\therefore a \equiv_n c$$

$\square$

Propiedad 1.1.1. *Para $a, b \in \mathbb{Z}$ hay 2 posibilidades.*

- $[a] = [b]$.
- $[a] \cap [b] = \phi$.

Proposición 1.1.2. *Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que.*

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{r=0}^{n-1} [r]_n$$

Entonces denotamos:

$$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/\equiv_n$$
$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$$

Donde:

$$[0] = \mathring{n} \text{ osea } [0] = \{0, n, 2n, \ldots\}$$
$$[1] = \mathring{n} + 1 \text{ osea } [1] = \{1, n+1, 2n+1, \ldots\}$$
$$\vdots$$
$$[n-1] = \mathring{n} + n - 1 \text{ osea } [n-1] = \{n-1, 2n-1, 3n-1, \ldots\}$$

Observación 1.1.1. *En $\mathbb{Z}_n$ definimos las operaciones:*

$$\begin{array}{ccccccc} + & : & \mathbb{Z}_n & \times & \mathbb{Z}_n & \longrightarrow & \mathbb{Z}_n \\ \cdot & : & \mathbb{Z}_n & \times & \mathbb{Z}_n & \longrightarrow & \mathbb{Z}_n \end{array}$$

Como:

$$[a] + [b] = [a + b]$$
$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

Proposición 1.1.3. *$\mathbb{Z}_n$ es cuerpo $\leftrightarrow$ n es primo.*

Demostración.

Lema 1.1.1. *Si* $a, b \in \mathbb{Z} : \exists\ p, q \in \mathbb{Z}/\ p \cdot a + q \cdot db = MCD(a, b)$

$$(\Rightarrow)$$

Veamos por contra reciproca. **Si** n **no es primo**:

$$\exists k, l \in \mathbb{N} \backslash \{1\} : n = k \cdot l$$

Luego:

$$[0] = [n] = [k \cdot l]$$

Sabemos que $1 < k, l < n$ además si existe $[k]^{-1}$, entonces:

$$[0] = [k]^{-1}[k][l] = [1][l]$$
$$\rightarrow [0] = [l]$$
$$(\rightarrow\leftarrow)$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_n \text{ no es cuerpo.}$$

$$(\Leftarrow)$$

Si n **es primo**. Veamos que $\mathbb{Z}_n$ tiene la propiedad del elemento inverso multiplicativo y sea $r \in \mathbb{Z}$ tal que $[r] \neq [0]$. Es decir, r no es múltiplo de n, osea:

$$MCD(r, n) = 1$$

$\exists a \cdot b \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cdot r + b \cdot n = 1$

$$[a \cdot r] + [b \cdot n] = [a][r] + [0] = [1]$$
$$\rightarrow [a][r] = [1]$$

Entonces $[a]$ es el inverso multiplicativo de $[r]$

$$\therefore \mathbb{Z}_n \text{ es cuerpo.}$$

□

Observación 1.1.2.

$$\mathbb{K}: \text{ cuerpo}$$

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}_{n \text{ veces}}$$

$$a = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$b = (y_1, \ldots, y_n)$$

$$a + b = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$:

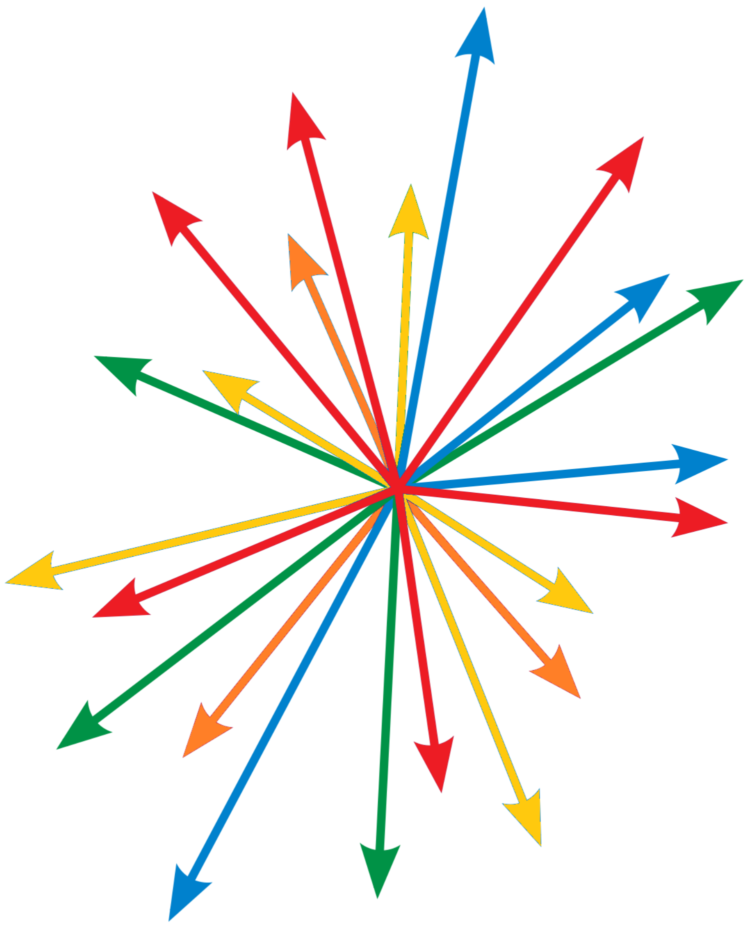
$$\lambda \cdot a = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Luego:

$$(\mathbb{K}^n, +, \cdot) \text{ cumple las mismas propiedades que } (\mathbb{R}^n, +, \cdot).$$

Capitulo N° 2

Unidad 1



2.1. Espacios Vectoriales

Definición 2.1.1. *Sea V un conjunto no vacio, $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un cuerpo, donde se definen las siguientes operaciones binarias.*

$$+ : V \times V \to V$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$$

Diremos que $(V,\mathbb{K},+,\cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$) si se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedades 2.1.1. .

1. $u+v=v+u,\ \forall u,v\in V$ ***(Conmutativa)***
2. $u+(v+w)=(u+v)+w,\ \forall u,v,w\in V$ ***(Asociativa)***
3. $\exists\,\overline{0}\in V/u+\overline{0}=u,\ \forall u\in V$ ***(Neutro aditivo)***
4. $\forall u\in V,\ \exists v\in V/u+v=\overline{0}$ ***(Notación:** $v=-u$**)** ***(Inverso aditivo)***
5. $\underbrace{\lambda(\eta\cdot v)}_{\text{Producto con un escalar en } V} = \underbrace{(\lambda\cdot\eta)}_{\text{Producto en } \mathbb{K}} v;\ \forall\lambda,\eta\in\mathbb{K},\ \forall v\in V$ ***(Asociativa)***
6. $\underbrace{(\lambda+\eta)}_{Suma\ en\ \mathbb{K}} v = \underbrace{\lambda\cdot v+\eta\cdot v}_{Suma\ en\ V};\ \forall\lambda,\eta\in\mathbb{K},\ \forall v\in V$ ***(Primera distributiva)***
7. $\lambda(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v;\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\forall u,v\in V$ ***(Segunda distributiva)***
8. $1\cdot v=v,\ \forall v\in V$ ***(Neutro en el producto por un escalar)***

Ejemplo 2.1.1. .

- $\mathbb{Q}^n$ *($\mathbb{Q}$-espacio vetorial), $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}$-espacio vetorial), $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{C}$-espacio vetorial) , . . . ,$\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K}$-espacio vetorial)*
- 0^n *espacio vectorial nulo*
- $\mathbb{K}$ *es espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$

Propiedades 2.1.2. .

1. *El elemento neutro es único*

Demostración. Sea $\overline{0}, \overline{0'} \in V$ elementos neutros.

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0' \to 0 = 0'$$

□

2. $-v = (-1) \cdot v, \ \forall v \in V$

   Demostración.

   $$v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

   Es decir: $(-1) \cdot v = -v$ □

3. $0 \cdot v = 0, \ \forall \ v \in V$

   Demostración.

   $$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \Longleftrightarrow 0 = 0 \cdot v$$

   □

Ejercicio 2.1.1. *Para cada $v \in V$ existe un único elemento inverso.*

Demostración. Sea $v \in V$, sean u, w elementos inversos de v.

$$v + u = v + w = 0$$

$$v = v + \underbrace{w + (-u)}_{0} \Longleftrightarrow w + (-u) = 0 \Longleftrightarrow w = u$$

□

Ejemplo 2.1.2. *Sea $\mathbb{K}$ cuerpo, X un conjunto no vacio.*

$$F = \{ f : X \to \mathbb{K} \ f \text{ es función } \}$$

$f, g \in F$:

- $f + g : X \to \mathbb{K}$

  $$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- $\lambda f : X \to \mathbb{K}$

  $$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$\therefore (F, \mathbb{K}, +, \cdot) \textit{ es un } \mathbb{K}\textit{-espacio vectorial}$$

2.2. Subespacios Vectoriales

Definición 2.2.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, sea $S \in V$ un subconjunto no vacío. Diremos que S es un subespacio de V, si:*

- $0 \in S$
- $\forall u, v \in S : u + v \in S$ ***(Cerrado en la suma)***
- $\forall u \in S, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \cdot u \in S$ ***(Cerrado en el producto por un escalar)***

Observación 2.2.1. *S es también espacio vectorial.*

Ejemplo 2.2.1. *.*

- $0, V$ *son subespacios de* V
- $V = \mathbb{R}^2$*, las rectas que pasan por el origen son subespacios de* $\mathbb{R}^2$
- $V = \mathbb{R}^3$*, las rectas y planos que pasan por el origen son subespacios de* $\mathbb{R}^3$
- $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f \text{ es función }\}$
  1. $\zeta(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f \text{ es continua }\}$
  2. $\zeta^k(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f \text{ tiene } k \text{ derivadas continuas }\}$
  3. $D(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f \text{ es diferenciable }\}$
- $V = \mathbb{K}^{n\times n}$*(matrices de orden $n \times n$)*
  1. $S_1 = \{A \in V/A \text{ es simétrica }\}$
  2. $S_2 = \{A \in V/A \text{ es diagonal }\}$
  3. $S_3 = \{A \in V/traza(A) = 0\}$

Ejercicio 2.2.1. *Sean U, W subespacios de V,luego:*

- $U \cap W$ *es subespacio de* V
- $U \cup W$ *no necesariamente es subespacio de V. ¿Cúando si lo es?*

2.3. Suma de subespacios

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $S_1, S_2 \subset V$ subespacios

$$S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 / s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$$

Ejercicio 2.3.1. $S_1 + S_2$ *es un subespacio de* V*.*

Solución 2.3.1. *Consideremos* $s_1, s_1' \in S_1$*,* $s_2, s_2' \in S_2$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$

- *Cerrado en la suma:*

$$s_1' + s_2' \in S_1 + S_2$$

$$s_1 + s_2 \in S_1 + S_2$$

$$\Rightarrow (s_1' + s_2') + (s_1 + s_2) = \underbrace{(s_1 + s_1')}_{\in S_1} + \underbrace{(s_2 + s_2')}_{\in S_2} \in S_1 + S_2$$

(Es cerrado en la suma)

- *Cerrado en el producto por un escalar:*

$$s_1 + s_2 \in S_1 + S_2$$

$$\Rightarrow \lambda(s_1 + s_2) = \underbrace{(\lambda s_1)}_{\in S_1} + \underbrace{(\lambda s_2)}_{\in S_2} \in S_1 + S_2$$

(Es cerrado en el producto por un escalar)

$$\therefore S_1 + S_2 \text{ es un subespacio de } V$$

2.4. Suma Directa

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $S \subset V$ subespacio. Supongamos que $S = S_1 + S_2$, donde S_1, S_2 son subespacios de V.

$$Si: \ x \in S, \ \exists \ s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \ / \ x = s_1 + s_2$$

¿Cuando s_1, s_2 son únicos tales que $x = s_1 + s_2$?

Proposición 2.4.1. *$S = S_1 + S_2$, todo elemento de S tendrá una descomposición única, si y solo si:*

$$S_1 \cap S_2 = \{0\}$$

Demostración. .

- **$(\Rightarrow)$: Supongamos que la descomposición es única.**

  Es obvio que $\{0\} \subset S_1 \cap S_2$. Sea $x \in S_1 \cap S_2$.

  $$x = \underbrace{x}_{\in S_1} + \underbrace{0}_{\in S_2} = \underbrace{0}_{\in S_1} + \underbrace{x}_{\in S_2}$$

  Por unicidad $x = 0 \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

- **$(\Leftarrow)$: Supongamos que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$**

  Sea $x \in S_1 + S_2$, sean $s_1, s_1' \in S_1$ y $s_2, s_2' \in S_2$ tales que:

  $$x = s_1 + s_2 = s_1' + s_2'$$

  $$\underbrace{s_1 - s_1'}_{\in S_1} = \underbrace{s_2' - s_2}_{\in S_2} = v$$

  $$\Rightarrow v \in S_1 \wedge v \in S_2$$

  $$v \in S_1 \cap S_2 = \{0\}$$

  $$v = 0 = s_1 - s_1' = s_2' - s_2$$

  $$s_1 = s_1' \wedge s_2' = s_2$$

  Es decir, la descomposición es única.

□

Definición 2.4.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, S_1, S_2, S subespacios de V. Diremos que S es suma directa de S_1 y S_2, si:*

- $S = S_1 + S_2$
- $S_1 \cap S_2 = \{0\}$

Notación:

$$S = S_1 \oplus S_2$$

Ejemplo 2.4.1. $V = \mathbb{R}^2$

1. $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$
2. $Y = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$

$$\mathbb{R}^2 = X \oplus Y$$

Es facil notar que:

- $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$, *o sea* $\mathbb{R}^2 = X + Y$
- $X \cap Y = (0, 0)$

Ejercicio 2.4.1. $V = \mathbb{R}^3$ *y sean:*

- $L_1 = \{t(1, -1, 0) : t \in \mathbb{R}\}$
- $L_2 = \{s(1, 0, -1) : s \in \mathbb{R}\}$
- $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

Demostrar:

1. L_1, L_2, P *son subespacios de* $\mathbb{R}^3$
2. $P = L_1 \oplus L_2$

Demostración. .

1. - $L_1 : \{t(1, -1, 0), t \in \mathbb{R}\}$

     Sean $u, v \in L_1, \lambda \in \mathbb{R}$: $u = t_1(1, -1, 0) \wedge v = t_2(1, -1, 0) \to u+v = \underbrace{(t_1 + t_2)}_{t\in\mathbb{R}}(1, -1, 0)$

     $$\therefore u + v = t(1, -1, 0) \in L_1 \textbf{ (Cerrado en la suma)}$$

     $\lambda u = \underbrace{\lambda t_1}_{T\in\mathbb{R}}(1, -1, 0)$

     $$\therefore T(1, -1, 0) \in L_1 \textbf{ (Cerrado en el producto por un escalar)}$$

   - $L_2 : \{s(1, 0, -1), s \in \mathbb{R}\}$

     Sean $u, w \in L_2, \eta \in \mathbb{R}$: $u = s_1(1, 0, -1) \wedge w = s_2(1, 0, -1) \to u + w = \underbrace{(s_1 + s_2)}_{s\in\mathbb{R}}(1, 0, -1)$

     $$\therefore u + w = s(1, 0, -1) \in L_2 \textbf{ (Cerrado en la suma)}$$

$\eta u = \underbrace{\eta s_1}_{S\in\mathbb{R}}(1,0,-1)$

$$\therefore S(1,0,-1) \in L_2 \textbf{ (Cerrado en el producto por un escalar)}$$

- $P := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$

  $x = -y-z$

$$\rightarrow u \in P : u = (-y-z, y-z)$$

$$u = (-y)(1,-1,0) + (-z)(1,0,-1)$$

  $\rightarrow P := \{m(1,-1,0) + n(1,0,-1); m,n \in \mathbb{R}\}$. Sean:

  $u,v \in P, \lambda \in \mathbb{R} : u = m_1(1,-1,0) + n_1(1,0,-1) \wedge v = m_2(1,-1,0) + n_2(1,0,-1)$

$$u+v = \underbrace{(m_1+m_2)}_{\in\mathbb{R}}(1,-1,0) + \underbrace{(n_1+n_2)}_{\in\mathbb{R}}(-1,0,1) \in P$$

$$\therefore u+v \in P \textbf{ (Cerrado en la suma)}$$

  $\lambda u = \underbrace{\lambda m_1}_{\in\mathbb{R}}(1,-1,0) + \underbrace{\lambda n_1}_{\in\mathbb{R}}(-1,0,1) \in P$

$$\therefore \lambda u \in P \textbf{ (Cerrado en el producto por un escalar)}$$

2.
- **Afirmación:** $P = L_1 + L_2$

$$u \in P \rightarrow u = \underbrace{m(1,-1,0)}_{\in L_1} + \underbrace{n(1,0,-1)}_{\in L_2}$$

$$\Longrightarrow u = v_1 + v_2;\ u \in P, v_1 \in L_1, v_2 \in L_2$$

- **Afirmación:** $L_1 \cap L_2 = \{0\}$

  Consideremos $v \in L_1 \cap L_2$

$$\rightarrow t(1,-1,0) = s(1,0,-1) = v$$

  La unica solución es que $t = 0 \wedge s = 0 \rightarrow v = (0,0,0)$

$$\therefore L_1 \cap L_2 = \{0\}$$

$$\Rightarrow L_1 \oplus L_2 = P$$

□

2.5. Espacio Cociente

Recordemos:

$$a \equiv_n b \leftrightarrow a - b = \mathring{n} \equiv \exists\ k \in \mathbb{Z}\ tal\ que\ a - b = k \cdot n$$

$$[a]_n = \{x \in \mathbb{Z} : a \equiv_n x\}$$

Definición 2.5.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y S un subespacio de V. Si $u, v \in V$, diremos:*

$$u \equiv v\ mod\ S\ (u \equiv_S v)\ \text{, si y solo si, } u - v \in S$$

Observación 2.5.1. .

- $u \equiv u\ mod\ S$
- $u \equiv v\ mod\ S \to v \equiv u\ mod\ S$
- $\left.\begin{array}{l} u \equiv v\ mod\ S \\ v \equiv w\ mod\ S \end{array}\right\} \to u \equiv w\ mod\ S$

De esto podemos definir:

$$\begin{aligned}[u] &= \{v \in V / u \equiv v\ mod\ S\} \\ &= \{v \in V / u - v \in S\}\end{aligned}$$

Proposición 2.5.1. $[u] = u + S = \{u + s : s \in S\}$

Demostración. Probaremos por doble inclusión

- $(\subset)$: Sea $v \in [u]$. Entonces $v - u \in S, v - u = s \in S \to v = u + s \in u + S$

$$\Longrightarrow [u] \subset u + S$$

- $(\supset)$: Sea $v \in u + S$. Entonces $\exists\ s \in S$, tal que $v = u + s \to v - u = s \in S$. Es decir, $v - u \in S \to v = u\ mod\ S \to v \in [u]$

$$\Longrightarrow u + S \subset [u]$$

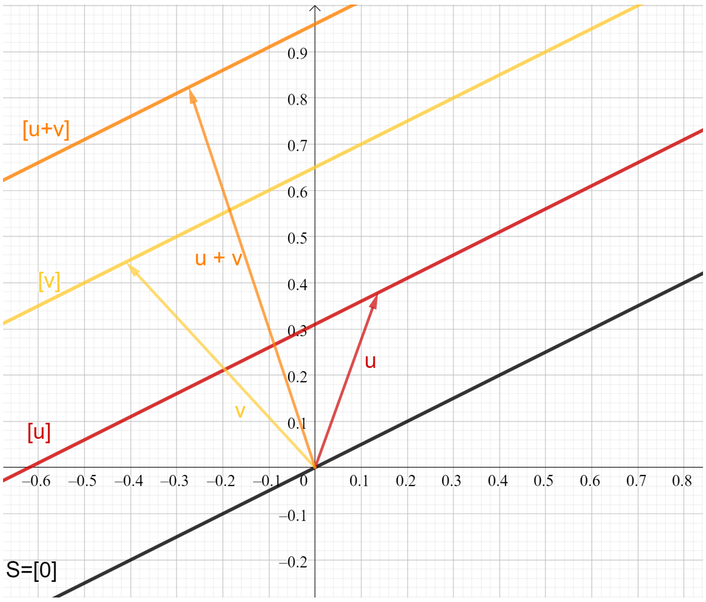
Por lo tanto, se concluye que $[u] = u + S$ □

Definición 2.5.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S \subset V$ un subespacio:*

$$V/S := \{[u]_S / u \in V\}$$

Es denominado el **ESPACIO COCIENTE** *de V sobre S.*

Ejemplo 2.5.1. .



Proposición 2.5.2. $[u], [v] \in V/S$. *Sean $u', v' \in V$ tales que.*

$$[u] = [u']$$

$$[v] = [v']$$

$$\Rightarrow [u+v] = [u'+v']$$

Demostración.

$$[u] = [u'] \rightarrow u - u' \in S$$

$$[v] = [v'] \rightarrow v - v' \in S$$

Como S es subespacio:

$$(u - u') + (v - v') = (u + v) - (u' + v') \in S$$

$$\Rightarrow [u+v] = [u'+v']$$

□

Proposición 2.5.3. $[u] = [u'] \Rightarrow [\lambda u] = [\lambda u'],\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Demostración.

$$[u] = [u'] \to u - u' \in S$$

Luego: $\lambda(u - u') \in S \to \lambda \cdot u - \lambda \cdot u' \in S$

$$\Rightarrow [\lambda u] = [\lambda u']$$

□

Definición 2.5.3. .

- $+ : V/S \times V/S \to V/S$
$$([u], [v]) \to [u] + [v] = [u + v]$$

- $\cdot : \mathbb{K} \times V/S \to V/S$
$$(\lambda, [u]) \to \lambda[u] = [\lambda u]$$

Ejercicio 2.5.1. *Verificar que $(V/S, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

2.6. Espacio Producto

Sean V, U $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

$$V \times U = \{(v, u) : v \in V, u \in U\}$$

$$+ : (v_1, u_1) + (v_2, u_2) = (\underbrace{v_1 + v_2}_{\text{Suma en } V}, \underbrace{u_1 + u_2}_{\text{Suma en } V})$$

$$\cdot : \lambda(v, u) = \underbrace{(\lambda \cdot v}_{\text{Producto por un escalar en } V}, \underbrace{\lambda \cdot u)}_{\text{Producto por un escalar en } U}$$

$(V \times U, \mathbb{K}, +, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y se llama espacio vectorial producto de V y U

2.7. Combinación Lineal

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Definición 2.7.1. *Sea $G = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset V$, una combinación lineal de G es un elemento $v \in V$ tal que:*

$$v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i, \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{K}, \forall i \in I_r$$

La definición se extiende al caso de subconjuntos no necesariamente finitos del espacio vectorial considerado.

Definición 2.7.2. *Sea I un conjunto de indices y sea $G = \{v_i : i \in I\} \subset V$. Una combinación lineal de G es un elemento $v \in V$ tal que:*

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$$

Donde $\lambda_i = 0$ salvo para finitos $i \in I$

2.8. Sistema de Generadores

Definición 2.8.1. *Sea C un subconjunto no vacio de V. El subespacio generado por C es definido por:*

$$< C >= \mathcal{L}(C) = Span\{C\} = \{v \in V : \text{ v es combinación lineal de elementos de } C\}$$

$$\mathcal{L}\{C\} = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m : \lambda_i \in \mathbb{K}, v_i \in C\}$$

2.9. Subespacios Generados

Proposición 2.9.1. *$\mathcal{L}(C)$ es subespacio de V.*

Demostración. Sean $u, v \in \mathcal{L}(C)$

$$\exists v_1, \ldots, v_n \in C \ ; \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

$$\exists u_1, \ldots, u_m \in C \ ; \ \eta_1, \ldots, \eta_m \in \mathbb{K}$$

Tales que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \eta_i u_i$, $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$

$\Rightarrow$

- $u + v = \sum_{i=1}^{m} \eta_i u_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \in \mathcal{L}(C)$, Pues sigue siendo combinación lineal de elementos en C.
- $\lambda \cdot u = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \eta_i u_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \eta_i) u_i \in \mathcal{L}(C)$

□

Proposición 2.9.2. *$\mathcal{L}(C)$ es el menor subespacio de V que contiene a C, es decir:*

$$\mathcal{L}(C) = \bigcap_{S \subset V \ , \ C \subset S} S$$

Demostración.

$$(\subset)$$

Sea $v \in \mathcal{L}(C)$, entonces:

$\exists u_1, \ldots, u_n \in C$, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$; tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$

Sea $S_0 \subset V$ un subespacio tal que $C \subset S_0$, como $u_1, \ldots, u_n \in C \subset S_0$, S_0 es subespacio. Entonces:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \in S_0 \rightarrow v \in S_0$$

$$\therefore v \in \bigcap_{S \subset V \ , \ C \subset S} S$$

$$(\supset)$$

Sea $v \in \bigcap_{S \subset V \ , \ C \subset S} S \rightarrow v \in S, \forall S \subset V, C \subset S$

Pero $\mathcal{L}(C) \subset V$ es un subespacio y $\mathcal{L}(C) \supset C$

$$\therefore \bigcap_{S \subset V \ , \ C \subset S} S \subset \mathcal{L}(C)$$

□

Observación 2.9.1. .

- *Si* $C \neq \phi : \mathcal{L}(C) = \bigcap_{S \subset V \ , \ C \subset S} S$
- *Si* $C = \phi : \mathcal{L}(\phi) = \{0\}$.

Definición 2.9.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $S \subset V$ un subespacio y $C \subset S$. Diremos que C genera a S, si: $S = \mathcal{L}(C)$.*

2.10. Independencia Lineal

Sea $C \subset V$, un subconjunto no vacio. Decimos que C es **LINEALMENTE INDEPENDIENTE (L.I.)** si para cualquier subconjunto finito $F \subset C, F = \{u_1, \ldots, u_n\}$, se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \to \lambda_i = 0, \forall_i = 1, \ldots, n$$

Observación 2.10.1. *Si C es finito, $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$. C es linealmente independiente.*

$$\sum_{i=1}^{m} \eta_i v_i = 0 \Rightarrow \eta_i = 0, \forall i \in I_m$$

Ejemplo 2.10.1. *$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $C = \{1, x, x^2, \ldots\}$ y $F = \{x^n, \ldots, x^{n_k}\}$. C es L.I.*

Proposición 2.10.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, S subespacio $\phi \neq C \subset V$ subconjunto tal que $S = \mathcal{L}(C)$. La representación de $v \in S$ con elementos de C es única, si y solo si, C es L.I.*

Demostración.

$$(\Rightarrow)$$

Supongamos que la representación es única. Sea $\phi \neq F \subset C$ finito, $F = \{u_1, \ldots, u_n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$$

Como $0 \in S$:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot u_i$$

Por unicidad: $\lambda_i = 0, \forall i \in I_n$.

$$\therefore C \textit{ es } LI$$

$$(\Leftarrow)$$

C es L.I. Sea $v \in S = \mathcal{L}(C)$

Luego $\exists v_1, \ldots v_n \in C$, $\exists \lambda_i, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$;$\exists u_1, \ldots, u_m \in C$, $\exists \eta_1, \ldots, \eta_m \in \mathbb{K}$

Tales que:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^{m} \eta_j u_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i - \sum_{j=1}^{m} \eta_j u_j = 0$$

Por contradicción, supongamos que la representación no es única.

$$\exists v_1, \ldots, v_k \in C \; tal \; que \; v_1, \ldots, v_k \neq u_i, i \in I_m$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^{m} \eta_j u_j \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \widehat{\eta}_j u_j = 0$$

Como C es L.I.: $\lambda_i = 0, \forall i \in I_k$ y $\widehat{\eta}_j = 0, \forall j \in I_m$.

$$\Rightarrow v = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^{m} \eta_j u_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \lambda'_j u_j = \sum_{j=1}^{m} \eta_j u_j$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} (\lambda'_j - \eta_j) u_j = 0$$

Como C es L.I.: $\lambda'_j - \eta_j = 0 \rightarrow \lambda'_j = \eta_j$, $\forall j \in I_m$

Luego v tiene representación única. □

Pregunta 2.10.1. *¿Todo espacio vectorial tiene generadores?.*
Si, pues $V = \mathcal{L}(V)$

Lema 2.10.1. *Si* $S \subset V$ *es subespacio, entonces* S *no es L.I.*

Demostración. El hecho de tener al vector nulo como elemento lo hace LINEALMENTE DEPENDIENTE (L.D.) □

2.11. Base de un Espacio Vectorial

Definición 2.11.1. *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y* B *un conjunto en* V *no vacío. Decimos que* B *es una base de* V*, si:*

1. B *genera a* V
2. B *es L.I.*

Observación 2.11.1. *Si* B *es base de* V*.*

- $V = \mathcal{L}(B)$

- *La representación de cada vector $v \in V$ es única con elementos de B*

Lema 2.11.1. *El conjunto $X = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ es L.I., si y solo si, ningún elemento de X es combinación lineal de los otros.*

Demostración.

$$(\Rightarrow)$$

Si X es L.I., supongamos que:

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i \to \underbrace{1 \cdot v_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i = 0}_{\text{1=0 (Pues X es L.I.)}}$$

$$\to 1 = 0$$

$$(\to\leftarrow)$$

$$(\Leftarrow)$$

Ningún elemento de X es combinación lineal de los otros, supongamos que X es L.D. $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

Como es L.D. encontraremos almenos un $\lambda_k \neq 0$, por conveniencia supondremos que $\lambda_1 \neq 0$. Entonces:

$$\lambda_1 v_1 = -\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i\right) \to \qquad \underbrace{v_1 = -\frac{1}{\lambda_1}\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i\right)}_{v_1 \text{ es combinación lineal de los otros}}$$

$$(\to\leftarrow)$$

$$\therefore X \text{ es L.I}$$

. ☐

Lema 2.11.2. *Todo sistema lineal homogéneo que tiene más incógnitas que ecuaciones tiene una solución no trivial.*

Demostración. Tenemos $Rang(A) < n$ y $Rang(A|b) < n$, donde n es el número de incognitas. Pero como es un sistema homogeneo, entonces $Rang(A) = Rang(A|b) < n$.
$\therefore$ Por el teorema de Frobenius, existen infinitas soluciones. Entonces existen infinitas soluciones aparte de la trivial. ☐

Proposición 2.11.1. *Sea* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *un generador de* V*. Todo conjunto* $\{u_1, \ldots, u_n\}$*, con* $n > m$ *elementos, es L.D.*

Demostración. $V = \mathcal{L}(X)$, $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j u_j = 0$$

Debemos encontrar x_j no todos nulos que cumplan la igualdad. Como $\{v_1, \ldots, v_m\}$ genera a V.

$$\Rightarrow u_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \;;\; a_{ij} \in \mathbb{K}, i \in I_m, j \in I_n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) v_i = 0 \quad \ldots (*)$$

Si $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0; \forall i \in I_n$, se cumple $(*)$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Y como $n > m$, entonces por el lema anterior $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ no nulos tal que satisfacen el sistema.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_i = 0 \text{ y } \text{ con } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ no todos nulos}$$

$$\therefore \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ es L.D.}$$

□

Corolario 2.11.1. *Si* $\{v_1, \ldots, v_m\}$ *genera a* V *y* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *es L.I., entonces* $n \leq m$*.*

Demostración. **Probemos por contradicción:** Si $n > m$, con $\{v_1, \ldots, v_m\}$ generador de V y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un conjunto L.I., entonces por la proposición anterior: $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es L.D. (contradicción):

$$\therefore n \leq m$$

□

2.12. Existencia de una Base en un Espacio Vectorial

Lema 2.12.1. ***(Lema de Zorn)***
Sea A un conjunto tal que para toda cadena $C \subseteq A$, el conjunto $\bigcup c$ pertenece al conjunto A. Entonces existe algún elemento $m \in A$ que es maximal en el sentido de que no es subconjunto de ningún otro elemento de A.

Teorema 2.12.1. *Todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial no nulo posee una base.*

Demostración. Aplicación del Lema de Zorn. □

2.13. Dimensión

Teorema 2.13.1. *Si $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ son bases de V. Entonces $m = n$, es decir, dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.*

Demostración. Como B es base $\longrightarrow$ B genera a V. Si B' es base $\longrightarrow$ B' es L.I.

$$\Longrightarrow m \geq n \text{ por el corolario, análogamente } n \geq m$$

$$\therefore n = m$$

□

Definición 2.13.1. *Si V tiene base finita $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Definimos la* ***DIMENSIÓN*** *de V como:*

$$dim(V) = n$$

Ejemplo 2.13.1. *Dimensión del subespacio S de matrices simétricas de orden n:*

$$dim(S) = n + \left(\frac{n^2 - n}{2}\right) = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposición 2.13.1. *Sea V tal que $dim(V) = n$ (OJO: $dim(\{0\}) = 0$). Todo conjunto de generadores de V contiene una base.*

Demostración. Sea X un conjunto de generadores de V. Sea $Y \subset X$ un subconjunto L.I. con la mayor cantidad de elementos posibles:

$$X = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m\}$$

$$Y = \{v_1, \dots, v_k\},\ k \leq m$$

Afirmación: El subconjunto Y es base de V, es decir:

$$\mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_k\}) = \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_m\})$$

En efecto, por contradicción supongamos:

$$V = \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_m\}) \supsetneq \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_k\})$$

Sea $v \in V \backslash \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_k\})$, entonces v no es combinación lineal de $\{v_1, \dots, v_k\}$, es decir:

$$\{v, v_1, \dots, v_k\} \ es\ L.I.$$

$$\#\{v, v_1, \dots, v_k\} = k + 1$$

$(\rightarrow\leftarrow)$, pues un conjunto L.I. a lo mas puede tener k elementos

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_k\}) = V$$

$$\therefore Y \text{ es base de } V$$

□

2.14. Teorema de Completación de Bases

Teorema 2.14.1. *Sea V tal que $dim(V) = n$. Sea $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$, $k < n$ conjunto L.I. Entonces, $\exists v_{k+1}, \dots, v_n \in V$, tales que. $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es base de V.*

Demostración. Como $k < n$: $S_k = \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_k\}) \subsetneq V$. Sea $v_{k+1} \in V \backslash \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_k\})$
$\rightarrow$ $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ es L.I. (pues v_{k+1} no es combinacion lineal de los otros elementos), $dim(S_k) = k$

$$S_{k+1} = \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\})\ ,\ dim(S_{k+1}) = k + 1$$

(Así, sucesivamente en un número finito de pasos)

$$\vdots$$

Tenemos que $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es L.I.

$$S_n = \mathcal{L}(\{v_1, \ldots, v_n\})$$

Finalmente:

$$V = S_n$$

□

Lema 2.14.1. *Sea $S \subset V$ un subespacio. Entonces:*

$$dim(S) = dim(V) \Rightarrow S = V$$

Demostración. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de S. Si $S \subsetneq V$, sea $v \in V \backslash S$ entonces $\{v_1, \ldots, v_n, v\}$ es L.I. y $\#\{v_1, \ldots, v_n, v\} = n + 1$ ($\rightarrow\leftarrow$), pues n es el mayor número de vectores L.I. en V.

$$\therefore S = V$$

□

Nota 2.14.1. *Si V no tiene base finita, denominamos su dimensión como: $dim(V) = \infty$.*

Corolario 2.14.1. *Si V tiene un conjunto finito de generadores, entonces V tiene base finita.*

Corolario 2.14.2. ***(Teorema de completación de bases general)***
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y X un conjunto L.I. Existe $Y \subset V$, $X \cap Y = \phi$, tal que $X \cup Y$ es una base de V.

Demostración. Sea $S = \mathcal{L}(X) \subsetneq V$, consideremos el $\mathbb{K}$-espacio V/S por el teorema de existencia: V/S tiene base. Sea $B = \{[v_i] : i \in I\}$ base de V/S, sea $Y = \{v_i : i \in I\}$.

i. $X \cap Y = \phi$. Por contradicción:
   Sea $v \in X \cap Y \rightarrow v \in X \wedge v \in Y$.

$$\Rightarrow [v] = [0] \wedge [v] \neq [0] (\rightarrow\leftarrow)$$

$$\therefore X \cap Y = \phi$$

ii. $X \cup Y$ es base.

- $X \cup Y$ es L.I.

$$\sum \lambda_i u_i + \sum \eta_j v_j = 0$$

Tomando clase:

$$0 + \sum \eta_i \underbrace{[v_i]}_{Base}$$

$$\rightarrow \eta_i = 0 \forall i \in I_r$$

Luego:

$$\sum \lambda_i u_i = 0$$

Pero μ_i son L.I.

$$\rightarrow \lambda_i = 0, \, \forall i \in I_p$$

- $X \cup Y$ genera a V.

Sea $v \in V$, entonces $[v] \in V/S$, además $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tal que:

$$[v] = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j [v_j]$$

$$\rightarrow \left[v - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \right] = [0]$$

$$\rightarrow v - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j \in S = \mathcal{L}(X)$$

$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{K}$, $x_1, \ldots, x_l \in X$ tales que:

$$v - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i$$

$$\Rightarrow v = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \underbrace{v_j}_{\in Y} + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \underbrace{x_i}_{\in X} \in \mathcal{L}(X, Y)$$

$$\therefore X \cup Y \text{ es una base de } V$$

□

Proposición 2.14.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial tal que $dim(V) = n < \infty$ y $S \subset V$ un subespacio. Entonces:*

$$dim(V/S) = dim(V) - dim(S)$$

Demostración. Consideremos $S = \mathcal{L}(X)$ y $B = \{[v_i] : i \in I\}$ base de V/S, con $Y = \{v_i : i \in I_k\}$. Entonces por el corolario anterior $X \cup Y = Z$ es una base de V. Además $X \cap Y = \phi$

$$\to n[X \cup Y] = n[X] + n[Y] - n[X \cap Y]$$

$$n = n[X] + k - 0$$

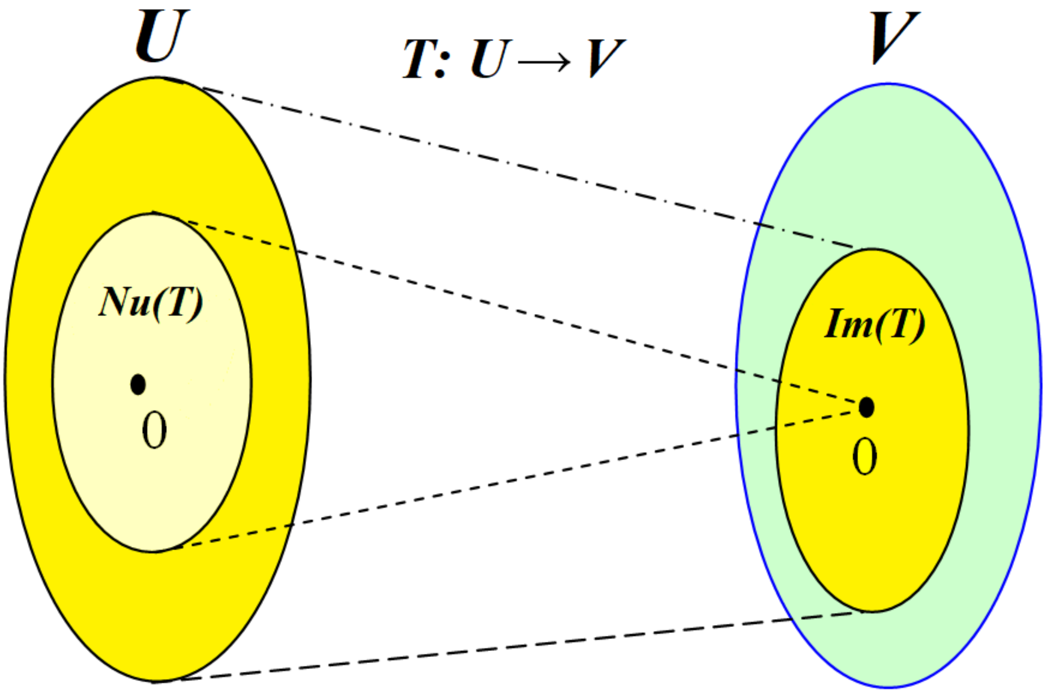
$$n[X] = n - k$$

$$\therefore dim(S) = dim(V) - dim(V/S)$$

$\square$

Capitulo N° 3

Unidad 2



3.1. Transformaciones Lineales

Definición 3.1.1. *Sean U, V $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.*

$$T : U \to V$$

Diremos que T es una transformación lineal, si:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v), \ \forall u, v \in U$.
2. $T(\lambda u) = \lambda \cdot T(u); \ \forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 3.1.1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $T(x, y) = (x\cos\theta = y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$

Ejemplo 3.1.2. *Sea* $V = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continuas* $\}$

$$T : V \to \mathbb{R} \text{ definida por } T(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 3.1.3. $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow x_i$$

(Proyección sobre la coordenada i-ésima)

Propiedades 3.1.1. *Sea $T : U \to V$ una transformación lineal*

i) $T(0) = 0$

ii) $T(-u) = -T(u), \ \forall u \in U$

iii) $T(u-v) = T(u) - T(v), \ \forall u, v \in U$

iv) $T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(u_i), \forall \lambda_i \in \mathbb{K}, \forall u_i \in U$

Demostración. .

i) $T(0) = T(0 \cdot u) = 0 \cdot T(u) = 0$

ii) $T(-u) = T((-1) \cdot u) = (-1) \cdot T(u) = -T(u)$

iii) $T(u + (-1) \cdot v) = T(u) + T((-1) \cdot v) = T(u) - T(v)$

iv) $T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T(\lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(u_i)$

□

3.2. Núcleo e Imagen

Definición 3.2.1. *Sea $T : U \to V$ una transformación lineal.*

1. $Nu(T) = Ker(T) = T^{-1}(\{0\}) \subset U = \{u \in U : T(u) = 0\}$
2. $Im(T) = Rango(T) = \{T(u) : u \in U\} \subset V$

Proposición 3.2.1. *Sea $T : U \to V$*

- $Nu(T)$ *es subespacio de* U
- $Im(T)$ *es subespacio de* V

Demostración. .

- Consideremos $u, v \in Nu(T) \subset U$

$$T(u) = 0 \wedge T(v) = 0$$

$$T(u) + T(v) = 0$$

$$T(u + v) = 0 \to u + v \in Nu(T)$$

$$\therefore \text{ Es cerrado por la suma}$$

$$T(u) = 0$$

$$\lambda T(u) = 0 \to T(\lambda u) = 0$$

$$\therefore \lambda u \in Nu(T), \text{ es cerrado por el producto por un escalar}$$

- Consideremos $T(u), T(v) \in Im(T) \subset V$, con $u, v \in U$

$$T(u) + T(v) = T(u + v) \in Im(T); u + v \in U.$$

$$\therefore \text{ Es cerrado por la suma}$$

$$\lambda T(u) = T(\lambda u) \in Im(T); \lambda u \in U$$

$$\therefore \text{ Es cerrado por el producto por un escalar}$$

□

Definición 3.2.2. *Sea* $T : U \longrightarrow V$

a) T *es* ***monomorfismo****, si* T *es* ***inyectiva****.*

b) T *es* ***epimorfismo****, si* T *es* ***sobreyectiva****.*

c) T *es* ***isomorfismo****, si* T *es* ***biyectiva****.*

Proposición 3.2.2. *Si* $T : U \longrightarrow V$ *es una transformación lineal biyectiva (isomorfismo), entonces* $T^{-1} : V \longrightarrow U$ *es una transformación lineal.*

Demostración. Consideremos $u, v \in U$ y $T(u), T(v) \in V$, como T es isomorfismo: $T^{-1}(T(u)) = u$

1. **Afirmación:** $T^{-1}(T(u)T(v)) = T^{-1}(T(u)) + T^{-1}(T(v))$.

$$T^{-1}(T(u) + T(v)) = T^{-1}(T(u + v)) = u + v = T^{-1}(T(u)) + T^{-1}(T(v))$$

2. **Afirmación:** $T^{-1}(\lambda T(u)) = \lambda T^{-1}(T(u))$

$$T^{-1}(\lambda T(u)) = T^{-1}(T(\lambda u)) = \lambda u = \lambda T^{-1}(T(u))$$

□

Proposición 3.2.3. $T : U \to V$ *es monomorfismo, si y solo si,* $Nu(T) = \{0\}$

Demostración. .

- $(\Rightarrow)$ **Si T es monomorfismo (inyectiva):** Obviamente $T(0) = 0$ osea $\{0\} \subset Nu(T)$.

  Sea $x \in Nu(T) \to T(x) = 0 \to T(x) = T(0)$. Por inyectividad: $x = 0$

$$\therefore Nu(T) = \{0\}$$

- $(\Leftarrow)$ **Si $Nu(T) = \{0\}$:** Sean $x, y \in U$ tal que $T(x) = T(y)$

$$\to T(x) - T(y) = T(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow x - y \in Nu(T) = \{0\} \to \underbrace{x - y = 0}_{x=y}$$

$$\therefore T \text{ es monomorfismo (inyectiva)}$$

□

Proposición 3.2.4. *Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces, si $\{u_i : i \in I\}$ es un sistema de generadores de U, $\{T(u_i) : i \in I\}$ es un sistema de generadores de $Im(T)$.*

Demostración. Por definición $Im(T) = \{T(u) : u \in U\}$. Si $\{u_i : i \in I\}$ es sistema de generadores de U, para cada $u \in U$ existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ y elementos $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$ tales que $u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}, u_{ij}$. Luego

$$T(u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} T(u_{ij}) \in \mathcal{L}(\{T(u_i) : i \in I\})$$

Esto prueba que $Im(T) \subset \mathcal{L}(\{T(u_i) : i \in I\})$. La otra inclusión es directa, pues $T(u_i) \in Im(T)$ para cada $i \in I$.

$$\therefore Im(T) = \mathcal{L}(\{T(u_i) : i \in I\})$$

□

Proposición 3.2.5. *Sea $T : U \longrightarrow V$ monomorfismo. Entonces si $\{u_i : i \in I\} \subset U$ es un conjunto L.I., $\{T(u_i) : i \in I\} \subset V$ es un conjunto L.I.*

Demostración. Supongamos que una combinación lineal de $\{T(u_i) : i \in I\}$ satisface $\sum_{i\in I} \lambda_i T(u_i) = 0$. Como T es lineal, entonces: $T(\sum \lambda_i u_i) = 0$, y como T es monomorfismo, debe cumplirse que $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0$. Por la independencia lineal de $\{u_i : i \in I\}$ implica que $\lambda_i = 0, \forall i \in I$. Por tanto $\{T(u_i) : i \in I\}$ es L.I. □

Ejercicio 3.2.1. *Sean U, V espacios vectoriales (no necesariamente de dimensión finita) y $T : U \to V$ transformación lineal. Demostrar:*

- *T es **monomorfismo**, si y solo si, T transforma vectores L.I. de U en vectores L.I. de V.*
- *T es **epimorfismo**, si y solo si, T transforma vectores que generan U en vectores que generan V.*
- *T es **isomorfismo**, si y solo si, T transforma un base de U en una base de V.*

Solución 3.2.1. .

- $T : U \to V$, *sea* $\{u_i : i \in I\} \subset U$ *un conjunto L.I. y* T *monomorfismo.* $\{T(u_i) : i \in I\} \in Im(T) \subset V$, *consideremos la combinación lineal.*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i T(u_i) = 0$$

$$T\left(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i\right) = 0$$

Y al ser T *monomorfismo* $\to Nu(T) = \{0\}$

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0$$

$$\{u_i : i \in I\} \text{ es L.I. } \to \lambda_i = 0, \ \forall i \in I$$

$$\to \sum_{i \in I} \lambda_i T(u_i) = 0, \ \lambda_i = 0, \ \forall i \in I$$

$$\therefore \{T(u_i) : i \in I\} \text{ es L.I.}$$

- $T : U \to V$. *Consideremos* $u \in U$ *y un conjunto* $\{u_i : i \in I\}$ *un conjunto de generadores.*

$$\to u = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$$

$$T(u) = T(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i) \longrightarrow T(u) = \sum_{i \in I} \lambda_i T(u_i)$$

$\Rightarrow \{T(u_i) : i \in I\}$ *es un conjunto generador de* $Im(T)$, *pero al ser epimorfismo* $Im(T) = V$.

$$\therefore \{T(u_i) : i \in I\} \text{ genera a } V$$

- $T : U \to V$. *Consideremos* $B = \{u_i : i \in I\}$ *una base de* U *y sea* $C = \{T(u_i) : i \in I\}$.
  - B *genera a* U *y* T *es epimorfismo, entonces* C *genera a* V
  - B *es L.I. y* T *es monomorfismo, entonces* C *es L.I.*

$\therefore \{T(u_i : i \in I)\}$ *es base de* V *con* T *isomorfismo.*

3.3. Teorema de Extensión por linealidad

Teorema 3.3.1. *Sean* U, V $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales.* $B = \{u_j : j \in I\}$ *una base de* U *y sea el conjunto de vectores* $\{v_j : j \in I\} \subset V$ *fijo y arbitrario. Entonces* ***existe una única transformación lineal*** $T : U \to V$ ***tal que*** $T(u_j) = v_j$.

Demostración. Sea $u \in U, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$; $u_{j1}, \ldots, u_{jn} \in B$, tales que:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{ji}$$

Definamos $T : U \to V$

$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{ji}$$

Claramente $T(u_j) = v_j$. Veamos la unicidad:

$$\text{Sea } T' : U \to V \text{ tal que } T'(u_j) = v_j, \ \forall j \in I$$

Sea $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_{ji}$.

$$\to T'(u) = T'\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{ji}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T'(u_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(u_{ji}) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{ji}\right)$$

$$\Rightarrow T'(u) = T(u), \forall u \in U$$

$$\therefore T' = T$$

□

Corolario 3.3.1. *Si $T, T' : U \to V$ son transformaciones lineales que coinciden en una base U, entonces son iguales.*

Demostración. Consideremos $B = \{u_i : i \in I\}$ base de U.

$$\to T(u_i) = T'(u_i)$$

Luego $u = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i u_i$, aplicando transformación lineal.

$$T(u) = \sum_{i \in I} \lambda_i T(u_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i T'(u_i) = T'(u)$$

$$\therefore T' = T$$

□

Ejemplo 3.3.1. .

- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$

$$\left.\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1,1,1,1) \\ T(0,1,0) &= (2,-1,1,1,0) \\ T(0,0,1) &= (0,0,0,0,1) \end{aligned}\right\} T \text{ está definido por linealidad}$$

- $U = V = \mathbb{K}[x]$

$$\left.\frac{d}{dx}(x^i) = ix^{i-1}; i = 0,1,\ldots\right\} \frac{d}{dx} \text{ está definido por linealidad}$$

3.4. Teorema del Núcleo e Imagen

Teorema 3.4.1. *Sean U, V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales donde $dim(U) < \infty$ y $T : U \to V$ transformación lineal, entonces $dim(Im(T)) < \infty$ y:*

$$\boxed{dim\ (U) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T))}$$

Demostración. Sea $\{u_1, \ldots, u_k\}$ base de $Nu(T)$, por el teorema de completación de bases existen $u_{k+1}, \ldots, u_n$ con $n = dim(U)$ tales que:

$$\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\} \textit{ es base de } U$$

Afirmación: $\{T(u_{k+1}), \ldots, T(u_n)\}$ es base de $Im(T)$.

- Son L.I.

$$\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i T(u_i) = 0 \to T\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i u_i\right) = 0$$

$$\Rightarrow u = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i u_i \in Nu(T)$$

Luego $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que:

$$u = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j \to \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i u_i$$

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j + \sum_{j=k+1}^{n} (-\lambda_j) u_j$$

Como $\{u_i : i \in I_n\}$ es L.I.

$$\alpha_j = 0, j \in 1, \ldots, k$$

$$\lambda_i = 0, i \in k+1, \ldots, n$$

- $\{T(u_{k+1}), \ldots, T(u_n)\}$ genera a $Im(T)$. Sea $y \in Im(T) : \exists\, u \in U/T(u) = y; \exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

$$T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = y$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(u_i) = y$$

Osea: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{T(u_i)}_{\in Nu(T)} + \sum_{k+1}^{n} T(u_i) = y$

$$\Rightarrow y = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i T(u_i)$$

$\therefore \{T(\mu_{k+1}), \ldots, T(u_n)\}$ genera $Im(T)$

$\therefore \{T(\mu_{k+1}), \ldots, T(u_n)\}$ es base de $Im(T)$

Luego: $\dim(Im(T)) = \underbrace{n}_{dim(U)} - \underbrace{k}_{dim(Nu(T))}$

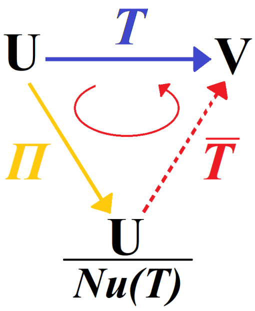
$$\therefore dim(U) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T))$$

□

Ejercicio 3.4.1. *Si $dim(U) = \infty$. ¿Se cumplirá el teorema anterior?*

3.5. Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales

Teorema 3.5.1. *Sea $T : U \to V$, $Nu(T), Im(T)$ son subespacios de U y V respectivamente.*



$$\overline{T}:\frac{U}{Nu(T)}\to V,\ tal\ que:\ T=\overline{T}\circ\Pi$$

Definamos: Si $[u]\in U/Nu(T)$*:*

$$\overline{T}([u])=T(u)$$

Si $[u]=[v]$*:* $u-v\in Nu(T)$

$$\to T(u-v)=0\to T(u)=T(v)\Rightarrow\overline{T}([u])=\overline{T}([v])$$

$\therefore\overline{T}$ *esta bien definida.*

Definición 3.5.1. *Sean* U,V *dos* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales, decimos que* U *y* V *son* ***ISOMORFOS*** *si existe un* ***ISOMORFISMO*** $T:U\to V$.

Notación: $U\cong V$

Ojo: En álgebra lineal, a dos espacios isomorfos se les considera idénticos (equivalentes).

Ejercicio 3.5.1. *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de dimensión* n*. Demostrar que*

$$V\cong\mathbb{K}^n$$

Solución 3.5.1. *Sea* $T:V\to\mathbb{K}^n$

$$\to dim(V)=dim(\mathbb{K})=n$$

- *Si es inyectiva, sera sobreyectiva por el teorema del núcleo e imagen.*
- *Si es sobreyectiva, sera inyectiva por el teorema del núcleo e imagen,*

$\therefore$ *Basta que sea inyectiva o sobreyectiva para que sea isomorfa, es decir* $V\cong\mathbb{K}^n$

Teorema 3.5.2. *Sea* $T:U\to V$ *transformación lineal. Se cumple que:*

i) $\exists!\ \overline{T} : U/Nu(T) \to Im(T)$, *tal que:*

$$\overline{T} \circ \Pi = T$$

ii) $\overline{T}$ *es isomorfismo*

$$U/Nu(T) \cong Im(T)$$

Demostración. .

i)

- **Existencia:** $\overline{T} : U/Nu(T) \to V$ definido por

$$\overline{T}([u]) = T(u)$$

Si $u \in U : (\overline{T} \circ \Pi)(u) = \overline{T}(\Pi(u)) = \overline{T}([u]) = T(u)$

$$\Rightarrow \overline{T} \circ \Pi = T$$

- **Unicidad:** Sea $S : U/Nu(T) \to V$, tal que $S \circ \Pi = T$.
  Sea $[u] \in U/Nu(T)$:

$$S([u]) = (S \ \circ \ \Pi)(u) = S([u])$$
$$= T(u) = \overline{T}([u])$$
$$\therefore S = \overline{T}$$

ii)

- $\overline{T}$ **es sobreyectiva** $(\overline{T} : \frac{U}{Nu(T)} \to Im(T))$
  Sea $y \in Im(T) : \exists u \in U$ tal que $T(u) = y$ pero $\overline{T}([u]) = T(u) \to \overline{T}$ es sobreyectiva.

- $\overline{T}$ **es inyectiva**

  Sea $[u] \in Nu(\overline{T}) : \overline{T}([u]) = 0$

$$\to T(u) = 0 \to u \in Nu(T)$$

Entonces $[u] = [0]$

$$\therefore \overline{T} \text{ es inyectiva}$$

□

Ejercicio 3.5.2. *El hiperplano es un subespacio de* $\mathbb{K}^n$ *definido por:*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

Determine su dimensión

Solución 3.5.2. *Sea* $v = (x_1, \cdots, x_n) \in V$*, donde* V *es el hiperplano. Además* $x_1 = \frac{1}{a_1}\sum_{i=2}^{n} -a_i x_i$.

$$\Rightarrow v = \left(\frac{1}{a_1}\sum_{i=2}^{n} -a_i \cdot (x_i, x_2, \cdots, x_n)\right)$$

Sea $B = \{v_i,\ i \in I_{n-1}\}$*, donde* $v_i = -\frac{a_i}{a_1} x_i \cdot e_i$*, donde* $\{e_i,\ i \in I_n\}$ *base canónica de* $\mathbb{K}^n$*. Entonces* B *es L.I.*

$$\Rightarrow v = \mathscr{L}(\{v_i,\ i \in I_{n-1}\})$$

$$\therefore dim(V) = n - 1$$

Corolario 3.5.1. *Sean* U *y* V *subespacios de* W*, entonces:*

$$\frac{U}{U \cap V} \cong \frac{U+V}{V}$$

Demostración. Definimos $S : U \to U + V/V$ por $S(u) = [u] = u + V$

- S **es sobreyectiva**

  Sea $[y] \in \frac{U+V}{V} \longrightarrow y \in U + V$

  $\exists\ u \in U, v \in V$ tal que : $y = u + v$

$$y - u = v \in V$$

$$\to [y] = [u] = S(u)$$

  $\therefore S$ es sobreyectiva.

- $Nu(T) = U \cap V$

  $(\subset)$ Si $u \in Nu(S) : S(u) = [0] = [u]$

$$\to u \in V \Rightarrow u \in U \cap V$$

  $(\supset)$ Si $u \in U \cap V \to u \in V \to [u] = [0]$, osea $u \in Nu(S)$

$$\therefore Nu(S) = U \cap V$$

  Por el teorema fundamental

$$\frac{U}{U \cap V} \cong \frac{U+V}{V}\ ,\ \left(\frac{U}{Nu(S)} \cong Im(S)\right)$$

$\square$

Proposición 3.5.1. *Sean U, V $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita con $dim(U) = dim(V)$ y $T : U \longrightarrow V$ transformación lineal, entonces son equivalentes:*

1. *T es inyectiva.*
2. *T es sobreyectiva.*
3. *T es isomorfismo.*

Demostración. .

- $1) \to 2)$: T **es inyectiva**, entonces $Nu(T) = \{0\}$.

  (Por el teorema fundamental)

$$\frac{U}{Nu(T)} = \frac{U}{\{0\}} \cong U \cong Im(T)$$
$$\to dim(U) = dim(V) = dim(Im(T))$$
$$\therefore V = Im(T)$$

- $2) \to 1)$: T **es sobreyectiva**

  (Por el teorema fundamental)

$$\frac{U}{Nu(T)} \cong Im(T) = V$$

  Como $dim(U) - dim(Nu(T)) = dim(V)$

$$\to dim(Nu(T)) = 0$$
$$\Rightarrow Nu(T) = \{0\}$$
$$\therefore T \text{ es inyectiva}$$

□

3.6. Espacio de Transformaciones

Definición 3.6.1. *Sean U, V $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.*

$$L(U, V) = \{T : U \to V \ / \ T \text{ es transformación lineal}\}$$

Afirmación: *$(L(U, V), +, \cdot)$ es un espacio vectorial, donde: $+$ es la suma de funciones y $\cdot$ es el producto de un escalar por una función.*

$$+ : L(U,V) \times L(U,V) \to L(U,V)$$

$$(T,S) \to \begin{array}{c} T+S : U \to V \\ u \to T(u)+S(u) \end{array}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times L(U,V) \to L(U,V)$$

$$(\lambda,T) \to \begin{array}{c} \lambda T : U \to V \\ u \to \lambda \cdot T(u) \end{array}$$

Nota 3.6.1. *$L(U,U) = L(U)$ se le denomina conjunto de endomorfismos y a sus elementos se les denomina endomorfismo u operador lineal.*

3.6.1. Caracterización de L(U,V)

Sean U, V $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita con $dim(U) = n$, $dim(V) = m$.

- **Afirmación:** $L(U,V) \cong \mathbb{K}^{m\times n}$

  En efecto, sean $\{u_1,\dots,u_n\}$ base de U y $\{v_1,\dots,v_m\}$ base de V.

  Definición 3.6.2. $\tau_{ij} : U \to V$, $i \in I_m, j \in I_n$.

  Tal que si:

  $$u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$$

  Entonces:

  $$\tau_{ij}(u) = \lambda_j v_i$$

- **Afirmación:** $\{\tau_{ij} : i \in I_m, j \in I_n\}$ es base de $L(U,V)$

  - $\{\tau_{ij}\}$ genera a $L(U,V)$:

    Sea $T \in L(U,V)$

    $$u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j \in U \to T(u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(u_j)$$

    Pero $T(u_j) \in V$, entonces existen $a_{1j},\dots,a_{mj}$ tales que:

    $$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$$

Luego

$$T(u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(u_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \right)$$

$$T(u) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \underbrace{\lambda_j v_i}_{\tau_{ij}(u)}$$

$$\rightarrow T(u) = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tau_{ij} \right) (u)$$

Sea $T = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tau_{ij}$

$$\therefore \{\tau_{ij}\} \text{ genera a } L(U, V)$$

- $\{\tau_{ij}\}$ es L.I.

Si $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \tau_{ij} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \tau_{ij}(u) = 0, \ \forall u \in U$$

Sea $k \in I_n$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \tau_{ij}(u_k) = 0$$

▶

$$u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j \rightarrow \tau_{ij}(u) = \lambda_j v_i$$

$$u_k = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \ldots + 1.u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \ldots + 0 \cdot u_n$$

$$\tau_{ij}(u_k) = \lambda_j v_i$$

$$\lambda_j = \begin{cases} 0 & \text{j} \neq \text{k} \\ 1 & \text{j} = \text{k} \end{cases}$$

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{j} \neq \text{k} \\ v_i & \text{j} = \text{k} \end{cases}$$

◀

$$\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \tau_{ij}(\mu_k)}_{\alpha_{ik} \cdot 1 \cdot v_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik}.v_i = 0$$

Como $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es base de V.

$$\Rightarrow \alpha_{ik} = 0, \ \forall i \in I_m$$

Dado que $k \in I_n$ es arbitrario, se tiene.

$$\alpha_{ij} = 0, \forall i \in I_m, \forall j \in I_n$$

$\Rightarrow \{\tau_{ij}\}$ es L.I., osea es base dado que tambien genera a $L(U, V)$.

De esto: $L(U, V) \cong \mathbb{K}^{m \times n}$

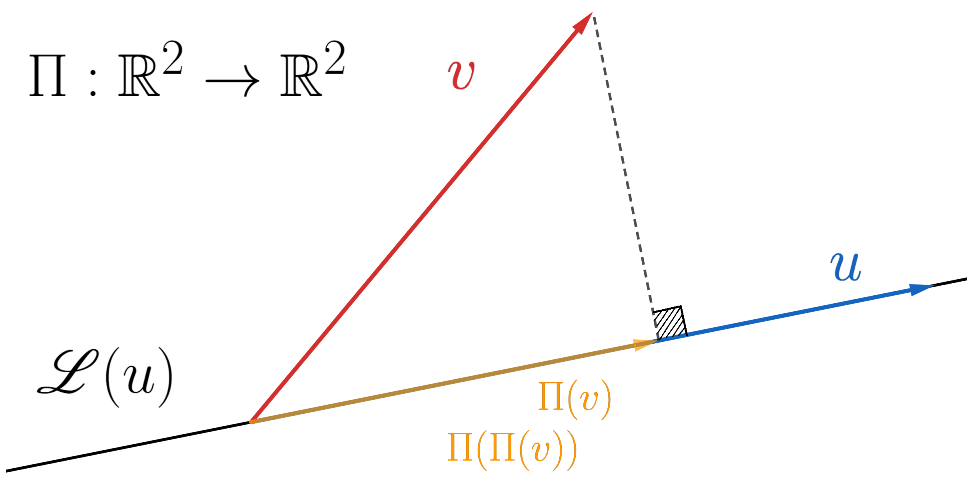
$$\Rightarrow dim(L(U, V)) = mn$$

3.7. Proyecciones

Proposición 3.7.1. *Sean* $U, V,$ dos $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales. Sean* $T : U \longrightarrow V$, $S : V \longrightarrow W$ *transformaciones lineales. Entonces* $S \circ T : U \longrightarrow W$ *es una transformacion lineal.*

Demostración. ¡Ejercicio! □

Definición 3.7.1. *Una transformación lineal* $\Pi : V \to V$ *se llama* ***PROYECCIÓN*** *si* $\Pi \circ \Pi = \Pi$. *Ejemplo:*



Lema 3.7.1. *Sea* $T : V \to V$ *lineal. Entonces* T *es proyección si y solo si* $T(v) = v$ *para cada* $v \in Im(T)$

Demostración. .

- $(\Rightarrow)$ **Supongamos que T es proyección:**

  Sea $v \in Im(T)$. Entonces $\exists\ u \in V$ tal que $v = T(u)$. Luego $T(v) = T(T(u)) = T(u) = v \Rightarrow T(v) = v,\ \forall v \in Im(T)$.

- $(\Leftarrow)$ **Sea $v \in V$:**

  Entonces $T(v) \in Im(T)$ y por hipótesis $T(T(v)) = T(v)$, $\forall v \in V$. Luego $T \circ T = T$, es decir, es proyección.

$\square$

Proposición 3.7.2. *Sea $\Pi : V \to V$ una proyección. Entonces:*

$$Nu(\Pi) \oplus Im(\Pi) = V$$

Demostración. .

- $Nu(\Pi) \cap Im(\Pi) = \{0\}$:
  Sea $v \in Nu(\Pi) \cap Im(\Pi)$, como $v \in Im(\Pi)$ por el lema anterior $\Pi(v) = v$. Pero $v \in Nu(T)$, luego $\Pi(v) = 0 = v \to v = 0$.

$$\therefore Nu(\Pi) \cap Im(\Pi) = \{0\}$$

- $Nu(\Pi) + Im(\Pi) = V$:
  Sea $v \in V$. Entonces $v = (v-\Pi(v))+\Pi(v)$ y se tiene que: $\Pi(v-\Pi(v)) = \Pi(v)-\Pi(\Pi(v)) = \Pi(v) - \Pi(v) = 0$ con lo que $v - \Pi(v) \in Nu(T)$ y $\Pi(v) \in Im(\Pi)$.

$\square$

Proposición 3.7.3. *Sean U, W subespacios de V, tales que $V = U \oplus W$. Entonces existe una única proyección $\Pi : V \to V$ tal que $Nu(\Pi) = U$, $Im(\Pi) = W$*

3.8. Funcionales Lineales

Definición 3.8.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, un funcional lineal f es una transformación lineal.*

$$f : V \longrightarrow \mathbb{K}$$

Ejemplo 3.8.1. .

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$$

2. $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$$f_2(v) = \langle a, v \rangle, \text{ dado } a \in \mathbb{R}^n \text{ fijo}$$

3. $f_3 : C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$$f_3(f) = \int_a^b f(x)dx$$

3.9. Espacio Dual

Definición 3.9.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se define el* ***ESPACIO DUAL*** $V^* := L(V, \mathbb{K})$*, es decir, es el espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ formado por todas las funcionales lineales que van de V hacia el cuerpo $\mathbb{K}$.*

Teorema 3.9.1. ***(Separación de un punto y un subespacio por medio de una funcional lineal)***
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, S un subespacio de V y $v \in V \backslash S$. Entonces existe una funcional lineal $f \in V^*$ tal que:

$$f(v) = 1 \text{ y } f(w) = 0, \ \forall \ w \in S$$

Demostración. El espacio V es de dimensión finita y S es un subespacio de V, luego S también es de dimensión finita. Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ base de S. Denotemos v por $u_{m+1} \notin \mathcal{L}(\{u_1, \dots, u_m\})$ entonces $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}\}$ es un conjunto L.I. Por el teorema de extension de base, existen $u_{m+2}, \dots, u_n \in V, \ n > m$ tales que :

$$\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_n\} \textit{ es base de } V$$

Definamos el funcional $f : V \to \mathbb{K}$ mediante:
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right) = \lambda_{m+1} \text{ (Proyección sobre la } m+1 \text{ componente)}$$
Lo cual, en otras palabras es lo mismo que definir f en los elementos de la base de la siguiente manera:
$$f(u_1) = 0, \dots, f(u_m) = 0, f(v) = 1, f(u_{m+2}) = 0, \dots, f(u_n) = 0$$

Y luego extendemos f por linealidad. Entonces:

$$f(v) = 1 \ y \ f(w) = 0, \ \forall w \in S = \mathcal{L}(\{u_1, \ldots, u_m\})$$

$\square$

Corolario 3.9.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, $v \in V\backslash\{0\}$. Entonces $\exists f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$*

Demostración. Usar el teorema anterior para $S = \{0\}$ $\square$

Corolario 3.9.2. *Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $v \in V$. Si $f(v) = 0$, $\forall f \in V^*$. Entonces $v = 0$.*

Demostración. Si $v \neq 0$ por el corolario $\exists f : V \to \mathbb{R}$ tal que $f(v) \neq 0$ ($\to\leftarrow$). $\square$

▶

Proposición 3.9.1. *Sea V en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Entonces:*

$$L(\mathbb{K}, V) \cong V$$

Demostración. Definamos:

$$\Phi : L(\mathbb{K}, V) \to V$$

$$f \to \Phi(f) = f(1)$$

- **Φ es lineal:** obvio (¡Comprobar!)
- **Φ es inyectiva:**

  Sea $f \in Nu(\Phi)$, luego $\Phi(f) = f(1) = 0$, sea $k \in \mathbb{K}$: $f(k) = f(k \cdot 1) = kf(1) = k \cdot 0 = 0$.

  $$\Rightarrow f(k) = 0, \ \forall k \in \mathbb{K} \to f = 0$$

  $$\therefore Nu(\Phi) = \{0\}$$

- **Φ es sobreyectiva:**

  Sea $v \in V$, definimos:

  $$g : \mathbb{K} \to V$$

$$k \to kv \ , \quad g \ es \ lineal$$

$$\underbrace{g(1)} = 1.v = v$$

$$\Phi(g) = v \Rightarrow v \in Im(\Phi)$$

Obtuvimos que $\forall v \in V, \ \exists g \in L(\mathbb{K}, \mathbb{V})$ tal que $\Phi(g) = v$

$$\Rightarrow \Phi \text{ es sobreyectiva}$$

$$\therefore \Phi \text{ es un isomorfismo, o sea } L(\mathbb{K}, V) \cong V$$

$\square$

◀

3.10. Base Dual

Regresando al tema del espacio dual: $L(V, \mathbb{K}) = V^*$

Proposición 3.10.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Veamos que $V \cong V^*$*

Demostración. En efecto:

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ base. Definamos:

$$v_i^* : V \to \mathbb{K}, \ i \in I_n$$

Si $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$, entonces $v_i^*(v) = \lambda_i$ claramente v_i^* es lineal. Probaremos que $B^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ es una base de V^*.

- B^* **genera a** V^*

  Sea $f \in V^*$, sea $v \in V$, luego $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$.

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\lambda_j}_{v_j^*(v)} f(v_j)$$

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} f(v_j)v_j^*(v) = \left(\sum_{j=1}^{n} f(v_j)v_j^*\right)(v)$$

$$\Rightarrow f = \sum_{j=1}^{n} f(v_j) \cdot v_j^*$$

$$\therefore \ B^* \ genera \ a \ V^*$$

- B^* **es L.I.**

  Si $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j^* = 0 \to \sum_{j=1}^{n}\alpha_j v_j^*(v) = 0, \ \forall \ v \in V.$

  Para $v = v_i$:

$$v_j^*(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{i} \neq \text{j} \\ 1 & \text{i} = \text{j} \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j^*(v_i) = 0$$

$$\alpha_i v_i^*(v_i) = 0 \to \alpha_i \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \ , \forall \ i \in I_n$$

$$\therefore B^* \ es \ L.I.$$

Luego, B^* es base de V^*. A la base B^* se le denomina **base dual de B**. □

Corolario 3.10.1. *Sea V $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $dim(V) < \infty$. Luego*

$$dim(V^*) = dim(V)$$

Es decir: $V \cong V^* \Longleftrightarrow dim(V) < \infty$

Proposición 3.10.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio de dimensión infinita y B una base de V, entonces B^* no genera a V^*.*

Demostración. B es infinito, definamos $f : V \to \mathbb{K}$ tal que $f(u_i) = 1, \ \forall u_i \in B$. **Afirmación:** $f \notin \mathcal{L}(B^*)$

Por contradicción, supongamos que $f \in \mathcal{L}(B^*)$, $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ y $\exists u_1, \ldots, u_n \in B$. Tales que:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^*$$

Como B es infinito, $\exists u \in B \backslash \{u_1, \ldots, u_n\}$:

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^*(u)$$

Como $u \notin \{u_1, \ldots, u_n\}$: $u_i^*(u) = 0, \ \forall i \in I_n$.

$$\Rightarrow f(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^*(8u) = 0$$

$$\Rightarrow f(u) = 0$$

Pero por definición: $f(u) = 1$ $(\leftrightarrow)$, luego $f \notin \mathcal{L}(B^*)$. De esto B^* no es base de V^*, pues $\mathcal{L}(B^*) \subsetneq V^*$ □

Ejercicio 3.10.1. *B^* es L.I.*

3.11. Espacio Bidual

Definición 3.11.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Su **ESPACIO BIDUAL** V^{**} se define como $(V^*)^*$. En otras palabras, V^{**} consiste en las funcionales lineales $V^* \to \mathbb{K}$, y las operaciones lineales en V^{**} están definidas punto a punto.*

Lema 3.11.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $a \in V$. Denotemos por θ_a al mapeo $V^* \to \mathbb{K}$ definido por $\theta_a(f) = f(a), \ \forall f \in V^*$. Entonces $\theta_a \in V^{**}$*

Demostración. .

- Sean $\varphi, \psi \in V^*$. Entonces:

$$\theta_a(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$$

$$= \theta_a(\varphi) + \theta_a(\psi)$$

- Sea $\varphi \in V^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces:

$$\theta_a(\lambda\varphi) = \lambda\varphi(a) = \lambda\theta_a(\varphi)$$

$$\therefore \theta_a \text{ es transformación lineal}$$

□

Teorema 3.11.1. ***(Isomorfismo canónico del espacio dual al espacio inicial)***
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces la aplicación $\theta : V \to V^{**}$, que manda un vector $v \in V$ al funcional $\theta_v \in V^{**}$ definifo por: $\theta_v(f) = f(v)$ es un isomorfismo de V sobre V^{**}. Este isomorfismo θ sera denominado isomorfismo canónico de V sobre V^{**}.

Demostración. .

- El lema garantiza que $\theta(v) \subset V^{**}$
- θ **es lineal:** Sean $u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$

$$\theta(u + \lambda v) = \theta_{u+\lambda v} : v^* \to \mathbb{K}$$

Sea $f \in V^*$:

$$\theta_{u+\lambda v}(f) = f(u + \lambda v) = \underbrace{f(u) + \lambda f(v)}_{\theta_u(f)+\lambda\theta_v(f)}$$

Osea $\theta_{u+\lambda v}(f) = (\theta_u + \lambda\theta_v)(f)$

$$\therefore \theta_{u+\lambda v} = \theta_u + \lambda\theta_v \text{ , es decir, es lineal}$$

- θ **es inyectiva:**
Sea $u \in Nu(\theta)$:

$$\theta_u : V^* \to \mathbb{K}$$

$$f \to \theta_u(f) = f(u) = 0,\ \forall f \in V^*$$

Por el **corolario 12.2**: $u = 0$

$$\therefore Nu(\theta) = 0 \text{ , es decir, } \theta \text{ es inyectiva}$$

- θ **es sobreyectiva:**
Como la dimensión de V es finita, sabemos que:

$$dim(V) = dim(V^*) = dim(V^{**})$$

Por el teorema del núcleo y la imagen

$$dim(V) = dim(Im(\theta)) + \underbrace{dim(Nu(\theta))}_{0}$$

$$\Rightarrow dim(V) = dim(Im(\theta)) = dim(V^{**})$$

Como $Im(\theta)$ es subespacio de V^{**}.

$$\Rightarrow Im(\theta) = V^{**} \rightarrow \theta \text{ es sobreyectiva}$$

$$\therefore \theta \text{ es isomorfismo}$$

$\square$

3.12. Anulador de un Subespacio

Definición 3.12.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea S un subespacio de V. Denominaremos **Anulador** de S al conjunto:*

$$S^o = \{f \in V^* : f(s) = 0,\ \forall s \in S\}$$

$$= \{f \in V^* : S \subset Nu(f)\}$$

Observación 3.12.1. *S^o es subespacio de V^*. En efecto:*

- *Sean $f, g \in S^o$, entonces $f(s) = g(s) = 0,\ \forall s \in S$, luego $(f+g)(s) = f(s)+g(s) = 0,\ \forall s \in S$. De esto $f+g \in S^o$.*
- *Sean $\lambda \in \mathbb{K}, f \in S^o$, entonces $(\lambda f)(s) = \lambda f(s) = \lambda 0 = 0,\ \forall s \in S$, dado que $f(s) = 0,\ \forall s \in S$. Luego $\lambda f \in S^o$.*

Proposición 3.12.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita ($dim(V) = n$) y sea S subespacio de V. Entonces:*

$$\boxed{dim(S^o) = n - dim(S)}$$

Demostración. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de S y sean los vectores $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ tales que $\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Sea $B^* = \{\Pi_1, \ldots, \Pi_n\} \subset V^*$ la base dual de B. Entonces, para cada i con $r+1 \leq i \leq n$ se tiene que $\Pi_i(v_1) = \ldots = \Pi_i(v_r) = 0$ y por lo tanto, Π_i se anula sobre todo S. Por esto, $\{\Pi_{r+1}, \ldots, \Pi_n\} \subset S^o$.

Veamos que $\{\Pi_{r+1}, \ldots, \Pi_n\}$ genera a S^o.

Sea $g \in S^o$, dado que B^* es base de V^*, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Pi_i$$

Pero para cada $i \in I_n$: $\alpha_i = g(v_i)$. Además, como $g \in S^o$ y $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de S y $g(v_i) = 0$ para cada $0 \leq i \leq r$. En consecuencia, $\alpha_i = 0$ para cada $1 \leq i \leq r$ y por lo tanto $g \in \mathcal{L}(\{\Pi_{r+1}, \ldots, \Pi_n\})$. Luego $\{\Pi_{r+1}, \ldots, \Pi_n\}$ es una base de S^o.

De donde:

$$dim(S) + dim(S^o) = n$$

Gracias a esta última proposición tenemos una idea sobre como determinar el anulador de un subespacio.

□

Ejemplo 3.12.1. *Sea $S = \mathcal{L}(\{(1,1,1),(1,2,1)\}) \subset \mathbb{R}^3$. Hallar una base de S^o.*

Solución 3.12.1. *Consideramos una base de $\mathbb{R}^3$ que extienda a la base de S por ejemplo:*

$$B = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,0,0)\}$$

Si $B^* = \{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\}$ es la base dual de B por la proposición anterior $\{\Pi_3\}$ es base de S^o. A partir de:

$$\Pi_3(1,1,1) = 0,\ \Pi_3(1,2,1) = 0,\ \Pi_3(1,0,0) = 1$$

Extendemos por linealidad:

$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(1,2,1) + c(1,0,0)$$

$$x = a + b + c,\ y = a + 2b \ y \ z = a + b$$

De esto:

$$b = y - z,\ a = 2z - y \text{ y } c = x - z$$

Y obtenemos:

$$\Pi_3(x,y,z) = x - z$$

Proposición 3.12.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea S un subespacio de V. Entonces:*

$$\{v \in V : f(v) = 0,\ \forall f \in S^o\} = S$$

Demostración. Sea $T = \{v \in V : f(v) = 0,\ \forall f \in S^o\}$, podemos demostrar que $T = S$.

$(\supset)$

Si $v \in S$ para cada $f \in S^o$, se tiene que $f(v) = 0$. Luego $v \in T$.

$$(\subset)$$

Supongamos que existe $v \in T$ tal que $v \notin S$. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de S, entonces $\{v_1, \ldots, v_r, v\}$ es L.I.

Sean $v_{r+2}, \ldots, v_n \in V$ tales que $B = \{v_1, \ldots, v_r, \underbrace{v}_{v_{r+1}}, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$ es base de V. Si $B^* = \{\Pi_1, \ldots, \Pi_r, \Pi_{r+1}, \ldots, \Pi_n\}$ es base dual de B, se tiene que:

$$\Pi_{r+1}(v_1) = \ldots = \Pi_{r+1}(v_r) = 0, \ \textit{de donde}\ \Pi_{r+1} \in S^o$$

Como $v \in T$, se tiene que $\Pi_{r+1}(v) = 0$, lo que contradice que $\Pi_{r+1}(v) = 1$. Luego $T \subset S$. $\square$

Nota 3.12.1. *Con este resultado se tiene otra forma de encontrar las ecuaciones de un subespacio*

Ejemplo 3.12.2. *Sea $S = \mathcal{L}(\{(1,1,1),(1,2,1)\}) \subseteq \mathbb{R}^3$. Hallar ecuaciones (implicitas) para S.*

Solución 3.12.2. *En el ejemplo anterior, vimos que $S^o = \mathcal{L}(\{\Pi_3\}) \subset (\mathbb{R}^3)^*$, donde $\Pi_3(x,y,z) = x - z$. Entonces por la última proposición:*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0,\ \forall f \in S^o\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \lambda(x-z) = 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$$

En general podemos enunciar.

Observación 3.12.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea S un subespacio. Sea $\{f_1, \ldots, f_r\}$ una base de S^o. Entonces:*

$$S = \{v \in V . f_1(v) = 0 \vee \ldots \vee f_r(v) = 0\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{r} Nu(f_i)$$

Ejercicio 3.12.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $dim(V) = n$. Sean S y T subespacios de V. Entonces:*

1. $(S+T)^o = S^o \cap T^o$

2. $(S \cap T)^o = S^o + T^o$

Sugerencia: *Probar (1) directamente. Para (2), utilizar la doble inclusión:* $\supset$ *es rápida y para* $\subset$ *se debe usar (1) y el teorema del núcleo e imagen.*

3.13. Transpuesta de una Transformación Lineal

Definición 3.13.1. *Sean* V *y* W *dos* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales y sea* $T : V \longrightarrow W$ *lineal. Entonces* T *induce una función* $T^t : W^* \longrightarrow V^*$ *definida por* $T^t(f) = T^t_f : V \longrightarrow \mathbb{K}$*, donde* $T^t_f(v) = f(T(v))$

$$T^t : w^* \to v^*$$

$$f \to T^t_f$$

Donde: $T^t_f(v) = f(T(v))$

Proposición 3.13.1. *Sea* $T : V \to W$ *y sea* $T^t : W^* \to V^*$ *La transpuesta de* T *(**pullback asociado**). Entonces:*

a) $Nu(T^t) = [Im(T)]^o$.

b) Si V *y* W *son de dimensión finita, entonces:*

$$dim(Im(T^t)) = dim(Im(T)).$$

c) $Im(T^t) = (Nu(T))^o$.

Demostración. .

a)

$$f \in Nu(T^t) \Leftrightarrow T^t_f = 0 \Leftrightarrow f(T(v)) = 0,\ \forall v \in V \Leftrightarrow f \in [Im(T)]^o.$$

b)

$$dim(Im(T^t)) = dim(W^*) - dim(Nu(T^t))$$

$$= dim(W^*) - dim((Im(T))^o) = dim(W^*) - (dim(W) - dim(Im(T)))$$

$$= dim(Im(T))$$

c)

$$dim(Im(T^t)) = dim(Im(T)) = dim(V) - dim(Nu(T))$$

$$= dim((Nu(T))^o)$$

Solo faltaria probar que $Im(T^t) \subset (Nu(T))^o$. Sea $g \in Im(T^t)$, entonces $\exists f \in W^*$ tal que:

$$g = T^t_f \to \forall v \in Nu(T) : g(v) = T^t_f(v) = f(T(v)) = 0$$

Osea $g \in (Nu(T))^o$

$\square$

Capitulo N° 4

Unidad 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

4.1. Matrices

Definición 4.1.1. *Sean* $m, n \in \mathbb{N}$*. Consideremos el cuerpo* $\mathbb{K}$*,* $I_m = \{1, 2, \ldots, m\}$*,* $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$*. Una matriz de orden* $m \times n$ *es una función.*

$$A : I_m \times I_n \to \mathbb{K}$$

$$(i, j) \to A_(i, j) = a_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde:

- $\begin{pmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$ *es la fila* i *de* A*.*
- $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ *es la columna* j *de* A*.*
- $\mathbb{K}^{m\times 1}$: *conjunto de los vectores columna.*
- $\mathbb{K}^{1\times n}$: *conjunto de los vectores fila.*

Observación 4.1.1. *A* $\mathbb{K}^{m\times n}$ *se le puede dotar una estructura de espacio vectorial.*

4.1.1. Producto de Matrices

Definición 4.1.2. *Sea* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$*,* $B = [b_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times p}$ *se define:*

$$AB = [c_{ij}] \in \mathbb{K}^{m\times p}, \text{ donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Propiedades 4.1.1. .

1. *Es asociativa.*
2. *Es distributiva.*

En general no es conmutativa.

Definición 4.1.3. ***(Inversa de una matriz)***
Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos que A es inversible, si existe $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que:

$$AB = BA = I_n \text{ (matriz identidad de orden } n)$$

Nota 4.1.1. *No toda matriz posee inversa.*

4.1.2. Tipos de Matrices

- **Matriz nula:** $[0] \in \mathbb{K}^{m\times n}$.
- **Matriz triangular superior:** $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$, tal que $a_{ij} = 0, \ \forall j < i$
- **Matriz triangular inferior:** $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$, tal que $a_{ij} = 0, \ \forall j > i$
- **Matriz diagonal:** $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}/a_{ij} = 0, \ \forall i \neq j$.
- **Matriz simétrica:** $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}/a_{ij} = a_{ji}$.
- **Matriz antisimétrica:** $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}/a_{ij} = -a_{ji}$.

4.2. Operaciones elementales fila de una matriz

$$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \ a_i \ es \ una \ fila$$

i) Multiplicación de una fila por un escalar no nulo.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \leftarrow \ fila \ i$$

ii) Sumar una fila otra multiplicada por un escalar.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

iii) Intercambio de filas.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \leftarrow \ fila\ i \\ \vdots \\ a_i \leftarrow \ fila\ j \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

4.3. Matrices Elementales

4.3.1. Tipos de matrices elementales

i) $\lambda \neq 0$

$$E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$E_i(\lambda)A$: La fila i de A multiplicada por λ.

ii)

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{ij}(\lambda)A$: La fila i de A es aumentada λ veces la fila j.

iii)

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$E_{ij}A$: Se intercambian la fila i con la fila j de A.

Proposición 4.3.1. *Realizar una operación elemental de algún tipo es multiplicar por izquierda a la matriz por una matriz elemental del tipo anterior.*

Demostración. i)

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

$$e_1 A_1 = a_1 = e_1 A$$

$$\vdots$$

$$e_i A_1 = \lambda a_i = \lambda e_i A$$

$$\vdots$$

$$e_m A_1 = a_m = e_m A$$

Osea:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}}_{I_m} A_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \lambda e_i \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}}_{E_i(\lambda)} A$$

ii) y iii) Se prueba similarmente.

□

Proposición 4.3.2. .

i) $E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1}),\ \lambda \neq 0.$

ii) $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$

iii) $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$

Demostración. □

Lema 4.3.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, tal que: si $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ si $(Ax = 0 \to x = 0)$.*
Entonces existen matrices elementales $E_1, \cdots, E_m \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $I_n = (E_m E_{m-1} \cdots E_1)A$

Demostración. Probemos por inducción.

- $n = 1 : A = [\lambda],\ \lambda \in \mathbb{K}.$
  Si $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$, supongamos $\lambda = 0,\ A \cdot 1 = 0$ pero $1 \neq 0$. Luego $\lambda \neq 0$:

$$E_1(\lambda^{-1})A = [1] = I_1$$

- Supongamos que se cumple la tesis para $n - 1$.
- Para n: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que (si $Ax = 0 \to x = 0$).

$$Ae_1 \neq 0 \to \ (\textit{Entonces al menos uno de sus elementos es } \neq 0),\ \textit{pues } e_1 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Osea Ae_1 es la primera columna de A. Haciendo un cambio de filas si es necesario, podemos suponer que $a_{11} \neq 0$.

$$E_1(a_{11}^{-1})A = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ a_{21} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

$$E_{21}(-a_{21})E_1(a_{11}^{-1})A = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Así sucesivamente:

$$\underbrace{E_{n1}(-a_{n1})}_{E_n}\cdots\underbrace{E_{21}(-a_{21})}_{E_2}\underbrace{E_1(a_{11}^{-1})}_{E_1}A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & * \cdots & * \\ 0 & & \\ \vdots & F & \\ 0 & & \end{pmatrix}}_{F\in\mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}}$$

▶

Afirmación: Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible, si $(Ax = 0 \to x = 0)$ entonces $(BAx = 0 \to x = 0)$.

En efecto, $(BA)x = 0 \Rightarrow (B^{-1}B)Ax = B^{-1}0 = 0$.

$$\Rightarrow Ax = 0 \to x = 0$$

◀

$F_y = 0,\ y \in \mathbb{K}^{(n-1)\times 1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1(n-1)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}y_j \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Por la afirmación anterior:

$$\begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j}y_j \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Por hipótesis inductiva: $\exists F_1, \cdots, F_r \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ matrices elementales tales que:

$$(F_r \cdots F_1)F = I_{n-1}$$

Consideremos:

$$\tilde{F}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

$\tilde{F}_k$ es una matriz elemental.

$$\tilde{F}_r \cdots \tilde{F}_1 \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & F_r & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & F_{r-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & F_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & (F_r \cdots F_1)F & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Aplicando $n-1$ matrices elementales de tipo $E_{1i}(*),\ i = 2, \cdots, n$. Tenemos que:

$$\underbrace{E_R E_{R-1} \cdots E_1}_{matrices\ elementales} A = I_n$$

$\square$

Corolario 4.3.1. *$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ cumple $(Ax = 0 \to x = 0)$ si y solo si A es inversible.*

Demostración.

$$(\to)$$

A cumple que: $(Ax = 0 \to x = 0)$ por el lema anterior $\exists E_1, \cdots, E_m$ elementales tales que $E_m \cdots E_1 \cdot A = I$

$$\Rightarrow A = E_1^{-1} \cdots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1}$$

Osea: $A(E_m E_{m-1} \cdots E_1) = I \to A$ es inversible.

$$(\leftarrow)$$

A es inversible $\exists B / AB = BA = I$. Sea $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $Ax = 0$.

$$\Rightarrow BAx = 0 \to Ix = 0 \to x = 0$$

$\square$

Corolario 4.3.2. *A es inversible si y solo si sus columnas son L.I.*

Demostración.

$$(\rightarrow)$$

Sea A inversible, $A = (A_1 : \cdots : A_n)$. Si $\sum_{i=1}^{n} x_i A_i = 0 = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$

Por el corolario $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_i = 0, \ \forall i \in I_n$

$$\therefore \{A_1, \cdots, A_n\} \ es \ L.I.$$

$$(\leftarrow)$$

Sea $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $Ax = 0$

$$(A_1 : \cdots : A_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Osea:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i A_i = 0$$

Como $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ es L.I.: $\to x_i = 0, \ \forall i \in I_n \Rightarrow x = 0$. Por el corolario A es inversible. $\square$

Corolario 4.3.3. *Si A tiene inversa por la izquierda, entonces es inversible.*

Demostración. Existe B tal que $BA = I$, sea $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $Ax = 0$.

$$\Rightarrow BAX = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A \text{ } es \text{ } inversible$$

□

Corolario 4.3.4. *Si A tiene inversa por la derecha, entonces A es inversible.*

Demostración. Existe B tal que $AB = I$, entonces B tiene inversa por la izquierda. Por el corolario: B es inversible.

$$AB = I \Rightarrow ABB^{-1} = B^{-1}$$

$\Rightarrow A = B^{-1} \to A$ es inversible □

Corolario 4.3.5. *Toda matriz inversible es producto de matrices elementales.*

Ejercicio 4.3.1. *A^t: transpuesta de A.*

i) *A^t es inversible si y solo si A es inversible.*

ii) *A es inversible si y solo si sus filas son L.I.*

4.4. Matriz escalonada reducida

Definición 4.4.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, diremos que A es escalonada si:*

i) *El primer elemento no nulo de una fila no nula es 1, llamado **1-capital***

ii) *En la columna de un **1-capital**, los demás elementos son nulos*

iii) *No hay una fila nula sobre una no nula*

iv) *Sean $i_1, \dots, i_s$ las filas no nulas y el **1-capital** de la fila i_j está en la columna k_j*

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & k_1 & k_2 & & k_r \end{array}\\
\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\ & & & 1 & \dots & \vdots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \end{pmatrix}
\end{array}$$

Entonces $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ (A escalonada)

Observación 4.4.1. *La matriz nula y la matriz identidad son escalonadas*

Proposición 4.4.1. *Para $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ existen $E_1, \ldots, E_k \in \mathbb{K}^{m\times n}$ matrices elementales, tales que:*

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = A_0 \text{ (escalonada reducida)}$$

Demostración. Por inducción sobre m

- $m = 1 : A = (a_1, \ldots, a_n)$

  Si $A = 0$ no hay nada que probar

  Si $A \neq 0$, $A = (0, \ldots, 0, a_r, \ldots, a_n)$ con $a_r \neq 0$

  $$E_1(a_r^{-1})A = (0, \ldots, 0, 1, *, *, \ldots, *)$$

  Luego $E_1(a_r^{-1})A$ es **escalonada reducida**

- ***Hipótesis inductiva:*** Para $m-1$, se cumple la proposición

- Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & & * & \ldots & * \\ \vdots & & \vdots & A_{j_0} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & & * & \ldots & * \end{pmatrix}$$

  Sea A_{j_0} la primera columna no nula. Haciendo un cambio de filas se puede asumir que:

  $$A_{j_0} = \begin{pmatrix} a \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}, \text{ con } a \neq 0$$

  $$E_1(a_r^{-1})A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & & \vdots & a_2 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_m & * & \ldots & \ldots & * \end{pmatrix}$$

$$E_{m1}(-a_m)\dots E_{21}(-a_2)E_1(a^{-1})A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & 0 & & C & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

donde $C \in \mathbb{K}^{(m-1)\times(n-j_0)}$ tiene $(m-1)$ filas, por ***hipótesis inductiva***:

$\exists\ \widetilde{F_1}, \dots, \widetilde{F_l} \in \mathbb{K}^{(m-1)\times(m-1)}$ elementales tales que: $\widetilde{F_l}, \dots, \widetilde{F_1}C = C_0$ (escalonada reducida)

Definimos:

$$F_{m+j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{F_j} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \ j \in I_l$$

Luego:

$$E_{m+l}\dots E_{m+1}E_m\dots E_1A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & C_0 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

Con los ***1-capitales*** de C_0 anulamos al primer elemento de su columna y así obtenemos la matriz escalonada reducida.

$\square$

Corolario 4.4.1. *Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es inversible, la matriz escalonada proveniente de la proposición es la identidad.*

4.5. Espacio Fila

Definición 4.5.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. El espacio fila de A, denotado por $F(A)$, es el subespacio generado por las filas de A.*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \rightsquigarrow F(A) = \mathscr{L}(\{a_1, \dots, a_m\})$$

Proposición 4.5.1. *Si $E \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es una matriz elemental, entonces:*

$$F(EA) = F(A)$$

Demostración. .

i) Si $E = E_i(\lambda)$, $\lambda \neq 0$

$$\mathscr{L}\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_m\} = \mathscr{L}\{a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_m\}$$

$$F(A) = F(E_i(\lambda)A)$$

ii) Si Si $E = E_{ij}(\lambda)$

$$\mathscr{L}\{a_1, \dots, a_m\} = \mathscr{L}\{a_1, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_m\}$$

$$F(A) = F(E_{ij}(\lambda)A)$$

iii) Si $E = E_{ij}$

$$\mathscr{L}\{a_1, \dots, a_m\} = \mathscr{L}\{a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_m\}$$

$$F(A) = F(E_{ij}A)$$

□

Corolario 4.5.1. *Si $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es inversible, entonces:*

$$F(BA) = F(A)$$

Demostración. Como B es inversible $\exists\ E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathbb{K}^{m\times n}$ elementales, tales que:

$$B = E_k \ldots E_1$$

$$F(BA) = F(E_k \ldots E_1 A) = F(A)$$

$\square$

Corolario 4.5.2. *Sean $X, Y \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Si $Y = AX$ con A inversible, entonces $F(X) = F(Y)$*

Definición 4.5.2. *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ decimos que A es equivalente por filas a B, si $\exists\ P \in \mathbb{K}^{m\times n}$ inversible tal que: $B = PA$.* **NOTACIÓN:** *$A \sim_F B$ (A es equivalente por filas a B)*

Observación 4.5.1. .

i) $A \sim_F A, \forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ***(Reflexiva)***

ii) $A \sim_F B \Longrightarrow B \sim_F A$ ***(Simetría)***

iii) $A \sim_F B \wedge B \sim_F C \Longrightarrow A \sim_F C$ ***(Transitiva)***

Es decir, $\sim_F$ es ***relación de equivalencia***

Ejercicio 4.5.1. *Probar los tres*

Proposición 4.5.2. *Si $A \sim_F A_0$ donde A_0 es escalonada reducida, entonces la dimensión de F(A) es igual al número de 1-capitales de A_0.*

Demostración.

$$F(A) = F(A_0)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \cdots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & \underbrace{0}_{k_1} & \underbrace{0}_{k_2} & \cdots & \underbrace{0}_{k_r} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(A_0) = \mathscr{L}(\text{filas no nulas})$$

$$F(A_0) = \mathscr{L}(a_1, \ldots, a_{k_r})$$

Vemos que:

$$\{a_{k_1}, \dots, a_{k_r}\} \text{ es LI}$$

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{k_i} = 0$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \overbrace{1}^{k_1} & \overbrace{}^{k_2} & \dots & \overbrace{}^{k_r} \\ \vdots & & \vdots & & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = (0, \dots, 0)$$

$$\Longrightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in I_r$$

$\therefore \{a_{k_1}, \dots, a_{k_r}\}$ es LI $\square$

Teorema 4.5.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, entonces $\exists!$ $A_0 \in \mathbb{K}^{m\times n}$ escalonada reducida, tal que $A \sim_F A_0$*

Demostración. Sean $A_0, B_0 \in \mathbb{K}^{m\times n}$ escalonadas reducidas tales que $A \sim_F A_0 \wedge B \sim_F B_0 \Longrightarrow A_0 \sim_F B_0$.
Notar que, como las filas no nulas de A_0, B_0 forman base para $F(A) \to dim(F(A_0)) = dim(F(B_0)) = r$. Luego B_0 y A_0 tienen el mismo numero de filas no nulas.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overbrace{1}^{k_1} & \dots & \overbrace{}^{k_r} & \}v_1 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & 1 & \}v_r \\ 0 & & & & 0 & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \overbrace{1}^{h_1} & \dots & \overbrace{}^{h_r} & \}w_1 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & 1 & \}w_r \\ 0 & & & & 0 & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{L}\{v_1, \dots, v_r\} = \mathscr{L}\{w_1, \dots, w_r\}$$

Si $r = 1$:

$$\mathscr{L}\{v_1\} = \mathscr{L}\{w_1\}$$

$$\exists\ \alpha \in \mathbb{K} \text{ tal que } w_1 = \alpha v_1$$

$$(0, \dots, \underbrace{1}_{k_1} \ \ * \ \ *) = (0, \dots, \underbrace{\alpha}_{h_1} \ \ * \ \ *) \Longrightarrow \alpha = 1 \longrightarrow w_1 = v_1$$

Supongamos que $r = l - 1$:

$$\text{Si } \mathscr{L}\{v_1, \dots, v_r\} = \mathscr{L}\{w_1, \dots, w_r\}$$

Afirmación: $h_r \geq k_r$

Supongamos que $h_r < k_r$:

$$v_r \in \mathscr{L}\{w_1, \dots, w_r\}$$

$$v_r = \sum_{i=1}^{r} \lambda_r w_i$$

$$(0, \cdots, 1, *, \cdots, *) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \overbrace{*}^{h_r} & \cdots & \overbrace{*}^{k_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Si: $h_r < k_r$.

En $h_1 : 0 = \lambda_1 \cdot 1, \ \cdots \ , h_r : 0 = \lambda_r \cdot 1 \Rightarrow v_r = 0 (\rightarrow\leftarrow)$

$$\therefore h_r \geq k_r$$

Analogamente $h_r \leq k_r$

$$\therefore h_r = k_r$$

Usando el razonamiento anterior:

$$v_r = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i$$

$$\therefore \lambda_1 = \cdots = \lambda_{r-1} = 0$$

Para la posición $h_r = k_r$

$$1 = \lambda_r \cdot 1 \to \lambda_r = 1$$

$$v_r = w_r$$

$$\mathscr{L}(\{v_1, \cdots, w_{r-1}\}) = \mathscr{L}(\{w_1, \cdots, w_{r-1}\})$$

Por hipotesis inductiva:

$$v_1 = w_1$$
$$\vdots$$
$$v_{r-1} = w_{r-1}$$

Además $v_r = w_r$

$$\therefore A_o = B_o$$

$\square$

Corolario 4.5.3. *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tales que $F(A) = F(B)$ entonces $A \sim_F B$*

Demostración. Sean A_o y B_o las matrices escalonadas reducidas de A y B.

$$\Rightarrow F(A_o) = F(A) = F(B) = F(B_o)$$

$$\Rightarrow F(A_o) = F(B_o)$$

Por la forma *'canónica'* de las filas de la escalonada reducida $\to A_o = B_o$.

$$\therefore A_o \sim_F B_o \to A \sim_F B$$

$\square$

4.6. Matriz asociada a una transformación lineal

Definición 4.6.1. *Sean U, V $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita con $dim(U) = n$, $dim(V) = m$. Sean $\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ base de U y $\{v_1, \cdots, v_m\}$ base de V.*
Además sea:

$$T : U \to V$$

$$x \to T(x) = y, \qquad \begin{array}{l} x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j \\ y = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i v_i \end{array}$$

Además consideremos

$$N : U \to \mathbb{K}^{n\times 1} \qquad\qquad M : V \to \mathbb{K}^{m\times 1}$$

$$x \to \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad\qquad y \to \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Sea $A_T = [a_{ij}]$ tal que $T(\mu_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$ tenemos:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow^{T} & V \\ N \downarrow & & \downarrow M \\ \mathbb{K}^{n\times 1} & \longrightarrow^{\widetilde{T}} & \mathbb{K}^{m\times 1} \end{array}$$

$$\widetilde{T} = M \circ T \circ N^{-1}$$

Donde:

$$\text{Son isomorfismos} = \begin{cases} N : \ \mu_j \ \to \ e_j \in \mathbb{K}^{n\times 1} \\ M : \ v_i \ \to \ e_i \in \mathbb{K}^{m\times 1} \end{cases}$$

$$\widetilde{T}\overline{x} = A_T \overline{x}$$

▶

Veamos:

$$\widetilde{T} e_j = (M \ o \ T \ o \ N^{-1}) e_j = M(T(N^{-1} e_j))$$

$$= M(T_{\mu_j}) = M(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} M(v_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$
$$= A_j \ (Columnas\ j\ de\ A)$$

Osea $A = (A_1 : \cdots : A_n) = (\widetilde{T}e_1 : \cdots : \widetilde{T}e_n)$

◀

Definamos:

$$\varphi : L(\mathbb{K}^{n\times 1}, \mathbb{K}^{m\times 1}) \to \mathbb{K}^{m\times n}$$
$$T \to \varphi(T) = (Te_1 : \cdots : Te_n)$$

Afirmación: *φ es isomorfismo.*

- *φ es lineal (facil de verificar).*
- *φ es inyectiva:*
  Sea $T \in Nu(\varphi), \varphi(T) = 0 = (Te_1 : \cdots : Te_n)$
  $$\to Te_j = 0,\ \forall j \in I_n\ \ldots(*)$$
  Por el teorema de extensión por linealidad: $T = 0$ *es la única transformación lineal que satisface* **(*)**, *osea* φ *es inyectiva.*
- *φ es sobreyectiva:*
  Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $A = (A_1 : \cdots : A_n), A_i \in \mathbb{K}^{m\times 1}$. *Definimos* $T : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{m\times 1}$, *tal que* $Te_j = A_j$ *entonces* $\varphi(T) = (A_1 : \cdots : A_n) = A$ *osea* $A \in Im(\varphi) \to \varphi$ *es sobreyectiva; luego* φ *es isomorfismo.*

Ahora definamos:

$$\mu : L(U,V) \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$$
$$T \to \mu(T) = M \circ T \circ N^{-1} = \widetilde{T}$$

Afirmación: *μ es isomorfismo.*

- *μ es lineal.*

$$\mu(T+S) = M \circ (T+S) \circ N^{-1} = M \circ T \circ N^{-1} + M \circ S \circ N^{-1}$$
$$= \mu(T) + \mu(S)$$
$$\mu(\lambda T) = M \circ (\lambda T) \circ N^{-1} = \lambda(M \circ T \circ N^{-1})$$
$$= \lambda\mu(T)$$

- *Sea:*

$$\eta : L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \to L(U, V)$$

$$R \to M^{-1} \circ R \circ N$$

Veamos que η es la inversa de μ

$$(\mu \circ \eta)(R) = M \circ (M^{-1} \circ R \circ N) \circ N^{-1} = R$$

$$(\eta \circ \mu)(T) = M^{-1} \circ (M \circ T \circ N^{-1}) \circ N = T$$

Luego μ es isomorfismo, entonces:

$$\underbrace{T \quad \underbrace{\to^{\mu}}_{isomorfismo} \quad M \circ T \circ N^{-1} \quad \underbrace{\to^{\varphi}}_{isomorfismo} \quad A_T}_{\longrightarrow^{\varphi\circ\mu} isomorfismo,\ pues\ \varphi\ y\ \mu\ lo\ son}$$

$$A_T = (\varphi \circ \mu)(T)$$

$$\varphi \circ \mu : L(U, V) \to \mathbb{K}^{m\times n},\ isomorfismo$$

$$\begin{array}{cccc} T & x & = & y \\ \varphi\circ\mu \downarrow & \downarrow N & & \downarrow M \\ A_T & \overline{x} & & \overline{y} \end{array}$$

4.7. Matriz asociada a la composición

Expresaremos $A_{S\circ T}$ en función de A_S y A_T. Sea W, $dim(W) = p$, $\{w_1, \cdots, w_p\}$ base de W, sean $T : U \to W,\ S : W \to V$.

$$\begin{array}{ccccc} U & \to^{T} & W & \to^{S} & V \\ N \downarrow & & \downarrow P & & \downarrow M \\ \mathbb{K}^{n\times 1} & \to^{A_T} & \mathbb{K}^{p\times 1} & \to^{A_S} & \mathbb{K}^{m\times 1} \end{array}$$

Proposición 4.7.1. $A_{S\circ T} = A_S \cdot A_T$

Demostración.

$$(S \circ T)x = y$$

$$A_{S\circ T}\overline{x} = \overline{y} \to A_{S\circ T} = [c_{ij}]_{m\times n}$$

Tal que: $(S\circ T)(\mu_j)=\sum_{i=1}^{m} c_{ij}v_i$

$$A_T=[a_{ij}]_{p\times n}\ tal\ que\ T(\mu_j)=\sum_{i=1}^{p} a_{ij}w_i$$

▶

$$(S\circ T)(\mu_j)=S(\sum_{k=1}^{p} a_{kj}w_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{p} a_{kj}S(w_k)$$

◀

$A_s=[b_{ij}]_{m\times p}$ tal que $S(w_j)=\sum_{i=1}^{m} b_{ij}v_i$

$$(S\circ T)(\mu_j)=\sum_{k=1}^{p} a_{kj}(\sum_{i=1}^{m})b_{ik}v_i$$

Luego:

$$(S\circ T)(\mu_j)=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj})v_i=\sum_{i=1}^{m} c_{ij}v_i$$

$$\Rightarrow c_{ij}=\sum_{k=1}^{p} b_{ik}a_{kj}(elemento\ ij\ de\ A_S\cdot A_T)$$

Osea:

$$A_{S\circ T}=A_S\cdot A_T$$

□

Corolario 4.7.1. *Sea $T:U\to U$, luego $A_{T^n}=(A_T)^n$.*

Demostración. Usar inducción sobre n. □

Observación 4.7.1. *¿A_{ld}?, $ld:U\to U$, $dim(U)=n$*
$ldx=x$, $A_{ld}\overline{x}=\overline{x}$, $\forall\overline{x}\in\mathbb{K}^{n\times 1}$
Sabemos que $(A_{ld})_j=A_{ld}e_j=e_j$

$$(A_{ld})_0=(e_1:\cdots:e_n)=I_n$$

$$\therefore A_{ld}=I_n$$

Corolario 4.7.2. *Si $T:U\to V$ es isomorfismo, entonces A_T es inversible y $(A_T)^{-1}=A_{T^{-1}}$*

Demostración. Como $U \cong V \to dim(U) = dim(V) = m$

$$I_m = (A_{ld})_v = A_{T\ o\ T^{-1}} = A_T \cdot A_{T^{-1}}$$

Luego: A_T es inversible y $(A_T)^{-1} = A_{T^{-1}}$ □

Proposición 4.7.2. *Sea $T : U \to V$ transformación lineal. T es isomorfismo si y solo sí T es inversible.*

Demostración.

$$(\to)$$

Por el corolario anterior

$$(\leftarrow)$$

A_T es inversible:

$$\varphi^{-1} : \mathbb{K}^{m\times n} \to L(\mathbb{K}^{n\times 1}, \mathbb{K}^{m\times 1})$$

Donde:

$$\varphi^{-1}(A) = T_A : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{m\times 1}$$

$$\overline{x} \to A_{\overline{x}}$$

Entonces: $\varphi^{-1}(A_T^{-1}) = T_{A_T^{-1}}$

$$\begin{array}{ccc} V & \to^{S} & U \\ M \downarrow & & \downarrow N \uparrow N' \\ \mathbb{K}^{m\times 1} & \to^{A_T^{-1}} & \mathbb{K}^{n\times 1} \end{array}$$

Afirmación $S = N^{-1}\ o\ T_{A_T{}^{-1}}\ o\ M$ es la inversa de T.

$$(S\ o\ T) = N^{-1}\ o\ T_{A_T{}^{-1}}\ o\ M\ o\ T$$

$$= N^{-1}\ o\ T_{A_T{}^{-1}}\ o\ M\ o\ (M^{-1}\ oT_{A^T}\ o\ N)$$

$$= N^{-1}\ o\ T_{A_T^{-1}}\ o\ T_A\ o\ N = ld_U$$

Analogamente $T\ o\ S = ld_V$

$$\therefore T\ es\ isomorfismo\ y\ su\ inversa\ es\ S$$

□

Ejemplo 4.7.1. $U = V = \mathscr{L}(\{\overbrace{\sin}^{e_1}, \overbrace{\cos}^{e_2}\})$, $T : U \to V$, $T(f) = f'$. *Notamos que* $T(sen) = cos \wedge T(cos) = -sen \leftarrow Tx = y$

$$A_T\overline{x} = \overline{y} = \{sen = e_1, cos = e_2\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_Te_1 = A_T\binom{1}{0} = \binom{0}{1} \\ A_Te_2 = A_T\binom{0}{1} = \binom{-1}{0} \end{array}\right\} A_T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.7.2. $U = V = \mathscr{L}(\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}), T(f) = f'$

$$T_x = y \to A_T\overline{x} = \overline{y}$$

$$\left.\begin{array}{l} Te^x = e^x \to A_Te_1 = e_1 \\ Te^{2x} = 2e^{2x} \to A_Te_2 = 2e_2 \\ Te^{3x} = 3e^{3x} \to A_Te_3 = 3e_3 \end{array}\right\} A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Veamos $(T^{-1}f)(x) = \int_0^x f(t)dt + f(0)$

$$A_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.7.3. $U = V = \mathbb{C} = \mathscr{L}(\{\overbrace{1}^{e_1}, \overbrace{i}^{e_2}\})$, $\mathbb{C}$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial con* $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Sea $w = a + ib$, *definimos:* $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *definido por* $T_w(z) = w \cdot z$ *es* $\mathbb{R}$*-lineal. Hallaremos* A_{T_w}.

$$T_wx = y \to A_T\overline{x} = \overline{y}$$

Veamos $T_w(1) = w, T_w(i) = iw$

$$\left.\begin{array}{l} T_w(1) = w = a \cdot 1 + bi = ae_1 + be_2 \\ T_w(i) = iw = -b \cdot 1 + ai = -be_1 + ae_2 \end{array}\right\} A_{T_w} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.7.4. $U = V = \mathbb{R}^{2\times 2}$. *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *definimos:*

$$T_A : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Por $T_A x = Ax$. *Hallaremos la matriz asociada:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_4 \right\}$$

Es base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$T_A x = y \rightarrow A_{T_A}\overline{x} = \overline{y}$$

$$T_A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = ae_1 + ce_3$$

$$T_A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = ae_2 + ce_4$$

$$T_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = be_1 + de_3$$

$$T_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = be_2 + de_4$$

$$A_{T_A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$$

4.8. Aplicación: Transpuesta de una transformación lineal

Proposición 4.8.1. *Sean* U, V $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales con bases* $X = \{u_1, \cdots, u_m\}$, $Y = \{v_1, \cdots, v_m\}$. *Sean* X^*, Y^* *sus respectivas bases duales. Sea* $T : U \longrightarrow V$ *un transformación lineal y sea* A_T *su matriz asociada en las bases* X *e* Y. *Entonces la matriz asociada a* T^t *en las bases* Y^* *y* X^* *es la transpuesta de la matriz* A_T.

Demostración. Sea $B = [T^t]_{Y^*X^*}$

$$T(u_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k, j \in I_n$$

$$T^t(v_i^*) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} u_k^*, i \in I_m$$

- $T^t(v_i^*)(u_j) = v_i^*(T(u_j))$
$$= v_i^*\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}v_k\right) = a_{ij}$$

- $T^t(v_i^*)(u_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}u_k^*\right)(u_j) = b_{ji}$

Osea:

$$b_{ji} = a_{ij} \Rightarrow B = A^t$$

$\square$

Corolario 4.8.1. *Sean U, V $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con $dim(U) = n$, $dim(V) = m$, entonces:*

- $(T_1 + T_2)^t = T_1^t + T_2^t, \forall T_1, T_2 \in L(U, V)$.
- $(\lambda T)^t = \lambda T^t, \forall \lambda \in \mathbb{K}, T \in L(U, V)$.
- $L(U, V) \cong L(V^*, U^*)$
- *Sea W un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sean $T : U \longrightarrow V$, $S : V \longrightarrow W$ transformaciones lineales. Entonces:*

$$(S \circ T)^t = T^t \circ S^t$$

▶

Apartado: U es reflexivo si: $\boxed{U \cong U^{**}}$

◀

4.9. Matriz de cambio de base

Definición 4.9.1. .

1. *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, diremos que A es* ***equivalente*** *a B si $\exists$ $P \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversibles, tales que $B = PAQ$.*

   NOTACIÓN: $A \cong B$

2. *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, diremos que A es* **semejante** *a B si $\exists\, P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible, tal que $B = PAP^{-1}$*

   NOTACIÓN: $A \sim B$

3. *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, diremos que A es* **congruente** *a B si $\exists\, P \in \mathbb{K}^{n\times n}$, tal que $B = PAP^t$*

   NOTACIÓN: $A \equiv B$

Ejercicio 4.9.1. *Probar que las tres relaciones anteriores son de equivalencia.*

Definición 4.9.2. (Matriz de cambio de base) *Sea U un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $dimU = n$ con $n < \infty$ y $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ bases de U. Definimos la matriz de cambio de base de B a B' como la matriz $P_{BB'} = [p_{ij}]_{n\times n}$, tal que:*

$$u'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} u_j, \forall j \in I_n$$

Observación 4.9.1. *Se consideran las bases ordenadas*

Ejemplo 4.9.1. *En $\mathbb{R}^2$*

$$B = \{(1,2), (1,1)\}$$

$$B' = \{(0,1), (-1,3)\}$$

Veamos cual es la matriz $P_{BB'}$

$$\Longrightarrow u'_1 = (0,1) = p_{11}\overbrace{(1,2)}^{u_1} + p_{21}\overbrace{(1,1)}^{u_2}$$

$$\Longrightarrow u'_2 = (-1,3) = p_{12}\underbrace{(1,2)}_{u_1} + p_{22}\underbrace{(1,1)}_{u_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.9.2.

$$B = \{(1,0),(0,1)\}$$

$$B' = \{(0,1),(-1,3)\}$$

$$\Longrightarrow (0,1) = p_{11}(1,0) + \ p_{21}(0,1)$$

$$\Longrightarrow (-1,3) = p_{12}(1,0) + \ p_{22}(0,1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = p_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{22}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow P_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{Matriz de cambio de la base canónica } } B \textbf{\textit{ a la base }} B'$$

Ejemplo 4.9.3. $B_1 = \{(1,0),(1,3)\}$, $B_2 = \{(0,1),(1,1)\}$

$$\Rightarrow P_{B_1B_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposición 4.9.1. *Sean $B = \{u_1,\ldots,u_n\}$, $B' = \{u'_1,\ldots,u'_n\}$ bases de U. Entonces $P_{BB'}$ es inversible y su inversa es $P_{B'B}$*

Demostración. La matriz $P_{B'B} = P = [p_{ij}]_{n\times n}$ es tal que:

$$u'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}u_i$$

Y la matriz $P_{BB'} = Q = [q_{ij}]_{n\times n}$ es tal que:

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}u'_i$$

$$\Longrightarrow u'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}u_i = u'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ki}u'_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ki}p_{ij}\right)u'_k$$

$$\ulcorner \mathbf{u'_j = 0\cdot u'_1 + \ldots + 1\cdot u'_j + \ldots + 0\cdot u'_n} \lrcorner$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ki}p_{ij} = \begin{cases} 0 \ , \ j \neq k \\ 1 \ , \ j = k \end{cases}$$

$$[QP]_{kj} = \{ \begin{matrix} 0 \ , \ j \neq k \\ 1 \ , \ j = k \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow QP = I = I_n \rightsquigarrow P_{BB'}P_{B'B} = I_n$$

$$\therefore P_{BB'}^{-1} = P_{B'B}$$

$\square$

4.9.1. Matriz de cambio de base de una base cualquiera a la base canónica

Sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ una base

$$\begin{array}{ccccccccc} u_1 & = & p_{11}.\,e_1 & + & p_{21}.\,e_2 & + & \ldots & + & p_{n1}.\,e_n \\ u_2 & = & p_{12}.\,e_1 & + & p_{22}.\,e_2 & + & \ldots & + & p_{n2}.\,e_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ u_n & = & p_{1n}.\,e_1 & + & p_{2n}.\,e_2 & + & \ldots & + & p_{nn}.\,e_n \end{array}$$

$$\Longrightarrow P_B = [P_1 : \ldots : P_n] \text{ Matriz de cambio de base, de B a la base canónica}$$

Proposición 4.9.2. *Sean B, B' y B'' bases de U, entonces:*

$$P_{B''B} = P_{B''B'}P_{B'B}$$

Demostración. Sean

$$\left.\begin{array}{r} B = \{u_1, \ldots, u_n\} \\ B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\} \\ B'' = \{u''_1, \ldots, u''_n\} \end{array}\right\} \text{Bases de } U$$

$$u''_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}u_i = \sum_{k=1}^{n} q_{kj}u'_k$$

Pero $u'_k = \sum_{l=1}^{n} p_{lk}\ u_l$, luego:

$$u''_j = \sum_{k=1}^{n} r_{ij} u_i = \sum_{k=1}^{n} q_{kj} \left(\sum_{l=1}^{n} p_{lk} u_l \right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} p_{lk} q_{kj} \right) u_l$$

$$\Longrightarrow r_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} q_{kj} = [PQ]_{ij} \text{ , es decir, } R = PQ$$

□

Corolario 4.9.1. *Sean* $B = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$*,* $B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ *bases de* U*. Entonces:*

$$P_{B'B} = P_B^{-1} P_{B'}^{-1}$$

Donde P_B *es la* **matriz cambio de base de la base canónica a** B

Demostración. Sea $\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base canónica de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Por proposición anterior

$$P_{BB'} = P_{B\mathscr{E}} P_{\mathscr{E}B'} = (P_{\mathscr{E}B})^{-1} P_{\mathscr{E}B'} = P_B^{-1} P_{B'}$$

□

4.10. Relación entre las matrices asociadas a una misma transformación

Sean U, V $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con $dimU = n$, $dimV = m$ y $T : U \to V$ transformación lineal. Sean $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base de U y $C = \{v_1, \ldots, v_m\}$ base de V.

$$N : u_j \to e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \text{ con 1 en la posición } j$$

$$M : v_i \to e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times 1},\ \text{con 1 en la posición } i$$

$$\begin{array}{cccc} T & x & = & y \\ \downarrow & \downarrow \mathrm{N} & & \downarrow \mathrm{M} \\ A_T & \overline{x} & = & \overline{y} \end{array}$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \quad , \quad y = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i$$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

También:

$$B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\} \text{ base de } U$$

$$C' = \{v'_1, \ldots, v'_m\} \text{ base de } V$$

$$\begin{array}{cccc} T & x & = & y \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ B_T & \overline{x}' & = & \overline{y}' \end{array}$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x'_j u'_j \quad , \quad y = \sum_{i=1}^{m} y'_i v'_i$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \quad , \quad y = \sum_{i=1}^{m} y_i v_i \quad \ldots (*)$$

La matriz $P_{B'B} = [p_{ij}]$ es tal que: $u'_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} u_k$

Reemplazando en (*):

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} x'_j u'_j &&= \sum_{j=1}^{n} x'_j (\sum_{k=1}^{n} p_{kj} u_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} x'_j p_{kj}) u_k &&= \sum_{k=1}^{n} x_k u_k \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} x'_j p_{kj} = x_k \ , \forall \ k \in I_n$$

Osea $[x]_{kl} = [P_{B'B} x']_{k1}$

$$\Longrightarrow x = P_{B'B} x'$$

$$x = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} x'_j p_{kj}) u_k$$

$$\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} x'_j p_{kj}) e_k$$

Análogamente, consideremos $P_{C'C}$: $y = P_{C'C} y'$. Se tiene que:

$$Tx = y$$

$$A_T \overline{x} = \overline{y} \ , \ B_T \overline{x}' = \overline{y}'$$

Reemplazando:

$$A_T P_{B'B} \overline{x}' = P_{C'C} \overline{y}'$$

Pero:

$$B_T \overline{x}' = \overline{y}'$$

$$\Longrightarrow A_T P_{B'B} \overline{x}' = P_{C'C} B_T \overline{x}'$$

$$\Longrightarrow (A_T P_{B'B} - P_{C'C} B_T) \overline{x}' = 0$$

Luego:

$$A_T P_{B'B} - P_{C'C} B_T = 0$$

$$A_T P_{B'B} = P_{C'C} B_T$$

$$\Longrightarrow \mathbf{B_T = {P_{C'C}}^{-1} A_T P_{B'B}}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{B_T = P_{CC'} A_T P_{B'B}}$$

Proposición 4.10.1. *Sea $T : U \to V$ una transformación lineal, dos matrices asociadas a T siempre son equivalentes.*

Corolario 4.10.1. *Si $T : U \to U$ transformación lineal, dos matrices asociadas a T siempre son semejantes.*

4.11. Sistema de Ecuaciones Lineales

Definición 4.11.1. *Una ecuación de la forma:*

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} (*)$$

*Con $a_{ij} \in \mathbb{K}, \forall i \in I_m, j \in I_n$. Es llamado **sistema de 'm' ecuaciones con 'n' incógnitas**. Diremos que $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ es solución del sistema lineal **(*)**, si para $x_i = \lambda_i, \forall i \in I_n$ se satisface (*). Equivalentemente $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ es solución de **(*)**, si:*

$$Ax = b$$

Donde:

$$A = \underbrace{[a_{ij}]_{m\times n}}_{\text{matriz de coeficientes}}, x = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{solución}}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Proposición 4.11.1. *$Ax = b$ tiene solución si y solo si $b \in C(A)$ (espacio generado por las columnas de A, denominado espacio columna).*

Demostración.

$$(\to)$$

Sea $x_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ solución, entonces $Ax_0 = b$ osea $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j \Rightarrow b \in C(A)$.

$$(\leftarrow)$$

Si $b \in C(A)$, entonces $\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Tales que $b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Luego $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ es solución. □

Definición 4.11.2. *Dos sistemas lineales $Ax = b$ y $A'x = b'$ serán llamados sistemas equivalentes si tienen las mismas soluciones.*

Proposición 4.11.2. *Los sistemas de ecuaciones $Ax = b$ y $A'x = b'$ son equivalentes si y solo si $\exists P$ invertible tal que $A' = PA$ y $b' = Pb$.*

Demostración.

$$(\to)$$

Si $Ax_0 = b \wedge A'x_0 = b'$, para cualquier solución $A(x - x_0) = 0 \wedge A'(x - x_0) = 0$.
$\Rightarrow x$ es solución de $Ax = b \Leftrightarrow x - x_0$ es solución de $Ay = 0$.

$$\to Ay = 0 \Leftrightarrow A'y = 0$$

$T_A, T_{A'} : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{m\times 1}$ definidas por $T_A(y) = Ay, T_{A'}(y) = A'y$, luego $Nu(T_A) = Nu(T_{A'})$.

$$\Rightarrow dim(Im(T_A)) = dim(Im(T_{A'}))$$

Luego $Im(T_A) \cong Im(T_{A'})$

$$Im(T_A) = C(A),\ Im(T_{A'}) = C(A')$$

Supongamos que $\{A_1, \cdots, A_r\}$ es base de $C(A)$ (haciendo un cambio de orden si es necesario) y supongamos $\{A'_1, \ldots, A'_r\}$ es base de $C(A*)$ por el teorema de completación.

$$\exists V_{r+1}, \cdots, V_m\ \ \exists V'_{r+1}, \cdots, V'_m$$

Tales que: $\{A_1, \cdots, A_r, V_{r+1}, \cdots, V_m\}$ y $\{A'_1, \cdots, A'_r, V'_{r+1}, \cdots, V'_m\}$ son bases de $\mathbb{K}^{m\times 1}$.
Por el teorema de extensión por linealidad:

$$\exists! S : \mathbb{K}^{m\times 1} \to \mathbb{K}^{m\times 1}$$

tal que $S(A_j) = A'_j, \forall j \in I_r$

$$S(V_{r+k}) = V'_{r+k}, \forall k \in I_{m-r}$$

Afirmación: S o $T_A = T'_A$

En efecto, sea $x \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ con $x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

$$T_A x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{r} a_{ij} A_i$$

$$S(T_A x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{r} a_{ij} S(A_i)$$

$$S(T_A x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{r} a_{ij} A'_i = T_{A'} x$$

$\Rightarrow \exists P \in \mathbb{K}^{m\times n} : S(x) = P_x$

$$\rightarrow S(T_A x) = T_{A'} x$$

$$(PA)x = T(A'x), \forall x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$$

$\Rightarrow PA = A'$ como S es isomorfismo P es inversible.

$$\rightarrow A \sim_F A'$$

$$(\leftarrow)$$

Si $\exists P$ inversible tal que $A' = PA \wedge b' = Pb$.

Afirmación: $Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb$.

$$(\rightarrow)\ \textit{Obvio}$$

$$(\leftarrow)$$

$P^{-1}(PAx) = P^{-1}(Pb) \rightarrow Ax = b$

$\Leftrightarrow A'x = b' \Leftrightarrow$ los sistemas $Ax = b$ y $A'x = b'$ son equivalentes. □

Corolario 4.11.1. *Para el sistema* $Ax = b$ $\exists! A_o \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *escalonada reducida y* $b_o \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ *tales que:*

$$A_o x = b_o \text{ sea equivalente a } Ax = b$$

Demostración. Sea A_o la única matriz escalonada reducida de A.

$$PA = A_o \rightarrow \underbrace{PAx}_{A_o x} \underbrace{=}_{=} \underbrace{Pb}_{b_o}$$

□

Definición 4.11.3. *Diremos que el sistema lineal es homogéneo si* $b = 0$*, osea el sistema seria* $Ax = 0$

Proposición 4.11.3. *Consideremos al sistema homogéneo* $Ax = 0, A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *entonces el conjunto solución es un subespacio* S_A *y* $dim(S_A) = n - dim(F(A))$*.*

Demostración. S_A es un subespacio **(ejercicio)**, supongamos que A es escalonada reducida. Toda solución de $Ax = 0$ es de la forma: $x = \sum_{j=1}^{n-r} x_{Aj}w_j \Rightarrow S_A = \mathscr{L}\{w_1, \cdots, w_{n-r}\}$, como $\{w_1, \cdots, w_{n-r}\}$ es L.I. entonces es base:

$$dim(S_A) = n - r \ (\# \ de \ 1 - capitales)$$

$$= n - dim(F(A))$$

□

Proposición 4.11.4. *Sea* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$*, entonces:*

$$dim(F(A)) = dim(C(A))$$

Demostración. Definimos:

$$T_A : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{m\times 1}$$

$$T_A x = Ax$$

$$\Rightarrow Im(T_A) = C(A)$$

Recordar:

$$Ax = (A_1, \cdots, A_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j$$

Notar que:

$Nu(T_A)$ es el espacio solución de $Ax = 0$. Luego por el teorema del núcleo y la imagen:

$$n = dim(Nu(T_A)) + dim(Im(T_A))$$

$$n = n - dim(F(A)) + dim(C(A))$$

$$\Rightarrow dim(F(A)) = dim(C(A))$$

□

Definición 4.11.4. *El rango de una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ denotada como $M(A)$ (también $r(A)$, $rang(A)$, $rank(A)$, etc.) se define como $M(A) = dim(F(A)) = dim(C(A))$.*

Corolario 4.11.2. $M(A) = M(A^T)$

Observación 4.11.1. *Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$*

$$\left.\begin{array}{l} M(A) \leq m \\ M(A) \leq n \end{array}\right\} M(A) \leq min\{m, n\}$$

Corolario 4.11.3. *$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es invertible si y solo si $M(A) = n$.*

Demostración. A es inversible si y solo si sus columnas son L.I.. $\leftarrow dim(C(A)) = M(A) = n$
$Ax = B \to B \in C(A)$

$$Ax = (A_1, \cdots, A_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j$$

$\square$

Proposición 4.11.5. ***(Criterio de la matriz aumentada)***
$Ax = B$ tiene solución si y solo si $M(A) = M((A \vdots B))$, donde:

$$(A \vdots B) = (A_1 : \cdots : A_n : B)$$

Demostración. $Ax = B$ tiene solución $\Rightarrow B \in C(A)$

$$M(A) = dim(C(A)) = dim(\mathscr{L}\{A_1 : \ldots : A_n\})$$

$$B \in \mathscr{L}\{A_1 : \ldots : A_n\} \Leftrightarrow \mathscr{L}\{A_1 : \ldots : A_n\} \subset \mathscr{L}\{A_1 : \ldots : A_n\}$$

$$\text{Si } B \in \mathscr{L}\{A_1, \cdots, A_n\} \to B = \sim_{j=1}^{n} \lambda_j A_j$$

Es obvio que $\mathscr{L}\{A_1, \cdots, A_n\} \subset \mathscr{L}\{A_1, \cdots, A_n, B\}$ la otra inclusión se da porque:

$$B = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j$$

Osea $\mathscr{L}\{A_1, \cdots, A_n\} = \mathscr{L}\{A_1, \cdots, A_n, B\}$

$$dim(C(A)) = dim(C(A : B))$$

$$M(A) = M(A : B)$$

$\square$

4.11.1. Existencia y unicidad de los sistemas lineales

Lema 4.11.1. *Sean U, V $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, $y \in V$ $T : U \to V$ transformación lineal: $Tx = y$, tiene una solución $x_o \in U$, si y solo si el conjunto solución es $x_o + Nu(T)$.*

Demostración. Como x_o es solución, $Tx_o = y$.

$$(\to)$$

Sea $x \in U$ una solución, entonces $Tx = y = Tx_o \to T(x - x_o) = 0$.

$$\to x - x_o \in Nu(T) \to x \in x_o + Nu(T)$$

$$(\leftarrow)$$

Si $x \in x_o + Nu(T)$. $\exists v \in Nu(T) : x = x_o + v$.

$$\to Tx = Tx_o + T_v = y + 0 = y$$

$\to x$ es solución.
Consideremos $Ax = B$, sea S_A el conjunto solución, si $S_A \neq \phi$. Entonces, $S_A = x_o + Nu(T_A)$, donde $T_A x = Ax$.

$$\#S_A = \#(x_o + Nu(T_A))$$

$$\#S_A = \#Nu(T_A)$$

(Número de soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$)

□

Proposición 4.11.6. *Consideremos $Ax = B, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.*

1. *Si $M(A) = m$, entonces el sistema tiene solución.*

2. *Si $M(A) = n$, entonces el sistema tiene solución, esta es única.*

3. *Si $M(A) = m = n$, el sistema tiene una única solución.*

4. *Si $M(A) < n$, entonces tiene mas de una solución.*

Demostración. .

1. $M(A) = m = \#filas$.

$$M(A) = m = dim(\mathbb{K}^{m\times 1}) = dim(C(A)) = dim(Im(T_A))$$

$\rightarrow Im(T_A) = \mathbb{K}^{m\times 1} \rightarrow T_A$ es sobreyectiva para $B \in \mathbb{K}^{m\times 1}$, $\exists x_o \in \mathbb{R}$ tal que:

$$T_A x_o = B = Ax_o = B$$

$\therefore$ El sistema tiene solución.

2. $M(A) = n = dim(Im(T_A))$. Por el teorema del núcleo e imagen.

$$T_A : \mathbb{K}^{n\times 1} \rightarrow \mathbb{K}^{m\times 1}$$

$\rightarrow n = dim(Nu(T_A)) + dim(Im(T_A))$

$$n = dim(Nu(T_A)) + n \rightarrow dim(Nu(T_A)) = 0$$

$\Rightarrow Nu(T_A) = \{0\}$ osea T_A es inyectiva.
Supongamos que x_1 y x_2 son soluciones de $Ax = B \rightarrow Ax_1 = B = Ax_2 \rightarrow T_A x_1 = T_A x_2$.
Como T_A es inyectiva: $x_1 = x_2$.

$$\#S_A = \#Nu(T_A)$$

$$\#S_A = \#\{0\} = 1$$

3. $M(A) = m = n$, de 1 y 2 tiene solución y es única.

4. $M(A) < n$
$dim(Im(T_A))$, aplicando el teorema del núcleo e imagen:

$$n = dim(Nu(T_A)) + \overbrace{dim(Im(T_A))}^{M(A)}$$

$$n - dim(Nu(T_A)) = M(A) < n$$

Osea $dim(Nu(T_A)) > 0$.

$$\rightarrow Nu(T_A) \neq \{0\}$$

$$\#S_A = \#Nu(T_A) > 1$$

$\square$

Capitulo N° 5

Unidad 4

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

5.1. Determinantes

5.1.1. Formas multilineales

Definición 5.1.1. *Sea $r \in \mathbb{N}$, una forma r-lineal en el $\mathbb{K}$-espacio vectorial U es una función:*

$$f : \underbrace{U \times \ldots \times U}_{r \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{K}$$

que es lineal en cada una de sus variables, es decir:

- $f(v_1, \ldots, v_i + v_i', \ldots, v_r) = f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r) + f(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_r)$
- $f(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_r) = \lambda f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_r)$

$\forall\ v_1, \ldots, v_i, v_i', \ldots, v_r \in U$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$

Observación 5.1.1. *Si uno de los vectores $v_j = 0$, entonces: $f(v_1, \ldots, v_r) = 0$*

Teorema 5.1.1. *Sea U un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita con base $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Para cada una de las n^r secuencias ordenadas $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ de enteros comprendidos entre 1 y n, fijemos un número real $a_J = a_{j_1, \ldots, j_r}$. Existe una y solamente una, forma r-lineal $f : U \times \ldots \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f(u_{j_i}, \ldots, u_{j_r}) = a_J$, $\forall J = (j_1, \ldots, j_r)$*

Demostración. **(Ejercicio. Ver Elon Lages - pág 288)** □

►

$\{u_1, u_2, u_3\}$, f : forma:

$$\begin{array}{lll} f(u_1, u_1) = a_{11} & f(u_1, u_2) = a_{12} & f(u_1, u_3) = a_{13} \\ f(u_2, u_1) = a_{21} & f(u_2, u_2) = a_{22} & f(u_2, u_3) = a_{23} \\ f(u_3, u_1) = a_{31} & f(u_3, u_2) = a_{32} & f(u_3, u_3) = a_{33} \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists! f : U^r \to \mathbb{K}$$

Tal que $f(u_i, u_j) = a_{ij}$

◄

Corolario 5.1.1. *Sea $dim_{\mathbb{K}} U = n$. El espacio vectorial $L_r = (U, \mathbb{K})$ de todas las formas r-lineales $f : U \times \ldots \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ tiene dimensión n^r*

Observación 5.1.2. *Esto determina, una vez fijada una base de U, que:*

$$L_r(U,\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^r} \text{ , donde } dimU = n$$

Definición 5.1.2. *Una forma r-lineal $f : U \times \ldots \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ se le denominará **alternada**, si:*

$$f(v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_r) = 0$$

Es decir, f se anula si hay vectores repetidos en la entrada.

Observación 5.1.3. *f es alternada, si y solo si, f es antisimétrica. Pues, si f es alternada:*

$$\begin{array}{ccccc} f(\underbrace{u_1, \ldots, u, \ldots, u, \ldots, u_r}) & = & f(\underbrace{v_1, \ldots, v, \ldots, v, \ldots, v_r}) & = & 0 \\ \varphi(u,u) & = & \varphi(v,v) & = & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \varphi(u,u) + \varphi(v,v) = \varphi(u+v, u+v) = 0$$

$$\begin{array}{cccccccccc} \Longrightarrow & \underbrace{\varphi(u,u)} & + & \varphi(u,v) & + & \varphi(v,u) & + & \underbrace{\varphi(v,v)} & = & 0 \\ & 0 & + & \varphi(u,v) & + & \varphi(v,u) & + & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \varphi(u,v) = -\varphi(v,u)$$

$$f(v_1, \ldots, u, \ldots, v, \ldots v_r) = -f(v_1, \ldots, v, \ldots, u, \ldots, v_r)$$

Es decir, f es antisimétrica.

Si f es antisimétrica:

$$\varphi(u,u) = -\varphi(u,u) \Longrightarrow 2\varphi(u,u) = 0 \Longrightarrow \varphi(u,u) = 0 \text{ , es decir } f \text{ es alternada}$$

Corolario 5.1.2. *Si f es alternada, para toda permutación σ de los enteros $\{1, 2, \ldots, r\}$ y toda lista de vectores $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset U$, se tiene:*

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = sign(\sigma) f(v_1, \ldots, v_r)$$

donde

$$sign(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{, si el número de permutaciones es par} \\ -1 & \text{, si el número de permutaciones es impar} \end{cases}$$

Notación: Sea U un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

$$\mathcal{A}_r(U) : \text{Espacio de las } r\text{-formas lineales alternadas}$$

$$f : U \times \ldots \times U \longrightarrow \mathbb{K}$$

Teorema 5.1.2. *Sea* $f : U \times \ldots \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ *una forma* r*-lineal alternada. Si los vectores* $v_1, \ldots, v_r$ *son LD, entonces:*

$$f(v_1, \ldots, v_r) = 0$$

Demostración. (Ejercicio) □

Corolario 5.1.3. *Si existe una forma* r*-lineal alternada* $f : U \times \ldots \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ *tal que* $f(v_1, \ldots, v_r) \neq 0$*, entonces los vectores* $v_1, \ldots, v_r$ *son L.I.*

Demostración. (Contrarrecíproco del teorema anterior) □

Corolario 5.1.4. *Si* $r > dim(U)$*, entonces* $A(E) = \{0\}$

Demostración. (Ejercicio. Consecuencia directa del teorema anterior) □

A partir de ahora, nos concentraremos en estudiar las formas n-lineales alternadas en un espacio dimensional, es decir las $f \in \mathcal{A}_n(U)$, donde $n = dim_{\mathbb{K}} U$.

Teorema 5.1.3. *Sea* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *una base del* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* U*. Para todo escalar* a*, existe una única forma* n*-lineal alternada* $f : U \times \ldots \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ *tal que:*

$$f(u_1, \ldots, u_n) = a$$

Demostración. **(Ver Elon Lages - pág 293)** Supongamos que existe $f \in A_n(U)$ tal que $f(u_1, \ldots, u_n) = a$. Supongamos, además, que existe $g \in A_n(U)$ tal que $g(u_1, \ldots, u_n) = a$. Se tendría que:

- $g(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = 0 = f(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) = 0$, si hubiese repeticiones en la lista
- $$\begin{aligned} g(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) &= g(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) \\ &= sign(\sigma) g(u_1, \ldots, u_n) \\ &= sign(\sigma) \cdot a = sign(\sigma) f(u_1, \ldots, u_n) \\ &= f(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) \\ &= f(u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \end{aligned}$$

Notamos que para cada permutación $I = (i_1, \ldots, i_n) = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ se cumple que $f(u_I) = g(u_I)$ y si hubiese repeticiones $f(u_I) = g(u_I) = 0$.

Por el primer teorema f es única y está determinada por $f(u_1,\ldots,u_n)$

Ahora veamos cómo obtener dicha forma n-lineal alternada $f : U\times\ldots\times U \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que:

$$f(u_{i_1},\ldots,u_{i_n}) = \begin{cases} 0 \text{ , si hay repeticiones} \\ a \text{ , si la permutación es par} \\ -a \text{ , si la permutación es impar} \end{cases}$$

Por el primer teorema, existe una única forma n-lineal $f : U\times\ldots\times U \longrightarrow \mathbb{K}$ con estas propiedades. Falta ver que f es alternada.

Sea $v=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, vector en U cualquiera, entonces:

$$\begin{aligned} f(\ldots,u,\ldots,u,\ldots) &= f(\ldots,\textstyle\sum x_i u_i,\ldots,\sum x_j u_j,\ldots) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j f(\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i x_i f(\ldots,u_i,\ldots,u_i,\ldots) \\ &\quad + \sum_{i<j}^{n} x_i x_j f(\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots) \\ &\quad + \sum_{i>j}^{n} x_i x_j f(\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots) \\ &= 0 + \sum_{i<j}^{n} x_i x_j f(\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots) \\ &\quad - \sum_{i>j}^{n} x_i x_j f(\ldots,u_j,\ldots,u_i,\ldots) \\ &= \sum_{i<j}^{n} x_i x_j f(\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots) \\ &\quad - \sum_{j>i}^{n} x_j x_i f(\ldots,u_i,\ldots,u_j,\ldots) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Corolario 5.1.5. *Si $dim U = n$, entonces $dim A_n(U) = 1$*

Demostración. Sea $\{u_1,\ldots,u_n\}$ base de U, existe $f\in A_n(U)$ tal que $f(u_1,\ldots,u_n)=1$. Entonces para todo $g\in A_n(U)$, si $g(u_1,\ldots,u_n)=a$, se tiene también que $af(u_1,\ldots,u_n)=a$, es decir, $g=af$. Por tanto $\{f\}$ genera a $A_n(U)$. □

Corolario 5.1.6. *Si* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *es una base de* U *y* $0 \neq f \in A_n(U)$*, entonces* $f(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$

Demostración. Por el teorema $\exists\ f_0 \in A_n(U)$ tal que $f_0(u_1, \ldots, u_n) = 1$. Por el corolario anterior $f = af_0$ (con $a \neq 0$), luego $f(u_1, \ldots, u_n) = af_0(u_1, \ldots, u_n) = a \neq 0$. □

Toda transformación lineal $T : U \longrightarrow V$ induce una transformación lineal $T^* : Alt_n(V) \longrightarrow Alt_n(U)$ definida por

$$T^*(f) : U \times \ldots \times U \longrightarrow \mathbb{K}$$

donde $T^*(f)(v_1, \ldots, v_n) = f(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ **(*Pullback* de f asociado a T)**

Nota 5.1.1. $U \to^T V$.

$$\begin{array}{ccc} U \times \ldots \times U & & V \times \ldots \times V \\ & & \downarrow f \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

$$T^*(f)(u_1, \ldots, u_n) = f(T(u_1), \ldots, T(u_n))$$

Ejercicio 5.1.1. *Verificar que:*

1. $T^*f \in A_n(U)$
2. $(T+S)^* = T^* + S^*$
3. $(\lambda T)^* = \lambda T^*$
4. $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
5. $I^* = I$
6. *Si* T *es isomorfismo,* T^* *también lo es. Además* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Recordar que estas son las propiedades de la ***transpuesta***

Sea ahora $T : U \longrightarrow U$ un endomorfismo. Como $dimA_n(U) = 1$, el operador lineal $A^* : A_n(U) \longrightarrow A_n(U)$ consiste en la multiplicación por un escalar, que denominaremos el ***DETERMINANTE*** del operador $T : U \longrightarrow U$ y denotaremos por $det(T)$. Asi tenemos que:

$$f(Tv_1, \ldots, Tv_n) = (detT) \cdot f(v_1, \ldots, v_n)$$

$\forall f \in A_n(U)$ y cualesquiera $v_1, \ldots v_n \in U$

Teorema 5.1.4. *Si T, $S : U \longrightarrow U$ son endomorfismos, entonces $det(S \circ T) = detS \cdot detT$*

Demostración. Sean $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base de U y $0 \neq f \in A_n(U)$, luego $f(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} det(S \circ T) \cdot f(u_1, \ldots, u_n) &= f(S \circ Tu_1, \ldots, S \circ Tu_n) \\ &= detS \cdot f(Tu_1, \ldots, Tu_n) \\ &= detS \cdot detT \cdot f(u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow det(S \circ T) = detS \cdot detT$$

□

Teorema 5.1.5. *El operador lineal $T : U \longrightarrow U$ es inversible, si y solo si, $det \neq 0$. En caso afirmativo, se tiene que $det(T^{-1}) = (detT)^{-1}$*

Demostración. .

- **($\longrightarrow$):** Si existe T^{-1}, entonces $T \circ T^{-1} = I$, luego $detT \cdot det(T^{-1}) = det(T \circ T^{-1}) = detI = 1$. Es decir, $detT \neq 0$ y $det(T^{-1}) = (detT)^{-1}$
- **($\longleftarrow$):** Si $detT \neq 0$, entonces, fijando una base $\{u_1, \ldots, u_n\} \subset U$ y una forma n-lineal no nula $f : U \times \ldots \times U \longrightarrow \mathbb{K}$, tenemos:

  $$f(Tu_1, \ldots, Tu_n) = detT \cdot f(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$$

  Luego, por un corolario anterior:

  $$f(Tu_1, \ldots, Tu_n) \text{ es LI } \longrightarrow \text{ es base de } U$$

  Entonces T es inversible, pues lleva bases en bases, es decir, es isomorfismo

□

Corolario 5.1.7. *El sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $(L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n))$, posee una única solución, si y solo si, $detA \neq 0$*

Ahora pasemos a definir el determinante de una matriz cuadrada. Dada $A \in M_{\mathbb{K}}(n, n)$, escribiremos de ahora en adelante $A = [A_1 : \ldots : A_n]$ (A_i: vectores columna de A). Sea $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ el endomorfismo cuya matriz asociada a la base canónica de $\mathbb{K}^n$ sea A, es decir:

$$Te_1 = A_1, \ \ldots \ , Te_n = A_n$$

Definiremos el determinante de la matriz A como el determinante de la transformación T. Así, cuando $f_0 \in A_n(\mathbb{K}^n)$ es la forma n-lineal alternada tal que $f_0(e_1, \dots, e_n) = 1$, entonces:

$$detA = detT = detT \cdot f_0(e_1, \dots, e_n) = f_0(Te_1, \dots, Te_n)$$

Es decir:

$$detA = f_0(A_1, \dots, A_n)$$

De lo anterior: $det(A) = f_o[A_1, \cdots, A_n]$ donde $f_o \in Alt_n(\mathbb{K}^n)$ es tal que $f_o(e_1, \cdots, e_n) = 1$. Por ende, $det : M(n,n) \to \mathbb{K}$ es la única función n-lineal alternada de las columnas de la matriz $A = [A_1, \cdots, A_n]$ que toma el valor de 1 en la matriz identidad I_n

Por lo visto anteriormente, para cualquier forma n-lineal alternada $f(A) = f(A_1, \cdots, A_n)$, se tiene que $f(A) = c \cdot det(A)$, donde $c = f(I_n) = f(e_1, \cdots, e_n)$.

Por la definición de $det(A) = det(A_1, \cdots, A_n)$ como una forma n-lineal alternada, tenemos que:

1. $det[\cdots, v_i + w_i, \cdots] = det[\dots, v_i, \cdots] + det[\cdots, w_i, \cdots]$.
2. $det[\cdots, \lambda v_i, \cdots] = \lambda det[\cdots, v_i, \cdots]$.
3. $det[\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots] = -det[\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots]$.
4. $det[e_1, \cdots, e_n] = det(I_n) = 1$. (Gracias a esto, se puede inducir).
5. $det[\cdots, v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j, \cdots] = det[\cdots, v_i, \cdots]$

(¡Ejercicio!)

Propiedad 5.1.1. *El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal.*

Demostración. Sea $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M(n,n)$. Escribimos $A = [A_1, \cdots, A_n]$, tenemos:

$$A_1 = a_{11}e_1$$

$$A_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$$

$$A_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$$

$$\vdots$$

$$A_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + a_{3n}e_3 + \cdots + a_{nn}e_n$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} det(A) &= det[a_{11}e_1, A_2, \cdots, A_n] \\ &= a_{11}det[e_1, a_{12}e_1 + a_{22}e_2, A_3, \cdots A_n] \\ &= a_{11}det[e_1, a_{22}e_2, A_3, \cdots A_n] \\ &= a_{11}a_{22}det[e_1, e_2, a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3, \cdots A_n] \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}det[e_1, e_2, e_3, A_4, \cdots A_n] \end{aligned}$$

De esta manera se tiene:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$\square$

Proposición 5.1.1. ***(Regla de Cramer)***
Sea $A \in M(n,n)$ una matriz inversible. Dado $b \in \mathbb{K}^n$, denotemos $A[i,b]$ a la matriz que se obtiene de sustituir a la i-ésima columna de A por b. La solución del sistema $Ax = b$ de n ecuaciones con n incógnitas es el vector $x = (x_1, \cdots, x_n)$ dada por:

$$x_i = \frac{det(A[i,b])}{det(A)};\ i \in I_n$$

Demostración. Si $A = [A_1, \cdots, A_n]$, como $Ax = b$ significa que $b = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n$. Luego:

$$det(A[i,b]) = det[A_1, \cdots, b, \cdots A_n]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k det[A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_n]$$

$$= x_i det[A_1, \cdots, A_n]$$

$$= x_i det(A)$$

$$\therefore x_i = \frac{det(A[i,b])}{det(A)}$$

$\square$

Teorema 5.1.6. *El determinante del operador lineal $T : U \to U$ es igual al determinante de una matriz asociada a T en cualquier base de U.*

Demostración. Sea $A = [a_{ij}] \in M(n,n)$ la matriz T en una base $\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ base de U. Por definición, $det(T) = det(T_o)$, donde $T_o : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es el operador cuya matriz asociada en la base canónica es A. Sea $\varphi : U \to \mathbb{K}^n$ el isomorfismo que transforma la base $\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$ en la base canónica de $\mathbb{K}^n$. Para cada $\mu_j \in U$, se tiene que:

$$T\mu_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mu_i, \; luego$$

$$\varphi(T\mu_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varphi(\mu_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$$
$$= T_o(e_j) = T_o(\varphi(\mu_j))$$

De esto $\varphi \; o \; T = T_o \; o \; \varphi$, es decir:

$$T_o = \varphi \; o \; T \; o \; \varphi^{-1}$$

Por lo tanto, para cada $f \in A_n(\mathbb{K}^n)$ se tiene:

$$det(A).f = T^* \; o \; f = (\varphi \; o \; T \; o \; \varphi^{-1})^* f$$

$$= (\varphi^*)^{-1} \; o \; T^* \; o \; \varphi^* \cdot f$$

$$= (\varphi^*)^{-1}.det(T) \; o \; \varphi^* f$$

$$= det(T)f$$

$$\therefore det(A) = det(T)$$

$\square$

5.1.2. Cálculo del determinante

Sea la forma $f_o \in A_n(\mathbb{K}^n)$ tal que $f_o(e_1, \cdots, e_n) = 1$, luego $f_o(e_{\sigma(1)}, \cdots, e_{\sigma(n)}) = sign(\sigma)$, $\forall$ $\sigma \in S_n$(Grupo de permutaciones de n elementos). Dada la matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n} = A[A_1 : \cdots : A_n]$, tenemos:

$$\begin{array}{c} A_1 = \displaystyle\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}e_{i_1} \\ \vdots \\ A_n = \displaystyle\sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n 1}e_{i_n} \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11}e_1 & \vdots & \cdots \\ a_{21}e_2 & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ a_{n1}e_n & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Luego:

$$det(A) = f_o(A_1, \cdots, A_n)$$
$$= f_o\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1}e_{i_1}, \cdots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n}e_{i_n}\right)$$

$$= \sum_{i_1 \cdots i_n = 1}^{n} a_{i_1 1}. \cdots .a_{i_n n}.f_o(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}) \ldots (*)$$

En esta sumatoria se anulan los términos donde hayan repeticiones entre los índices $i_1, \ldots, i_n$ quedando solamente aquellos en los que:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n) = (\rho(1), \rho(2), \ldots, \rho(n))$$

Y si definimos $\sigma = \rho^{-1}$, tendríamos:

$$a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} = a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

►

No necesariamente $a_{kk} = a_{k\sigma(k)}$:

$$a_{\rho(k)k} = a_{q\sigma(q)}, \text{ donde:}$$

$$\rho : k \to q$$

$$\sigma : q \to k$$

◄

Luego, reemplazamos en (*):

$$\boxed{det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sign_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}}$$

Ejemplo 5.1.1. *Determinante de una matriz $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$*

$$S_3 = \left\{ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} sign_\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

$$\begin{aligned} det(A) &= sign_{\sigma_1} a_{11}a_{22}a_{33} + sign_{\sigma_2} a_{11}a_{23}a_{32} \\ &\quad + sign_{\sigma_3} a_{12}a_{21}a_{33} + sign_{\sigma_4} a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad + sign_{\sigma_5} a_{13}a_{21}a_{32} + sign_{\sigma_6} a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.1.2. *Realizar este cálculo para una matriz* $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$.

Notamos que también:

$$det(A) = \sum_{\rho} sign_{\rho} a_{\rho(1)} \dots a_{\rho(n)n}$$

Osea:

$$\boxed{det(A) = det(A^T)}$$

Teorema 5.1.7. *Sean* $B \in M(r,r), C \in M(r, n-r), D \in M(n-r, n-r)$ *y* $0 \in M(n-r, r)$ *matriz nula. Sea además:*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M(n,n)$$

Entonces:

$$det(A) = det(B) \cdot det(D)$$

Demostración. Sea C una matriz fija arbitraria, definimos:

$$f_C(B,D) = det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Es r-lineal alternada de las columnas de B y $n-r$-lineal alternada de las filas de D.

$$det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = detB \cdot f_C \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & D \end{pmatrix}}$$

$$= detB \cdot detD \cdot f_C \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & C \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}}_{1 (Por\ ser\ triangular\ superior)}$$

□

Observación 5.1.4. *De esto se puede inducir, si:*

$$A = \begin{pmatrix} B & C & D \\ 0 & E & F \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$det(A) = det(B) det(E) det(G)$$

Donde B, E, G *son cuadradas.*

Dado $A = [a_{ij}] \in M(n,n)$, denotaremos por A_{ij} a la matriz $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de omitir la i-ésima fila y j-ésima columna.

Definición 5.1.3. *El determinante de A_{ij} es denominado como el ij-ésimo menor de A, también denominada el menor relativo al elemento a_{ij}.*

Cálculo del determinante

Si $A = [e_1 : A_2 : \ldots : A_n]$ por el teorema anterior $det(A) = det(A_{11})$, luego si $A = [e_i : A_2 : \ldots : A_n]$ entonces $det(A) = (-1)^{i+1}det(A_{i1}). \cdots (*)$

- Luego, para $A = [a_{ij}] = [A_1 : \ldots : A_n]$ con $A_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_i$.

  $$\Rightarrow det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot det[e_i : A_1 : \ldots : A_n]$$

  Por (*):

  $$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i1} det(A_{i1})$$

  Ahora veamos el caso en general:

  Si $A = [A_1 : \ldots : A_{j-1} : e_i : A_{j+1} : \ldots : A_n]$

  $$\rightarrow det(A) = (-1)^{j+i} det(A_{ij})$$

- Análogamente al paso anterior, si:

  $$A = [A_1 : \ldots : A_j : \ldots : A_n]$$
  $$A_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

  Entonces:

  $$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} det[A_1 : \ldots : A_{j-1} : e_i : A_{j+1} : \ldots : A_n]$$

  Lo cual, por lo anterior:

  $$\boxed{\underbrace{det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})}_{\text{Desarrollo del determinante de A según la } j\text{-ésima columna}}}$$

  Como $det(A) = det(A^T)$, de manera análoga se tiene el desarrollo del determinante respecto a la i-ésima fila:

  $$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

5.2. Adjunta de una matriz

De lo obtenido podemos decir:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}a_{ik}det(A_{jk}) = det(A)\cdot\delta_{ij}$$

Donde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Luego definimos la **MATRIZ ADJUNTA** ($adj(A) \in \mathbb{K}^{n\times n}$) como:

$$(adj(A))_{ij} = (-1)^{i+j}det(A_{ji}), \forall i, j \in I_n$$

De esto:

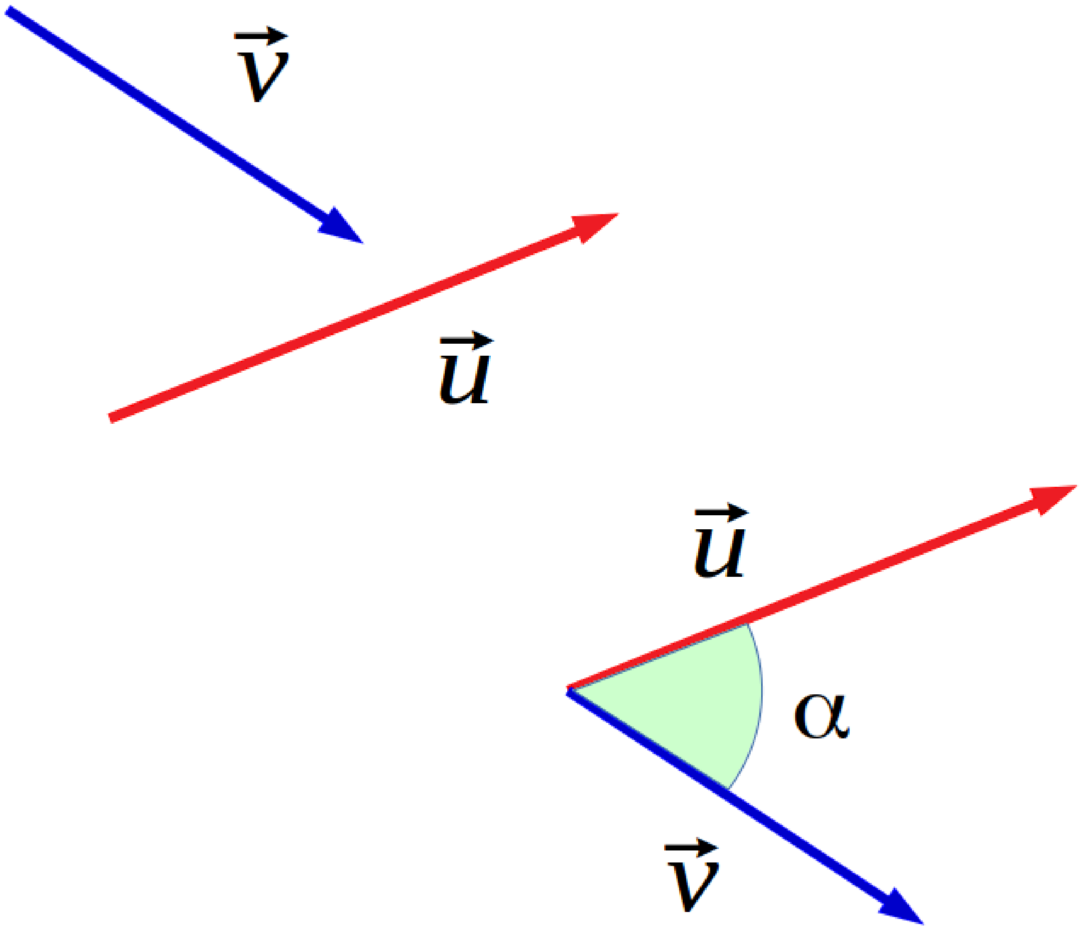
$$A\cdot adj(A) = (det(A))I_n$$

En caso A sea inversible:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\cdot adj(A)$$

Capitulo N° 6

Unidad 5



6.1. Espacios con producto interno

A lo largo de este capítulo consideraremos a V como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial o como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Definición 6.1.1. *Diremos que* $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *es un* ***PRODUCTO INTERNO*** *si:*

i) ***Bilinealidad:*** $\forall\ u, v, w \in V,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

$\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

$\langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$

ii) ***Simetría:*** $\forall\ u, v \in V$

$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

NOTA: *Si* V *es un* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial* $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

iii) $\langle v, v\rangle \geq 0,\ \forall\ v \in V$ *y* $\langle v, v\rangle = 0 \leftrightarrow v = 0.$

A $(V, \langle , \rangle)$ *se le denomina espacio con producto interno*

Ejemplo 6.1.1. .

1. $(\mathbb{R}, \cdot) : \langle a, b\rangle = ab$
2. $(\mathbb{R}^n, \cdot) : \langle a, b\rangle = \sum a_i b_i$
3. $(\mathbb{R}^{n\times n}, \langle , \rangle) : \langle A, B\rangle = Traza(AB^T)$
4. $(C^o([a, b]), \langle , \rangle) = \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$

Definición 6.1.2. *Sea* $(V, \langle , \rangle)$ *un espacio con producto interno, denominaremos la* ***NORMA*** *como:*

$$\begin{array}{rcccccc} \|.\| & : & V & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & & v & \longrightarrow & \|v\| & = & \sqrt{\langle v, v\rangle} \end{array}$$

Nótese que un producto interno siempre induce a una norma, sin embargo, una norma no necesariamente induce a un producto interno:

$$\langle\ ,\ \rangle \longrightarrow \|\ \|$$

$$\langle\ ,\ \rangle \not\leftarrow \|\ \|$$

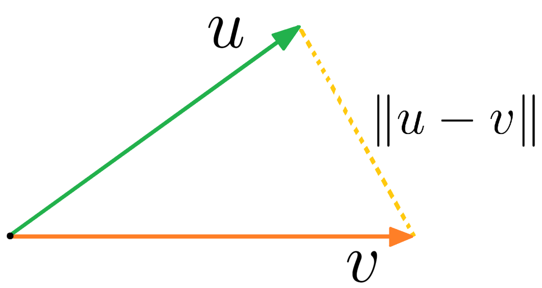
Propiedades 6.1.1. .

i) $\|v\| \geq 0 \wedge \|v\| = 0 \longleftrightarrow v = 0$

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \ \|v\|, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall \ v \in V$

Definición 6.1.3. *Sea $u, v \in V$, definimos la distancia entre u y v como:*

$$d(u, v) = \|u - v\|$$



Definición 6.1.4. *Sean $u, v \in V$, el ángulo entre u y v es el número $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que:*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

Proposición 6.1.1. ***(Desigualdad de Cauchy-Schwartz)***

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \ \wedge \ |\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\| \text{ , si y solo si, } \{u, v\} \text{ son LD}$$

Demostración. .

i) Sea $\lambda \in \mathbb{R} : \|u + \lambda v\|^2 \geq 0$

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle \geq 0$$

$$\|u\|^2 + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\|v\|^2 \geq 0$$

Considerando $p(\lambda) = \|v\|^2\lambda^2 + 2\langle u, v\rangle\lambda + \|u\|^2$ como $p(\lambda) \geq 0 \longrightarrow \Delta(p) \leq 0$ Luego:

$$\Delta(p) = 4\langle u, v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

$$\Longrightarrow |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

ii) **Afirmación:** $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\| \longleftrightarrow u$ es paralelo a v

- $(\longrightarrow)$ Consideremos:

$$p(\lambda) = \|v\|^2\lambda^2 + 2\langle u, v\rangle\lambda + \|u\|^2$$

Si $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\| \longrightarrow \Delta = 0$, entonces $p(\lambda)$ solo posee una raíz λ_0

$$p(\lambda_0) = 0 = \|u + \lambda_0\|^2 \Longrightarrow u = -\lambda_0 v$$

Es decir, u es paralelo a v

- $(\longleftarrow)$ Si u y v son paralelos, $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda v$

$$\begin{aligned} |\langle u, v\rangle| &= |\langle \lambda v, v\rangle| \\ &= |\lambda|\langle v, v\rangle = |\lambda|\|v\|^2 \\ &= |\lambda|\|v\|\|v\| = \|u\|\|v\| \end{aligned}$$

□

Corolario 6.1.1. ***(Desigualdad triangular)***

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Demostración.

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$$

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|$$

$$\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$$

$$\Longrightarrow \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

□

Corolario 6.1.2. ***(Desigualdad triangular para distancias)***

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)\ ,\ \forall\ u, v, w \in V$$

Definición 6.1.5. *Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio con producto interno, diremos que u es ortogonal a v ($u \perp v$) si*

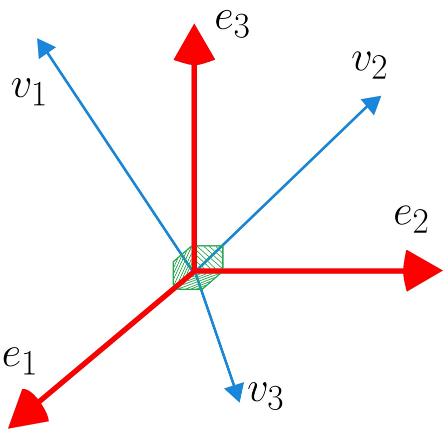
$$\langle u, v\rangle = 0$$

Teorema 6.1.1. ***(Teorema de Pitágoras)*** *Si $u \perp v : \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$*

Proposición 6.1.2. ***(Ley del paralelogramo)*** *Ejercicio:*

$$\frac{\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2}{2} = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Observemos lo siguiente:



Sea $x = (a, b, c) \longrightarrow x = ae_1 + be_2 + ce_3$. Luego:

$$\begin{aligned}
\langle x, e_1\rangle &= a\langle e_1, e_1\rangle + b\langle e_2, e_1\rangle + c\langle e_3, e_1\rangle = a \\
\langle x, e_2\rangle &= a\langle e_1, e_2\rangle + b\langle e_2, e_2\rangle + c\langle e_3, e_2\rangle = b \\
\langle x, e_3\rangle &= a\langle e_1, e_3\rangle + b\langle e_2, e_3\rangle + c\langle e_3, e_3\rangle = c
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 + \langle x, e_3\rangle e_3 \text{ (en la base ortonormal)}$$

Definición 6.1.6. *Sea $B \subset V$ una base, diremos que B es **ortonormal** si:*

i) $\langle u, v\rangle = 0$, $\forall\ u, v \in B$ *con* $u \neq v$

ii) $\|u\| = 1$, $\forall\ u \in B$

Observación 6.1.1. *Si $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal. Sea $x \in V$:*

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}, k \in I_n$$

$$\longrightarrow \langle x, u_i\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k, u_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \lambda_k u_k, u_i\rangle$$

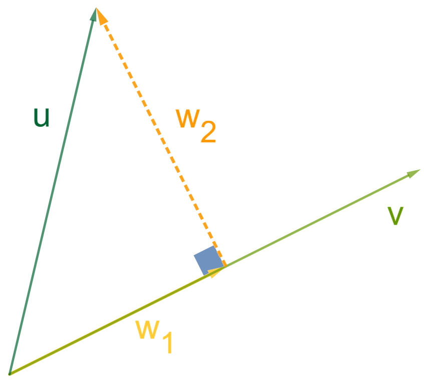
Pero:

$$\langle u_k, u_i\rangle = \begin{cases} 0 & , k \neq i \\ 1 & , k = i \end{cases} \quad \text{(Delta de Dirac o Delta de Kromecker: } \delta_{ki}\text{)}$$

$$\langle x, u_i\rangle = \lambda_i\langle u_i, u_i\rangle = \lambda_i$$

$$\Longrightarrow x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k\rangle u_k$$

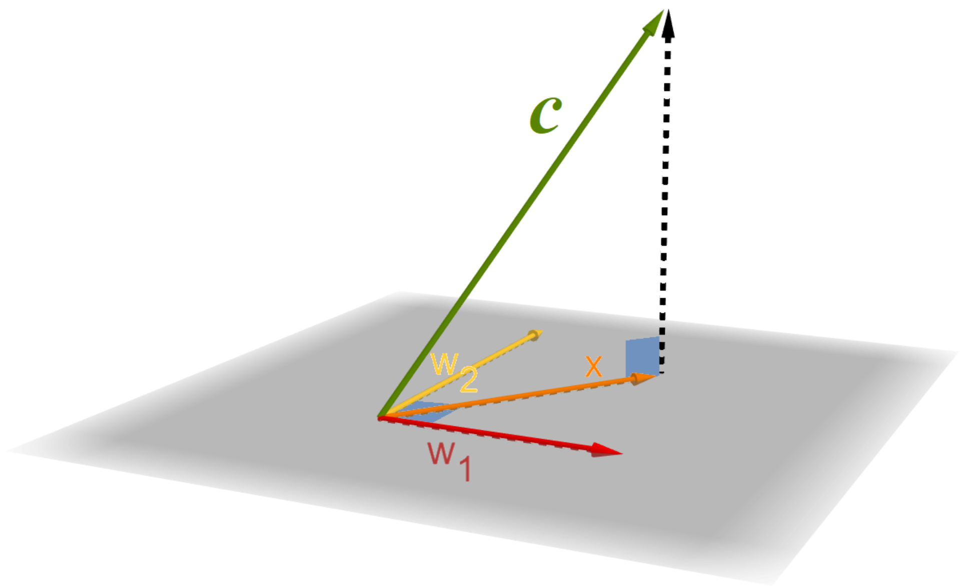
¿Para todo V de dimensión finita, existe una base ortonormal?



$$w_1 = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} v$$

$$w_2 = u - \frac{\langle u, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

$(w_1 \perp w_2)$ La base ortonormal sería $\left\{ \dfrac{w_1}{\|w_1\|}, \dfrac{w_2}{\|w_2\|} \right\}$
Sean $\{a, b, c\}$ L.I.



$$x = \alpha w_1 + \beta w_2$$

w_1,w_2 ortogonales y $x \in \mathscr{L}\{w_1, w_2\} = \mathscr{L}\{a, b\}$

Sea $w_3 = c - x$ con $w_3 \perp w_1$, $w_3 \perp w_2$

$$\langle c - x, w_1\rangle = \langle c, w_1\rangle - \langle x, w_1\rangle = 0$$

Es decir:

$$\langle c, w_1\rangle - \langle \alpha w_1 + \beta w_2, w_1\rangle = 0$$

Desarrollando $\langle c, w_1\rangle - \alpha\langle w_1, w_1\rangle = 0$

$$\alpha = \frac{\langle c, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}$$

Análogamente

$$\beta = \frac{\langle c, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}$$

Entonces:

$$x = \frac{\langle c, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1 + \frac{\langle c, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}w_2$$

$$w_3 = c - \frac{\langle c, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}w_1 - \frac{\langle c, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}w_2$$

Luego $\{w_1, w_2, w_3\}$ son ortogonales dos a dos

$$\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|}\right\} \text{ es base ortonormal}$$

6.1.1. Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

El objetivo de este algoritmo es: *Sea V un espacio con producto interno finito dimensional y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base, se busca* ***conseguir una base*** *$\{w_1, \dots, w_n\}$ tal que:*

i) *$w_1, \dots, w_n$ son ortogonales dos a dos*

ii) $\mathscr{L}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathscr{L}\{w_1, \dots, w_n\}$

Tenemos $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V hacemos $w_1 = v_1$. Si tenemos construidos $\{w_1, \dots, w_k\}$ tales que cumplen *(i)* y *(ii)*. Construiremos w_{k+1}:

$$\boxed{w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle}w_i}$$

Probemos que cumplen *(i)* y *(ii)*, $1 \leq j \leq k$

i) $$\begin{aligned}\langle w_{k+1}, w_j\rangle &= \langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_j\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle}w_i, w_i\rangle = \langle v_{k+1}, w_j\rangle - \langle \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle}w_i, w_j\rangle \\ &= \langle v_{k+1}, w_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i\rangle}{\langle w_i, w_i\rangle}\langle w_i, w_j\rangle = \langle v_{k+1}, w_j\rangle - \frac{\langle v_{k+1}, w_j\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle}\langle w_j, w_j\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Se cumple *(i)*

ii) **Afirmación:** $\mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\} = \mathscr{L}\{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$

- **($\subset$):** Sea v_i, $1 \leq i \leq k+1$ Como $\mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_k\} = \mathscr{L}\{w_1, \ldots, w_k\}$.

  ☐ Si $i \in I_k$: $v \in \mathscr{L}\{w_1, \ldots, w_k\} = \mathscr{L}\{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$

  ☐ Si $i = k+1$:

$$v_{k+1} = w_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j \ \in \ \mathscr{L}\{w_1, \ldots, w_{k+1}\}$$

- **($\supset$):** Sea w_i, $1 \leq i \leq k+1$

  ☐ Si $i \in I_k$: Como $\mathscr{L}\{w_1, \ldots, w_k\} = \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$:

$$w_i \in \mathscr{L}\{v_1, \ldots, w_k\} \subset \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$$

  ☐ Si $i = k+1$:

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} w_j$$

  Como $\mathscr{L}\{w_1, \ldots, w_k\} = \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_k\}$

$$w_j \in \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_k\} \ \subset \ \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$$

$$\Longrightarrow w_{k+1} \in \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$$

6.1.2. Distancia de un vector a un subespacio

Sea V un espacio con producto interno y $S \subset V$ un subespacio de dimensión finita. Aplicando el proceso de Gran-Schmidt y normalizando, obtenemos una base ortonormal de S, digamos $\{u_1, \ldots, u_k\}$. Definimos la **proyección del vector** x **en el subespacio** S:

$$\begin{array}{rcccl} P_S & : & V & \longrightarrow & V \\ & & x & \longrightarrow & P_S(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle x, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i \end{array}$$

Propiedades 6.1.2. .

1) $P_S(x) \in S$, $\forall\ x \in V$

2) $x - P_S(x) \perp S \ , \forall \ x \in V$

3) $P_S(x+y) = P_S(x) + P_S(y) \ P_S(\lambda x) = \lambda P_S(x) \ ; \forall \ \lambda \in \mathbb{R} \ , \forall \ x, y \in V$

Demostración. (Ejercicio) □

Proposición 6.1.3. ***(Teorema de la proyección)*** *Sea* $x \in V$*:*

i) $d(x, P_S(x)) \leq d(x, y) \ , \forall \ y \in S$

ii) Si $v \in S$ *cumple que:* $d(x, P_S(x)) = d(x, v)$

$$\Longrightarrow v = P_S(x)$$

Demostración. .

i) Sea $y \in S$: $[d(x,y)]^2 = \|x - y\|^2$

$$\begin{array}{rcl} [d(x,y)]^2 & = & \| \underbrace{x - P_S(x)}_{\perp S} + \underbrace{P_S(x) - y}_{\in S} \|^2 \\ & = & \|x - P_S(x)\|^2 + \|P_S(x) - y\|^2 \\ & \geq & \|x - P_S(x)\|^2 \qquad = \quad [d(x, P_S(x))]^2 \end{array}$$

$$\therefore d(x,y) \geq d(x, P_S(x))$$

ii) Sea $y \in S$ tal que: $d(x, P_S(x)) = d(x, y)$

$$\begin{array}{rrcl} \Longrightarrow & [d(x,y)]^2 & = & \|x - P_S(x)\|^2 + \|P_S(x) - y\|^2 \\ & [d(x,y)]^2 & = & [d(x, P_S(x))]^2 + [d(P_S(x), y)]^2 \\ \Longrightarrow & 0 & = & d(P_S(x), y) \end{array}$$

$$\therefore y = P_S(x)$$

□

Definición 6.1.7. *Sea* $x \in V$*, la distancia del vector* x *al subespacio* S *es:*

$$\begin{array}{rcl} d(x, S) & = & \|x - P_S(x)\| \\ & = & d(x, P_S(x)) \end{array}$$

Propiedad 6.1.1.

$$d(x, S) = inf\{d(x,y)/y \in S\}$$

Demostración. (Ejercicio: Usar la proposición anterior) □

Nota 6.1.1. *Tener en cuenta que se denomina espacio vectorial euclideo al espacio vectorial con producto interno.*

6.2. Isometrías Lineales

Primero, hay que tener en cuenta lo siguiente:

$$V \text{ es un espacio vectorial euclídeo } \equiv \; V \text{ tiene producto interno}$$

Sea V un espacio vectorial euclídeo ($\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno).

Definición 6.2.1. *Una aplicación $f : V \to V$ se dice que es una* ***TRANSFORMACIÓN ORTOGONAL*** *o* ***ISOMETRÍA LINEAL*** *si preserva el producto escalar(interno), esto es:*

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \forall x, y \in V$$

Proposición 6.2.1. *Si $f : V \to V$ es una isometría lineal, entonecs es una aplicación lineal.*

Proposición 6.2.2. *La aplicación lineal $f : V \to V$ es isometría lineal si y solo si $\|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in V$.*

Demostración. .

- **($\to$): Supongamos que f es isometría lineal.** Entonces:

$$\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\|$$

- **($\leftarrow$): Supongamos ahora que** $\|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in V$

  Veamos que f es isometría lineal. Se tiene:

$$\|x - y\| = \|f(x - y)\|$$

  Luego:

$$\langle x - y, x - y\rangle = \langle f(x - y), f(x - y)\rangle$$

$$\langle x - y, x - y\rangle = \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle$$

$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle - \langle f(x), f(y)\rangle - \langle f(y), f(x)\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle$$

$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle - 2\langle f(x), f(y)\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle \quad \ldots (1)$$

Además:

$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

$$\langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$\langle x-y, x-y\rangle = \|f(x)\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|f(y)\|^2$$

$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle \quad \ldots (2)$$

De (1) y (2) se tiene:

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

□

Proposición 6.2.3. *Sea A la matriz asociada a un endomorfismo f en una base ortonormal. Entonces:*

$$f \text{ es isometría lineal } \Leftrightarrow \underbrace{A \text{ es matriz ortogonal}}_{AA^T=I}$$

Demostración. **Afirmación:** $\langle x, Ay\rangle = \langle A^T x, y\rangle$ **(¡Ejercicio!)**.

Luego:

$$\begin{aligned}
f \text{ es isometría lineal } &\leftrightarrow \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \\
&\leftrightarrow \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \\
&\leftrightarrow \langle AA^T x, y\rangle = \langle x, y\rangle \\
&\leftrightarrow \langle AA^T x - x, y\rangle = 0 \\
&\leftrightarrow A^T Ax - x = 0 \\
&\leftrightarrow A^T Ax = x \\
&\leftrightarrow A^T A = I_n
\end{aligned}$$

(Prueba simplificada)

□

6.3. Teorema de Representación de Riesz

Introducción: Sea V un espacio vectorial con producto interno. Si $w \in V$, entonces:

$$\begin{array}{rccl} T_w: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longrightarrow & T_w(v) = \langle v, w \rangle \end{array}$$

Es funcional lineal.

Teorema 6.3.1. ***(Representación de Riesz)***
Dado V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Si $T : V \to \mathbb{R}$ funcional lineal, entonces $\exists! w \in V$, tal que:

$$T(v) = \langle v, w \rangle$$

Demostración. .

- **Existencia:** Queremos encontrar $w \in V$ tal que:

  $$T(v) = \langle v, w \rangle, \forall v \in V$$

  En particular, si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V, queremos que:

  $$T(v_k) = \langle v_k, w \rangle, \forall k \in I_n$$

  Entonces tenemos que:

  $$\overline{T(v_k)} = \langle w, v_k \rangle$$

  Luego:

  $$w = \langle w, v_1 \rangle v_1 + \ldots + \langle w, v_n \rangle v_n$$

  $$\Rightarrow w = \overline{T(v_1)} v_1 + \ldots + \overline{T(v_n)} v_n$$

  Es el w que hace:

  $$T(v) = \langle v, w \rangle, \forall v \in V \text{ ¡Verificar!}$$

- **Unicidad:** Sean $w_1, w_2 \in V$, tales que:

  $$T(v) = \langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle, \forall v \in V$$

  Entonces:

  $$\langle v, w_1 - w_2 \rangle = 0, \forall v \in V$$

  $$\Rightarrow w_1 - w_2 = 0$$

  $$\therefore w_1 = w_2$$

□

Ejemplo 6.3.1. *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *tal que:*

$$T(x, y, z) = 4x - z$$

Vamos a determinar w *(representante de Riesz) tomamos la base canónica y tenemos:*

$$\left.\begin{array}{ccccc} w_1 & = & T(e_1) & = & 4 \\ w_2 & = & T(e_2) & = & 0 \\ w_3 & = & T(e_3) & = & -1 \end{array}\right\} w = (4, 0, -1)$$

$$\therefore T(x, y, z) = \langle (x, y, z), (4, 0, -1) \rangle$$

Nota 6.3.1. *Ver numeración*

6.3.1. Subespacios Ortogonales

1. Diremos que $x \in U$ es ortogonal al subespacio $V \subset U$, si x es ortogonal a todo vector $v \in V$.
2. Dos subespacios V y W de U (espacio con producto interno) con bases $\{v_1, \ldots, v_k\}$ y $\{w_1, \ldots, w_p\}$ respectivamente, son ortogonales, si:

$$\langle v_i, w_j \rangle = 0, \ \forall i \in I_k, j \in I_p$$

Observación 6.3.1. *Osea* $x \in U$ *es ortogonal al subespacio* V *si* x *es ortogonal a todo vector perteneciente a una base de* V*.*

Definición 6.3.1. *El conjunto de todos los vectores ortogonales a* $V \subset U$*, se denomina complemento ortogonal de* V*.*
Notación: $V^\perp$

Proposición 6.3.1. .

1. $W^\perp$ *es un subespacio de* U
2. $(W^\perp)^\perp = W$
3. $W \oplus W^\perp = U$

Demostración. (¡Ejercicio!) □

6.3.2. Otra forma de encontrar el representante de Riesz

Sea $T : V \to \mathbb{R}$ funcional lineal:

$$V = Nu(T) \oplus Nu(T)^{\perp}$$

Luego, si $v \in V : \exists! v_0 \in Nu(T), v_{\perp} \in Nu(T)^{\perp}$:

$$v = v_0 + v_{\perp}$$

Entonces $T(v) = T(v_{\perp})$, ahora por el teorema del núcleo e imagen:

$$dim(Nu(T)) = dim(V) - dim(Im(T))$$

$$= n - 1 \text{ (a menos que } T = 0)$$

$\Rightarrow dim(Nu(T)^{\perp}) = 1$

Tomamos e vector ortonormal en $Nu(T)^{\perp}$, luego:

$$v_{\perp} = \langle v, e \rangle e, \ \forall v \in V$$

$$\Rightarrow T(v) = T(v_{\perp}) = \langle v, e \rangle T(e)$$

$$\Rightarrow T(v) = \langle v, \overline{T(e)} e \rangle$$

Ejemplo 6.3.2. *Volvamos a considerar $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que: $T(x, y, z) = 4x - z$.*

$$\Rightarrow Nu(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - z = 0\}(plano)$$

$$Nu(T)^{\perp} = \mathscr{L}\{(4, 0, -1)\}(normal\ al\ plano)$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 0, -1)$$

$$T(x, y, z) = \langle (x, y, z), T(e)e \rangle$$

Notar que: $T(e)e = \frac{17}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}(4, 0, -1)$

$$\Rightarrow T(e)e = (4, 0, -1)$$

$$\therefore T(x, y, z) = \langle (x, y, z), (4, 0, -1) \rangle$$

Capitulo N° 7

Unidad 6

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

7.1. Diagonalización

▶

Si $T : V \to V$ lineal y tiene asociadas $A = [T]_{B_2}$, $B = [T]_{B_1}$, entonces $A = P_{B_1B_2}BP_{B_2B_1}$, osea $A \sim B$ **(semejanza)**.

◀

Definición 7.1.1. *Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se llama **DIAGONALIZABLE** si existe una matriz inversible $C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que CAC^{-1} es una matriz diagonal.*

Observación 7.1.1. *Una matriz es diagonalizable si esta es semejante a una matriz diagonal.*

Definición 7.1.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que T es diagonalizable o diagonal si existe una base B de V tal que la matriz asociada a T en dicha base B ($[T]_B$) es una matriz diagonal.*

Observación 7.1.2. *T es diagonalizable, si y solo si, $[T_B]$ es diagonalizable para toda base B de V.*

Definición 7.1.3. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que $v \in V\backslash\{0\}$ es un **AUTOVECTOR** (o **VECTOR PROPIO**) de T si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda v$. El elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ se denomina **AUTOVALOR** (o **VALOR PROPIO**) de T.*

Ejemplo 7.1.1. *$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x, -y + z, 4z - x)$.*

$$T(6, 1, 3) = (2 \cdot 6, -1 + 3, 4 \cdot 3 - 6) = 2(6, 1, 3)$$
$$(6, 1, 3) \text{ es autovector de } T \text{ con autovalor } 2$$

Proposición 7.1.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \longrightarrow V$ transformación lineal. Entonces T es diagonalizable, si y solo si, existe una base B de V formada por autovectores de T.*

Demostración. (¡Ejercicio!) □

Definición 7.1.4. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, diremos que $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}\backslash\{0\}$ es un **AUTOVECTOR** de A si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Av = \lambda v$. El elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ se denomina **AUTOVALOR** de A.*

Proposición 7.1.2. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces A es diagonalizable, si y solo si, existe una base B de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ formada por autovectores de A.*

Demostración. (¡Ejercicio!) Análoga a la proposición anterior $\square$

Ejemplo 7.1.2. .

1. *Ver si $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es diagonalizable. Por la proposición, basta buscar los autovectores de A, o sea, los vectores $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ y:*

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \text{ , para algún } \lambda \in \mathbb{R}$$

Buscaremos los λ que satisfacen:

$$Ax = \lambda x \text{ , para } x \neq (0,0)^T$$

Es decir, $(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que un sistema lineal homogéneo tiene solución no trivial, si y solo si, el determinante de su matriz de coeficientes es cero. O sea, si $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, los autovalores de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 4$

- ***Para** $\lambda = -1$:*

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow C.S._1 : \mathscr{L}\{(1,-1)\}$$

Es decir, los autovectores asociados a $\lambda = -1$ son:

$$\mathscr{L}\{(1,-1)\} - \{(0,0)\}$$

- ***Para** $\lambda = 4$:*

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow C.S._2 : \mathscr{L}\{(3,2)\}$$

Luego A es diagonalizable, puesto que $B = \{(1,-1),(3,2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores de A. Es más, si $P = [P_{\varepsilon B}]$ (matriz que cambia de base, de la base canónica en la base B), se tiene que:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. *Ver si $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ es diagonalizable. Así como el anterior, procedemos a resolver $(A - \lambda I)x = 0$, luego el sistema homogéneo tendrá solución no trivial si $det(A - \lambda I) = 0$. O sea, si $(\lambda - 3)^3 = 0$, es decir, $\lambda = 3$ es el único autovalor de A.*

   Si A fuese diagonalizable, $\exists\ C \in GL(3,\mathbb{R})$ (grupo lineal) tal que:

$$CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   Pero esto se da, si y solo si, $A = 3I$. Por tanto A no es diagonalizable.

7.1.1. Polinomio característico

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ es autovalor de } A &\iff \exists\ x \in \mathbb{K}^{n\times 1} - \{0\} / Ax = \lambda x \\ &\iff Ax = \lambda x \text{ tiene solución no trivial} \\ &\iff (A - \lambda I)x = 0 \text{ tiene solución no trivial} \\ &\iff det(A - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

Definición 7.1.5. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se denomina **POLINOMIO CARACTERÍSTICO** de A, y se denota $\mathcal{X}_A$, al polinomio $\mathcal{X}_A = det(A - xI_n) \in \mathbb{K}[x]$*

Proposición 7.1.3. *Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces λ es autovalor de A, si y solo si, λ es raíz del polinomio característico de A.*

Ejemplo 7.1.3. *. Decidir si $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ es diagonalizable en $\mathbb{Q}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Los autovalores de A son las raíces del polinomio:*

$$\mathcal{X}_A = det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$

Este polinomio tiene raíces i y $-i$, luego A no será diagonalizable ni en $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ni en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. En $\mathbb{C}^{2\times 2}$, los autovectores asociados son $\mathscr{L}\{(1,i)\}\backslash\{(0,0)\}$ y $\mathscr{L}\{(-1,i)\}\backslash\{(0,0)\}$. Como $B = \{(1,i),(-1,i)\}$ es una base de $\mathbb{C}^2$ formada por autovectores de A, entonces A es diagonalizable en $\mathbb{C}^{2\times 2}$

Proposición 7.1.4. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $C \in GL(n,\mathbb{K})$ (grupo lineal). Entonces $\mathcal{X}_{CAC^{-1}} = \mathcal{X}_A$*

Demostración. Se tiene que:

$$\begin{aligned} X_{CAC^{-1}} &= det(CAC^{-1} - xI) \\ &= det(CAC^{-1} - CxI_nC^{-1}) \\ &= det(C(A - xI_n)C^{-1}) \\ &= det(A - xI_n) = X_A \end{aligned}$$

□

Definición 7.1.6. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Se define el polinomio característico de T como $\mathcal{X}_T = \mathcal{X}_{[T]_B}$, donde B es una base cualquiera de V.*

Observación 7.1.3. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Entonces λ es un autovalor de T, si y solo si, λ es raíz de $\mathcal{X}_T$*

7.1.2. Una caracterización de matrices diagonalizables

En primer lugar, ampliaremos nuestro concepto de suma directa.

Definición 7.1.7. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $S_1, \ldots, S_r$ subespacios de V. Se dice que $S_1, \ldots, S_r$ estan en suma directa si para cada $w \in W = S_1 + \ldots + S_r$, existe únicos $w_i \in S_i, i \in I_r$ tal que $w = w_1 + \ldots + w_r$. En este caso diremos que W es la suma directa de los subespacios $S_1, \ldots, S_r$ y se denota:*

$$W = S_1 \oplus \ldots \oplus S_r = \bigoplus_{i=1}^{r} S_i$$

Proposición 7.1.5. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $S_1, \ldots, S_r \subset V$ subespacios de W. Son equivalentes:*

- $W = \bigoplus_{i=1}^{r} S_i$
- $W = S_1 + \ldots + S_r$ *y para cada* $j \in I_r$ *se tiene* $S_j \cap (S_1 + \ldots + S_{j-1} + S_{j+1} + \ldots + S_r) = \{0\}$

Demostración. (Ejercicio) □

Proposición 7.1.6. *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y sean* $S_1, \ldots, S_r$ *subespacios de* V*. Para cada* $i \in I_r$*, sea* B_i *una base de* S_i*. Son equivalentes:*

i) $W = \bigoplus_{i=1}^{r} S_i$

ii) $B = B_1 \cup \ldots \cup B_r$ *es una base de* W

Demostración. (Ejercicio) □

Definición 7.1.8. *Sea* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *y sea* λ *un autovalor de* A*, se define el* ***espacio de autovectores*** *como:*

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^{n\times 1} : Av = \lambda v\} = \{v \in \mathbb{K}^{n\times 1} : (A - \lambda I_n)v = 0\}$$

Observación 7.1.4. E_λ *es subespacio de* $\mathbb{K}^{n\times 1}$*, pues es el C.S. de un sistema homogéneo.*

Proposición 7.1.7. *Sea* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *y sean* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *autovalores distintos de* A*. Entonces* $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_r}$ *están en suma directa.*

Demostración. Por inducción sobre la cantidad r de autovalores:

- $(r = 2)$**:** Sean λ_1 y λ_2 autovalores distintos de A. Si $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$, tenemos que:

  $$Av = \lambda_1 v = \lambda_2 v \longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0$$

  Como $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, entonces $v = 0$. Luego $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$, es decir, la suma es directa.

- Supongamos que el resultado vale para r autovalores distintos y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$ autovalores distintos de A.

- **Probar de que:** $\forall\ i \in I_{r+1}$, $E_{\lambda_i} \cap \bigoplus_{j=1, j\neq i}^{r+1} E_{\lambda_j} = \{0\}$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i = r+1$. Sea $v \in E_{\lambda_{r+1}} \cap \bigoplus_{j=1}^{r} E_{\lambda_j}$. Entonces, $\exists\ v_j \in E_j\ (j \in I_r)$ tales que:

$$v = v_1 + \ldots + v_r \ \ldots \textbf{(*)}$$

Multiplicando **(*)** por A:

$$\lambda_{r+1} v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$$

Pero si multiplicamos **(*)** por λ_{r+1}:

$$\lambda_{r+1} v = \lambda_{r+1} v_1 + \ldots + \lambda_{r+1} v_r$$

Luego:

$$\lambda_{r+1} v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = \lambda_{r+1} v_1 + \ldots + \lambda_{r+1} v_r$$

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) v_1 + \ldots + (\lambda_r - \lambda_{r+1}) v_r$$

Por hipótesis inductiva, los subespacios $E_{\lambda_j}, j \in I_r$ están en suma directa, el vector nulo se escribe de forma única como suma de ceros. Luego, $(\lambda_j - \lambda_{r+1}) v_j = 0$, para cada $j \in I_r$. Por tanto: $v_j = 0$, $\forall\ j \in I_r$

Luego: $v = 0$

□

Proposición 7.1.8. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Sea r la multiplicidad de λ como raíz de X_A (*es decir, *$X_A = (x-\lambda)^r P(\lambda)$ con $P(\lambda) \neq 0$) y sea $E_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^{n\times 1} : Ax = \lambda x\}$. Entonces*

$$\underbrace{dim(E_\lambda)}_{mult \text{ geométrica}} \leq \underbrace{r}_{mult \text{ algebraica}}.$$

Demostración. Sea $T_A : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{n\times 1}$ la trasformación lineal definida por $T_A(x) = Ax$. Sea $s = dim(E_\lambda)$ y sea $\{v_1, \ldots, v_s\}$ una base de E_λ. Sean $v_{s+1}, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tales que:

$$B = \{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\} \text{ una base de } \mathbb{K}^{n\times 1}$$

Se tiene que:

$$[T_A]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & N \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & \\ & & O & & M \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ es de orden } s \times s$$

De donde:

$$X_{T_A} = det \begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & N \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda - x & \\ & & O & & M - xI_{n-s} \end{pmatrix}$$

$$X_{T_A} = (\lambda - x)^s det(M - xI_{n-s})$$

$$X_{T_A} = (x - \lambda)^s Q(x)$$

Por hipótesis, $X_A = (x-\lambda)^r P(x)$ con $P \in \mathbb{K}[x]$ tal que $P(\lambda) \neq 0 \Rightarrow (x-\lambda)^s Q(x) = X_{T_A} = X_A = (x-\lambda)^r P(x)$ con $P(\lambda) \neq 0$ de donde $s \leq r$, ie: $dim(E_\lambda) \leq mult(\lambda, X_A)$ □

Teorema 7.1.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ todos los autovalores de A en $\mathbb{K}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Son equivalentes:*

i) *A es diagonalizable en $\mathbb{K}^{n\times n}$.*

ii) $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = \mathbb{K}^{n\times 1}$.

iii) $X_A = (x-\lambda_1)^{a_1} \cdots (x-\lambda_r)^{a_r}$ *y* $a_i = dim(E_{\lambda_i}), \forall i \in I_r$.

Demostración. .

- *i)* $\rightarrow$ *ii)* : Si A es diagonizable en $\mathbb{K}^{n\times n}$, existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ formada por autovectores de A. Para cada $v_j \in B$, existe $i \in I_r$ tal que v_j es autovector de A de autovalor λ_i (pues $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son todos los autovalores de A) es decir $v_j \in E_{\lambda_i}$ para algún $i \in I_r$ lo que implica que $v_j \in \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$.

  En consecuencia: $\mathbb{K}^n = \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_n\} = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$

- $ii) \to iii)$: Por la proposición anterior, para cada $i \in I_r$, $dim(E_{\lambda_i}) \leq mult(\lambda_i, X_A)$. Si $\mathbb{K}^{n\times 1} = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$, se tiene que:

$$n = dim(\mathbb{K}^{n\times 1}) = \sum_{i=1}^{r} dim(E_{\lambda_j}) \leq \sum_{i=1}^{r} mult(\lambda_i, X_A) \leq gr(X_A) = n$$

  Osea todas son igualdades. En particular:

  - De $\sum_{i=1}^{r} mult(\lambda_i, X_A) = gr(X_A)$, se tiene que X_A se puede factorizar como un producto de factores en $\mathbb{K}[x]$ de grado 1, si $a_i = mult(\lambda_i, X_A),\ i \in I_r$, entonces:

$$X_A = (x-\lambda_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_r)^{r}$$

  - Como $dim(E_{\lambda_i}) \leq mult(\lambda_i, X_A)$, para $i \in I_r$. De la igualdad $\sum_{i=1}^{r} dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{X_A} mult(\lambda_i, X_A),\ i \in I_r$. Se tiene que: $dim(E_{\lambda_i}) = mult(\lambda_i, X_A)$

- $iii) \to i)$ Para cada $i \in I_r$, sea B_i una base de E_{λ_i}. Recordemos que $B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$ es una base de $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$. Ahora:

$$\#B = \sum_{i=1}^{r} \#B_i = \sum_{i=1}^{r} dim(E_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{r} a_i = gr(X_A) = n$$

  De donde $dim(\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}) = dim(\mathbb{K}^{n\times 1})$. Luego $\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = \mathbb{K}^{n\times 1}$ y entonces B es una base (formada por autovectores de A) de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Por tanto A es diagonizable.

□

Ejemplo 7.1.4. *Verificar si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ *es diagonalizable. Calculemos* $X_A = (x-1)^3(x-2)$. *Para el autovalor 1 se tiene que:*

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : (A - I_4)x = 0\} = \mathscr{L}\{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$$

De donde $dim(E_1) = 2 < 3 = mult(1, X_A)$. *Luego* A *no es diagonalizable*

7.2. Polinomios Minimales

7.2.1. Nociones Previas

Sea $P \in \mathbb{K}[x],\ P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r$. Dado $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definimos:

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_r A^r$$

Análogamente, si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ transformación lineal, definimos:

$$P(T) = a_0 Id_v + a_1 T + \ldots + a_r T^r \in \mathscr{L}_{\mathbb{K}}(V, V)$$

Donde:

$$\text{Para cada } k \in \mathbb{N},\ T^k = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{k \text{ veces}} \text{ es la composición } k \text{ veces.}$$

Lema 7.2.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Existe un polinomio $P \in \mathbb{K}[x_0]$ no nulo tal que: $P(A) = 0$*

Demostración. Consideremos $\{I_n, A, \ldots, A^{n^2}\} \subset \mathbb{K}^{n\times n}$. Este conjunto es L.D., luego existen escalares $a_0, \ldots, a_{n^2}$ no todos nulos tales que:

$$\sum_{i=0}^{n^2} a_i A^i = 0, \text{ de esto definimos:}$$

$P \in \mathbb{K}[x]$, tal que $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n^2} a_i x^i$, entonces $P \neq 0$ y $P(A) = 0$.

□

Observación 7.2.1. *Para cada matriz, distinguimos un polinomio de grado mínimo y mónico que se anula en A. Veamos que este es único.*

- ***Existencia:*** *Por el PBD(principio de buen orden) sobre el conjunto de grados (grado mínimo: r).*
- ***Unicidad:*** *Si hay Q y Q' mónicos que se anulan en A. Entonces $(Q' - Q)(A) = 0$ y $gr(Q' - Q) < r (\rightarrow\leftarrow)$*

7.2.2. Polinomio Minimal de una Matriz

Definición 7.2.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Llamaremos* **polinomio minimal** *de A, denotado por m_A, al polinomio mónico de grado mínimo que anula a A.*

Ejemplo 7.2.1. *Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular m_A*

Solución 7.2.1. *Como $\{I_2, A\}$ es L.I., no existe $P \in \mathbb{R}[x]$ tal que $gr(P) = 1$ y $P(A) = 0$. Buscamos $P = x^2 + ax + b$ que anule a A.*

$$A^2 + aA + b = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} 1 - a + b = 0 \\ -2 + a = 0 \end{matrix} \Longleftrightarrow a = 2, b = 1$$

Luego:

$$m_A = x^2 + 2x + 1 \text{ Observamos que } m_A = X_A$$

Proposición 7.2.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $P \in \mathbb{K}[x]$. Entonces $P(A) = 0$ si y solo si m_A divide a P.*

Demostración.

$$(\leftarrow)$$

Es directo **(¡Ejercicio!)**.

$$(\rightarrow)$$

Por el algoritmo de la división, se tiene que:

$$P = Qm_A + R \text{ , con } R \equiv 0 \vee gr(R) < gr(m_A)$$

Luego $0 = P(A) = Q(A)\cdot m_A(A)+R(A) = R(A)$ y como m_A es el polinomio de grado mínimo, no puede ser que $gr(R) < gr(m_A)$, por lo tanto, $R \equiv 0$.

□

Observación 7.2.2. *Es facil verificar que si $A = CBC^{-1}$ entonces $A^k = CB^kC^{-1}; k \in \mathbb{N}; A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}, C \in GL(n, \mathbb{K})$.*

Lema 7.2.2. *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $A \sim B$. Entonces para todo $P \in \mathbb{K}[x]$, se cumple que $P(A) \sim P(B)$. Es más $P(A) = 0$ si y solo si $P(B) = 0$*

Demostración. Sea $P \in \mathbb{K}[x]$, $P = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$. Si $A \sim B$, existe $C \in GL(n, \mathbb{K})$ tal que $A = CBC^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} P(A) = P(CBC^{-1}) &= \sum_{i=0}^{r} a_i (CBC^{-1})^i \\ = \sum_{i=0}^{r} a_i CB^i C^{-1} &= C\left(\sum_{i=0}^{r} a_i B\right) C^{-1} \\ &= CP(B)C^{-1} \Rightarrow P(A) \sim P(B) \end{aligned}$$

□

Proposición 7.2.2. *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $A \sim B$. Entonces $m_A = m_B$.*

Demostración. **(¡Ejercicio!)** Usar el lema y la proposición anterior □

Nota 7.2.1. *Gracias a este resultado tenemos que si $T : V \longrightarrow V$ transformación lineal y consideramos la matriz de T en dos bases de V distintas, los polinomios minimales de estas coinciden. Por ello, podemos dar la siguiente definición.*

Definición 7.2.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea B una base de V. Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Definimos el polinomio minimal de T como $m_T = m_{[T]_B}$.*

Proposición 7.2.3. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y sea m_A el polinomio minimal de A. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces λ es autovalor de A, si y solo si, λ es raíz de m_A.*

Demostración. .

- **($\longrightarrow$): Sea λ un autovalor de A.**

  Por el algoritmo de la división en $\mathbb{K}[x]$ existen $Q, R \in \mathbb{K}[x]$ tales que:

  $$0 = m_A(A) = Q(A)(A - \lambda I_n) + RI_n$$

  Como λ es autovalor de A, existe $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $Av = \lambda v$, luego:

  $$0 = m_A(A)v = Q(A)(Av - \lambda v) + Rv$$

  Es decir $Rv = 0$, como $v \neq 0 \rightarrow R = 0$

- **($\longleftarrow$): Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ raíz de m_A.**

  Entonces $m_A = (X-\lambda)Q$ y por lo tanto $0 = m_A(A) = (A-\lambda I_n)Q(A)$. Notamos que $Q(A) \neq 0$, dado que $gr(Q) = gr(m_A)-1$. Por tanto, existe $w \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $Q(A), w \neq 0$ sea $v = Q(A)w$. Entonces:

  $$(A-\lambda I_n)v = (A-\lambda I_n)Q(A)w = 0w = 0$$

  De donde λ es un autovalor de A.

$\square$

7.2.3. Polinomio Minimal de un Vector

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Dado $P \in \mathbb{K}[x]$, definimos $P(v) = P(A).v$. Diremos que P anula a v si $P(v) = 0$.

Observación 7.2.3. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y m_A el polinomio minimal de A. Entonces, para cada $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, se tiene que $m_A(v) = m_A(A).v = 0.v = 0$. Luego para cada $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ existe un polinomio que anula a v.*

Definición 7.2.3. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. El polinomio minimal de v, denotado por m_v, es el polinomio de grado mínimo y mónico que anula a v.*

Nota 7.2.2. *La existencia y unicidad se prueban gracias a la observación anterior y lo hecho para el polinomio minimal de una matriz.*

Ejemplo 7.2.2. .

1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ un autovector de λ. Entonces $m_v = x-\lambda$.*
2. *Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calcular m_{e_1}. Busquemos un polinomio mónico $P = x+b \in \mathbb{R}[x]$ de grado 1 tal que $P(e_1) = 0$.*

   $$P(e_1) = 0 \Leftrightarrow P(e_1) = (A+bI_2)e_1 = 0 \Leftrightarrow (b-1,1) = (0,0)$$

   Imposible para cualquier valor de b. Luego $gr(m_{e_1}) \geq 2$. Veamos $P = x^2+ax+b \in \mathbb{R}[x]$, en este caso:

   $$P(e_1) = 0 \Longleftrightarrow (A^2+aA+bI)e_1 = 0$$

$$\iff A^2e_1 + aAe_1 + be_1 = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ -2 + a = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = 2, b = 1$$

Luego:

$$m_{e_1} = x^2 + 2x + 1$$

7.2.4. ¿Cómo hallar el polinomio minimal de un vector?

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, si $m_v = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1x + a_0$, entonces:

$$A^m v + a_{m-1}A^{m-1}v + \ldots + a_1Av + a_0Iv = 0$$
$$\Longrightarrow A^m v = -a_0v - a_1Av - \ldots - a_{m-1}A^{m-1}v$$

Es decir $\{v, A, A^2v, \ldots, A^m v\}$ son L.D.. Para hallar m_v debemos buscar el mínimo m tal que $\{v, Av, A^2v, \ldots, A^m v\}$ sea L.D..

$$\hookrightarrow m_v = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

Proposición 7.2.4. *Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ y $P \in \mathbb{K}[x]$. Entonces $P(v) = 0$, si y solo si, $m_v|P$ (en particular $m_v|m_A$)*

Demostración. Dado $P \in \mathbb{K}[x]$, se tiene que $P = Qm_v + R$ con $Q, R \in \mathbb{K}[x]$, $R \equiv 0$ o $gr(R) < gr(m_v)$. En consecuencia:

$$P(v) = P(A)\cdot v = Q(A)\cdot m_v(A)\cdot v + R(A)\cdot v$$

$$= Q(A)\cdot 0 + R(v) = R(v)$$

De donde $P(v) = 0$, si y solo si, $R(v) = 0$. Como m_v es de grado mínimo entre los polinomios que anulan a v, resulta que $R(v) = 0$, si y solo si, $R = 0$, es decir, si y solo si, $m_v|P$

□

La siguiente proposición muestra cómo calcular el polinomio minimal de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ a partir de los polinomios minimales de los vectores de una base de $\mathbb{K}^{n\times 1}$

Proposición 7.2.5. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{K}^{n\times 1}$, entonces:*

$$m_A = MCM\{m_{v_1} : i \in I_n\}$$

Demostración. Sea $P = MCM\{m_{v_1} : i \in I_n\}$. Por la proposición anterior $m_{v_i}|m_A$, $\forall\ i \in I_n$. Luego $P|m_A$. Por otro lado, como $m_{v_i}|P$, $\forall\ i \in I_n$ se tiene que $P(A)\cdot v_i = 0$, para cada $i \in I_n$. Sea $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Entonces:

$$P(A)\cdot v = P(A)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A) v_i = 0$$

Tenemos que $P(A)\cdot v = 0$, $\forall\ v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ y por tanto, $P(A) = 0$. Entonces $m_A|P$. Como m_A y P se dividen mutuamente:

$$m_A = P$$

□

Ejemplo 7.2.3. *Calcular m_A para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Consideremos $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canónica de $\mathbb{R}^3$. Por la proposición anterior $m_A = MCM\{m_{e_1}, m_{e_2}, m_{e_3}\}$. Hallemos $m_{e_1}, m_{e_2}, m_{e_3}$:*

- m_{e_1} : *Notemos que $\{e_1, Ae_1\} = \{e_1, e_1 + e_2\}$ es LI, pero $\{e_1, Ae_1, A^2e_1\} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2\}$ no lo es. Además:*

$$\begin{aligned} 0 &= (e_1 + 2e_2) - 2(e_1 + e_2) + e_1 \\ 0 &= A^2e_1 - 2Ae_1 + e_1 \end{aligned}$$

  De donde $m_{e_1} = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

- m_{e_2} : *Como $Ae_2 = e_2$, entonces $m_{e_2} = (x-1)$*

- m_{e_3} : *Como $Ae_3 = 2e_3$, entonces $m_{e_3} = (x-2)$*

Luego:

$$\begin{aligned} m_A &= MCM\{(x-1)^2, (x-1), (x-2)\} \\ m_A &= (x-1)^2(x-2) \end{aligned}$$

7.2.5. Teorema de Cayley-Hamilton

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea X_A el polinomio característico de A. Entonces $m_A | X_A$ (lo que es equivalente a que $X_A(A) = 0$)

Demostración. Sea $T_A : \mathbb{K}^{n\times 1} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times 1}$ lineal, definida por $T_A(x) = Ax$. Sea $v \in \mathbb{K}^n$, supongamos que $\{v, T_A(v), \ldots, T_A^k(v)\}$ es LI y que $T_A^{k+1}(v) = -a_k T_A^k(v) - \ldots - a_1 T_A(v) - a_0 v$. Entonces:

$$m_v = x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$$

Extendemos el conjunto $\{v, T_A(v), \ldots, T_A^k(v)\}$ a una base de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Sean $w_{k+2}, \ldots, w_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tales que:

$$B = \{v, T_A(v), \ldots, T_A^k(v), w_{k+2}, \ldots, w_n\}$$

Es una base de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Se tiene que:

$$[T_A]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & M \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & -a_{k-1} & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_k & \\ & & O & & & N \end{pmatrix}$$

Sabemos que $X_A = X_{T_A} = X_{[T_A]_B}$:

$$X_A = det \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 & \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_1 & \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots & -M \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & a_{k-1} & \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & x + a_k & \\ & & O & & & xI_{n-k-1} - N \end{pmatrix}$$

$$X_A = \underbrace{det \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & a_{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & x + a_k \end{pmatrix}}_{(Ejercicio)} \cdot det(xI_{n-k-1} - N)$$

$$X_A = (x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0) \cdot det(xI_{n-k-1} - N)$$

$$X_A = m_v \cdot det(xI_{n-k-1} - N)$$

Por lo tanto, $m_v | X_A$ para $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ arbitrario. Sea $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base canónica de $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Por lo anterior $m_{e_i} | X_A$, $\forall\ i \in I_n$. Por la proposición anterior $m_A = MCM\{m_{e_1}, \ldots, m_{e_n}\}$ divide a X_A

$$\therefore m_A | X_A, \text{ por ende } X_A(A) = 0.$$

□

Observación 7.2.4. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces:*

1. $gr(m_A) \leq n$
2. *Si $gr(m_A) = n$, entonces $m_A = X_A$*
3. *Si existe $v \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ tal que $gr(m_v) = n$, entonces $m_v = m_A = X_A$*

Ejemplo 7.2.4. *Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, entonces $X_A = (x-1)^2$. Determinaremos A^n, por el algoritmo de la división $\exists\ P \in \mathbb{K}[x] : x^n = (x-1)^2 P(x) + a_n x + b_n$*

- *Evaluando en $x = 1$: $a_n + b_n = 1$*
- *Derivando y evaluando en $x = 1$: $a_n = n \wedge b_n = 1 - n$*
- *Luego: $x^n = (x-1)^2 P(x) + nx + (1-n)$*
- *Por Cayley-Hamilton: $A^n = nA + (1-n)I_n$*
- *Además: $A^2 - 2A + I_n = 0 \longrightarrow A(2I - A) = I_n$, es decir $A^{-1} = 2I - A$*

7.2.6. Un criterio de diagonalización usando el polinomio minimal

Recordar que si X_A tiene todas sus raíces simples, entonces A es diagonalizable, pero el recíproco no es necesariamente cierto. Sin embargo, es posible dar una condición necesaria y suficiente para la diagonalización considerando la factorización del polinomio minimal.

Proposición 7.2.6. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces A es diagonalizable, si y solo si, m_A tiene todas sus raíces em $\mathbb{K}$ y son simples.*

Demostración. .

- **($\longrightarrow$):** Supongamos que A es diagonalizable. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los autovalores de A, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, y sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de autovectores de A. Si m_v es el polinomio minimal del vector v para la matriz A, se tiene que:

$$\begin{aligned} m_A &= MCM\{m_{v_1}, \ldots, m_{v_n}\} \\ &= MCM\{x-\lambda_1, \ldots, x-\lambda_r\} \\ &= (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_r) \end{aligned}$$

  En consecuencia, m_A tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$ y son simples

- **($\longleftarrow$):** Supongamos que $m_A = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_r)$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Entonces $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son todos los autovalores de A en $\mathbb{K}$.

  Probar de que: $\mathbb{K}^{n\times n} = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$, donde $E_{\lambda_i} = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = \lambda x\}$

  Sea $v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$. Consideremos el subespacio $S = \mathscr{L}\{v, Av, A^2v, \ldots, A^mv, \ldots\} \subset \mathbb{K}^n$. Supongamos que $\{v, Av, \ldots, A^kv\}$ es LI pero $\{v, Av, \ldots, A^kv, A^{k+1}v\}$ es LD.

  Luego $A^jv \in \mathscr{L}\{v, Av, \ldots, A^kv\}$ $\forall$ $j \in \mathbb{N}$ y $B_S = \{v, Av, \ldots, A^kv\}$ resulta ser una base de S. Además $gr(m_v) = k+1$, es decir, m_v es de la forma:

$$m_v = x^{k+1} + a_kx^k + \ldots + a_1x + a_0$$

  Si $x \in S$ resulta que $Ax \in S$. Sea $T_A : S \longrightarrow S$ lineal definida por $T_A(x) = Ax$, se tiene que:

$$[T_A]_{B_S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & -a_{k-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_k \end{pmatrix}$$

  Observamos que:

$$\begin{aligned} X_{T_A} &= det(XI_{k+1} - [T_A]_{B_S}) \\ &= x^{k+1} + a_kx^k + \ldots + a_1x + a_0 = m_v \end{aligned}$$

  Dado que $m_v | m_A$ y por hipótesis m_A tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$ y son simples, resulta que $X_{T_A} = m_v$ tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$, son simples y son algunos de los autovalores de A. Luego T_A es diagonalizable sobre S. Además, si $X_{T_A} = (x-\lambda_{i_1})\ldots(x-\lambda_{i_{k+1}})$ como

$v \in S$, existen $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k+1}}$ autovectores de T_A (donde v_{ij} es un autovector de autovalor λ_{ij}) tales que $v = v_{i_1} + \ldots + v_{i_{k+1}}$. Pero v_{ij} es un autovector de T_A con autovalor λ_{ij}, entonces es un autovector de A con el mismo autovalor. Luego $v \in \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$.

Como $v \in \mathbb{K}^n$ era arbitrario, se tiene que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$. Luego, por teorema, A es diagonalizable.

□

Ejemplo 7.2.5. .

- *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^k = I_n$, entonces A es diagonalizable.*
- *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^k = I_n$, entonces A no necesariamente es diagonalizable ($A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, por ejemplo)*

7.2.7. Subespacios invariantes

Definición 7.2.4. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Un subespacio $S \subset V$ se dice **invariante por** T (o T invariante) si $T(S) \subset S$*

Ejemplo 7.2.6. .

1. *Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Considere $T_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$*

   Si consideramos la base canónica de $\mathbb{R}^4 : E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ algunos subespacios invariantes son $\mathscr{L}\{e_1, e_2\}$, $\mathscr{L}\{e_2\}$, $\mathscr{L}\{e_3\}$, $\mathscr{L}\{e_4\}$, $\mathscr{L}\{e_3, e_4\}$, $\mathscr{L}\{e_1, e_2, e_4\}$

2. *Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Veamos para $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$*

   a) *Subespacios invariantes de dimensión 0: $\{0\}$*

   b) *Subespacios invariantes de dimensión 2: $\mathbb{R}^2$*

   c) *Subespacios invariantes de dimensión 1:*

      *$S = \mathscr{L}\{v\}$ es un subespacio invariante de dimension 1, si y solo si, $v \neq 0$ y $A_v \in \mathscr{L}\{v\}$, es decir, $Av = \lambda v$. Luego, $\mathscr{L}\{v\}$ es T_A-invariante, si y solo si, v es autovector de A. Verificar que $S = \mathscr{L}\{e_2\}$ (**Ejercicio**).*

Proposición 7.2.7. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Sea $T : V \longrightarrow V$ transformación lineal. Entonces:*

i) *$Nu(T)$ e $Im(T)$ son subespacios T-invariantes de V*

ii) *S es un subespacio T-invariantes de V de dimensión 1, si y solo si, $S = \mathscr{L}\{v\}$ con v autovector de T*

iii) *Si S_1 y S_2 son subespacios T-invariantes de V, entonces $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$ son subespacios T-invariantes de V*

Demostración. .

i) (Ejercicio)

ii) Sea S un subespacio T-invariante de V unidimensional. Entonces $S = \mathscr{L}\{v\}$ para algún $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $T(v) \in \mathscr{L}\{v\}$, es decir, $\exists\ \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda v$ y como $v \neq 0$, entonces v es autovector de T.

   Recíprocamente, si $S = \mathscr{L}\{v\}$ con v autovector de T, como $v \neq 0$, entonces $dimS = 1$ y como $T(v) = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$, resulta que $T(S) \subset S$. Luego $T(S)$ es subespacio invariante de dimensión 1.

iii) Sean S_1 y S_2 subespacios de V invariantes por T:

   - Entonces $T(S_1 \cap S_2) \subset T(S_1) \subset S_1$, análogo para S_2: $T(S_1 \cap S_2) \subset S_2$. Por lo tanto: $T(S_1 \cap S_2) \subset S_1 \cap S_2$
   - Dado que S_1 y S_2 son invariantes por T $f(S_1 + S_2) \subset f(S_1) + f(S_2) \subset S_1 + S_2$

   $\therefore S_1 + S_2$ es invariante por T

□

Nota 7.2.3. *Sea $T : V \to V$, $S \subset V$ subespacio T-invariante, denotemos por $T|_S$ a la restricción de T sobre el subespacio S, osea $T|_S : S \to S$.*

Proposición 7.2.8. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, sea $T : V \to V$ lineal y sea $S \subset V$ subespacio T-invariante. Sea $T|_S : S \to S$ la restricción. Entonces:*

i) $m_{T|_S} | m_T$.

ii) $X_{T|_S} | X_T$.

Demostración. Sean $n = dim(V)$ y $s = dim(S)$ (Obvio $s \leq n$). Sea $B_s = \{v_1, \dots, v_s\}$ base de S y sean $\{v_{s+1}, \dots, v_n\} \subset V$ tales que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V.

i) Sabemos que:

$$m_{T|_S} = MCM\{m_{v_1}, \dots, m_{v_s}\}$$

$$m_T = MCM\{m_{v_1}, \dots, m_{v_s}, m_{v_{s+1}}, \dots, m_{v_n}\}$$

Como $m_{v_i}|m_T$ para cada $i \in I_s$, el MCM de estos también lo hace, osea $m_{T|_S}|m_T$.

ii) Para la base B considerada, se tiene que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A & B' \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}, \text{ donde } A = [T|_S]_{B_s} \in \mathbb{K}^{s\times s}$$

Luego:

$$\begin{aligned} X_T = X_{[T]_B} = det \begin{pmatrix} xI_s - A & -B' \\ 0 & xI_{n-s} - C \end{pmatrix} \\ = det(xI_s - A) \cdot det(xI_{n-s} - C) \\ = X_{T|_S} \cdot Q \end{aligned}$$

Con lo que:

$$X_{T|_S}|X_T$$

□

Observación 7.2.5. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ transformación lineal. Sean S_1, S_2 subespacios T-invariantes tales que $S_1 \oplus S_2 = V$.*

Supongamos que $dim(S_1) = s > 0, dim(S_2) = t$. Sean $B_{S_1} = \{v_1, \dots, v_s\}$ y $B_{S_2} = \{w_1, \dots, w_t\}$ bases de S_1 y S_2 respectivamente. Entonces:

$$B = B_{S_1} \cup B_{S_2} = \{v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t\}$$

Es una base de V y:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \text{ donde } A_1 \in \mathbb{K}^{s\times s}, A_2 \in \mathbb{K}^{t\times t}$$

Mas aún, si $T|_{S_1} : S_1 \to S_1, T|_{S_2} : S_2 \to S_2$ son las restricciones, se tiene que:

$$A_1 = [T|_{S_1}] \text{ y } A_2 = [T|_{S_2}]$$

Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 7.2.5. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $T : V \to V$ endomorfismo. Sea $S \subset V$ subespacio T-invariante. Un complemento invariante para S es un subespacio S' de V tal que S' es T-invariante y $S \oplus S' = V$.*

Observación 7.2.6. *Dada una transformación lineal $T : V \to V$ y un subespacio S de V, T-invariante para S, no siempre existe un complemento invariante para S. Por ejemplo considere: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y) = (0,x)$. Consideremos $S = \mathscr{L}\{e_2\}$ y este no tiene complemento invariante.*

Proposición 7.2.9. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Sean S_1 y S_2 subespacios T-invariantes de V tales que $S_1 \oplus S_2 = V$. Entonces:*

i) $X_T = X_{T|_{S_1}} \cdot X_{T|_{S_2}}$

ii) $m_T = MCM(m_{T|_{S_1}}, m_{T|_{S_2}})$

Demostración. .

i) **(Ejercicio)** se deduce de la observación previa a la definición.

ii) Sea $P = MCM(m_{T|_{S_1}}, m_{T|_{S_2}})$. Dado que S_1 y S_2 son subespacios T-invariantes de V, por una proposición anterior se tiene que:

$$m_{T|_{S_1}} | m_T \text{ y } m_{T|_{S_2}} | m_T$$

Luego: $P | m_T$. Por otro lado, por la observación previa a la definición, si B_{S_1} y B_{S_2} son bases de S_1 y S_2 respectivamente, y $B = B_{S_1} \cup B_{S_2}$, entonces:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Con $A_1 = [T|_{S_1}]_{B_1}, A_2 = [T|_{S_2}]_{B_2}$ como $m_{T|_{S_1}} | P$ y $m_{T|_{S_2}} | P$, resulta que $P(A_1) = 0$ y $P(A_2) = 0$. Operando por bloques:

$$P([T]_B) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0 \\ 0 & P(A_2) \end{pmatrix} = 0$$

De donde $m_T | P$. Luego $P = m_T$, puesto que P y m_T sin descompinidos en polinomios mónicos que se dividen mutuamente.

□

7.3. Forma de Jordan

7.3.1. Transformaciones lineales nilpotentes

Definición 7.3.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Una transformación lineal $T : V \to V$ se dice **NILPOTENTE** si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{k-veces} = 0$.*

Análogamente, se dice que una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.

Observación 7.3.1. *Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal, entonces T es nilpotente si y solo si para cualquier base B de V, $[T]_B$ es nilpotente.*

Definición 7.3.2. *Sea $T : V \to V$ transformación lineal nilpotente. Se define el índice de nilpotencia de T como:*

$$\text{mín}\{j \in \mathbb{N} : T^j = 0\}$$

Análogamente, se define el índice de nilpotencia de una matriz nilpotente $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ como $\text{mín}\{j \in \mathbb{N} : A^j = 0\}$.

Lema 7.3.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $T : V \to V$. Entonces T es nilpotente de índice k si y solo si $m_T = x^k$*

Demostración. .

- **($\longrightarrow$):** Si T es nilpotente de índice k, se tiene que $T^k = 0$ y $T^{k-1} \neq 0$. La primera condición implica que el polinomio x^k anula a T, y en consecuencia, $m_T | x^k$. Luego, $m_T = x^j$ para algun $j \leq k$. Como $T^{k-1} \neq 0$, entonces $m_T = x^k$.
- **($\longleftarrow$):** Si $m_T = x^k$, entonces $T^k = 0$ y $T^{k-1} \neq 0$ con lo que T es nilpotente de indice k.

$\square$

Observación 7.3.2. *Bajo las hipotesis del lema anterior, como el grado del polinomio minimal de T es siempre menor o igual que la dimensión n de V, tendremos que T es nilpotente si y solo si $T^n = 0$.*

Proposición 7.3.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, y sea $T : V \to V$ nilpotente de índice k. Entonces:*

$$\{0\} \subsetneq Nu(T) \subsetneq Nu(T^2) \subsetneq \ldots \subsetneq Nu(T^k) = V$$

Demostración. Siendo k el índice de nilpotencia de T, se tiene $T^k = 0$, de donde $Nu(T^k) = V$. Además es claro que valen las inclusiones.

Veamos que son estrictas. En primer lugar, observamos que si $Nu(T^i) = Nu(T^{i+1})$ para algun $i \in \mathbb{N}$, entonces $Nu(T^{i+1}) = Nu(T^{i+2})$: Si $v \in Nu(T^{i+2})$, se tiene que $T^{i+2}(v) = 0$, de donde $T^{i+1}(T(v)) = 0$, luego $T(v) \in Nu(T^{i+1})$ y como por hipótesis $Nu(T^{i+1}) = Nu(Ti)$, entonces $T(v) \in Nu(T^i)$. Esto dice que $T^{i+1}(v) = T^i(T(v)) = 0$, es decir $v \in Nu(T^{i+1})$. Luego, si $Nu(T^{i_0}) = Nu(T^{i_0+1})$ para algún $i_0 \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $Nu(T^i) = Nu(T^{i+1})$ para todo $i \geq i_0$. Pero como el índice de nilpotencia de T es k, $Nu(T^{k-1}) \neq V = Nu(T^k)$, y en consecuencia debe ser que $i_0 \geq k$.

Notación: Para el caso de matrices para cada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, denotamos $Nu(A)$ al núcleo de T_A osea al conjunto $\{x \in \mathbb{K}^{n\times 1} : Ax = 0\}$ de la proposición anterior se cumple:

$$\{0\} \subsetneq Nu(A) \subsetneq Nu(A^2) \subsetneq \ldots \subsetneq Nu(A^k) = \mathbb{K}^{n\times 1}$$

□

7.3.2. Existencia de la forma de Jordan para una transformación lineal nilpotente

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \to V$ nilpotente de índice máximo osea n (es decir $m_T = X_T = x^n$). Sea $v \in V \backslash Nu(T^{n-1})$. Como m_v divide a $m_T = x^n$, resulta que $m_v = x^k (k \leq n)$. Sea $v \in V$ tal que $T^{n-1}(v) \neq 0$, es decir $v \in V\backslash Nu(T^{n-1})$, resulta $m_v = x^n$ y por tanto, el conjunto:

$$B = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$$

Es una base de V. Además.

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Este tipo de matrices aparecerán y les daremos un nombre.

Definición 7.3.3. *Sea $J \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que J es un bloque de Jordan nilpotente si:*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lema 7.3.2. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, Sea $T : V \to V$ lineal y sea $i \in \mathbb{N}$. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ conjunto L.I. tal que $Nu(T^i) \cap \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_r\} = \{0\}$. Entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es L.I. y además $Nu(T^{i-1}) \cap \mathscr{L}\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\} = \{0\}$.*

Demostración. Supongamos que $v = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_r T(v_r) \in Nu(T^{i-1})$. Entonces:

$$0 = T^{i-1}(v) = T^i(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r)$$

De donde $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r \in Nu(T^i)$. Como $Nu(T^i) \cap \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_r\} = \{0\}$, resulta que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0$ y como $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es L.I. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Luego $v = 0$, de la misma prueba se deduce que si $\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_r(v_r) = 0$, entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Con lo cual $\{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es L.I. $\square$

Teorema 7.3.1. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea la transformación lineal $T : V \to V$ nilpotente de índice k. Entonces existe una base B de V tal que:*

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix}$$

Donde, para cada $i \in I_r$, $J_i \in \mathbb{K}^{n_i \times n_i}$ es un bloque de Jordan y $k = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$.

Demostración. Como T es nilpotente de índice k:

$$\{0\} \subsetneq Nu(T) \subsetneq Nu(T^2) \subsetneq \ldots \subsetneq Nu(T^{k-1}) \subsetneq Nu(T^k) = V$$

Consideremos conjuntos de vectores en $Nu(T^j)$ recursivamente comenzando en $j = k$ hasta $j = 1$, por el lema anterior y de tal forma que la unión de esos conjuntos sea una base de V. Sea B_{k-1} una base de $Nu(T^{k-1})$ y sea:

$$C_k = \{v_1^{(k)}, \ldots, v_{r_k}^{(k)}\} \subset Nu(T^k) = V$$

Un conjunto L.I. tal que $B_{k-1} \cup C_k$ es una base de $Nu(T^k) = V$. Por construcción, C_k es un conjunto L.I. y:

$$Nu(T^{k-1}) \oplus \mathscr{L}\{C_k\} = Nu(T^k) = V$$

Para fijar ideas, hagamos el paso siguiente de la recursión. Por el lema anterior, $T(C_k) \subset Nu(T^{k-1})$ es un conjunto LI tal que $Nu(T^{k-2}) \cap T(C_k) = \{0\}$. Sea B_{k-2} una base de $Nu(T^{k-2})$. Completamos el conjunto LI $B_{k-2} \cup T(C_k)$ a una base de $Nu(T^{k-1})$ con $\{v_1^{(k-1)}, \ldots, v_{r_{k-1}}^{(k-1)}\}$. Luego, si llamamos:

$$C_{k-1} = T(C_k) \cup \{v_1^{(k-1)}, \ldots, v_{r_{k-1}}^{(k-1)}\} \subset Nu(T^{k-1})$$

Tenemos que C_{k-1} es un conjunto LI y vale:

$$Nu(T^{k-2}) \oplus \mathscr{L}\{C_{k-1}\} = Nu(T^{k-1})$$

Notemos que:

$$Nu(T^{k-2}) \oplus \mathscr{L}\{C_{k-1}\} \oplus \mathscr{L}\{C_k\} = V$$

Pasemos ahora al j-ésimo paso de la recursión: Sea $j \in I_k$. Supongamos construidos los conjuntos LI $C_{j+1} \subset Nu(T^{j+1}), \ldots, C_k \subset Nu(T^k)$ tales que:

$$T(C_k) \subset C_{h-1} \text{ , } \forall \; j+2 \leq h \leq k$$

$$Nu(T^j) \oplus \mathscr{L}\{C_{j+1}\} = Nu(T^{j+1})$$

$$Nu(T^j) \oplus \mathscr{L}\{C_{j+1}\} \oplus \ldots \oplus \mathscr{L}\{C_k\} = V$$

Por el lema $T(C_{j+1}) \subset Nu(T^j)$ es un conjunto LI y $Nu(T^{j-1}) \cap \mathscr{L}\{T(C_{j+1})\} = \{0\}$. Consideremos una base B_{j-1} de $Nu(T^{j-1})$. Entonces:

$$B_{j-1} \cup T(C_{j+1}) \subset Nu(T^j)$$

Es LI y, por tanto

$$\exists\ v_1^{(j)}, \ldots, v_{r_j}^{(j)} \in Nu(T^j)$$

Tales que

$$B_{j-1} \cup T(C_{j+1}) \cup \{v_1^{(j)}, \ldots, v_{r_j}^{(j)}\} \text{ es base de } Nu(T^j)$$

Sea $C_j = T(C_{j+1}) \cup \{v_1^{(j)}, \ldots, v_{r_j}^{(j)}\} \subset Nu(T^j)$. Es claro que $C_j \subset Nu(T^j)$, dado que por construcción, es un conjunto de una base de $Nu(T^j)$ y que:

$$Nu(T^{j-1}) \oplus C_j = Nu(T^j)$$

Por tanto:

$$Nu(T^{j-1}) \oplus \mathscr{L}\{C_j\} \oplus \ldots \oplus \mathscr{L}\{C_k\} = V$$

Al terminar la recursión tendremos que:

$$\mathscr{L}\{C_1\} \oplus \ldots \oplus \mathscr{L}\{C_k\} = V$$

Y como cada conjunto C_j para cada $j \in I_k$ es LI, resulta que $\bigcup\limits_{j=1}^{k} C_j$ es una base de V. Consideremos la base B de V obtenida reordenando esta base como sigue:

$$B = \{v_1^{(k)}, T(v_1^{(k)}), \ldots, T^{k-1}(v_1^{(k)}), \ldots, v_{r_k}^{(k)}, T(v_{r_k}^{(k)}), \ldots, T^{k-1}(v_{r_k}^{(k)}), \ldots, v_1^{(j)}, T(v_1^{(j)}), \ldots, T^{j-1}(v_{r_j}^{(j)}),$$
$$\ldots, v_1^{(1)}, \ldots, v_{r_1}^{(1)}\}$$

Se puede verificar que $[T]_B$ tiene la forma del enunciado del teorema. □

Definición 7.3.4. *Una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se dice una **forma de Jordan nilpotente** si:*

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots 0 & \\ 0 & J_2 & \ldots 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_r \end{pmatrix}$$

Con $J_i \in \mathbb{K}^{n_i\times n_i}$ bloques de Jordan nilpotentes ($i \in I_r$) y $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_r$

Por el teorema anterior tenemos que para todo endomorfismo nilpotente $T : V \longrightarrow V$ (V es $\mathbb{K}$-espacio vectorial), existe una base B de V tal que $[T]_B$ es una forma de Jordan nilpotente. A dicha base B la denominaremos una base de Jordan para T y a la matriz $[T]_B$ una forma de Jordan para T.

Aplicando este teorema para $T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$

Teorema 7.3.2. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz nilpotente. Entonces A es semejante a una forma de Jordan nilpotente.*

A una base B de $\mathbb{K}^n$ tal que $[T_A]_B = J_A$ es una forma de Jordan nilpotente, la llamaremos una base de Jordan para A, y a la matriz J_A una forma de Jordan para A

Ejemplo 7.3.1. *Hallar una forma de Jordan y una base de Jordan para $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$, siendo:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $X_A = x^6$, entonces A es nilpotente. Calculemos m_A, con la forma x^k, con $k \in I_6$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^3 = O$$

Resulta que $X_A = x^3$. Sea $E = \{e_1, \ldots, e_6\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^6$, entonces: $B_1 = \{e_3, e_4, e_6\}$, $B_2 = \{e_3, e_4, e_6, e_2, e_5\}$ y $B_3 = \{e_3, e_4, e_6, e_2, e_5, e_1\}$ son bases de $Nu(A)$, $Nu(A^2)$ y $Nu(A^3)$, respectivamente.

Construimos una base de Jordan para A siguiendo la demostración del teorema anterior (considerando la transformación lineal $T_A : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$). Tenemos que:

$$\{0\} \subsetneq Nu(A) \subsetneq Nu(A^2) \subsetneq Nu(A^3) = \mathbb{R}^6$$

Extendemos la base B_2 de $Nu(A^2)$ a una base de $Nu(A^3) = \mathbb{R}^6$, por ejemplo, agregando el vector e_1 que completa B_3. Consideramos $Ae_1 = (0, 1, -1, 0, -1, 1) \in Nu(A^2)$. Se tiene que:

$$\{0\} \subsetneq Nu(A) \subsetneq \underbrace{Nu(A^2)}_{Ae_1} \subsetneq \underbrace{Nu(A^3)}_{e_1} = \mathbb{R}^6$$

Ahora consideremos la base B_1 de $Nu(A)$, tomamos el conjunto $B_1 \cup \{Ae_1\} \subset Nu(A^2)$, y extendemos este conjunto a una base de $Nu(A^2)$. Para esto podemos elegir, por ejemplo, el vector $e_5 \in Nu(A^2)$.

Multiplicando por A los vectores Ae_1 y e_5 se obtiene el conjunto LI:

$$\{A^2e_1, Ae_5\} = \{(0,0,-1,0,0,1),(0,0,0,1,0,-1)\} \subset Nu(A^2)$$

$$\{0\} \subsetneq \underbrace{Nu(A)}_{\substack{A^2e_1 \\ Ae_5}} \subsetneq \underbrace{Nu(A^2)}_{\substack{Ae_1 \\ e_5}} \subsetneq \underbrace{Nu(A^3)}_{e_1} = \mathbb{R}^6$$

Finalmente extendemos el conjunto $\{A^2e_1, Ae_5\}$ a una base de $Nu(A)$, por ejemplo, con el vector e_3. Obtenemos:

$$\{0\} \subsetneq \underbrace{Nu(A)}_{\substack{A^2e_1 \\ Ae_5 \\ e_3}} \subsetneq \underbrace{Nu(A^2)}_{\substack{Ae_1 \\ e_5}} \subsetneq \underbrace{Nu(A^3)}_{e_1} = \mathbb{R}^6$$

Entonces, una base de Jordan para A es:

$$\begin{aligned} B &= \{e_1, Ae_1, A^2e_1, e_5, Ae_5, e_3\} \\ &= \{(1,0,0,0,0,0),(0,1,-1,0,-1,1),(0,0,-1,0,0,1), \\ &\quad (0,0,0,0,1,0),(0,0,0,1,0,-1),(0,0,1,0,0,0)\} \end{aligned}$$

Y una forma de Jordan de A es $J = [T_A]_B$, es decir:

$$J_A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

7.3.3. Unicidad de la forma de Jordan nilpotente. Semejanza.

Lema 7.3.3. *Sea $J \in \mathbb{K}^{m\times m}$ un bloque de Jordan nilpotente. Entonces $rg(J^i) = m - i$, para cada $i \in I_m$*

Demostración. Se puede verificar inductivamente que $J^i = (e_{i+1}^T : \ldots : e_m^T : 0 \ldots : 0)$, donde e_j denota el j-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{K}^n$ (es decir, que al elevar un bloque de Jordan nilpotene a la i, los unos bajan $i-1$ lugares). En consecuencia, $rg(J^i) = dim\mathscr{L}\{e_{i+1}, \ldots, e_m\} = m - i$

□

Con este resultado se nos permite calcular la cantidad de bloques de cada tamaño que aparecen en una forma de Jordan usando los rangos de las potencias de la matriz.

Proposición 7.3.2. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una forma de Jordan nilpotente de índice k. Entonces el bloque de Jordan más grande que aparece en A es de tamaño $k \times k$. Además, para cada $0 \leq i \leq k-1$ la cantidad de bloques de Jordan nilpotentes de tamaño mayor que i que aparecen en A es:*

$$b_i = rg(A^i) - rg(A^{i+1})$$

En particular, la cantidad de bloques de Jordan que aparecen en A es $b_0 = n - rg(A) = dim(Nu(A))$

Demostración. Como el índice de nilpotencia es k, se tiene que $m_A = x^k$. Sean $J_1, \ldots, J_r$ los bloques de Jordan que aparecen en A con $J_l \in \mathbb{K}^{n_2 \times n_2}$ para cada $l \in I_r$. Entonces:

$$m_A = MCM\{m_{J_1}, \ldots, m_{J_r}\} = MCM\{x^{n_1}, \ldots, x^{n_r}\} = x^{n_1}$$

Luego, $n_1 = k$, es decir, el bloque de Jordan más grande que aparece en A es de $k \times k$.

Si A está formada por r bloques de Jordan nilpotentes, resulta que $rg(A) = n - r$, dado que este rango es la suma de los rangos de los distintos bloques de Jordan. En consecuencia, la cantidad total de bloques de Jordan que forman A es $b_0 = n - rg(A)$.

Sea $i \in I_{k-1}$, por el lema anterior, que para un bloque de Jordan $J \in \mathbb{K}^{j\times j}$ se tiene que $J^i = 0$ si $j \leq i$, o $rg(J^i) = j - i$ si $j > i$. Además, $rg(A)$ es la suma de los rangos de los bloques que aparecen en la diagonal. En consecuencia:

$$\begin{aligned} rg(A^i) - rg(A^{i+1}) &= \sum_{j=i+1}^{k} c_j(j-i) - \sum_{j=i+2}^{k} c_j(j-(i+1)) \\ &= \sum_{j=i+1}^{k} c_j = b_i \end{aligned}$$

□

Corolario 7.3.1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una forma de Jordan nilpotente de índice k. Entonces, para cada $i \in I_k$, la cantidad de bloques de Jordan de tamaño $i \times i$ que aparecen en A es:*

$$e_i = rg(A^{i+1}) - 2rg(A^i) + rg(A^{i-1})$$

Demostración. Observamos que:

$$c_k = b_{k-1} = rg(A^{k-1}) - rg(A^k) = rg(A^{k+1}) - 2rg(A^k) + rg(A^{k-1})$$

Puesto que $A^k = 0$. Sea $i \in I_{k-1}$, entonces:

$$\begin{aligned} c_i &= b_{i-1} - b_i \\ &= (rg(A^{i-1}) - rg(A^i)) - (rg(A^i) - rg(A^{i+1})) \\ &= rg(A^{i+1}) - 2rg(A^i) + rg(A^{i-1}) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 7.3.2. *Decidir si existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{15\times 15}$ tal que $rg(A) = 10$, $rg(A^4) = 3$ y $rg(A^5) = 0$*

Solución: *Si $rg(A^5) = 0$ y $rg(A^4) = 3$, entonces $A^5 = 0$ y $A^4 \neq 0$ de donde A es nilpotente de índice 5. Entonces A es semejante a una forma de Jordan nilpotente J_A cuyo bloque más grande es de 5×5*

Por la proposición anterior, se tiene que $rg(A^4) - rg(A^5) = 3$ bloques 5×5 y como $J_A \in \mathbb{R}^{15\times 15}$ estos deben ser los únicos bloques que aparecen.

Pero la cantidad de bloques de Jordan debe ser:

$$15 - rg(A) = 15 - 10 = 5 \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

Luego, no existe una matriz $A \in \mathbb{K}^{15\times 15}$ que cumple lo establecido

Lema 7.3.4. *Sean J y J' formas de Jordan nilpotentes. Si $J \sim J'$, entonces $J = J'$*

Demostración. Las cantidades de bloques de cada tamaño que aparecen en una forma de Jordan nilpotente solo dependen de los rangos de sus potencias. Por otro lado, si $J \sim J'$, entonces para cada $i \in I_k$ se tiene que $rg(J^i) = rg((J')^i)$. En consecuencia, la cantidad de bloques de Jordan de cada tamaño es la misma en J que en J'. Luego $J = J'$

□

Teorema 7.3.3. ***(Unicidad en el caso nilpotente)*** *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n. Sea $T : V \longrightarrow V$ transformación lineal nilpotente. Entonces existe una única forma de Jordan nilpotente $J \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que:*

$$[T]_B = J \text{ para alguna base } B \text{ de } V$$

Demostración. Si B y B' son bases de V tales que $[T]_B = J$ y $[T]_{B'} = J'$ con J y J' formas de Jordan nilpotentes, entonces $J \sim J'$. Por el lema anterior: $J = J'$ □

Teorema 7.3.4. *Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ matrices nilpotentes. Sean J, J' formas de Jordan nilpotentes tales que $A \sim J$ y $B \sim J'$. Entonces: $A \sim B \leftrightarrow J = J'$*

Demostración.

$$(\rightarrow)$$

Si $A \sim B$, y por hipótesis $A \sim J \wedge B \sim J'$ y como $\sim$ es de equivalencia, resulta que $J \sim J'$. Luego por el lema $J = J'$.

$$(\leftarrow)$$

Si $J = J'$ siendo $A \sim J, B \sim J'$ y por ser $\sim$ de equivalencia, se deduce que $A \sim B$. □

Ejemplo 7.3.3. .

1. *Sean $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ dos matrices que $m_A = m_B = x^3$. Probar que $A \sim B$.*

   Solución 7.3.1. *Por el teorema anterior, el ejemplo es equivalente a probar que A y B tienen la misma forma de Jordan. Luego, basta ver que existe una única forma de Jordan nilpotente $J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $m_J = x^3$. Si $m_J = x^3$, entonces J tiene al menos un bloque de Jordan nilpotente 3×3. Como $J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, lo único que le queda es que este conformada por un bloque de 3×3 y otro de 1×1, es decir.*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Sean $A, B \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ las matrices.*

$$A = \begin{pmatrix} J_3 & & 0 \\ & J_3 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} J_3 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_2 \end{pmatrix}$$

Observamos que $X_A = x^7 = X_B, m_A = x^3 = m_B$, y $rg(A) = rg(B)$, pero $A \nsim B$ dado que son dos formas de Jordan diferentes.

7.3.4. Caso General

Ahora generalizaremos lo visto para endomorfismos sobre $\mathbb{K}$-espacios de dimensión finita cuyos polinomios se factorizan linealmente (osea con sus raíces en $\mathbb{K}$).

7.3.5. Forma de Jordan de una transformación lineal

Primero veamos un caso particular, en el que el polinomio minimal del endomorfismo se factoriza linealmente pero tiene una sola raíz.

Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y que sea $T : V \to V$ transformación lineal tal que $m_T = (x-\lambda)^k$ para algún $k \leq n$. Se tiene entonces que $(T-\lambda Id)^k = 0$ y $(T-\lambda Id)^{k-1} \neq 0$ con lo cual $T - \lambda Id$ es nilpotente de índice k por un teorema anterior existe una base B de V tal que $|T - \lambda Id|_B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una forma de Jordan nilpotente, es decir:

$$|T - \lambda Id|_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix}$$

Donde, para cada $1 \leq i \leq r, J \in \mathbb{K}^{n_i \times n_i}$ es un bloque de Jordan nilpotente y $k = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$.

Observación 7.3.3.

$$|T|_B = |T - \lambda Id|_B + |\lambda Id|_B$$

$$= |T - \lambda Id|_B + \lambda I_n, \text{ de donde}$$

$$|T|_B = \begin{pmatrix} J(\lambda, n_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda, n_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J(\lambda, n_r) \end{pmatrix}$$

Donde, para cada $1 \leq i \leq r$

$$J(\lambda, n_i) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n_i \times n_i}$$

Y $k = n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$*. Esto motiva a la siguiente definición.*

Definición 7.3.5. *Sea* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Se llama bloque de Jordan asociado al autovalor* λ *de tamaño 'n' a la matriz* $J(\lambda, n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

La idea de la forma general de Jordan es, como en el caso nilpotente, encontrar una base donde la matriz del endomorfismo considerado tenga una forma particular (bloques de Jodan en la diagonal).

La demostración de la existencia de la forma de Jordan se basa en el siguiente lema.

Lema 7.3.5. *Sea* V *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de dimensión finita. Sea* $T : V \to V$ *una transformación lineal talque* $m_T = PQ$ *con* P *y* Q *primos entre si. Entonces:*

- $Nu(P(T))$ *y* $Nu(Q(T))$ *son subespacios invariantes por* T*.*
- $V = Nu(P(T)) \oplus Nu(Q(T))$*.*
- $m_{T|_{Nu(P(T))}} = P$ *y* $m_{T|_{Nu(Q(T))}} = Q$

Demostración.

- $Nu(P(T))$ y $Nu(Q(T))$ don invariantes por T:

  Sea $P = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$ y sea $x \in Nu(P(T))$. Entonces $P(T)(x) = 0$. Aplicando T se obtiene $T(P(T)(x)) = 0$. Luego:

$$0 = T(\sum_{i=0}^{r} a_i T^i(x)) = \sum_{i=0}^{r} a_i T^{i+1}(x)$$

$$= (\sum_{i=0}^{r} a_i T^i)(T(x))$$

De donde $T(x) \in Nu(P(T))$. Por lo tanto $Nu(P(T))$ es invariante por T. Análogo para $Nu(Q(T))$.

- $V = Nu(P(T)) \oplus Nu(Q(T))$. Dado que $MCD(P, Q) = 1$, existen $R, S \in \mathbb{K}[x]$ tales que $1 = RP + SQ$ de donde:

  $$Id = R(T) \ o \ P(T) + S(T) \ o \ Q(T)$$

  Sea $x \in Nu(P(T)) \cap Nu(Q(T))$. Entonces

  $$x = Id(x) = R(T)(P(T)(x)) + S(T)(Q(T)(x))$$

  $$= R(T)(0) + S(T)(0) = 0$$

  Luego, $Nu(P(T)) \cap Nu(Q(T)) = \{0\}$. Por otro lado, para cada $x \in V$ se tiene que:

  $$x = (R(T) \ o \ P(T))(x) + (S(T) \ o \ Q(T))(x)$$

  Ahora, como $Q(T) \ o \ R(T) = (QR)(T)$

  $$= (R.Q)(T) = R(T) \ o \ Q(T)$$

  Resulta que:

  $$Q(T)((R(T) \ o \ P(T)))(x)$$

  $$= (Q(T) \ o \ R(T) \ o \ P(T))(x)$$

  $$= R(T)((Q(T) \ o \ P(T))(x))$$

  $$= R(T)(m_T(T)(x)) = R(T)(0) = 0$$

  De donde $(R(T) \ o \ P(T))(x) \in Nu(Q(T))$. Analogamente, $(S(T) \ o \ Q(T))(x) \in Nu(P(T))$. En consecuencia:

  $$Nu(P(T)) + Nu(Q(T)) = V$$

- $m_{T|_{Nu(P(T))}} = P$ y $m_{T|_{Nu(Q(T))}} = Q$:
  Sea T_1 y T_2 las restricciones de T a $Nu(P(T))$ y $Nu(Q(T))$ respectivamente. Como

$V = Nu(P(T)) \oplus Nu(Q(T))$, se tiene que $m_T = MCM(m_{T_1}, m_{T_2})$. Si $P = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$, para cada $x \in Nu(P(T))$, se tiene que:

$$P(T_1)(x) = (\sum_{i=0}^{r} a_i T_1^i)(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i T_1^i(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{r} a_i T_1^i(x) = P(T)(x) = 0$$

Con lo cual $m_{T_1}|P$. Análogo, $m_{T_2}|Q$. Como P y Q son coprimos, resulta que m_{T_1} y m_{T_2} también lo son y por tanto:

$$PQ = m_T = MCM(m_{T_1}, m_{T_2}) = m_{T_1} m_{T_2}$$

De donde $m_{T_1} = P$ y $m_{T_2} = Q$.

□

Definición 7.3.6. *Diremos que $J \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz de Jordan o una forma de Jordan si:*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix}$$

Donde, para cada $1 \leq i \leq s$, es de la forma:

$$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_i^{(i)}) & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & J(\lambda_i n_2^{(i)}) & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & J(\lambda_i, n_{r_i})^{(i)} \end{pmatrix}$$

Con $n_1^{(i)} \geq \cdots \geq n_{r_i}^{(i)}$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, osea, cada J_i esta fotmado por (varios) bloques de Jordan de autovalor λ_i ubicados en la diagonal.

A continuación se demostrara el resultado principal de esta sección.

Teorema 7.3.5. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que m_T se factoriza linealmente sobre $\mathbb{K}$. Entonces existe una base B de V tal que $[T]_B$ es una forma de Jordan.*

Con la notación anterior, a una base B con la propiedad del teorema la llamaremos una base de Jordan para T y a la matriz $[T]_B$ una forma de Jordan para T.

Demostración. Probaremos el teorema por inducción sobre $n = dimV$:

- Para $n = 1$ nada que hacer
- Supongamos que el teorema vale para toda transformación lineal definida en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $m < n$ y sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal definida en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión n.

  Si $m_T = (x - \lambda)^k$, estamos en el caso analizado antes. Para el cual el teorema vale.
- Supongamos entonces que T tiene al menos dos autovalores distintos. Si λ_1 es uno de los autovalores de T, entonces $m_T = (x - \lambda_1)^{k_1}$. Q con $gr(Q) \geq 1$ y $((x - \lambda_1)^{k_1}, Q) = 1$. Por el lema anterior, $Nu((T - \lambda_1 I_{d_v})^{k_1})$ y $Nu(Q(T))$ son subespacios T-invariantes de V y

$$V = Nu((T - \lambda_1 I_{d_v})^{k_1}) \oplus Nu(Q(T))$$

  Además como λ, es autovalor de T pero no el único, $\{0\} \subset Nu((T - \lambda_1 I_{d_v})^{k_1}) \subset V$ y las inclusiones son estrictas. En particular, $0 < dim(Nu((T - \lambda_1 I_{d_v})^{k_1})) < dimV = n$. Entonces también vale:

$$0 < dim(Nu(Q(T))) < dimV = n$$

  Consideremos las restricciones de T a $Nu((T - \lambda_1 I_{d_v})^{k_1})$ y $Nu(Q(T))$.

$$T_1 : Nu((T - \lambda_1 I_{d_v})^{k_1}) \longrightarrow Nu((T - \lambda_1 I_{d_v})^{k_1})$$

$$T_2 : Nu(Q(T)) \longrightarrow Nu(Q(T))$$

  Por hipótesis inductiva, existen una base B_1 de $Nu((T - \lambda_1 I)^{k_1})$ y una base B_2 de $Nu(Q(T))$, tales que $[T_1]_{B_1}$ y $[T_2]_{B_2}$ son formas de Jordan. Entonces, tomando $B = B_1 \cup B_2$ obtenemos una base de V tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & 0 \\ 0 & [T_2]_{B_2} \end{pmatrix}$$

  Observamos que de acuerdo al lema anterior, $m_{T_1} = (x - \lambda_1)^{k_1}$ y $m_{T_2} = Q$. Entonces $[T_1]_{B_1}$ está formada por bloques de Jordan de autovalor λ_1 y, como λ_1 no es raíz de Q, $[T_2]_{B_2}$ está formada por bloques de Jordan de autovalor λ, con $\lambda \neq \lambda_1$. En consecuencia $[T]_B$ es una forma de Jordan.

$\square$

Observación 7.3.4. *Si* $m_T = \prod_{i=1}^{r}(x-\lambda_i)^{k_i}$ *con* $\lambda_i \neq \lambda_j$, *si* $i \neq j$. *La prueba anterior nos permite dar una forma constructiva de obtener una forma de Jordan como:*

$$V = Nu((T-\lambda_1 I_{dv})^{k_1}) \oplus \ldots \oplus Nu((T-\lambda_r I_{dv})^{r_1})$$

Podemos obtener una forma de Jordan para cada una de las restricciones de T *a estos subespacios invariantes* $Nu((T-\lambda_i I_{dv})^{k_i})$ *y las bases de Jordan* B_i *correspondientes. Entonces* $B = B_1 \cup \ldots \cup B_r$ *resulta ser una base de* V *y* $[T]_B$ *resulta una forma de Jordan de* T

El teorema anterior también se puede enunciar para matrices complejas:

Teorema 7.3.6. *Sea* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *entonces* A *es semejante a una forma de Jordan.*

►

A una base B de $\mathbb{K}^n$ tal que $[T_A]_B$ es una forma de Jordan para A, y a la matriz $[T_A]_B$ una forma de Jordan para A

◄

Ejemplo 7.3.4. *Hallar una forma de Jordan semejante a* A *y una base de Jordan para* A, *siendo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

Se tiene que $X_A = (x-1)^2(x+1)^2$, *luego los autovalores de* A *son* 1 *y* -1.

Calculemos $m_A = MCM\{m_{e_1}, m_{e_2}, m_{e_3}, m_{e_4}\}$, *donde* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *es la base canónica de* $\mathbb{C}^4$.

Puesto que $A(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3$, *luego* $\{e_1, Ae_1\}$*) es LI y* $A^2e_1 = e_1$, *se tiene que* $m_{e_1} = x^2 - 1$. *Por otro lado,* $Ae_2 = -e_2$, *con lo cual* $m_{e_2} = x+1$. *De la misma manera* $m_{e_3} = x+1$. *Finalmente, para* e_4 *tenemos que* $Ae_4 = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 + e_4$ *(y entonces* $\{e_4, Ae_4\}$ *es LI) y* $A_4^e = 4e_1 + 4e_2 + 4e_3 + e_4 = 2Ae_4 - e_4$. *Luego:*

$$m_{e_4} = x^2 - 2x + 1$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} m_A &= MCM(x^2-1, x+1, (x-1)^2) \\ m_A &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Sabemos entonces que:

$$\mathbb{C}^4 = Nu((A-I)^2) \oplus Nu(A+I)$$

Y si $T_1 : Nu((A-I)^2) \longrightarrow Nu((A-I)^2)$ *y* $T_2 : Nu(A+I) \longrightarrow Nu(A+I)$ *son restricciones de* T_A *a* $Nu((A-I)^2)$ *y* $Nu(A+I)$*, respectivamente. Una transformada de Jordan para* A *es:*

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}$$

Donde J_1,J_2 *son formas de Jordan de* T_1 *y* T_2*. Mas aún, si* B_1 *y* B_3 *son bases de Jordan para* T_1 *y* T_2*, entonces* $B = B_1 \cup B_2$ *es una base de Jordan para* A

- ***Base y forma de Jordan de*** $T_1 : Nu((A-I)^2) \longrightarrow Nu((A-I)^2)$

  Se tiene que $m_{T_1} = (x-1)^2$*, luego* $T_1 - I_{d_{Nu((A-I)^2)}}$ *es nilpotente de índice* 2*. Además:*

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  De donde $Nu(A-I) = \mathscr{L}(1,1,1,0)$ *y* $Nu((A-I)^2) = \{(1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$*. Consideramos el vector* $e_4 = (0,0,0,1)$ *que extiende una base de* $Nu(A-I)$ *a una de* $Nu((A-I)^2)$*. Obtenemos:*

$$\{0\} \subsetneq \underbrace{Nu(A-I)}_{(A-I)e_1} \subsetneq \underbrace{Nu((A-I)^2)}_{e_4}$$

  Luego, una base de Jordan para T_1 *es* $B_1 = \{e_4, (A-I)e_4\} = \{(0,0,0,1),(2,2,2,0)\}$ *y su forma de Jordan es*

$$[T_1]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ***Base y forma de Jordan de*** $T_2 : Nu(A+I) \longrightarrow Nu(A+I)$

  Sabemoes que $m_{T_2} : x-1$*, luego* T_2 *es diagonalizable. Se tiene que:*

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego una base de $Nu(A+I)$ (que será también una base de Jordan para T_2) es $B_2 = \{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ y la forma de Jordan de T_2 es:

$$[T_2]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, una base de Jordan para A es:

$$B = B_1 \cup B_2 = \{(0,0,0,1),(2,2,2,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$$

Y una forma de Jordan de A es:

$$J_A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}$$

7.3.6. Unicidad de la forma de Jordan

A continuación veremos que la forma de Jordan asociada a una transformación lineal $T : V \to V$, donde V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, es única salvo por el orden en que aparecen los bloques de Jordan correspondientes a autovalores distintos.

Teorema 7.3.7. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que m_T se factoriza linealmente sobre $\mathbb{K}$. Entonces existe una única forma de Jordan $J \in \mathbb{K}^{n\times n}$ (salvo el orden de sus bloques) tal que para alguna base B de V, $[T]_B = J$.*

Demostración. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V tal que $[T]_B$ es una forma de Jordan $J \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Donde para cada $1 \leq i \leq s$, $J_i(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{d_i \times d_i}$ denota la matriz formada por todos los bloques de Jordan de autovalor λ_i que aparecen en J y $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Se tiene que $X_T = X_J = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{d_i}$. Entonces $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ son los autovalores de T y para cada $1 \leq i \leq s$, se tiene que

$m_{J_i}(\lambda_i) = (x-\lambda_i)^{k_i}$ para algún $1 \leq k_i \leq d_i$. Entonces $m_T = m_J = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{k_i}$, con lo que, para cada $1 \leq i \leq s$, $k_i = mult(\lambda_i, m_i)$. Sea $k = mult(\lambda, m_T)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lambda = \lambda_1$. Observamos que:

$$J - \lambda I_n = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2-\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s(\lambda_s-\lambda) \end{pmatrix}$$

De donde:

$$(J - \lambda I_n)^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (J_2(\lambda_2-\lambda))^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (J_s(\lambda_s-\lambda))^k \end{pmatrix}$$

Puesto que $J_i(\lambda_i - \lambda)^k$ es inversible para cada $2 \leq i \leq s$, entonces $Nu((J-\lambda I_n)^k) = \mathscr{L}\{e_1, \ldots, e_{d_1}\}$. Teniendo en cienta que $J = [T]_B$, resulta que:

$$J - \lambda I_n = [T - \lambda Id_v]_B$$

Con lo que:

$$Nu((T-\lambda Id_v)^k) = \mathscr{L}\{v_1, \ldots, v_{d_1}\}$$

Consideremos la restricción:

$$T_1 = (T-\lambda Id_v)|_{Nu((T-\lambda Id_v)^k)} : Nu((T-\lambda Id_v)^k)$$

$$\longrightarrow Nu((T-\lambda Id_v)^k)$$

La restricción T_1 resulta ser una transformación lineal nilpotente y por lo tanto, tiene una única forma de Jordan nilpotente J, asociada. Sea $B_1 = \{v_1, \ldots, v_{d_1}\}$, que como vimos, es una base de $Nu((T-\lambda Id_v)^k)$. Observamos que:

$$[T_1]_{B_1} = [T|_{Nu((T-\lambda Id_v)^k)}]_{B_1} - \lambda Id_1 = J_1(0)$$

Como $J_1(0)$ es una forma de Jordan nilpotente, debe de ser la forma de Jordan J_1 de T_1. En consecuencua $J_1(\lambda_1) = J_1 - \lambda_1 Id_1$ esta univocamente determinada por T. (Notar que el subespacio invariante $Nu((T-\lambda Id_v)^k))$ y la restricción $T_1 = (T-\lambda Id_v)|_{Nu((T-\lambda Id_v)^k)}$ solo

dependen de T y no de la base).
Haciendo lo mismo para cada λ_i con $1 \leq i \leq s_1$ resulta que, $J_i(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{d_i \times d_i}$ satisface:

$$J_i(\lambda_i) = J_i + \lambda_i Id_i$$

Donde $d_i = mult(\lambda_i, X_T)$ y si $k_i = mult(\lambda_i, m_T)$, J_i es la forma de Jordan nilpotente de la restricción:

$$(T - \lambda_i Id_v)_{|_{Nu((T-\lambda_i Id_v)^k)}} : Nu((T - \lambda_i Id_v)^{k_i})$$
$$\longrightarrow Nu((T - \lambda_i Id_V)^{K_I})$$

Por lo tanto, la forma de Jordan de T está univocamente determinado por T (salvo el orden de los bloques correspondientes a los distintos autovalores de T). $\square$

El hecho que todo polinomio se factorice linealmente $\mathbb{C}[x]$ nos permite demostrar el siguiente resultado sobre semejanza de matrices en $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Teorema 7.3.8. *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, y sean J_A y J_B las formas de Jordan de A y B respectivamente. Entonces:*

$$A \sim B \Leftrightarrow J_A = J_B \text{ salvo el orden de los bloques}$$

Demostración.

$$(\rightarrow)$$

Sabemos que $A \sim J_A$ y $B \sim J_B$. Si $A \sim B$, como $\sim$ es una relación de equivalencia, resulta que $J_A \sim J_B$. Entonces existe una transformación lineal $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ y bases B_1 y B_2 de $\mathbb{K}^n$ tales que:

$$[T]_{B_1} = J_A \text{ y } [T]_{B_2} = J_B$$

Por el teorema anterior, la forma de Jordan de una transformación lineal es única salvo el orden de los bloques correspondientes a los distintos autovalores. Luego $J_A = J_B$, salvo el orden de los bloques.

$$(\leftarrow)$$

Obvio ($\sim$ es de equivalencia). $\square$

Ejemplo 7.3.5. *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$. Probar que $A \sim B$, si y solo si, $X_A = X_B$ y $m_A = m_B$. ¿Vale el mismo resultado para matrices de $\mathbb{C}^{4 \times 4}$?*

Solución 7.3.2. *Ya sabemos que vale* $(\rightarrow)$. *Probemos la otra implicación. Por el teorema anterior,* A y B *son semejantes si tienen la misma forma de Jordan (salvo el orden de los distintos autovalores). Luego, basta ver que la forma de Jordan en* $\mathbb{C}^{3\times 3}$ *queda univocamente por su polinomio característico y su polinomio minimal.*

Sea $J \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ *una forma de Jordan. Entonces* X_J *es un polinomio mónico de grado* 3 *en* $\mathbb{C}[x]$ *luego puede escribirse de alguna de las siguientes formas:*

i $X_J = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$ *con* $\lambda_i \in \mathbb{C}, \lambda_i \neq \lambda_j$ *si* $i \neq j$.

ii $X_J = (x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)$ *con* $\lambda_i \in \mathbb{C}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

iii $X_J = (x-\lambda)^3$ *con* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Para cada una de las opciones anteriores, veremos que existe una única J *para cada polinomio minimal posible.*

i Si $X_J = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$. *Luego* J *es diagonalizable con forma de Jordan.*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ii Si $X_J = (x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)$ *con* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ *entonces* $m_J = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ *o* $m_J = X_J$

- *Si* $m_J = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, J *es diagonalizable y su forma de Jordan sería:*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $m_J = (x-\lambda_1)^2(x-\lambda_2)$, *entonces* J *tiene un bloque* 2×2 *con autovalor* λ_1 *y uno* 1×1 *con autovalor de* λ_1. *Luego:*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $X_J = (x-\lambda)^3$ *con* $\lambda \in \mathbb{C}$, *entonces* $m_J = (x-\lambda)^k, k \in I_3$.

- *Si* $m_J = (x-\lambda)$, *entonces* J *es diagonalizable, luego su forma de Jordan:*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- *Si* $m_J = (x-\lambda)^2$, *entonces el bloque más grande de* J *es* 2×2, *luego:*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- *Si* $m_J = (x-\lambda)^3$, *entonces* J *tiene un bloque* 3×3 *y por lo tanto:*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

El resultado no vale en $\mathbb{C}^{4\times 4}$. *Por ejemplo:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifican: $X_A = X_B = x^4$ *y* $m_A = m_B = x^2$, *pero* $A \nsim B$ *porque sus formas de Jordan son distintas.*

7.3.7. Aplicación 1: Cálculo de las potencias de una matriz

- En primer lugar, observemos que es posible calcular las potencias de una matriz a partir de las potencias de una matriz semejante:

  Si $A \sim B$, existe $C \in GL(n,\mathbb{K})$ tal que $A = CBC^{-1}$, entonces para cada k, $A^k = CB^kC^{-1}$

  A partir de esto, notamos que si una matriz A es diagonalizable, entonces se puede calcular fácilmente A^k, para cada $k \in \mathbb{N}$. Basta hallar $C \in GL(n,\mathbb{K})$ y $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$

diagonal tal que $A = CDC^{-1}$ y tener en cuenta que:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Utilizando la igualdad $A^k = CB^kC^{-1}$, ya obtendríamos las potencias de A.

- Consideremos el caso en el que la matriz A no sea diagonalizable. Si

$$A \sim M = \begin{pmatrix} M_1 & O & \dots & O \\ O & M_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & M_r \end{pmatrix} \text{, con } M_i \in \mathbb{K}^{n_i \times n_i}$$

existe $C \in GL(n, \mathbb{K})$ tal que $A = CMC^{-1}$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $A^k = CM^kC^{-1}$ y gracias al producto por bloques obtenemos:

$$M^k = \begin{pmatrix} M_1^k & O & \dots & O \\ O & M_2^k & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & M_r^k \end{pmatrix}$$

En el caso que m_A se factoriza linealmente en $\mathbb{K}$, se puede hallar una matriz M (la forma de Jordan de A) en la que cada M_i es un bloque de Jordan de autovalor λ_i para cada $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Luego, para calcular las potencias de A basta poder calcular las potencias de $J(\lambda, m)$, es decir, $J(\lambda, m)^k$.

Se puede probar inductivamente que:

$$J(0, m)^k = \begin{pmatrix} O_{k\times(m-k)} & O_{k\times k} \\ I_{(m-k)} & O_{(m-k)\times k} \end{pmatrix}$$

Demostración. ¡Ejercicio! □

Si $\lambda \neq 0$, escribimos $J(\lambda, m) = \lambda I_m + J(0, m)$

$$
\begin{aligned}
J(\lambda, m)^k &= (\lambda I_m + J(0,m))^k \\
&= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (\lambda I_m)^{k-i} \cdot J(0,m)^i \\
&= \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \begin{pmatrix} O_{i\times(m-i)} & O_{i\times i} \\ I_{m-i} & O_{(m-i)\times i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} O_{i\times(m-i)} & O_{i\times i} \\ \binom{k}{i} \lambda^{k-i} I_{m-i} & O_{(m-i)\times i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\lambda^k & O & \dots & \dots & O \\
\binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & \dots & \dots & O \\
\binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots & \dots & O \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\binom{k}{m-1}\lambda^{k-(m-1)} & \binom{k}{m-2}\lambda^{k-(m-2)} & \dots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

►

Consideramos $\binom{k}{h} = 0$, si $h > k$

◄

Con esto obtenemos una fórmula para el cálculo de las potencias de un bloque de Jordan de autovalor λ. Añadido a esto, si consideramos las observaciones previas, obtendremos las potencias de A

7.3.8. Aplicación 2: Exponencial de una matriz

La exponencial de una matriz es definida de manera similar a la habitual.

Definición 7.3.7. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, la exponencial de A, denotada por e^A o $exp(A)$ es la matriz $n \times n$ dada por la serie de potencias:*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Observación 7.3.5. *Esta serie converge para toda matriz A. Note también que para matrices de orden 1×1 la exponencial corresponde con la exponencial ordinaria.*

Propiedades 7.3.1. *Sean A y B dos matrices de orden n, a y b escalares. Entonces:*

1. $exp(A) \cdot exp(B) = exp(A + B)$, *si es que* $AB = BA$
2. $exp(O) = I_n$
3. $exp(aA) \cdot exp(bA) = exp((a + b)A)$
4. $exp(A) \cdot exp(-A) = I_n$
5. $[exp(A)]^{-1} = exp(-A)$
6. $det(exp(A)) = exp(Tr(A))$
7. $[exp(A)]^T = exp(A^T)$
8. *Si* $AB = BA$: $exp(A) \cdot exp(B) = exp(B) \cdot exp(A)$
9. *Si* B *es invertible, entonces:* $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$

7.3.9. Cálculo de la exponencial de matrices

- **Matrices diagonalizables**

  Si A es una matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & O \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_n \end{pmatrix}$$

  Entonces su exponencial se obtiene tomando las exponenciales de cada uno de los elementos de la diagonal.

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_1} & & & O \\ & e^{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & e^{a_n} \end{pmatrix}$$

  Si una matriz M es diagonalizable entonces:

$$M = PDP^{-1}$$

  Donde D es diagonal y P puede elegirse ortogonal. Luego:

$$e^M = Pe^D P^{-1}$$

- **Matrices que admiten forma de Jordan**

  Analicemos para un bloque de Jordan

$$B_J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow e^{B_J} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & & & & \\ \frac{e^{\lambda}}{1!} & e^{\lambda} & & \mathbf{O} & \\ \frac{e^{\lambda}}{2!} & \frac{e^{\lambda}}{1!} & e^{\lambda} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{e^{\lambda}}{(n-1)!} & \frac{e^{\lambda}}{(n-2)!} & \cdots & \frac{e^{\lambda}}{1!} & e^{\lambda} \end{pmatrix}$$

  Se dice que una matriz M admite forma canónica de Jordan cuando existe una matriz no singular P tal que:

$$M = P^{-1}JP$$

  Donde J es una matriz triangular por bloques de Jordan.

$$e^M = e^{P^{-1}JP}$$

  Osea:

$$\begin{aligned} e^M &= e^{P^{-1}JP} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(P^{-1}JP)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{-1}JP}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} P^{-1}J^kP \end{aligned}$$

7.3.10. Aplicación

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma:

$$X'(t) = A_{X(t)} + f(t)$$

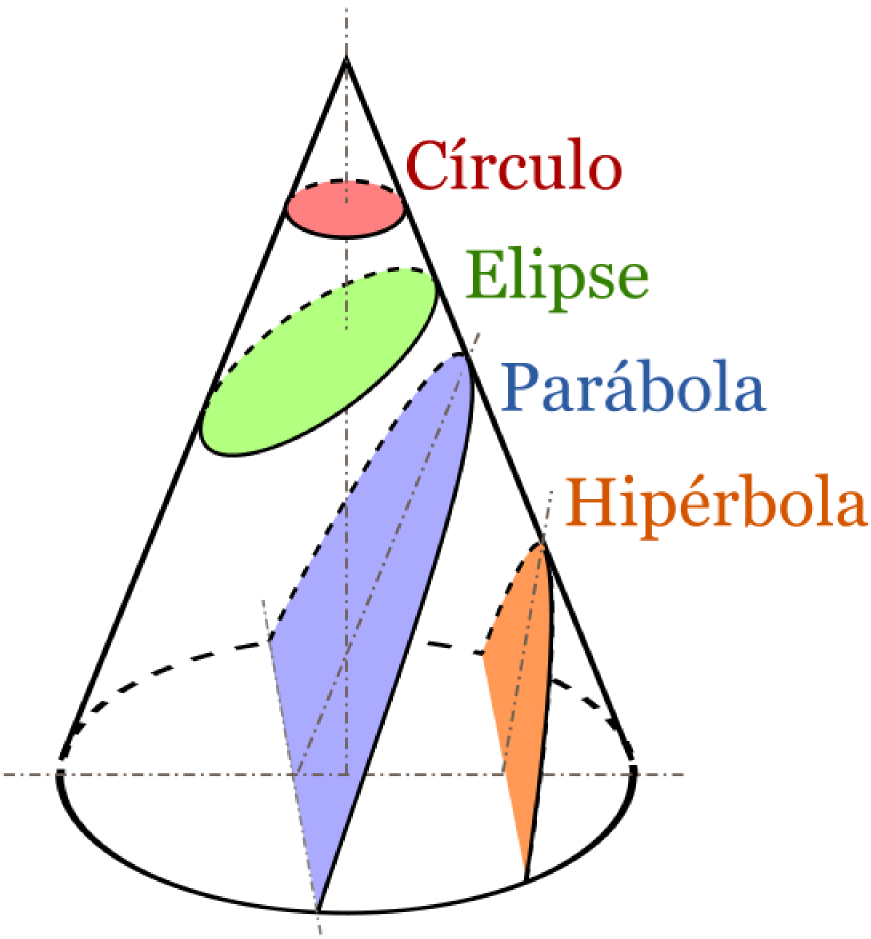
$$X(t_0) = X_0$$

Donde $X(t)$ representa al vector de funciones incógnita. La solución de este sistema viene dado por:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}f(s)ds$$

Capitulo N° 8

Unidad 7



Nota 8.0.1. *Recordar: Relaciones de equivalencia.*

Ejemplo 8.0.1. *Sea* $A = \mathbb{R}$ *y defina la relación* $\sim$ *como:*

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

Se puede con¿mprobar de manera fácil que '$\sim$*' es de equivalencia. Si consideramos* $x = 0{,}4 \in \mathbb{R}$*, tendríamos que* $y \sim 0{,}4$ *si y solo su,* $y = 0{,}4 + m, m \in \mathbb{Z}$*, De esta manera:*

$$[0{,}4] = \{m + 0{,}4 :\in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\ldots; -1{,}6; -0{,}6; 0{,}4; 0{,}4; 1{,}4; \ldots\}$$

Luego: $[x + m] = [x]$*. Verificar que:*

$$\mathbb{R}/\sim = \{[w] : w \in [0, 1 >\}$$

En efecto, si $[x] \in \mathbb{R}/\sim$ *para* $x \in \mathbb{R}$*, entonces* $2 = x - [|x|] \in [0, 1 >$ *donde* $[|x|] \in \mathbb{Z}$ *es el máximo entero de* x*. Luego* $w \sim x$ *y por lo tanto,* $[x] = [w]$

Proposición 8.0.1. *Sea* $A \neq \phi$ *y* $\sim$ *una relación de equivalencia en* A*. Entonces:*

1. $[x] \neq \phi, \forall x \in A$,
2. $[x] \cap [y] \neq \phi$, *si y solo si,* $[x] = [y]$.
3. $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.

Demostración. .

1. Sea $x \in A$, luego $x \sim x$ por la reflexividad entonces $[x]$ tiene al menos un elemento. Por esto $[x] \neq \phi$.

2.
$$(\leftarrow)$$

   Obvio

$$(\rightarrow)$$

   Sea $z \in [x] \cap [y]$, osea $z \sim x$ y $z \sim y$, por simetría se tiene que $x \sim z$ y $z \sim y$ por transitividad, se tiene que $x \sim y$.

   Con esto se tendría que si un elemento w es equivalente a x, entonces es equivalente a y. De forma análoga también se obtiene que si se es equivalente a y, entonces es equivalente a x. Finalmente concluimos que $[x] = [y]$.

3. En primer lugar, $[x] \subset A, \forall x \in A$, entonces $U[x] \subset A$. Por otro lado, si $w \in A$, entonces:

$$w \in [w] \subset U[x] \Rightarrow A \subset U[x]$$

$\square$

Definición 8.0.1. *Sea $A \neq \phi$ y $\sim$ relación de equivalencia:*

$$A/\sim = \{[x] : x \in A\}$$

8.1. Coordenadas homogéneas y el plano proyectivo

Sean $A = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ y definamos en A la siguiente relación $\sim$, para $\mu, v \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ mediante:

$$\mu \sim v \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu = \lambda v$$

Ejercicio 8.1.1. *Probar que '$\sim$' es de equivalencia.*

Notación: Dado $\mu = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, denotamos:

$$[\mu] = [(a, b, c)] = [a : b : c]$$

De esta forma, $[a : b : c]$ es la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ con dirección (a, b, c), sin considerar el origen.

Definición 8.1.1. *Al conjunto cociente $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}/\sim$ lo denominaremos **plano proyectivo** y lo denotaremos por $\mathbb{RP}^2$.*

$$\mathbb{RP}^2 = \{[X : Y : Z] : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}\}$$

Observación 8.1.1.

- *Sea $[a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$ con $c \neq 0$. Como $(ta, tb, tc) \in [a : b : c]$ para cualquier $t \neq 0$. Considerando $t = \frac{1}{c} \neq 0$, tenemos:*

$$[a : b : c] = \left[\frac{a}{b} : \frac{b}{c} : 1\right]$$

Osea:

$$\{[X : Y : Z] \in \mathbb{RP}^2 : z \neq 0\} \subset \{[x : y : 1] \in \mathbb{RP}^2 : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Pero la otra inclusión es inmediata. Asi se puede escribir:

$$\mathbb{RP}^2 = \underbrace{\{[X : Y : 1]; x, y \in \mathbb{R}\}}_{\mathbb{A}^2 \text{ puntos afines o propios}} \cup \underbrace{\{[X : Y : 0] : x, y \in \mathbb{R}\}}_{\mathbb{P}^2_\infty \text{ puntos impropios o del infinito}}$$

Proposición 8.1.1. *La función:*

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{A}^2$$

$$(x, y) \to [X : Y : 1]$$

Es una biyección.

Demostración. .

- **Sobreyectividad:** Obvio, pues sea $[X : Y : 1] \in \mathbb{A}^2$ entonces $\exists(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x, y) = [X : Y : 1]$.

- **Inyectividad:** Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ tales que $\varphi(a, b) = \varphi(c, d)$, entonces $[a : b : 1] = [c : d : 1]$ osea $(a, b, 1) \in [c : d : 1]$. $\mathbb{A}^2$ es una copia de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{RP}^2$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, las coordenadas homogéneas de (x, y) es cualquier $(x, y, z) \in [X : Y : 1]$, es decir, la terna (x, y, z) satisface $z \neq 0$ y
$$x = \frac{X}{Z}\ ,\ y = \frac{Y}{Z}$$

$\square$

Ejemplo 8.1.1. *Sea* $(3, 4) \in \mathbb{R}^2$. *Entonces* $[3 : 4 : 1] = \{(3\lambda, 4\lambda, \lambda)\} \in \mathbb{R}^3 : \lambda \neq 0$. *Por tanto, son coordenadas homogéneas de* $(3, 4)$ *las ternas* $(-3, -4, -1)$*,* $(9, 12, 3)$*,* $(-15, -20, -3)$*, etc.*

Ejemplo 8.1.2. *Sea* $P_0 \in \mathbb{R}^2$ *un punto que en coordenadas homogéneas se representa por* $(7, -2, 3)$. *Entonces* P_0 *tiene coordenadas cartesianas.*

$$(x, y) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Para evitar a estas múltiples formas de representar un punto del plano en coordenadas homogéneas, trabajaremos solo con $\mathbb{A}^2$. Es decir, la representación de (x, y) en coordenadas homogéneas estará dada por la clase $[X : Y : 1]$.

También, notemos que $\mathbb{RP}^2$ no solo contiene elementos de $\mathbb{A}^2$, sino también de $\mathbb{P}^2_\infty$. Como $\mathbb{A}^2$ esta identificado de manera biunivoca con $\mathbb{R}^2$, entonces podemos decir que $\mathbb{RP}^2$ es una extensión del plano $\mathbb{R}^2$. Luego $\mathbb{RP}^2$ puede ser denominado como el plano euclideano extendido.

8.1.1. Rectas en el plano proyectivo

Sea $\mathscr{L}_0$ una recta en $\mathbb{R}^2$ que satisface la ecuación general $ax+by+c=0$. Sea $(x,y)\in\mathscr{L}_0$ y sea $[X:Y:Z]\in\mathbb{RP}^2$ su representación en coordenadas homogéneas. Entonces:

$$x=\frac{X}{Z}\ ,\ y=\frac{Y}{Z}$$

Y por tanto $a(\frac{X}{Z})+b(\frac{Y}{Z})+c=0$. Luego, como $Z\neq 0$ tenemos:

$$aX+bY+cZ=0$$

Asi la representación en coordenadas homogéneas de $\mathscr{L}$ esta dada por:

$$\mathscr{L}=\{[X:Y:Z]\in\mathbb{RP}^2 : aX+bY+cZ=0\}$$

Observación 8.1.2. *$\mathscr{L}_0$ esta contenida propiamente en $\mathscr{L}$, pues si $(x,y)\in\mathscr{L}_0$, entonces $[X:Y:1]\in\mathscr{L}$ pero $[-b:a:0]\in\mathscr{L}$ no corresponde a ningún par de $\mathbb{R}^2$. Esto motiva a la siguiente definición.*

Definición 8.1.2. *Sea $[a:b:c]\in\mathbb{RP}^2$. La recta proyectiva asociada a $[a:b:c]$ (o recta $\mathbb{RP}^2$) es el conjunto*

$$\mathscr{L}[a:b:c]=\{[X:Y:Z]\in\mathbb{RP}^2 : aX+bY+cZ=0\}.$$

- Si $(a,b)\neq(0,0)$ entonces $\mathscr{L}[a:b:c]$ representará una recta en $\mathbb{R}^2$. En efecto, consideremos la recta en $\mathscr{L}_0=\mathscr{L}(a,b,c)$, con ecuación general $ax+by+c=0$. Entonces $(x,y)\in\mathscr{L}(a,b,c)$ si y solo si $[X:Y:1]\in\mathscr{L}[a:b:c]$. A este tipo de rectas las llamaremos propoas o afines.

- En caso $(a,b)=(0,0)$, se tiene que $c\neq 0$. Luego $[a:b:c]=[0:0:1]$ y así tenemos la recta:

  $$\mathscr{L}[0:0:1]=\{[X:Y:Z]:Z=0\}=\mathbb{P}^2_\infty$$

  Es decir, el conjunto de puntos del infinito $\mathbb{P}^2_\infty$ es una recta en $\mathbb{RP}^2$, la que llamaremos recta del infinito. Esta recta proyectiva no representa a ninguna recta en $\mathbb{R}^2$.

  Sea $\mathscr{L}=\mathscr{L}[a:b:c]$ una recta en $\mathbb{RP}^2$ que representa a la recta $\mathscr{L}(a,b,c)$ de $\mathbb{R}^2$ osea con $(a,b)\neq(0,0)$. Entonces la intersección de $\mathscr{L}$ con la recta del infinito $\mathbb{P}^2_\infty$ puede ser estudiada de la siguiente manera:

Sea $[X_0 : Y_0 : Z : 0] \in \mathscr{L} \cap \mathbb{P}^2_\infty$. Entonces $Z = 0$ y $aX_0 + bY_0 = 0$. Luego $(X_0, Y_0, Z_0) = \lambda(-b, a, 0)$ y asi $[X_0 : Y_0 : Z_0] = [-b : a : 0]$, osea $[-b : a : 0]$ es la intersección de $\mathscr{L}$ con $\mathbb{P}^2_\infty$. Luego, toda recta de $\mathbb{RP}^2$ diferente de $\mathbb{P}^2_\infty$ intersecta a este en un único punto.

Gracias al curso anterior es inmediato verificar que la recta proyectiva que pasa por $P = [X_1 : Y_1 : Z_1]$ y $Q = [X_2 : Y_2 : Z_2]$ esta determinada por:

$$\begin{vmatrix} X & y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Esta representación se denomina la representación algebraica de la recta que pasa por P y Q ($\mathscr{L}(P, Q)$).

Proposición 8.1.2. *Sean $P \in \mathbb{A}^2, Q \in \mathbb{RP}^2$ y P_0 el punto de $\mathbb{R}^2$ con P como coordenada homogénea. Considere $\mathscr{L}$ la recta proyectiva que pasa por P y Q. Entonces $\mathscr{L}$ representa a una recta $\mathscr{L}_0$ en $\mathbb{R}^2$ y*

1. *Si $Q \in \mathbb{A}^2$ entonces $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}(P_0, Q_0)$, donde Q tiene a Q_0 como coordenada homogénea.*
2. *Si $Q \in \mathbb{P}^2_\infty$ entonces $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}(P, v)$, donde $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ es tal que $Q = [v_1 : v_2 : 0]$.*

Demostración. **Ejercicio** □

Teorema 8.1.1. *Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ rectas en $\mathbb{RP}^2$. Entonces:*

$$\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \phi$$

Demostración. Consideremos $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}[a_1 : b_1 : c_1]$ y $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}[a_2 : b_2 : c_2]$ y sean $\mu = (a_1, b_1, c_1)$ y $v = (a_2, b_2, c_2)$. Si μ y v son paralelos, entonces $[a_1 : b_1 : c_1] = [a_2 : b_2 : c_2]$ y por lo tanto $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \neq \phi$.

Caso contrario definimos $w = \mu \times v \neq 0$ y escribimos $w = (X, Y, Z)$. Entonces:

$$0 = \langle \mu, w \rangle = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \text{ y } 0 = \langle v, w \rangle = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z$$

Esto muestra que $[X : Y : Z] \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ □

Corolario 8.1.1. *Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ rectas afines y distintas en $\mathbb{RP}^2$ y sea $R \in \mathbb{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$. Entonces $R \in \mathbb{P}^2_\infty$, si y solo si, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ representan rectas paralelas en $\mathbb{R}^2$.*

Demostración. **¡Ejercicio!** □

8.2. Cónicas

Sean $\varepsilon > 0$, $\mathscr{L}_0$ una recta en $\mathbb{R}^2$ y $F_0 \in \mathscr{P}$ ($\mathscr{P}$: Plano coordenado). Una cónica en el plano es el conjunto:

$$\mathscr{C}_0 = \{p \in \mathscr{P} : \frac{d(p_0, F_0)}{d(p, \mathscr{L}_0)} = \varepsilon\}$$

A ε se le denomina la ***EXCENTRICIDAD*** de $\mathscr{C}_0$, a $\mathscr{L}_0$ se le denomina ***RECTA DIRECTRIZ*** de $\mathscr{C}_0$ y a $\mathscr{F}_0$ se le denomina ***FOCO*** de $\mathscr{C}_0$.

Podemos establecer lo siguiente:

- Si $\varepsilon < 1$, entonces $\mathscr{C}_0$ es una ***elipse***
- Si $\varepsilon = 1$, entonces $\mathscr{C}_0$ es una ***parábola***
- Si $\varepsilon > 1$, entonces $\mathscr{C}_0$ es una ***hipérbola***

Si establecemos $F_0 = (x_0, y_0)$, $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}(a, b, c)$ con $ax + by + c = 0$ y $p = (x, y) \in \mathscr{C}_0$, entonces p cumple:

$$\frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\dfrac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \varepsilon$$

Es decir:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2(\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}})$$

Pero escrito en su forma polinomial:

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Comparando, obtenemos:

$$a_{11} = 1 - \frac{a^2\varepsilon^2}{a^2 + b^2} \qquad a_{22} = 1 - \frac{b^2\varepsilon^2}{a^2 + b^2}$$

$$a_{12} = -\frac{ab\varepsilon^2}{a^2 + b^2} \qquad a_{13} = -\frac{ac\varepsilon^2}{a^2 + b^2} - x_0$$

$$a_{23} = 1 - \frac{bc\varepsilon^2}{a^2 + b^2} - y_0 \qquad a_{33} = -\frac{c^2\varepsilon^2}{a^2 + b^2} + x_0^2 + y_0^2$$

De esto obtenido, se define a continuación.

Definición 8.2.1. *Una cónica en el plano cartesiano* $\mathbb{R}^2$ *es el lugar geométrico de los puntos de* $\mathbb{R}^2$ *que satisfacen una ecuación de la forma:*

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \ldots (*)$$

Así, si $\mathscr{C}_0$ *es una cónica, entonces:*

$$\mathscr{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \text{ satisface } (*)\}$$

Además a la expresión (*) *la denominaremos como la ecuación general de la cónica.*

Ahora convertiremos las ecuación (*) *a coordenadas homogéneas. Sea* $(x, y) \in \mathscr{C}_0$*, donde* $\mathscr{C}_0$ *es una cónica y sea* $[x_1 : x_2 : x_3]$ *su representación en coordenadas homogéneas. Entonces* $x = x_1/x_3$*,* $y = x_2/x_3$*, luego reemplazamos en* (*) *y multiplicamos por* x_3^2 *para obtener:*

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \ldots (**)$$

Definición 8.2.2. *Diremos que* $\mathscr{C} \subset \mathbb{RP}^2$ *es una cónica si:*

$$\mathscr{C} = \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^2 : [x_1 : x_2 : x_3] \text{ satisface } (**)\}$$

Observación 8.2.1. *Podemos reescribir* (**) *como:*

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Notar que si denotamos $X = [x_1 : x_2 : x_3]$*, entonces* (**) *puede ser escrito como* $X^T AX = 0$ *con* $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ *es matriz simétrica, no nula.*

Observación 8.2.2. *Para simplificar, si* $P = [x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^2$ *entonces lo representaremos como el vector columna* $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right]$*. De este modo, si* $P = [x_1 : x_2 : x_3]$ *y* $Q = [x_1' : x_2' : x_3']$*, entonces* $Q = AP$ *será la abreviación de escribir:*

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Además P^T *representa al vector columna* (x_1, x_2, x_3)

Ejemplo 8.2.1. *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. *Entonces la cónica* $\mathscr{C}$ *asociada a* A *tiene una ecuación*

$$x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^3 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$$

en coordenadas cartesianas sería:

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 2 - 2x - 2y = 0$$

Luego factorizando, $\mathscr{C}$ *representa a la cónica:*

$$(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

La cual es una elipse con centro $(1,2)$ *y semiejes* $a = 1$, $b = \sqrt{2}$

Ejemplo 8.2.2. *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Entonces la cónica* C *asociada a* A *tiene ecuación* $x_1^2 + x_2^2 = 0$ *o en coordenadas cartesianas* $x^2 + y^2 = 0$. *Es fácil de verificar que* $C = \{(0,0)\}$, *es decir este conjunto es un punto único de* $\mathbb{R}^2$. *Para poder diferenciar cuando una cónica en* $\mathbb{RP}^2$ *representa o no, a una cónica usual en* $\mathbb{R}^2$, *usaremos a la matriz asociada.*

Definición 8.2.3. *Sea* C *una cónica en* $\mathbb{RP}^2$ *y* A *su matriz asociada. Diremos que* C *es degenerada si* $det(A) = 0$. *Caso contrario se dirá que es no degenerada.*

Ejemplo 8.2.3. *Sea* $A = I_3$. *Entonces la cónica* C *asociada a* A *es no degenerada y tiene ecuación:*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

que en coordenadas cartesianas, se escribe como

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

Luego $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+1 = 0\} = \phi$, *es decir,* C *es no degenerada pero no representa a ninguna cónica usual.*

8.3. Polar de un punto y Polar de una recta

Definición 8.3.1. *Sea* C *una cónica en* $\mathbb{RP}^2$, *con matriz asociada* A. *Diremos que* P *y* $Q \in \mathbb{RP}^2$ *son* C*-conjugados (o conjugadis respecto a* C*) si:*

$$P^T A Q = 0$$

Observación 8.3.1. .

- *Es inmediato reconocer que $P \in \mathbb{RP}^2$ es conjugado de si mismo, si y solo si, $P \in C$. Además como es simétrica, pues $P^T AQ = Q^T AP$.*

- *Por otro lado, si $H \in \mathbb{RP}^2$ es tal que $AH = 0$, entonces todo punto $Q \in \mathbb{RP}^2$ es conjugado con H, osea $H \in C$. A los puntos H, tales que $AH = 0$ los llamaremos* ***puntos singulares*** *de C.*

  Asi, dado $P \in \mathbb{RP}^2$, el conjunto de los puntos conjugados a P respecto a C es:

$$\{Q \in \mathbb{RP}^2 : Q^T AP = 0\}$$

  Si P no es un punto singular y consideramos a $N = AP = [a : b : c]$, entonces podemos representar el conjunto anterior como:

$$\{[X : Y : Z] \in \mathbb{RP}^2 : aC + bY + cZ = 0\}$$

  El cual es una recta proyectiva, al cual denominaremos como ***recta polar*** *de P.*

Definición 8.3.2. *Sea C una cónica y sea $P \in C$ no singular. La recta polar de P es el conjunto de los puntos $Q \in \mathbb{RP}^2$ conjugados a P respecto a C. Denotamos esta recta como $\mathscr{L}_C(P)$ es decir:*

$$\mathscr{L}_C(P) = \{Q \in \mathbb{RP}^2 : Q^T AP = 0\}$$

Definición 8.3.3. *Sea C una cónica. Dada una recta $\mathscr{L} \in \mathbb{RP}^2$, diremos que P es el polo de $\mathscr{L}$, respecto de C, si $\mathscr{L} = \mathscr{L}_C(P)$.*

Dado $P \in \mathbb{RP}^2$ un punto no singular de una cónica, basta determinar $N = AP = [a : b : c]$ tendríamos que resolver el sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}X & + & a_{12}Y & + & a_{13}Z & = & a \\ a_{21}X & + & a_{22}Y & + & a_{23}Z & = & a \\ a_{31}X & + & a_{32}Y & + & a_{33}Z & = & a \end{array}$$

El cual podría no tener solución. Esto no ocurre en el caso de cónicas no degeneradas, pues como $det(A) \neq 0$ entonces el sistema tiene solución y es única. Con esto tendríamos que el polo de una recta asociada a una cónica no degenerada, el polo de una recta siempre existe y es única.

Ejemplo 8.3.1. *Consideremos la cónica C asociada a* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *y consideremos* $P = [1 : 2 : 1]$. *Entonces la recta polar de P esta dada por $AP = [0 : 0 : -1]$, es decir, $\mathscr{L}_C(P) = \mathbb{P}^2_\infty$. Osea, la recta polar de P, respecto de C, es la recta del infinito. Luego, el polo de la recta del infinito, respecto de la elipse C, es P.*

Ejemplo 8.3.2. *Consideremos la cónica C con matriz* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ *y consideremos* $P = [2 : 4 : 1]$. *Entonces la recta polar de P está dada por $AP = [-2 : \frac{1}{2} : 2] = [-4 : 1 : 4]$, es decir, $\mathscr{L}_C(P)$ tiene ecuación $-4X - Y + 4Z = 0$. Osea la recta polar de P respecto de C, es representada en $\mathbb{R}^2$ por la recta $\mathscr{L}_0$ con ecuación normal $y = 4x - 4$. Observe que $\mathscr{L}_o$ es la recta tangente a la parábola C (¡verificar!) con ecuación $y = x^2$ en $(2, 4)$.*

Proposición 8.3.1. *Sea C una cónica no degenerada, $\mathscr{L}$ una recta proyectiva y $P \in \mathbb{RP}^2$. Si $P \in \mathscr{L}$ entonces el polo de $\mathscr{L}$ pertenece a la recta polar de P.*

Demostración. Como C es no degenerada entonces $\mathscr{L}$ tiene un polo $Q \in \mathbb{RP}^2$. Como $P \in \mathscr{L} = \mathscr{L}_C(Q)$ entonces P y Q son conjugados. Luego $Q \in \mathbb{L}_C(P)$, es decir, el polo de L pertenece a la recta polar de P. □

Corolario 8.3.1. *Sea C una cónica no degenerada y $\mathscr{L}$ una recta proyectiva. Entonces las rectas polares, respecto de C, de todos los puntos de $\mathscr{L}$ se intersectan en un único punto, el cual es el polo de $\mathscr{L}$.*

Demostración. Como el polo de $\mathscr{L}$ existe, entonces por la proposición anterior, el polo pertenece a todas las rectas polares a toda recta polar de puntos de $\mathscr{L}$. Entonces todo punto de $\mathscr{L}$ es conjugado a Q, es decir, $\mathscr{L}_C(Q) = \mathscr{L}$. como el polo de $\mathscr{L}$ es único entonces Q debe ser el polo de $\mathscr{L}$. □