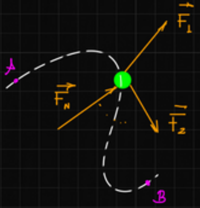
FÍSICA I: BFIOIC

2022-1

Prof. Dr. Marco Cuyubamba

Trabajo mecánico

Sean N fuerzas que actúan sobre una partícula



Entonces;

$$W^{neto} = \sum_{i=1}^{N} W^{\vec{F_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_A^B \vec{F_i} \cdot d\vec{r}$$

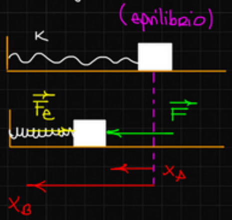
$$= \int_A^B \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \right) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F_R} \cdot d\vec{r}$$

$$W^{neto} = W^{F_R}$$

Indistintamente de la trayectoria y/o fuerzas

Debido al principio de superposición

Trabajo en un resorte



Siendo $\vec{F_e} = -k\vec{x}$, tenemos que

$$W^{F_e}_{A \to B} = \int \vec{F_e} \cdot d\vec{r}$$

$$= -k \int_{x_A}^{x_B} x \, dx$$

$$= -k \frac{x^2}{2} \Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$W^{F_e}_{A \to B} = -\frac{k}{2} \left(x_B^2 - x_A^2 \right) \ldots$$

OBS

Sea un cuerpo que actúan N fuerzas

Sabemos que

$$W^{neto} = W^{F_R} \quad ; \quad d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$= \int_{A,\,G}^{B} \vec{F}_R \cdot d\vec{r} \quad ; \text{ de la 2da Ley de Newton}$$

$$= \int_A^B m\vec{a}\cdot d\vec{r} = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{\cancel{dt}} \cdot \vec{v}\,\cancel{dt}$$

$$= m\int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} \vec{v}\cdot d\vec{v} = m\int_A^B (v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k})\cdot(dv_x\hat{i} + dv_y\hat{j} + dv_z\hat{k})$$

$$= m\left[\int_{V_{Ax}}^{V_{Bx}} V_x\,dV_x + \int_{V_{Ay}}^{V_{By}} V_y\,dV_y + \int_{V_{Az}}^{V_{Bz}} V_z\,dV_z\right]$$

$$= m\left(\frac{V_{Bx}^2 + V_{By}^2 + V_{Bz}^2}{2} - \frac{V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2 + V_{Az}^2}{2}\right)$$

$$W^{neto} = m\left(\frac{V_B^2}{2} - \frac{V_A^2}{2}\right) = \frac{mV_B^2}{2} - \frac{mV_A^2}{2}$$

Se define, la energía Cinética K como

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}\ (J)$$

Siendo la capacid de realizar trabajo en virtud a su movimiento

m : masa partícula

v : rapidez partícula

Se observa que

$$W^{neto} = K_B - K_A$$

$$\Rightarrow \boxed{W^{neto} = \Delta K}$$

Teorema trabajo-energía cinética

Fuerzas Conservativas

Son aquellas fuerzas cuyo trabajo no dependen de la trayectoria

Si $W^{F}_{\substack{A\to B\\ G_1}} = W^{F}_{\substack{A\to B\\ G_2}}$; donde G_1 y G_2 son trayectorias arbitrarias

→ Decimos que $\vec{F}$ es conservativo

* $$\int_{A\,G_1}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\,G_2}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{A\,G_1}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{B\,G_2}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\oint_{G} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$; donde $G = G_1 \cup G_2$ arbitrario

Entonces; si el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ en una trayectoria cerrada es cero, entonces $\vec{F}$ es conservativo

OBS

Toda fuerza conservativa tiene asociada una función escalar denominada Energía potencial

→

Si $\vec{F}$ es conservativo ⟹ $\exists\, U$ tal que

$$\boxed{W^{F}_{A\to B} = -\Delta U}$$

$$\vec{F} = -\nabla$$

donde U es la energía potencial asociada a $\vec{F}$

Ejm!

En el caso de la fuerza elástica, se observa

$$W^{Fe}_{A\to B} = -\tfrac{1}{2}kx_B^2 + \tfrac{1}{2}kx_A^2$$

$$W^{Fe}_{A\to B} = -\left(\tfrac{1}{2}kx_B^2 - \tfrac{1}{2}kx_A^2\right)$$

entonces; se define la energía potencial elástica como

$$\boxed{U_e = \tfrac{1}{2}kx^2}$$

OBS

La energía potenc

es la capacidad de

realizar trabajo

en virtud a la

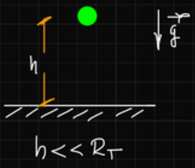
interacción existe

OBS

Para el caso de la fuerza de gravedad, se tiene que

$$\boxed{U_{p_g} = mgh + C}$$

Me da la libertad de elegir el nivel de referencia



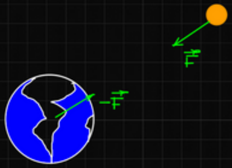
OBS

Para el caso de la fuerza gravitacional

$$\vec F = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}\,\hat e_r$$

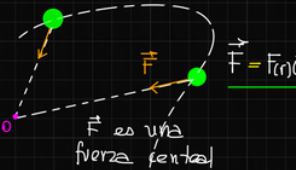
es también conservativa siendo

$$\boxed{U_g = -\frac{G m_1 m_2}{r}}$$



OBS

Toda fuerza central es conservativa



OBS

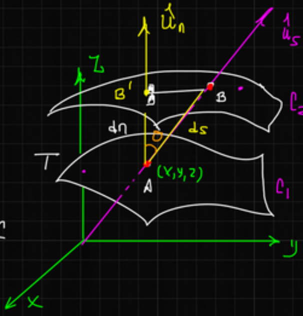
Sea una función $T(x,y,z)$ que depende de las 3 componentes cartesianas

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec x \longrightarrow T$$

Las superficies $T(x,y,z) = C$; se observa

$$\frac{dT}{ds} = \frac{C_2 - C_1}{ds}$$

Se denomina derivada direccional $\equiv$ La razón de cambio de T a lo largo del eje $\hat u_s$



fuerza gravitacional

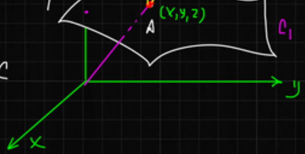
$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\,\hat{e}_r$$

es también conservativa

siendo

$$\boxed{U_g = -\frac{Gm_1m_2}{r}}$$

$\vec{x} \longrightarrow T$



Las superficies $T(x,y,z) = C$

; se observa

$$\frac{dT}{ds} = \frac{C_2 - C_1}{ds}$$

Se denomina derivada direccional $\equiv$ La razón de cambio de T a lo largo del eje $\hat{u}_s$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dn}\cdot\frac{dn}{ds} = \frac{C_2 - C_1}{ds}$$

$\Rightarrow \dfrac{dT}{ds} = \dfrac{dT}{dn}\cos\theta$; si $\theta = 0°$; $\dfrac{dT}{ds}$ toma su valor máximo

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dn}\,\hat{u}_n\cdot\hat{u}_s$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{ds} = \left(\frac{dT}{dn}\,\hat{u}_n\right)\cdot\hat{u}_s \Rightarrow \frac{dT}{ds}\hat{u}_s = \frac{dT}{dn}\,\hat{u}_n$$

Se tiene que la derivada direccional proyectada sobre una orientación es la misma

$\rightarrow$

Se define al gradiente de T ; grad T ó ∇T

vector nabla

$$\boxed{\nabla T = \frac{dT}{dn}\,\hat{u}_n}$$

Cantidad vectorial

OBS

- En 1D :

$$\nabla T = \frac{dT}{dx}\,\hat{i}$$

- En 3D :

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\,\hat{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\,\hat{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\hat{k}$$

OBS

El siguiente operador ∇ tiene un abuso de notación de la forma

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

: En coordenadas cartesianas

→ operador nabla

→ Sea una fuerza conservativa $\vec{F}$, entonces existe un U_p tal que $\boxed{\vec{F} = -\nabla U} \equiv \boxed{W^{F}_{A\to B} = -\Delta U_p}$

Ejm:

• Para el caso de la energía potencial gravitatoria

$$\vec{f}_g = \cancel{-}mg\hat{j} = \cancel{-}\frac{dU_p}{dy}\hat{j}$$

→ $U_p = mgy + C$

• Para el caso de la fuerza elástica

$$\vec{F}_e = -K(r-r_0)\,\hat{e}_r$$

$$-K(r-r_0)\hat{e}_r = -\frac{d}{dr}U_p\,\hat{e}_r$$

→ $\boxed{U_{p_e} = \frac{K(r-r_0)^2}{2} + C}$

Ejm:

Sea la fuerza

$$\vec{F}(x,y) = \underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{F_x}\hat{i} + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{F_y}\hat{j} = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}$$

Verificar si es conservativa

Sol:

Se observa que

$$\frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$U(x,y) = \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + f(y)$$

$$U(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$$

Derivando parcialmente respecto a y:

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = +\cancel{\frac{x}{x^2+y^2}} - \frac{df}{dy}$$

$$= \cancel{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

→ $\frac{df}{dy} = 0$ → $f(y) = C$

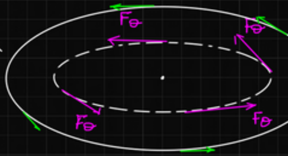
∴ $U(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C$

OBS

$$\vec{F}(x,y) = -\frac{r\,\text{sen}\theta}{r^2}\hat{i} + \frac{r\cos\theta}{r^2}\hat{j}$$

$$= \frac{1}{r}\left(-\text{sen}\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}\right)$$

$$\vec{F}(r,\theta) = \frac{1}{r}\hat{e}_\theta$$



Ejm: ¿La fuerza de fricción es conservativa?

Sabemos que

$$\vec{f}_k = \frac{\mu \vec{N} \times (\vec{N} \times \vec{v})}{N v} =$$

velocidad del cuerpo respecto a la superficie

Entonces; no existe función U_p tal que $\vec{f}_k = -\nabla U_p$; por tanto no es conservativa

OBS

Una manera "simple" de saber si una fuerza es conservativa, es:

Sea $\vec{F}(x,y) = F_x \hat{i} + F_y \hat{j}$; entonces si

$$\underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}_{\nabla \times \vec{F} = 0}$$, la fuerza $\vec{F}$ es conservativa

* Del ejemplo anterior

- $$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{(1)(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

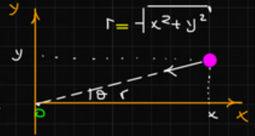
- $$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(1)(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

* Para una fuerza central

$$\vec{F}(r) = f(r)\,\hat{e}_r$$

$$\vec{F}(r) = f(r)\cos\theta\,\hat{i} + f(r)\,\text{sen}\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{F}(r) = \underbrace{\frac{f(r)}{r}x}_{F_x}\,\hat{i} + \underbrace{\frac{f(r)}{r}y}_{F_y}\,\hat{j}$$



$x = r\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\theta$

Sea $g(r) = \frac{f(r)}{r}$

- $$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(g(r)\,x\right) = x\frac{dg}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dg}{dr}$$

=

- $$\frac{\partial F_y}{\partial x} = y\frac{\partial}{\partial x}\left(g(r)\right) = y\frac{dg}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dg}{dr}$$

∴ Toda fuerza central es conservativa

Por otro lado, sabemos que

$$W^{neto} = \sum W^{F} = \sum W^{FC} + \sum W^{FNC}$$

$$\Delta K = -\sum_{p} \Delta U_p + \sum W^{FNC}$$

$$\rightarrow \quad \Delta K + \sum_{p} \Delta U_p = \sum W^{FNC}$$

$$\Delta\left(K + \sum_{p} U_p\right) = \sum W^{FNC}$$

Se define la energía mecánica como

$$\boxed{E_M = K + \sum_{p} U_p}$$

donde
K : energía cinética
U_p : energía potencial

luego $\boxed{\Delta E_M = \sum_{F} W^{FNC}}$ Teorema trabajo – energía mecánica

OBS

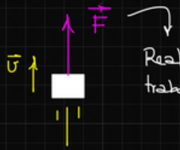
Decimos que la energía mecánica se conserva si

a) si $\sum W^{FNC} = 0$
b) Solo actúan fuerzas conservativas

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)} \\ \text{b)} \end{array}\right\} \Delta E_M = 0$$

Potencia

Se define la potencia como la rapidez con que una fuerza desarrolla trabajo



Realiza trabajo

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}} \quad (W \equiv J/s)$$

Recordamos que $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$ potencia instantánea

OBS

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t}$$

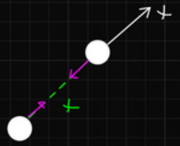
Es el trabajo realizado en el intervalo Δt

Se define una cantidad media

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}$$: potencia media

Ejm:

En una molécula diatómica, la energía potencial de la fuerza entre 2 átomos se puede expresar por



$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}}$$

donde a y b son constantes positivas y x es la separación entre los átomos

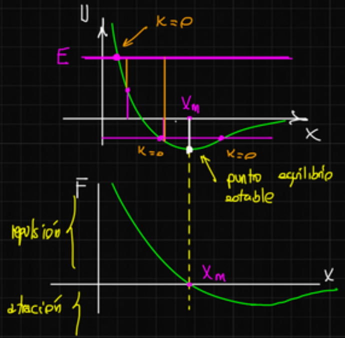
Entonces

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

$$= \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^{7}}$$

Siendo $F(x_m) = 0$

$$X_M = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$



Como la energía se conserva

$$E_M = K + U$$

La energía necesaria para disociar la molécula E_d; se determina

$$E_d = U(x_m)$$

$$E_d = \frac{b^2}{4a}$$

Ejm:

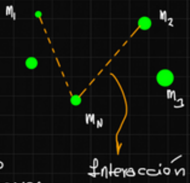
Verificar si es conservativa

$$\vec{F}(x,y) = (3x^2 + y)\,\hat{i} + (e^y + x)\,\hat{j}$$

$$\vec{F}(x,y) = \frac{x}{e^y}\,\hat{i} + \frac{y^2}{e^x}\,\hat{j}$$

Sistema de partículas

Un conjunto de partícula que pueden o no interactuar entre ellas



OBS

Para entender el movimiento de un sistema de partícula, debemos conocer el movimiento de cada partícula del sistema

Se define

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \quad (kg.\,m/s)$$

Cantidad de movimiento de la partícula

m : masa

$\vec{v}$: velocidad

En el plano cartesiano

$$\vec{P} = P_x\,\hat{i} + P_y\,\hat{j} + P_z\,\hat{k}$$

donde : $P_x = m v_x$ $\quad P_z = m v_z$

$P_y = m v_y$

OBS

- La primera ley de Newton dice que

$\vec{p}$ cambia si actúa $\vec{F}$: $\boxed{\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}}$

- La segunda ley de Newton, dice que:

$\vec{a}$ se genera debido a $\vec{F}$: $\boxed{\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$

Generalización de la 1era y 2da Ley de Newton

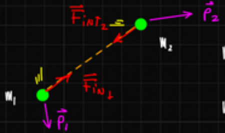
OBS

Sea una partícula de masa m constante

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_R$$

OBS

Para un sistema de 2 partículas



$$m_1 : \vec{F}_{R_1} = \vec{F}_{ext_1} + \vec{F}_{int_1} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

$$m_2 : \vec{F}_{R_2} = \vec{F}_{ext_2} + \vec{F}_{int_2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

operando...

$$\left(\vec{F}_{ext_1} + \vec{F}_{ext_2}\right) + \underbrace{\left(\vec{F}_{int_1} + \vec{F}_{int_2}\right)}_{} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right)$$

Por tercera ley de Newton

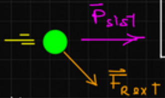
$$\sum_i \vec{F}_{int} = \vec{0}$$

Entonces;

$$\sum_i \vec{F}_{ext\,i} = \frac{d}{dt}\sum \vec{P}_i \quad ; \; i: 1 \dots N$$

para N partículas

$$\boxed{\vec{F}_{R\,ext} = \frac{d}{dt}\vec{P}_{sist}}$$



→ Debido a la expresión de esta ecuación, podemos representar el análisis de un sistema como partícula

donde

$\vec{F}_{R\,ext}$: fuerza resultante externa al sistema

$\vec{P}_{sist}$: Cantidad de movimiento del sistema

$$\vec{P}_{sist} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_N$$

OBS

Las fuerzas internas no modifican la cantidad de movimiento del sistema

OBS

En un sistema aislado (no hay fuerzas externas) se tiene que

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{sist} = \vec{0}$$

$\vec{P}_{sist}$ se conserva

Si $\sum_i \vec{F}_{ext\,i} = \vec{0}$ decimos también que se conserva $\vec{P}_{sist}$

Impulso de una fuerza

Se define como el efecto acumulado de una fuerza en el tiempo

$$d\vec{I} = \vec{F}\,dt$$

→ diferencial de impulso

$$\boxed{\vec{I} = \int_0^t \vec{F}\,dt}\quad (N.s)$$

Impulso de una fuerza $\vec{F}$ sobre una partícula

OBS

$$\vec{I} = \int_0^t \frac{d\vec{p}}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt}$$

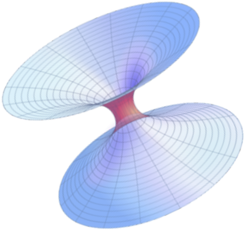
$$\vec{I} = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{I}^F = \Delta \vec{p}}$$

Teorema impulso-momento

"El impulso de una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula cambia la cantidad de movimiento de dicha partícula"

GRACIAS



Y MUCHOS ÉXITOS

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$