# FÍSICA I: BFIOIC

2022-1

Prof. Dr. Marco Cuyubamba

# SEMANA 10

operando...

$$(\vec{F}_{ext_1} + \vec{F}_{ext_2}) + \underbrace{(\vec{F}_{int_1} + \vec{F}_{int_2})}_{} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

Por tercera ley de Newton

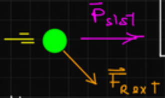
$$\sum \vec{F}_{INT} = \vec{0}$$

Entonces;

$$\sum_i \vec{F}_{ext\,i} = \frac{d}{dt}\sum \vec{p}_i \quad ; \; i: 1 \dots N$$

para N partículas

$$\boxed{\vec{F}_{R\,ext} = \frac{d}{dt}\vec{P}_{sist}}$$




Debido a la expresión de esta ecuación, podemos representar el análisis de un sistema como partícula

donde

$\vec{F}_{Rext}$ : fuerza resultante externa al sistema

$\vec{P}_{sist}$ : Cantidad de movimiento del sistema

$$\vec{P}_{sist} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N$$

**OBS**

Las fuerzas internas no modifican la cantidad de movimiento del sistema

**OBS**

En un sistema aislado (no hay fuerzas externas) se tiene que

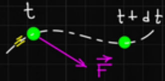
$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{sist} = \vec{0}$$

$\vec{P}_{sist}$ se conserva

Si $\sum_i \vec{F}_{ext\,i} = \vec{0}$ decimos también que se conserva $\vec{P}_{sist}$

## Impulso de una fuerza

Se define como el efecto acumulado de una fuerza en el tiempo




$$d\vec{I} = \vec{F}\,dt$$

→ diferencial de impulso

$$\boxed{\vec{I} = \int_0^t \vec{F}\,dt} \quad (N.s)$$

Impulso de una fuerza $\vec{F}$ sobre una partícula

OBS

$$\vec{I} = \int_0^t \frac{d\vec{p}}{\cancel{dt}}\cdot \cancel{dt}$$

$$\vec{I} = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0$$

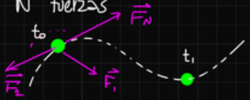
$$\rightarrow \boxed{\vec{I}_F = \Delta \vec{p}}$$

Teorema impulso-momento

"El impulso de una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula cambia la cantidad de movimiento de dicha partícula"

OBS

Si sobre un cuerpo actúan N fuerzas




$$\vec{I}^{F_1} = \Delta \vec{p}_1$$
$$\vec{I}^{F_2} = \Delta \vec{p}_2$$
$$\vdots$$
$$\vec{I}^{F_N} = \Delta \vec{p}_N$$

; donde $\Delta \vec{p}_i$: es el cambio en $\vec{p}$ si solo actuara $\vec{F}_i$

Se observa que el impulso verifica el principio de superposición, es decir

$$\underbrace{\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots + \vec{I}_N} = (\vec{p}_{1f} + \dots \vec{p}_{Nf}) - (\vec{p}_{10} + \dots \vec{p}_{N0})$$

$$\boxed{\vec{I}_R = \Delta \vec{p}}$$

OBS

Se puede demostrar que $\vec{I}_R = \vec{I}^{F_R}$

**Ejemplo:** Un hombre de masa $m_1$ se encuentra, en la superficie de una laguna, sobre una balsa de masa $m_2$. El hombre realizó el desplazamiento $\Delta\vec{r}\,'$ con relación a la balsa y luego se detuvo. Determinar el desplazamiento $\Delta\vec{r}_2$ correspondiente de la balsa con relación a la orilla. (Considerar que no hay fricción entre la balsa y el agua)

Sol


$$\vec{v}_{sist} = \vec{0}$$

$\Delta\vec{r}_1$ : desplazamiento del hombre respecto a la orilla.
$\Delta\vec{r}_1\,'$ : " " " " balsa
$\Delta\vec{r}_2$ : " " balsa " orilla

$\Delta \vec{r}_2{}' =$ " " " " balsa

Para el sistema hombre-balsa: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$;
entonces se conserva $\vec{P}_{sist}$

$$\underset{(\text{antes})}{\vec{P}_{sist}} = \underset{(\text{después})}{\vec{P}_{sist}}$$

$$\vec{0} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \longrightarrow \boxed{\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2}$$

Si $\vec{v}_1{}'$ velocidad del hombre respecto a la balsa

$$\vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1{}' = -\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)\vec{v}_2 \longrightarrow \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1{}'$$

entonces;

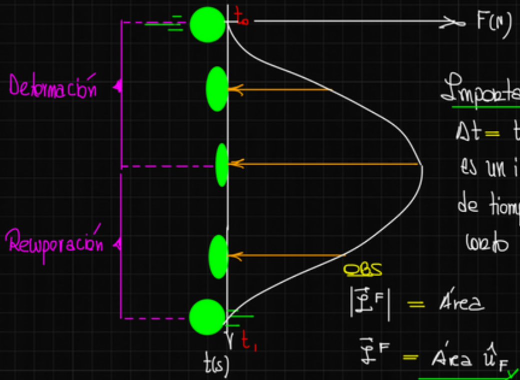
$$\int_{\vec{0}}^{\Delta\vec{r}_2} d\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\int_{\vec{0}}^{\Delta\vec{r}_1{}'} d\vec{r}_1{}'$$

$$\Delta \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta \vec{r}_1{}'$$

El movimiento de la balsa respecto a la orilla es opuesto al movimiento relativo del hombre respecto a la balsa

Ejm:

Una bola choca contra una pared




Importante

$\Delta t = t_1 - t_0$ es un intervalo de tiempo muy corto

OBS

$|\vec{I}^F| =$ Área

$\vec{I}^F =$ Área $\hat{u}_F$

entonces;

$$\int_{\vec 0}^{\Delta \vec r_2} d\vec r_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\int_{\vec 0}^{\Delta \vec r_1'} d\vec r_1'$$

$$\Delta \vec r_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta \vec r_1'$$

El movimiento de la balsa respecto a la orilla es opuesto al movimiento relativo del hombre respecto a la balsa


$$|\vec I^F| = \text{Área}$$

$$\vec I^F = \text{Área}\,\hat u_F$$

## Fuerza media

Se define como aquella fuerza constante que genera el mismo impulso que una fuerza variable en el mismo intervalo de tiempo

$$\vec I^{F_m} = \vec I^F$$

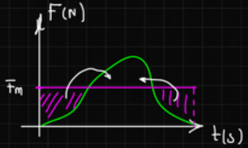
$$\vec F_m \Delta t = \int_{t_0}^{t_F} \vec F\, dt$$

$$\boxed{\vec F_m = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_F} \vec F\, dt}$$

donde

$\Delta t = t_F - t_0$

Entonces; $\vec I^{F_m} = \vec F_m \Delta t = \Delta \vec p$



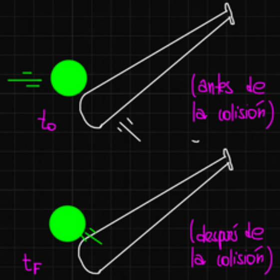
# Fuerzas impulsivas

Se denomina así a las fuerzas que tienen las siguientes características

- Fuerzas de gran magnitud en comparación de las demás interacciones presentes
- Fuerzas tienen corta duración en la interacción

Obs

Analicemos el siguiente caso




$\Delta t = t_F - t_0$ : intervalo de la colisión

Se define como "colisión" al evento que tiene una duración de "poco antes" y "poco después" de la interacción

## Importante

Antes del impacto ($t < t_0$), ni después del impacto ($t > t_F$) no es parte de la colisión

Luego; para la bola


$$\vec{I}_R = \underbrace{\vec{I}^{mg}}_{\approx 0} + \vec{I}^{F_i}$$

Se observa que $\vec{F}_i$ es una fuerza impulsiva, por tanto

$$|\vec{F}_i| \gg |m\vec{g}| \quad ; \quad t_0 < t < t_F$$

$$\rightarrow |\vec{I}^{F_i}| \gg |\vec{I}^{mg}|$$

Luego: $\vec{I}_R \cong \vec{I}^{F_i}$

Para el sistema bola-bate, $\vec{F}_i$ es una fuerza interna, por tanto, se conserva la cantidad de movimiento del sistema $\vec{P}_{sist}$ en el intervalo $t_0 < t < t_F$

# Colisiones

El momentum lineal del sistema se conserva en cualquier colisión

$$\boxed{\vec{P}_{sist\,(antes)} = \vec{P}_{sist\,(después)}}$$

En un colisión frontal


entonces : $\vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = \vec{p}_{1F} + \vec{p}_{2F}$

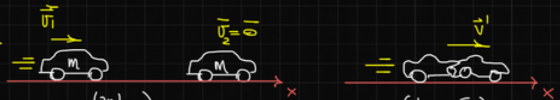
Un auto de 1000 $kg$ de masa viajando con una velocidad de 4 $m/s$ choca con otro auto idéntico que se encuentra en reposo. Debido al choque, ambos quedan enganchados.

a) ¿Con qué velocidad se mueven después del choque?

b) ¿Cuál fue el impulso que se ejerció sobre el auto en reposo?

c) Si el choque (transferencia de energía) duró 0,5 s. ¿Cuánto fue la fuerza promedio transmitida al auto en reposo?

Sol




(a) De la conservación de $\vec{P}_{sist}$

$$\cancel{m}\vec{v}_1 + m\vec{0} = 2\cancel{m}\vec{v}'$$

$$\rightarrow \vec{v}' = \frac{1}{2}\vec{v}_1 = 2\hat{i} \ m/s$$

(b)

$$\vec{I}_2 = \vec{P}_{2F} - \vec{P}_{20}$$

$$= m\vec{v}' - m(\vec{0})$$

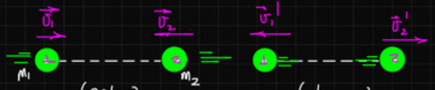
$$= (1000)(2\hat{i}) = 2000\hat{i} \ N.s$$

(c)

$$\vec{F}_m = \frac{\vec{I}^F}{\Delta t} = \frac{2000\hat{i}}{0,5}$$

$$\vec{F}_m = 4000\hat{i} \ N$$

- Choque elástico




Es aquel choque donde se conserva la energía cinética del sistema entonces; en una colisión elástica

- $\vec{P}_{sist}$ se conserva
- $K_{sist}$ se conserva

Se observa que siendo $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ datos del problema, entonces $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$ son 2 variables independientes del problema y que se pueden obtener resolviendo el sgte sistema

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' & \cdots\cdots (\alpha 1) \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 & \cdots\cdots (\alpha 2) \end{cases}$$

→ Se pueden obtener $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$

A partir de $(\alpha 2)$; tenemos

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1').(\vec{v}_1 + \vec{v}_1') = m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2).(\vec{v}_2' + \vec{v}_2) \cdots (\alpha 3)$$

luego de $(\alpha 1)$; tenemos

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_1') = m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2) \quad \cdots (\alpha 4)$$

Substituyendo $(\alpha 4)$ en $(\alpha 3)$

$$m_2(\vec{V}_2' - \vec{V}_2)\cdot(\vec{V}_1 + \vec{V}_1') = m_2(\vec{V}_2' - \vec{V}_2)\cdot(\vec{V}_2' + \vec{V}_2)$$

$$\underbrace{\vec{V}_1 + \vec{V}_1'}_{} = \underbrace{\vec{V}_2' + \vec{V}_2}_{}$$

entonces, se obtiene

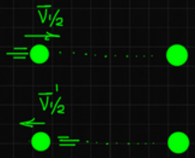
$$\vec{V}_1 + \vec{V}_1' = \vec{V}_2' + \vec{V}_2 \quad \cdots\cdots (\alpha 5)$$

$$\vec{V}_1' - \vec{V}_2' = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$

$$\boxed{\vec{V}'_{1/2} = -\vec{V}_{1/2}} \quad \cdots (A)$$

para cualquier colisión frontal elástica donde $\Delta K_{sist} = 0$; es decir, es mínima

La velocidad relativa antes y después de la colisión es de igual magnitud y orientación contrario




OBS

Para toda colisión frontal e independiente de la masa, se cumple

$$\vec{V}'_{1/2} = -\vec{V}_{1/2}$$

Substituyendo (α5) en (α1)

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1{}' + m_2(\vec{v}_1 + \vec{v}_1{}' - \vec{v}_2)$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2$$

$$\boxed{\vec{v}_1{}' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_2}$$

$$\boxed{\vec{v}_2{}' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_2}$$

* Si $\vec{v}_2 = \vec{0}$ :


$$\vec{v}_1{}' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2{}' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1$$

- Si $m_1 = m_2$ : $\vec{v}_1{}' = 0$, $\vec{v}_2{}' = \vec{v}_1$
- Si $m_1 > m_2$ : la bolita (1) no cambia de orientación
- Si $m_1 < m_2$ : la bolita (1) sí cambia de orientación

* Si $m_1 = m_2$

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_1{}' &= \vec{v}_2\\ \vec{v}_2{}' &= \vec{v}_1\end{aligned}\right\}$$ la partículas intercambian velocidades después de la colisión

* Si $m_1 >> m_2$


entonces;

$$\vec{v}_1{}' = \frac{1-\cancelto{0}{\frac{m_2}{m_1}}}{1+\cancelto{0}{\frac{m_2}{m_1}}}\vec{v}_1 + \frac{\cancelto{0}{\frac{2m_2}{m_1}}}{1+\cancelto{0}{\frac{m_2}{m_1}}}\vec{v}_2 \quad ; \quad \frac{m_2}{m_1} << 1$$

$$\vec{v}_1{}' \cong \vec{v}_1 \quad ; \quad m_2 << m_1$$

$$\vec{v}_2{}' = \frac{2}{1+\cancelto{0}{\frac{m_2}{m_1}}}\vec{v}_1 + \frac{\cancelto{0}{\frac{m_2}{m_1}}-1}{1+\cancelto{0}{\frac{m_2}{m_1}}}\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2{}' = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

* Si $m_1 << m_2$


$$\vec{v}_1{}' = \frac{\cancel{\frac{m_1}{m_2}}-1}{\cancel{\frac{m_1}{m_2}}+1}\vec{v}_1 + \frac{2}{\cancel{\frac{m_1}{m_2}}+1}\vec{v}_2$$

$$\vec{V}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{V}_1$$

$$\vec{V}_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{V}_1$$

Si $m_1 = m_2$ : $\vec{V}_1' = 0$

$\vec{V}_2' = \vec{V}_1$

Si $m_1 > m_2$ : la bolita (1) no cambia de orientación

Si $m_1 < m_2$ : la bolita (1) sí cambia de orientación

$$\vec{V}_2' = \frac{2}{1 + \cancel{\frac{m_2}{m_1}}^{0}}\vec{V}_1 + \frac{\cancel{\frac{m_2}{m_1}}^{0} - 1}{1 + \cancel{\frac{m_2}{m_1}}^{0}}\vec{V}_2$$

$$\vec{V}_2' = 2\vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

* Si $m_1 \ll m_2$


$$\vec{V}_1' = \frac{\cancel{\frac{m_1}{m_2}} - 1}{\cancel{\frac{m_1}{m_2}} + 1}\vec{V}_1 + \frac{2}{\cancel{\frac{m_1}{m_2}} + 1}\vec{V}_2$$

→ $\vec{V}_1' \approx 2\vec{V}_2 - \vec{V}_1$

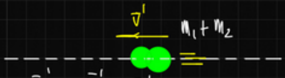
$$\vec{V}_2' = \frac{2\cancel{m_1}/m_2}{1 + m_1/\cancel{m_2}}\vec{V}_1 + \frac{1 - \cancel{\frac{m_1}{m_2}}}{1 + \cancel{\frac{m_1}{m_2}}}\vec{V}_2$$

$$\vec{V}_2' \approx +\vec{V}_2$$

## Colisión perfectamente inelástica

Es aquella colisión donde ambos cuerpos adquieren la misma velocidad después del choque. Para el caso de choque frontal


antes de la colisión




después de la colisión

entonces; $\vec{v}_1' = \vec{v}_2' = \vec{v}'$

A partir de la conservación del momento lineal del sistema, tenemos

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}'$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_2}$$

Obs

La energía cinética del sistema, no se conserva, por tanto,

Veamos que:

- $\vec{v}'_{1/2} = \vec{0}$
- $\vec{v}_{1/2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \neq \vec{0}$

$\Big\} \quad \vec{v}'_{1/2} = -0\,\vec{v}_{1/2}$

$|\Delta K|$ es máxima

En una colisión elástica no hay pérdida de energía cinética $\Delta K = 0$; i.e $|\Delta K|$ es mínimo

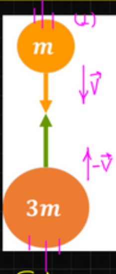
$$0 < |\Delta K| < |\Delta K|_{máx}$$

elástico — inelástico — perfectamente inelástico

entonces, se propone que el factor que mida cuánto es el grado de pérdida de energía cinética se denomine coeficiente de restitución $(e)$, a partir de la siguiente expresión

$$\boxed{\vec{v}'_{1/2} = -e\,\vec{v}_{1/2}}$$

$$\begin{cases} e = 1 & ; \text{ elástica} \\ 0 < e < 1 & ; \text{ inelástica} \\ e = 0 & ; \text{ perfectamente inelástica} \end{cases}$$




Una pelota de masa $m$ cayendo choca con otra pelota de masa $3m$ subiendo. En el instante del choque tienen velocidades de magnitudes iguales.

Si el choque es elástico, calcule la velocidad de las pelotas después de choque.

Se puede garantizar la conservación del momento lineal del sistema

Sol

Sabemos que en una colisión elástica frontal, se cumple

$$\vec{v}_1{}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2{}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1{}' = \frac{m - 3m}{4m}\vec{v} + \frac{3m - m}{4m}(-\vec{v})$$

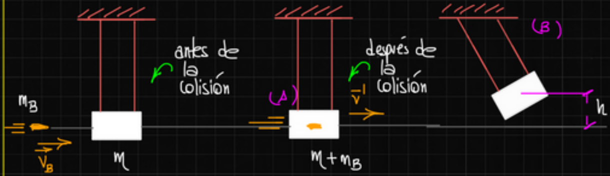
$$\vec{v}_1{}' = -\vec{v}$$

$$\vec{v}_2{}' = \frac{2m}{4m}\vec{v} + \frac{2m}{4m}(-\vec{v})$$

$$\vec{v}_2{}' = \vec{0}$$

## Péndulo balístico

Es un dispositivo que mide la velocidad de un proyectil en movimiento.




De la conservación del momento lineal en la colisión

$$m_B\vec{v}_B = (m_B + m)\,\vec{v}'$$

$$\boxed{\vec{v}' = \frac{m_B}{m_B+m}\vec{v}_B}$$

Además, luego de la colisión se conserva la energía mecánica

$$K_A = U_{g_B}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v'^2 = \cancel{m}gh$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_B}{m_B+m}\right)^2 V_B^2 = gh$$

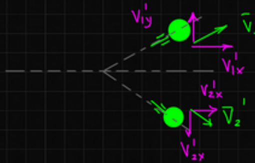
; por tanto $\quad V_B = \left(\frac{m_B+m}{m_B}\right)\sqrt{2gh}$

se puede observar con este simple experimento por se puede determinar la rapidez de un proyectil.

## Colisión bidimensional

Si el choque no es frontal, el movimiento de ambas partículas después de la colisión se desarrollará en un plano


antes de la colisión




Después de la colisión

OBS

Después de la colisión se presenta 4 variables desconocidas.

- De la conservación de $\vec{P}_{sist}$

En eje x : $m_1 V_{x_1} + m_2 V_{x_2} = m_1 V_{x_1}' + m_2 V_{x_2}'$ ... (θ1)

En eje y : $m_1 V_{y_1} + m_2 V_{y_2} = m_1 V_{y_1}' + m_2 V_{y_2}'$ ... (θ2)

- Si es elástico, se conserva $K_{sisT}$

$$\frac{1}{2}m_1(V_{1x}^2 + V_{1y}^2) + \frac{1}{2}m_2(V_{2x}^2 + V_{2y}^2) = \frac{1}{2}m_1(V_{1x}'^2 + V_{1y}'^2) + \frac{1}{2}m_2(V_{2x}'^2 + V_{2y}'^2) \quad \text{... (θ2)}$$

Estas tres ecuaciones θ1 ; θ2 y θ3 no son suficientes para resolver el problema de colisión bidimensional del caso elástico, entonces se propone a nivel experimental el siguiente esquema


antes de la colisión

Consideraremos el caso en que $\vec{v}_2 = \vec{0}$.

Después del choque $m_1$ se mueve a un ángulo $\theta$ con el eje de movimiento inicial, mientras que $m_2$ se mueve haciendo un ángulo $\phi$


A nivel experimental, es más "sencillo" determinar uno de estos ángulos

entonces; de la conservación del momento lineal del sistema:

En eje x: $m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos\theta + m_2 v_2' \cos\phi$

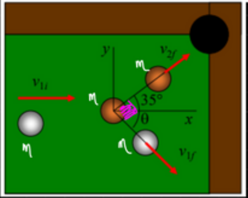
En eje y: $0 = m_1 v_1' \operatorname{sen}\theta - m_2 v_2' \operatorname{sen}\phi$

Si el choque es elástico, se conserva $K_{sist}$,

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

A nivel experimental, se requiere conocer alguno de los ángulos.

En un juego de billar un jugador desea meter la bola objetivo en la buchaca de la esquina.




Considerando que ambas bolas tienen igual masa, de la conservación de $K_{sist}$

$$\cancel{\tfrac{1}{2} m} v_{1i}^2 = \cancel{\tfrac{1}{2} m} v_{1f}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2} m} v_{2f}^2$$

$$\rightarrow v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad \cdots (1)$$

De la conservación de $\vec{P}_{sist}$:

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f} \quad \cdots (2)$$

De (1); se tiene

$$v_{1i}^2 = \vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}_{1i}$$

$$= (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}) \cdot (\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f})$$

$$v_{1i}^2 = \cancel{v_{1f}^2 + v_{2f}^2} + 2\, \vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = \cancel{v_{1f}^2 + v_{2f}^2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{1f} \cdot \vec{v}_{2f} = 0$$

entonces $\vec{v}_{1f} \perp \vec{v}_{2f}$; por tanto $\theta = 55°$

# Centro de masa

Sea un sistema de N partículas


siendo

$$\vec{P}_{sist} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

Vamos a describir la posición de una "partícula" hipotética que represente al sistema, a esta "partícula" se le llama centro de masa

Ponderando estas posiciones, se define:

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

; donde $M = \sum m_i$ es la masa del sistema

Se sabe que

$$\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

entonces;

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\vec{P}_{sisT} \Longrightarrow \boxed{\vec{P}_{sisT} = M\vec{v}_{CM}}$$

podemos entonces substituir al sistema discreto de N partícula por el centro de masa

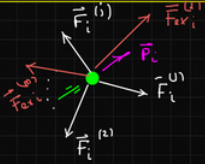

$\vec{P}_{sisT}$ ⟵ son iguales ⟶ $\vec{P}_{sisT}$

Por otro lado,

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{Ri}$$

; siendo $\vec{F}_{Ri}$ la fuerza resultante sobre la partícula i-ésima




Siendo

$$\vec{F}_{Ri} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{Ri}^{(j)} + \vec{F}_{extRi}$$

entonces;

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N} \vec{F}_{Ri}^{(j)} + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{extRi}$$

Debido a que la tercera ley de Newton impone que

$$\underline{\vec{F}_{Ri}^{(j)} = -\vec{F}_{Rj}^{(i)}}$$

esto conlleva a que: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{N} \vec{F}_{Ri}^{(j)} = \vec{0}$

Luego;

$$\boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\vec{F}_{extR}}$$

; por tanto la partícula modifica el $\vec{P}_{sist}$ siempre que hayan fuerzas externas al sistema o sea un sistema aislado

Ejm:

Se tienen 3 masas iguales en los vértices de un triángulo. Calcular $\vec{r}_{CM}$


Sabemos que:

$\vec{r}_1 = \vec{0}$

$\vec{r}_2 = b\hat{j}$

$\vec{r}_3 = a\hat{i}$

entonces:
$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{3\cancel{m}}(m\vec{0} + \cancel{m}b\hat{j} + \cancel{m}a\hat{i})$$

$$\underline{\vec{r}_{CM} = \frac{a}{3}\hat{i} + \frac{b}{3}\hat{j}}$$

* Para una distribución contínua de masa

M : masa total (sistema)


entonces;

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\lim_{dm\to 0}\sum \vec{r}'dm$$

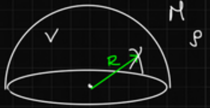
$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,'\,dm}$$

: tener en cuenta que esta integral está definida sobre la región en la que existe masa que represente al sistema

OBS

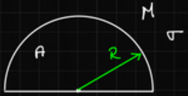
- Si la distribución de masa se encuentra en el espacio

$$dm = \underbrace{\rho(\vec{r}\,')}_{\text{densidad volumétrica}}\ \underbrace{dV}_{\text{diferencial de volumen}}$$



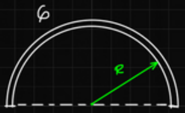

- Si la distribución de masa se encuentra en un plano

$$dm = \underbrace{\sigma(\vec{r}\,')}_{\text{densidad superficial}}\ \underbrace{dA}_{\text{diferencial de área}}$$




- Si la distribución de masa se encuentra sobre una curva

$$dm = \underbrace{\lambda(\vec{r}\,')}_{\text{densidad lineal}}\ \underbrace{d\ell}_{\text{diferencial de longitud}}$$




Ejm: Sea una distribución de masa triangular en el plano XY


$$dm = \sigma\, dA = \sigma\, h\, dx$$

entonces;

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,'\,dm$$

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{a-x} \Rightarrow h(x) = \frac{b}{a}(a-x) \Rightarrow dm = \frac{b\sigma}{a}(a-x)\,dx$$

Luego

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,'\,dm \quad ; \quad \vec{r}\,' = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$$

$$= \frac{1}{M}\int (x\,\hat{i} + y\,\hat{j})\,\frac{b\sigma}{a}(a-x)\,dx$$

$$= \frac{b\sigma}{aM}\left[\int_0^a x(a-x)\,dx\ \hat{i} + \int_0^a y(a-x)\,dx\ \hat{j}\right]$$

donde $y = -\frac{b}{a}x + b$

entonces

$$\bar{r}_{CM} = \frac{b\sigma}{aM}\left[\int_0^a (ax - x^2)\,dx\,\hat{i} + \underbrace{\int_0^a \left(b - \frac{b}{a}x\right)(a-x)\,dx}_{\text{TAREA}}\right]$$

$$x_{CM} = \frac{b\sigma}{aM}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a$$

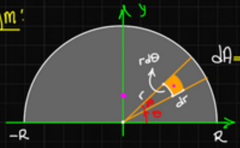
$$x_{CM} = \frac{b\sigma}{aM}\cdot\frac{a^3}{6} \qquad \sigma = \frac{2M}{ab}$$

$$= \cancel{\frac{b}{aM}}\left(\cancel{\frac{2M}{ab}}\right)\left(\frac{a^{\cancel{3}\,1}}{6}\right)$$

$$x_{CM} = \frac{a}{3}$$ ;

Demostrar que $y_{CM} = \frac{b}{3}$

Ejm:




$dA = r\,dr\,d\theta$

$$dm = \sigma\,dA$$

$$dm = \sigma\,r\,dr\,d\theta$$

$$\sigma = \frac{2M}{\pi R^2}$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$

entonces;

$$\bar{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \bar{r}'\,dm$$

$$= \frac{1}{M}\left[\int x\,dm\,\hat{i} + \int y\,dm\,\hat{j}\right]$$

$$= \frac{1}{M}\iint x\,\sigma\,r\,dr\,d\theta\,\hat{i} + \frac{1}{M}\iint y\,\sigma\,r\,dr\,d\theta\,\hat{j}$$

$$= \frac{\sigma}{M}\iint r^2\cos\theta\,dr\,d\theta\,\hat{i} + \frac{\sigma}{M}\iint r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,\hat{j}$$

$$= \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2\,dr\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta\,\hat{i} + \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2\,dr\int_0^\pi \text{sen}\,\theta\,d\theta\,\hat{j}$$

$$= \frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3}(0)\,\hat{i} + \frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3}(-\cos\theta)\Big|_0^\pi$$

$X_{CM} = \frac{\ }{3}$ ;

Demostrar que $y_{CM} = \frac{b}{3}$

$$= \frac{\sigma}{M}\iint r^2\cos\theta\, dr\, d\theta\ \hat{i} + \frac{\sigma}{M}\iint r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\ \hat{j}$$

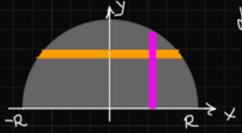
$$= \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi}\cos\theta\, d\theta\ \hat{i} + \frac{\sigma}{M}\int_0^R r^2 dr\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\ \hat{j}$$

$$= \frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3}(0)\ \hat{i} + \frac{\sigma}{M}\frac{R^3}{3}\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$\bar{r}_{CM} = \frac{2\sigma}{M}\frac{R^3}{3}\ \hat{j}$$

$$\bar{r}_{CM} = \frac{2R^{\cancel{3}}}{3\cancel{M}}\left(\frac{2\cancel{M}}{\pi \cancel{R^2}}\right)\hat{j} = \frac{4R}{3\pi}\ \hat{j}$$

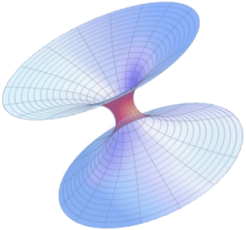
TAREA




Hallar $\bar{r}_{CM}$ usando los diferenciales de la figura

# GRACIAS

Y MUCHOS ÉXITOS



$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}$$