

Биматричная игра для анализа позиций в игре «Колонизаторы»

Султанов Мирзомансурхон Махсудович, М3434
(Большой фанат игры, входящий в топ 2,5 тыс. игроков по миру)

25 июня 2025 г.

1 Введение

Игра «Колонизаторы» (Settlers of Catan) является одной из самых популярных настольных стратегических игр, где ключевую роль играют размещение поселений, развитие торговли и грамотное распределение ресурсов. В этой игре начальные позиции определяют будущие возможности игрока, поскольку от них зависит производство таких ресурсов, как дерево, кирпич, пшеница, овца и камень.

В данном анализе рассматриваются шесть лучших позиций для размещения первых поселений. Приоритет отдан ресурсам, наиболее важным на старте:

- **Дерево и кирпич** — критически важны для строительства дорог,
- **Пшеница и овца** — необходимы для возведения новых поселений,
- **Камень** — имеет наименьшую значимость в начале игры.

Анализ проведём на конкретной расстановке гексов, так как для каждой игры свой уникальный подход к игре необходим, чем эта игра и полюбилась многим на самом деле.



2 Постановка задачи

В анализе рассматриваются следующие 6 позиций:

1. **Стратегия 1:** 9 (пшеница), 11 (дерево), 8 (дерево)
2. **Стратегия 2:** 8 (дерево), 5 (кирпич), 3 (камень)
3. **Стратегия 3:** 3 (дерево), 8 (камень), 5 (овца)
4. **Стратегия 4:** 3 (камень), 4 (пшеница), 6 (пшеница)
5. **Стратегия 5:** 4 (овца), 9 (дерево), 10 (кирпич)
6. **Стратегия 6:** 10 (кирпич), 3 (дерево), 8 (камень)

Для анализа применяется модель биматричной игры:

- **Игрок 1** (первый игрок) может выбирать любую из 6 стратегий.
- **Игрок 2** (второй игрок) выбирает из тех же 6 стратегий, но с ограничениями:
 1. Игрок 2 не может выбрать ту же стратегию, что и Игрок 1.
 2. Если Игрок 1 выбирает стратегию 3 или 6, то Игроку 2 запрещено выбирать стратегии 3 и 6.

При выборе недопустимой стратегии для Игрока 2 его выплата равна -100 .

3 Расчёт значимости стратегий

Для оценки стратегической ценности каждой позиции используются следующие данные:

- **Вероятности выпадения чисел** при броске двух кубиков:

- Числа 3 или 11: $\frac{2}{36}$,
- Числа 4 или 10: $\frac{3}{36}$,
- Числа 5 или 9: $\frac{4}{36}$,
- Числа 6 или 8: $\frac{5}{36}$.

- **Приоритет ресурсов:**

- **Дерево** и **кирпич** — вес 3,
- **Пшеница** и **овца** — вес 2,
- **Камень** — вес 1.

Оценка каждой стратегии производится по формуле:

$$\text{Ценность} = \sum (\text{вероятность выпадения числа} \times \text{вес ресурса}).$$

Стратегия 1

$$9 \text{ (пшеница)} : \quad \frac{4}{36} \times 2 \approx 0.2222,$$

$$11 \text{ (дерево)} : \quad \frac{2}{36} \times 3 \approx 0.1667,$$

$$8 \text{ (дерево)} : \quad \frac{5}{36} \times 3 \approx 0.4167,$$

$$\textbf{Итого:} \quad 0.2222 + 0.1667 + 0.4167 \approx 0.8056.$$

Стратегия 2

$$8 \text{ (дерево)} : \quad \frac{5}{36} \times 3 \approx 0.4167,$$

$$5 \text{ (кирпич)} : \quad \frac{4}{36} \times 3 \approx 0.3333,$$

$$3 \text{ (камень)} : \quad \frac{2}{36} \times 1 \approx 0.0556,$$

$$\textbf{Итого:} \quad 0.4167 + 0.3333 + 0.0556 \approx 0.8056.$$

Стратегия 3

$$3 \text{ (дерево)} : \quad \frac{2}{36} \times 3 \approx 0.1667,$$

$$8 \text{ (камень)} : \quad \frac{5}{36} \times 1 \approx 0.1389,$$

$$5 \text{ (овца)} : \quad \frac{4}{36} \times 2 \approx 0.2222,$$

$$\textbf{Итого:} \quad 0.1667 + 0.1389 + 0.2222 \approx 0.5278.$$

Стратегия 4

$$3 \text{ (камень)} : \quad \frac{2}{36} \times 1 \approx 0.0556,$$

$$4 \text{ (пшеница)} : \quad \frac{3}{36} \times 2 \approx 0.1667,$$

$$6 \text{ (пшеница)} : \quad \frac{5}{36} \times 2 \approx 0.2778,$$

$$\textbf{Итого:} \quad 0.0556 + 0.1667 + 0.2778 \approx 0.5.$$

Стратегия 5

$$4 \text{ (овца)} : \quad \frac{3}{36} \times 2 \approx 0.1667,$$

$$9 \text{ (дерево)} : \quad \frac{4}{36} \times 3 \approx 0.3333,$$

$$10 \text{ (кирпич)} : \quad \frac{3}{36} \times 3 \approx 0.25,$$

$$\textbf{Итого:} \quad 0.1667 + 0.3333 + 0.25 = 0.75.$$

Стратегия 6

$$10 \text{ (кирпич)} : \quad \frac{3}{36} \times 3 \approx 0.25,$$

$$3 \text{ (дерево)} : \quad \frac{2}{36} \times 3 \approx 0.1667,$$

$$8 \text{ (камень)} : \quad \frac{5}{36} \times 1 \approx 0.1389,$$

$$\textbf{Итого:} \quad 0.25 + 0.1667 + 0.1389 \approx 0.5556.$$

Обозначим:

$$V_1 = 0.8056, \quad V_2 = 0.8056, \quad V_3 = 0.5278, \quad V_4 = 0.5, \quad V_5 = 0.75, \quad V_6 = 0.5556.$$

4 Матрицы выплат

В данной модели:

- **Игрок 1** выбирает любую стратегию и получает выплату, равную значению выбранной стратегии.
- **Игрок 2** выбирает из тех же 6 стратегий, но:
 1. Не может выбрать ту же стратегию, что и Игрок 1.
 2. Если Игрок 1 выбрал стратегию 3 или 6, то Игроку 2 запрещено выбирать стратегии 3 и 6.

При выборе недопустимой стратегии для Игрока 2 его выплата равна -100 .

4.1 Матрица выплат для Игрока 1 (A)

Так как выплата Игрока 1 определяется только его выбором, матрица имеет вид:

$$A_{ij} = V_i, \quad \text{для } i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}.$$

A (Игрок 1)	1	2	3	4	5	6
1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1	V_1
2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2	V_2
3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3	V_3
4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4	V_4
5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5	V_5
6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6	V_6

Таблица 1: Матрица выплат для Игрока 1

4.2 Матрица выплат для Игрока 2 (B)

Для Игрока 2 действуют следующие правила:

- Если выбранная стратегия совпадает с выбором Игрока 1, выплата равна -100 .
- Если Игрок 1 выбрал стратегию 3 или 6, то выбор стратегий 3 и 6 для Игрока 2 недопустим (выплата -100).
- Иначе выплата равна значению выбранной стратегии.

Запишем матрицу B , где строки соответствуют выбору Игрока 1, а столбцы — выбору Игрока 2:

B	1	2	3	4	5	6
1	-100 ($1 = 1$)	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
2	V_1	-100 ($2 = 2$)	V_3	V_4	V_5	V_6
3	V_1	V_2	-100 ($3 = 3$)	V_4	V_5	-100 ($3 \rightarrow 6$)
4	V_1	V_2	V_3	-100 ($4 = 4$)	V_5	V_6
5	V_1	V_2	V_3	V_4	-100 ($5 = 5$)	V_6
6	V_1	V_2	-100 ($6 \rightarrow 3$)	V_4	V_5	-100 ($6 = 6$)

B (Игрок 2)	1	2	3	4	5	6
1	-100	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
2	V_1	-100	V_3	V_4	V_5	V_6
3	V_1	V_2	-100	V_4	V_5	-100
4	V_1	V_2	V_3	-100	V_5	V_6
5	V_1	V_2	V_3	V_4	-100	V_6
6	V_1	V_2	-100	V_4	V_5	-100

Таблица 2: Матрица выплат для Игрока 2

5 Выводы

Анализ показал, что:

- **Игрок 1** имеет полную свободу выбора, и его выплата определяется исключительно ценностью выбранной стратегии.
- **Игрок 2** вынужден учитывать ограничения: он не может выбрать ту же стратегию, что и Игрок 1, а также, если Игрок 1 выбирает стратегию 3 или 6, то для него эти стратегии недоступны (при выборе недопустимого варианта начисляется штраф -100).
- Полученные матрицы выплат позволяют провести дальнейший анализ равновесия и оптимизации стратегий для конкретного расположения хексов, представленного на картинке.