Estimation sans échantillon d'apprentissage

- Soit $X = (X_1, \dots, X_N)$avec X_n à valeur dans $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$ avec Y_n à valeur dans R. **On suppose que la loi des *X* est une chaîne de Markov stationnaire**. Les lois de Y_s conditionnelles a $X_s = \omega_1$ et $X_s = \omega_2$ sont gaussiennes (on les notes f_1 et f_2).

- Le paramètre $\theta = (\pi, A, \mu_1, {\sigma_1}^2, \mu_2, {\sigma_2}^2)$ est donc un vecteur avec:
  - $\pi = \{\pi_i = p(X_n = \omega_i)\}_{i=1,2}$
  - $A = \left\{a_{i,j} = p\left(X_{n+1} = \omega_j | X_n = \omega_i\right)\right\}_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}}$
  - $\mu_1, {\sigma_1}^2, \mu_2, {\sigma_2}^2$ les paramètres des gaussiennes f_1 et f_2

- **On dispose d'observations $(\boldsymbol{y_1}, \dots, \boldsymbol{y_N})$ de *Y* seulement**

Estimation sans échantillon d'apprentissage

Rappels:

Probabilités forward:

- $\alpha_1(x_1 = \omega_i;\theta) = \pi_i f_i(y_1, \mu_i, {\sigma_i}^2)$
- $\alpha_{n+1}(x_{n+1} = \omega_i;\theta) = \left[\sum_j \alpha_n\left(x_n = \omega_j;\theta\right)a_{i,j}\right] f_i(y_{n+1}, \mu_i, {\sigma_i}^2)$

Probabilités backward:

- $\beta_N(x_N = \omega_i;\theta) = 1$
- $\beta_n(x_n = \omega_i;\theta) = \sum_j a_{i,j}\beta_{n+1}\left(x_{n+1} = \omega_j;\theta\right) f_j(y_{n+1}, \mu_j, {\sigma_j}^2)$

Estimation sans échantillon d'apprentissage

<u>Algorithme EM:</u>

- On se donne une valeur initiale $\theta^0 = \left(\pi^0, A^0, \mu_1^0, {\sigma_1^0}^2, \mu_2^0, {\sigma_2^0}^2\right)$
- On itère pour k allant de 0 à K:
  - On calcule $\forall n, \psi_n^k(i,j) = p\left(x_n = \omega_i, x_{n+1} = \omega_j \middle| y, \theta^k\right) = \frac{\alpha_n(x_n=\omega_i;\theta^k) a_{i,j}^k f_j(y_{n+1}, \mu_j^k, {\sigma_j^k}^2) \beta_{n+1}(x_{n+1}=\omega_j;\theta^k)}{\sum_{i,j} \alpha_n(x_n=\omega_i;\theta^k) a_{i,j}^k f_j(y_{n+1}, \mu_j^k, {\sigma_j^k}^2) \beta_{n+1}(x_{n+1}=\omega_j;\theta^k)}$
  - Et $\xi_n^k(i) = p\left(x_n = \omega_i \middle| y, \theta^k\right) = \frac{\alpha_n(x_n=\omega_i;\theta^k)\beta_n(x_n=\omega_i;\theta^k)}{\sum_i \alpha_n(x_n=\omega_i;\theta^k)\beta_n(x_n=\omega_i;\theta^k)}$
  - On calcule $\theta^{k+1} = \left(\pi^{k+1}, A^{k+1}, \mu_1^{k+1}, {\sigma_1^{k+1}}^2, \mu_2^{k+1}, {\sigma_2^{k+1}}^2\right)$ à partir de θ^k de la manière suivante:
    - $\pi_i^{k+1} = \frac{\xi_1^k(i) + \cdots + \xi_N^k(i)}{N}$
    - $a_{i,j}^{k+1} = \frac{\psi_1^k(i,j) + \cdots + \psi_{N-1}^k(i,j)}{\xi_1^k(i) + \cdots + \xi_{N-1}^k(i)}$
    - $\mu_i^{k+1} = \frac{y_1 \xi_1^k(i) + \cdots + y_N \xi_N^k(i)}{\xi_1^k(i) + \cdots + \xi_N^k(i)}$
    - ${\sigma_i^{k+1}}^2 = \frac{(y_1 - \mu_i^{k+1})^2 \xi_1^k(i) + \cdots + (y_N - \mu_i^{k+1})^2 \xi_N^k(i)}{\xi_1^k(i) + \cdots + \xi_N^k(i)}$