ANALYSIS I

VORLESUNG IM WINTERSEMESTER 2011/12

RÜDIGER W. BRAUN

Inhaltsverzeichnis

1. Mengen und Abbildungen

1.1. **Definition.** Eine Menge ist eine Zusammenfassung *verschiedener* Elemente zu einem Ganzen. Es muss prinzipiell entscheidbar sein, ob ein Element zu einer Menge gehört.

Man kann hier sehr viel formaler werden. Das interessiert aber keinen Analytiker.

1.2. **Notation.** Es gibt zwei Methoden, Mengen hinzuschreiben:

(a) Durch Aufzählung $M_1 = \{1, 5, 17\}$, $M_2 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$.
(b) Durch Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft: $M_3 = \{n; n \text{ gerade}\}$, $M_4 = \{p; p \text{ und } 2^p - 1 \text{ Primzahlen}\}$.
(c) Wichtige Mengen, deren Existenz wir à priori hinnehmen:
  (i) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die natürlichen Zahlen,
  (ii) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
  (iii) $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ die ganzen Zahlen,
  (iv) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ die rationalen Zahlen,
  (v) $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen. Eine genauere Beschreibung der reellen Zahlen folgt später.

1.3. **Definition.** Eine Menge A ist *Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element von A aich Element von B ist. Man schreibt $A \subset B$.

1.4. *Beispiel.* $\mathbb{N} \subset N_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Von den beiden Mengen $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ ist keine Teilmenge der anderen.

1.5. *Bemerkung.* Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.

1.6. **Definition.** Die Menge, die gar kein Element enthält, heißt *leere Menge*. Sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

1.7. **Definition.** Seien M_1 und M_2 zwei Mengen. Dann sind die folgenden Verknüpfungen erklärt:

(a) $M_1 \cup M_2 = \{x; x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ (Vereinigung),
(b) $M_1 \cap M_2 = \{x; x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ (Durchschnitt),
(c) $M_1 \setminus M_2 = \{x; x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ (Differenz),
(d) $M_1 \triangle M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ (symmetrische Differenz).

Venn-Diagramme anmalen.

1.8. *Beispiel.* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N} \cap \{0\} = \emptyset$, $\emptyset \triangle M = M$ für jede Menge M.

1.9. *Bemerkung.* Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und Distributivgesetz für Mengen.

Die Beweise aller dieser Aussagen beruhen auf den Gesetzen der Logik. Ich führe sie nicht vor, weil sie bereits im Vorkurs gemacht wurden.

1.10. **Definition.** Sei X eine Menge. Die Menge $\mathcal{P}(X) = \{M; M \subset X\}$ heißt *Potenzmenge* von X.

1.11. *Beispiel.* $X = \{1, 2, 3\}$, dann hat $\mathcal{P}(X)$ die folgenden acht Elemente: ....
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Diese Menge ist nicht leer.

1.12. **Definition.** Seien X, Y Mengen. Die Menge $X \times Y = \{(x, y); x \in X \text{ und } y \in Y\}$ heißt *kartesisches Produkt* der Mengen X und Y. Die Elemente von $X \times Y$ heißen *Paare.*

1.13. *Beispiel.* Für $X = \{1, 2, 3\}$ schreibe ich X^2 hin. Es hat neun Elemente.

1.14. **Definition.** Gegeben seien Menge X und Y. Eine *Abbildung* $f \colon X \to Y$ besteht aus dem *Definitionsbereich* X, dem *Zielbereich* Y und einer Vorschrift, die jedem Element aus X genau ein Element $y = f(x)$ aus X zuordnet.

Eine Frage ist, ob zwei Abbildungen, die denselben Definitionsbereich und dieselbe Vorschrift besitzen, als gleich anzusehen sind. Algebraiker sind da steng und sagen "nein". Das ist auch der Inhalt der Definition. Analytiker sind oft geneigt, unterschiedliche Zielbereiche zu ignorieren.

1.15. **Definition.** Sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung, seien $M \subset X$ und $N \subset Y$.

(a) $f(M) = \{f(x); x \in M\}$ heißt *Bild* von M unter f.
(b) $f^{-1}(N) = \{x; f(x) \in N\}$ heißt *Urbild* von N unter f.

1.16. *Beispiel.* $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $f \colon X \to Y$, $f(x) = x^2$, $M = \{1, 2\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann $f(M) = \{1, 4\}$, $f^{-1}(N) = \{1, 2\}$.

1.17. **Definition.** Seien $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ zwei Abbildungen. Die *Verknüpfung* ist definiert als $g \circ f \colon X \to Z$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

1.18. *Beispiel.* $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$. Dann $f \circ f(3) = 81$.

2. Die reellen Zahlen

Die *reellen Zahlen* sind eine Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit zwei Rechenvorschriften, die je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ und ein Element $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, und einer Vergleichsrelation $>$, welche die folgenden Axiome erfüllt:

Körperaxiome.

(a) (Kommutativgesetze) $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
(b) (Assoziativgesetze) $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(c) (Null und Eins) Es gibt Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$ und $0 + x = x$ und $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) (Inverses Element der Addition) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$.

Es zeigt sich, dass y eindeutig bestimmt ist; man bezeichnet es mit $-x$.

(e) (Inverses Element der Multiplikation) Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot z = 1$.

Es zeigt sich, dass z eindeutig bestimmt ist. Man schreibt $z = x^{-1}$ oder $z = \frac{1}{x}$.

(f) (Distributivgesetz) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2.1. **Satz.** *Das Nullelement ist eindeutig.*

Beweis. Es sei n ein weiteres Element mit $n+x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann $0 = n+0 = 0 + n = n$. □

Genauso beweist man:

2.2. **Satz.** *Das Einselement ist eindeutig.*

2.3. **Satz.** *Das additiv Inverse und das multiplikativ Inverse sind eindeutig.*

Beweis. Zur Abwechslung für die Multiplikation. Sei $x \neq 0$ und sei w ein Element mit $x \cdot w = 1$. Dann

$$w = 1 \cdot w = w \cdot 1 = w \cdot (x \cdot x^{-1}) = (w \cdot x) \cdot x^{-1} = (x \cdot w) \cdot x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}.$$ □

2.4. **Satz.** $0 \cdot x = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis.

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \tag{2.1}$$

Zu $0 \cdot x$ existiert ein additive Inverses, $-0 \cdot x$. Dieses addieren wir zu beiden Seiten von (2.1) und erhalten $0 = 0 \cdot x$. □

Daraus folgt dann

2.5. **Satz.** $(-1) \cdot x = -x$.

Beweis. $(-1) \cdot x + x = (-1 + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$. Also erfüllt $(-1) \cdot x$ die definierende Eigenschaft von $-x$. □

2.6. **Satz.** *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $-(-x) = x$. *Für jedes* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *gelten* $x^{-1} \neq 0$ *und* $(x^{-1})^{-1} = x$.

Beweis. Nur Multiplikation. Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass $x^{-1} = 0$. Dann $1 = x \cdot x^{-1} = x \cdot 0 = 0$. Das widerspricht unseren Axiomen. Also war die Annahme $x^{-1} = 0$ falsch. Das Gegenteil ist dann richtig. (Tertium non datur.)

Es gibt also $z = (x^{-1})^{-1}$ und ist eindeutig bestimmt durch $x^{-1} \cdot z = 1$. x erfüllt diese Gleichung, denn $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$. □

Das Buch von Schichl/Steinbauer empfehlen!

2.7. **Satz.** *Wenn* $x \cdot y = 0$, *dann* $x = 0$ *oder* $y = 0$.

Beweis. Das beweisen wir durch Widerspruch: Wir nehmen an, die linke Seite sei wahr, die rechte aber nicht. Dann $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Folglich gibt es x^{-1} und y^{-1} und wir erhalten

$$0 = (x \cdot y) \cdot (x^{-1} \cdot y^{-1}) = (x \cdot x^{-1}) \cdot (y \cdot y^{-1}) = 1 \cdot 1 \neq 0.$$

Da dies ein Widerspruch ist, trifft es nicht zu, dass die rechte Seite nicht wahr ist. Also ist die rechte Seite wahr. □

Anordnungsaxiome. Es gibt eine Teilmenge P von $\mathbb{R}$, welche die beiden folgenden Axiome erfüllt:

(a) (Trichotomie) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten

$$x \in P, \; x = 0 \text{ oder } -x \in P$$

(b) (Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Multiplikation) Sind x und y in P, dann auch $x + y$ und $x \cdot y$.

Statt $x \in P$ schreibt man $x > 0$, statt $-x \in P$ schreibt man $x < 0$. Ferner schreibt man $x < y$, falls $y - x > 0$, und $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$. Analog definiert man $>$ und $\geq$.

Falls $x > 0$, so heißt x *positiv*, falls $x < 0$, so heißt x *negativ*.

2.8. **Satz.** *Ist* $x < 0$ *und* $y < 0$, *so* $xy > 0$. *Ist* $x > 0$ *und* $y < 0$, *so* $xy < 0$.

2.9. **Satz.** *Ist* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \neq 0$, *so ist* $x^2 > 0$. *Speziell gilt* $1 > 0$.

Beweis. 2 Fälle: $x > 0$ und $x < 0$. □

2.10. **Satz.** *Ist* x *positiv, so auch* x^{-1}. *Ist* x *negativ, so auch* x^{-1}.

Beweis. Angenommen, die Vorzeichen von x und x^{-1} wären verschieden, dann $1 = x \cdot x^{-1} < 0$. Das ist ein Widerspruch. □

2.11. **Satz.** *Falls* $x < y$ *und* $z \in \mathbb{R}$ *beliebig, so gilt* $x + z < y + z$.

2.12. **Satz.** (a) *Falls* $x < y$ *und* $z > 0$, *so gilt* $xz < yz$.
(b) *Falls* $x < y$ *und* $z < 0$, *so gilt* $xz > yz$.

Beweis. (a) $yz - xz = (y - x)z > 0$.
(b) $xz - yz = (x - y)z > 0$. □

2.13. **Satz.** *Ist* $0 < x < y$, *so gilt* $x^2 < y^2$.
Sind umgekehrt x *und* y *beide positiv und ist* $x^2 < y^2$, *so folgt* $x < y$.

Beweis. $x^2 = x \cdot x < x \cdot y < y \cdot y = y^2$.
$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) > 0$. Dann sind entweder beide Faktoren positiv oder beide negativ. Der zweite Fall ist ausgeschlossen. □

Arithmetische Beziehungen, die man durch bloßes Ausrechnen nachweist, wie etwa die binomischen Formeln, werden in der Vorlesung nicht noch einmal bewiesen.

2.14. **Definition.** Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man den *Absolutbetrag* als

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Anschaulich ist der Absolutbetrag von $x - y$ der Abstand zwischen x und y auf der Zahlengeraden.

2.15. **Satz.** *Sind* $x, y \in \mathbb{R}$, *so gilt* $|x \cdot y| = |x||y|$.

Beweis. 4 Fallunterscheidungen. □

2.16. **Satz** (Dreiecksungleichung). *Sind* $x, y \in \mathbb{R}$, *so gilt* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Beweis. Aus der Definition folgt sofort, dass $x \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus erhält man die Behauptung mit zwei Fallunterscheidungen

Fall 1: $|x + y| = x + y$: Dann $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.
Fall 2: $|x + y| = -(x + y)$: Dann $|x + y| = -x - y \leq |x| + |y|$. □

Vollständigkeitsaxiom. Alles, was wir bisher beschrieben haben, kann $\mathbb{Q}$ auch.

2.17. **Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}$. Dann heißt M *nach oben beschränkt,* wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq c$ für alle $x \in M$. Jedes c mit dieser Eigenschaft heißt *obere Schranke* von M.

M heißt *nach unten beschränkt,* wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq d$ für alle $x \in M$. Jedes d mit dieser Eigenschaft heißt *untere Schranke* von M.

M heißt *beschränkt,* wenn es nach oben und unten beschränkt ist.

2.18. *Beispiel.* $M = \{x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 2\}$. Dann ist M beschränkt. Eine Schranke ist $c = \frac{3}{2}$.

Beweis. $x \in M$. Falls $x \leq 0$, so ist $x \leq \frac{3}{2}$ klar. Anderfalls $x^2 \leq 2 < \frac{9}{4}$, also $x < \frac{3}{2}$. □

2.19. **Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}$. Wenn es ein $c \in M$ gibt, welches obere Schranke von M ist, so bezeichnet man c als das *Maximum* von M, in Zeichen $c = \max M$. Dann ist c das größte Element von M. Wenn M ein kleinstes Element hat, so bezeichnet man es als *Minimum* und schreibt $\min M$ dafür.

2.20. **Definition.** Sei $M \subset \mathbb{R}$. Wenn es eine kleinste obere Schranke von M gibt, dann bezeichnet man sie als *Supremum* von M, in Zeichen $\sup M$. Wenn es eine größte untere Schranke gibt, so bezeichnet man sie als *Infimum* von M, in Zeichen $\inf M$.

Beispiel. Sei $M = \left\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$. Dann ist M nach oben und unten beschränkt und besitzt kein Maximum. Ferner: $\sup M = 1$ und $\inf M = \min M = 0$.

2.21. **Satz.** $M \subset \mathbb{R}$ *sei nach oben beschränkt. Für* $c \in \mathbb{R}$ *sind äquivalent:*

(a) $c = \sup M$.
(b) c *ist obere Schranke von* M *und kein* $d < c$ *ist ebenfalls obere Schranke von* M.
(c) *Für alle* $x \in M$ *gilt* $x \le c$ *und für jedes* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $x \in M$ *mit* $x > c - \epsilon$.

Beweis. (a) $\Longrightarrow$ (b): Das Supremum ist nach Definition eine obere Schranke von M. Da es die kleinste ist, kann kein kleineres d ebenfalls obere Schranke sein.

(b) $\Longrightarrow$ (c): c ist obere Schranke, also $x \le c$ für alle $x \in M$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Setze $d = c - epsilon < c$. Nach Voraussetzung (b) ist d keine obere Schranke. Es existiert daher $x \in M$ mit $x > d = c - \epsilon$.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Es ist zu zeigen dass c die kleinste obere Schranke von M ist. Da $x \le c$ für alle $x \in M$ ist c jedenfalls eine obere Schranke.

Als Widerspruchsannahme nehmen wir an, es gebe eine kleinere obere Schranke $d < c$. Setze $\epsilon = c - d$. Dann $\epsilon > 0$, also gibt es nach Voraussetzung (c) ein $x \in M$ mit $x > c - \epsilon = d$. Dann ist d keine obere Schranke. □

2.22. **Vollständigkeitsaxiom.** Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Supremum.

Das Vollständigkeitsaxiom wird oft auch als Supremumsaxiom bezeichnet.

2.23. *Bemerkung.* $M \subset \mathbb{R}$ sei nach oben beschränkt. M besitzt genau dann ein Maximum, wenn $\sup M \in M$. In diesem Fall $\max M = \sup M$. Die analoge Aussage für das Minimum gilt ebenfalls.

2.24. **Satz.** *Zu jedem* $a > 0$ *existiert genau ein* $b > 0$ *mit* $b^2 = a$.

Dieses b *heißt Quadratwurzel von* a*, in Zeichen* $b = \sqrt{a}$.

Beweis. $M = \{x; x^2 \le a\}$ ist beschränkt. Das zeigt man genau wie in Beispiel 2.18. Aus dem Vollständigkeitsaxiom erhalten wir die Existenz von $b = \sup M$. Wir müssen zeigen, dass $b^2 = a$. Wegen $0 \in M$ gilt jedenfalls $b \ge 0$.

Erste Widerspruchsannahme: $b^2 > a$. Dann setze

$$c = b - \delta \quad \text{für} \quad \delta = \frac{b^2 - a}{2b}$$

Es gelten $c < b$ und

$$c^2 = (b - \delta)^2 = b^2 - 2\delta b + \delta^2 > b^2 - 2\delta b = a.$$

Wegen Satz 2.21 ist dann auch c eine obere Schranke von M. Also war b nicht die kleinste, also nicht das Supremum.

Zweite Widerspruchsannahme: $b^2 < a$. Nun setze

$$d = b + \epsilon \quad \text{für} \quad \epsilon = \min(1, \frac{1}{2b+1}(a - b^2)).$$

Dann $d > b$ und

$$d^2 = (b+\epsilon)^2 = b^2 + 2b\epsilon + \epsilon^2 \leq b^2 + \epsilon \cdot (2b+1) \leq a.$$

Unter dieser Annahme wäre b überhaupt keine obere Schranke für M.

Diese beiden Widersprüche zeige $b^2 = a$. Damit ist die Existenz von b nachgewiesen. Es fehlt noch die Eindeutigkeit. Sei dazu $b' > 0$ gegeben mit $b'^2 = a$. Dann

$$0 = b^2 - b'^2 = (b - b')(b + b').$$

Nun folgt $b = b'$ oder $b = -b'$. Der zweite Fall kann nicht eintreten, denn dann wäre $b' < 0$. $\square$

2.25. **Satz.** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. Widerspruchsannahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei der Bruch gekürzt sein soll. Dann $2q^2 = p^2$. Also ist p gerade. Dann ist aber p^2 durch 4 teilbar. Daher ist q^2 durch 2 teilbar. Das geht nur, wenn q durch 2 teilbar ist. Das ist ein Widerspruch, denn der Bruch war gekürzt. $\square$

2.26. **Definition.** Wir definieren die folgenden *Intervalle:*

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}.
\end{aligned}$$