1. Warum die Ableitung?

2. Funktionen, Schranken und Grenzen

Definition 2.1. *Sei D eine Menge von reellen Zahlen. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Funktion (einer reellen Variablen), wenn f jedem Element x von D genau eine reelle Zahl f(x) zuweist. D heißt Definitionsmenge von f, und die Menge $f(D) = \{f(x)|x \in D\}$ heißt Wertemenge von f.*

Beispiel 2.2. *Die Funktion*

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ x+1, -1 < x \leq 0, \\ 1-x, 0 < x \leq 1, \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

hat die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und die Wertemenge $[0,1] = \{x|0 \leq x \leq 1\}$.

Skizze

Notation: Wir verwenden abgeschlossene Intervalle $[a,b] = \{x|a \leq x \leq b\}$, offene Intervalle $(a,b) = \{x|a < x < b\}$ und halboffene Intervalle $[a,b) = \{x|a \leq x < b\}$ und $(a,b] = \{x|a < x \leq b\}$. $x \in A$ (alternativ $A \ni x$) bedeutet, dass x ein Element der Menge A ist. $a < x \leq b$ ist demzufolge äquivalent zu $x \in (a,b]$. $x \mapsto f(x)$ liest sich "x bildet auf f(x) ab".

Definition 2.3. *Besitzt eine Funktion einer reellen Variablen $f : D \to \mathbb{R}$ für jedes $y \in f(D)$ genau ein $x \in D$ so dass $f(x) = y$, so heißt f eineindeutig bzw. invertierbar. In diesem Fall heißt $g : f(D) \to D, y = f(x) \mapsto g(y) = x$ die Umkehrfunktion von f, bezeichnet mit f^{-1}*

Achtung: $f^{-1} \neq 1/f$

Beispiel 2.4. *1. Die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$ ist nicht eineindeutig.*

2. Die Funktion$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$ ist eineindeutig, und die Umkehrfunktion ist $f^{-1} : [0,1] \to [0,1], f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

3.

$$f(x) = \frac{24}{\pi} \cos^{-1} \left(-\tan x \frac{\sin 0.41 \cos(2\pi T/365)}{\sqrt{1 - \sin^2 0.41 \cos^2(\frac{2\pi T}{365})}} \right)$$

zeigt die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang als Funktion von x = Breitengrad an. Hier ist der Parameter T die Anzahl der Tage seit dem 21.6. Überlege, ob f invertierbar ist. Falls ja, könnten man durch Messen der Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang *und Sonnenuntergang den Breitengrad bestimmen, an dem man sich befindet.*

Definition 2.5 (Monotone Funktion)**.** *Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt monoton (wachsend), falls sie für alle $s, t \in D$*

$$s \leq t \Rightarrow f(s) \leq f(t)$$

erfüllt. Falls für alle $s, t \in D$

$$s < t \Rightarrow f(s) < f(t),$$

nennen wir f strikt monoton (wachsend). Die Funktion heißt monoton fallend (strikt monoton fallend), wenn $-f$ monoton wachsend (strikt monoton wachsend) ist.

Definition 2.6 (Konvexe Funktion)**.** *Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls*

$$\text{für alle } x, y \in (a, b) \text{ und alle } t \in [0, 1]$$

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

erfüllt. Wenn

$$\text{für alle } x, y \in (a, b) \text{ und alle } t \in (0, 1)$$

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y),$$

nennen wir f strikt konvex. Die Funktion f heißt konkav (strikt konkav), wenn $-f$ konvex (strikt konvex) ist.

Definition 2.7 (Schranken)**.** *Sei A eine Menge reeller Zahlen. Falls es eine reelle Zahl M gibt, so dass für alle $x \in A$*

$$x \leq M,$$

so nennen wir M eine obere Schranke der Menge A. Falls es eine reelle Zahl m gibt, so dass für alle $x \in A$

$$x \geq m,$$

so nennen wir m eine untere Schranke der Menge A. In dem Falle, dass sowohl eine obere als auch untere Schranke der Menge A existieren, nennen wir A beschränkt. Eine nicht beschränkte Menge heißt unbeschränkt.

Falls A beschränkt und gleichzeitig die Wertemenge einer Funktion f ist, d.h. $A = f(D)$, so nennen wir die Funktion f ebenfalls beschränkt.

Beispiel 2.8. *1. Die Menge* $(-\infty, 1)$ *hat unendlich viele obere Schranken: jedes* $x \geq 1$ *ist eine obere Schranke. Die Menge besitzt jedoch keine untere Schranke und ist daher unbeschränkt.*

2. Die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

ist unbeschränkt.

Definition 2.9 (Maxima und Minima)**.** *Sei* A *eine Menge reeller Zahlen. Falls es eine reelle Zahl* $M \in A$ *gibt, so dass für alle* $x \in A$

$$x \leq M,$$

so nennen wir M *Maximum der Menge* A*. Falls es eine reelle Zahl* $m \in A$ *gibt, so dass für alle* $x \in A$

$$x \geq m,$$

so nennen wir m *Minimum der Menge* A*.*

Falls A *gleichzeitig die Wertemenge einer Funktion* f *ist, d.h.* $A = f(D)$*, so nennen wir* M *das Maximum der Funktion (*m *das Minimum der Funktion). Wir schreiben dann* $M = \max_D f$ *bzw.* $m = \min_D f$*.*

Beispiel 2.10. *1. Die Menge* $(0, 1]$ *hat das Maximum* 1*, sie besitzt jedoch kein Minimum.*

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0, x \leq -1 \\ x + 1, -1 < x < 0 \\ 0, x = 0 \\ 1 - x, 0 < x \leq 1 \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

hat das Minimum 0*, aber sie besitzt kein Maximum.*

Definition 2.11 (Grenzen)**.** *Sei* A *eine von oben beschränkte Menge reeller Zahlen. Falls eine kleinste obere Schranke* S *von* A *existiert, d.h. ein Minimum* S *der Menge*

$$B := \{M | M \text{ ist obere Schranke von } A\},$$

dann nennen wir S *obere Grenze bzw. Supremum der Menge* A*. Wir schreiben dann* $S = \sup A$*. Falls* A *gleichzeitig die Wertemenge einer Funktion* f *ist, so nennen wir* S *obere Grenze bzw. Supremum von* f *und schreiben* $S = \sup_D f$*. Sei* A *eine von unten beschränkte Menge reeller Zahlen. Falls eine größte untere Schranke* s *von* A *existiert, d.h. ein Maximum* s *der Menge*

$$B := \{m | m \text{ ist untere Schranke von } A\},$$

dann nennen wir s untere Grenze bzw. Infimum der Menge A. Wir schreiben dann $S = \inf A$. *Falls A gleichzeitig die Wertemenge einer Funktion f ist, so nennen wir s untere Grenze bzw. Infimum von f und schreiben* $S = \inf_D f$.

Beispiel 2.12. *1. Die Menge* $\{\frac{1}{n}|n = 1, 2, \dots\}$ *hat die obere Grenze* 1 *und die untere Grenze* 0.

2. Die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ *hat die untere Grenze* 0*, aber keine obere Grenze.*

3. Limes, Eigenschaften reeller Zahlen und Stetigkeit

Definition 3.1 (Folgen)**.** *Eine Abbildung, welche jedem* n, $n = 1, 2, \dots,$ *genau eine reelle Zahl* a_n *zuweist, heißt reelle Zahlenfolge oder einfach Folge. Wir bezeichnen sie mit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition 3.2 (Konvergenz)**.** *Die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt konvergent, wenn es eine reelle Zahl* a *und zu jedem* $\epsilon > 0$ *eine natürliche Zahl* $N < +\infty$ *gibt, so dass für alle* $n \geq N$

$$|a - a_n| \leq \epsilon$$

ist. Die Zahl a *heißt Limes der Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Wir schreiben* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *oder alternativ*

$$a_n \to a \,,\; n \to \infty.$$

Jede nicht konvergente Folge heißt divergent.

Beispiel 3.3. $a_n = \frac{\sin n}{n}$ *konvergiert gegen den Limes* 0.

Axiom 3.4 (Eigenschaften reeller Zahlen)**.** *1. Stetigkeit der reellen Zahlen: Jede beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine obere und untere Grenze.*
2. Jede beschränkte monotone Folge konvergiert, d.h. wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt ist und für alle* $n = 1, 2, \dots$

$$a_n \leq a_{n+1}$$

gilt, dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Satz von Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge, d.h. es existiert eine Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, *so dass* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert.*

Beispiel 3.5. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ *hat die konvergente Teilfolge* a_{2n}, *welche gegen* 1 *konvergiert.*

Beispiel 3.6. *Zeige, dass für jedes* $0 < a < 1$ *die Folge* $a_n = a^n$ *gegen* 0 *konvergiert. Lösung: Da* $a^n \geq 0$ *und* $a^{n+1} = aa^n \leq a^n$*, gilt nach Axiom 2*

$$a^n \to b \geq 0\,,\ n \to \infty.$$

Nehmen wir nun an, dass $b > 0$ *ist, so erhalten wir für genügend großes* n*, dass*

$$a^n < b + \frac{b(1-a)}{a}$$

und somit, dass

$$a^{n+1} = aa^n < a(b + \frac{b(1-a)}{a}) = b,$$

ein Widerspruch.

Definition 3.7 (Limes von Funktionen)**.** *Falls* $F \in \mathbb{R}$ *existiert, so dass für jede Zahlenfolge* $D \setminus \{a\} \ni a_n \to a \in \mathbb{R}\,,\ n \to \infty$

$$f(a_n) \to F\,,\ n \to \infty$$

gilt, so sagen wir, dass die Funktion f *für* $x \to a$ *gegen den Limes* F *konvergiert. Wir schreiben* $\lim_{x\to a} f = F$*. Hier ist* $D \setminus A = \{x | x \in D$ *und* $x \notin A\}$ *die Differenzmenge.*

Beispiel 3.8.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x = 0 \\ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} < 1 \end{cases}$$

konvergiert für $x \to 0$ *gegen den Limes* 0*: Für* $a_n \in (-1,1) \setminus \{0\}$ *gilt* $|f(a_n)| \leq |a_n| \to 0\,,\ n \to \infty.$

Beispiel 3.9.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$$

konvergiert nicht für $x \to 0$*: Da* $f(\frac{1}{n}) = 1\,,\ f(-\frac{1}{n}) = 0$*, gibt es zwei gegen* 0 *konvergierende Punktfolgen, für die die Werte von* f *gegen verschiedene Limes konvergieren.*

Definition 3.10 (Stetigkeit von Funktionen)**.** *Erfüllt die Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *für ein* $x_0 \in D$

$$\lim_{x\to x_0} f = f(x_0),$$

so sagen wir, f *ist stetig im Punkt* x_0*. Ist* f *in jedem Punkt von* D *stetig, so sagen wir,* f *ist stetig auf* D*.*

Beispiel 3.11. *Ist* $-\infty < a < b < +\infty$ *und gibt es ein* $C < +\infty$ *so dass für alle* $x, y \in [a, b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|,$$

so ist f *stetig auf* $[a, b]$.

Lemma 3.12. *1. Existiert der Limes einer Folge, so ist dieser eindeutig.*
2. Konvergierende Folgen sind beschränkt.

Beweis: 1. Sei $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to+\infty} a_n = b$. Dann gilt $|a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \to 0$, $n \to \infty$.
2. Wenn $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, so gilt für $n \geq N$

$$|a_n - a| \leq 1.$$

Folglich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq 1 + a + \max_{j<N} |a_j|.$$

□

Satz 3.13. *Wenn* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \lim_{n\to+\infty} b_n = b$ *und wenn* $c \in \mathbb{R}$ *eine Konstante ist, dann gilt:*
1. $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim_{n\to+\infty}(ca_n) = ca$
3. $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = ab$
4. Falls außerdem $a \neq 0$ *und* $a_n \neq 0$*, dann gilt auch noch* $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}$.

Beweis der 3. Aussage: Laut Lemma 3.12 ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Folglich gilt $|a_n b_n - ab| \leq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| \leq C|b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0, n \to +\infty$. □

Satz 3.14. *Wenn* $\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \lim_{x\to x_0} g(x) = b$*, und wenn* $c \in \mathbb{R}$ *eine Konstante ist, dann gilt:*
1. $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = a + b$
2. $\lim_{x\to x_0}(cf(x)) = ca$
3. $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = ab$
4. Falls außerdem $a \neq 0$*, dann gilt auch noch* $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{b}{a}$
Hierbei ist jedoch zu beachten, dass der Definitionsbereich von g/f

$$D_{\frac{g}{f}} := D_f \cap D_g \cap \{x | f(x) \neq 0\}$$

ist.

Korollar 3.15. *Wenn* $c \in \mathbb{R}$ *eine Konstante ist und* f, g *in* x_0 *stetig sind, dann sind auch* $f + g, cf, fg$ *in* x_0 *stetig. Falls außerdem* $f(x_0) \neq 0$*, dann ist auch noch* g/f *in* x_0 *stetig.*

Lemma 3.16. *Wenn die Wertemenge der Funktion f in der Definitionsmenge der Funktion g enthalten ist und weiter f in x_0 stetig und g in $f(x_0)$ stetig ist, dann ist die Verkettung $g \circ f, x \mapsto g(f(x))$ ebenfalls in x_0 stetig.*

Definition 3.17 (Konvergenz gegen $+\infty, -\infty$)**.** *Wenn es für jedes $M < +\infty$ ein $N < \infty$ gibt, so dass für alle $n \geq N$*

$$a_n \geq M,$$

so schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, obwohl $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht im eigentlichen Sinn konvergiert.

Theorem 3.18 (Zwischenwertsatz)**.** *Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig, so gibt es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ so dass $f(x) = y$ ist.*

Beweis: Es reicht aus, die Aussage für den Fall $f(a) < f(b)$ zu beweisen.
Zunächst folgt aus $f(a) \geq y$, dass

$$f(a) = y,$$

und in diesem Fall ist der Beweis erbracht. Analog folgt aus $f(b) \leq y$, dass

$$f(b) = y,$$

und in diesem Fall ist der Beweis erbracht. Wir müssen also die Aussage nur im Fall $f(a) < y < f(b)$ beweisen. Sei dazu $S := \sup\{x \in [a, b] | f(x) \leq y\}$. Es folgt, dass $S \in [a, b)$. Aufgrund der Definition der oberen Grenze ist S eine obere Schranke der Menge $A = \{x \in [a, b] | f(x) \leq y\}$, aber $S - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke derselben Menge. Also existiert $x_n \in (S - \frac{1}{n}, S] \cap A$. Mit Hilfe der Stetigkeit von f erhalten wir

$$f(S) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq y.$$

Andererseits folgt aus der Definition von S sowie der Tatsache dass $S < b$ ist, dass

$$f(S + \frac{b - S}{n}) > y.$$

Mit Hilfe der Stetigkeit von f erhalten wir

$$f(S) = \lim_{n\to\infty} f(S + \frac{b - S}{n}) \geq y.$$

□

Theorem 3.19 (Existenz von Maximum und Minimum). *Wenn* $-\infty < a < b < +\infty$ *und* f *eine stetige Funktion auf* $[a,b]$ *ist, dann nimmt* f *sein Maximum und Minimum auf* $[a,b]$ *an, d.h. es gibt* $x_m, x_M \in [a,b]$, *so dass*

$$f(x_m) = \min_{[a,b]} f, f(x_M) = \max_{[a,b]} f.$$

Beweis: Es genügt, die Aussage für den Fall des Maximums zu beweisen.
Zunächst gibt es aufgrund der Definition des Supremums eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ so dass $f(x_n) \to \sup_{[a,b]} f \in (-\infty, +\infty], n \to +\infty$. Laut Axiom 3 existiert eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x, k \to \infty$. Da $x \in [a,b]$ ist, erhalten wir aus der Stetigkeit von f dass $f(x_{n_k}) \to f(x), k \to \infty$. Andererseits galt $f(x_n) \to \sup_{[a,b]} f$, so dass $\sup_{[a,b]} f = f(x) \in \mathbb{R}$. Wir setzen $x_M := x$. □

4. Die Ableitung

Definition 4.1 (Ableitung). *Falls* f *in einem offenen Intervall um* x_0 *definiert ist und der Limes*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert, so sagen wir, f *ist in* x_0 differenzierbar. *Den Limes nennen wir Ableitung in* x_0 *und schreiben* $f'(x_0)$.

Motivation: 1. Klassische Motivation: Ein Auto bewegt sich 3 Stunden auf einer Straße. Nach t Stunden hat es $f(t) = 20t^2$ Kilometer gefahren, also nach einer Stunde 20 Kilometer, nach 2 Stunden 80 Kilometer und nach 3 Stunden 180 Kilometer. Die mittlere Geschwindigkeit in der ersten Stunde ist 20 km/h, die mittlere Geschwindigkeit in der zweiten Stunde ist 60 km/h, und mittlere Geschwindigkeit in der dritten Stunde ist 100 km/h. Was ist die Geschwindigkeit nach 3 Stunden? Die mittlere Geschwindigkeit in der Zeitspanne von t bis $t+h$ ist $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{20}{h}(2th + h^2) = 40t + 20h$. Um die Geschwindigkeit im Zeitpunkt t zu bestimmen, machen wir das h kleiner und kleiner. Dabei konvergiert die mittlere Geschwindigkeit gegen $40t$. Die Geschwindigkeit nach 3 Stunden ist also 120 km/h.

2. Moderne Motivation: Die Ableitung ermöglicht es, eine komplizierte Funktion in der Nähe eines Punktes durch eine einfache Funktion, nämlich eine Gerade, zu ersetzen.

Satz 4.2. *Sei* c *eine reelle Konstante und seien* f, g *beide in* x_0 *differenzierbar. Dann sind auch* $f+g, cf, fg$ *in* x_0 *differenzierbar, und es* *gilt*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), (cf)'(x_0) = cf'(x_0),$$
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Falls außerdem $f(x_0) \neq 0$, dann ist auch noch g/f in x_0 in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\frac{g}{f})'(x_0) = \frac{g'(x_0)f(x_0) - g(x_0)f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

Beweis für den Fall des Produkts:

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0+h) + f(x_0)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}.$$

Da g in x_0 stetig ist, konvergiert die rechte Seite für $h \to 0$ gegen $f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$. □

Theorem 4.3. *Sei f in x_0 differenzierbar und sei g in $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Verkettung $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Beweis: Setze

$$\tilde{h} := \begin{cases} f(x_0+h) - f(x_0), f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0, \\ h, f(x_0+h) - f(x_0) = 0. \end{cases}$$

Dann gilt $\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0)+\tilde{h})-g(f(x_0))}{\tilde{h}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Aufgrund der Stetigkeit von f konvergiert für $h \to 0$

$$\tilde{h} \to 0.$$

Daher konvergiert $\frac{g(f(x_0+h))-g(f(x_0))}{h} = \frac{g(f(x_0)+\tilde{h})-g(f(x_0))}{\tilde{h}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für $h \to 0$ gegen $g'(f(x_0))f'(x_0)$. □

Theorem 4.4 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertierbar und die Umkehrfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in y_0. Wenn außerdem g in $f(y_0)$ differenzierbar ist und $g'(f(y_0)) \neq 0$, dann ist auch f in y_0 differenzierbar, und es gilt*

$$f'(y_0) = \frac{1}{g'(f(y_0))}.$$

Beweis: Mit $\tilde{h} := f(y_0+h) - f(y_0)$ gilt

$$1 = \frac{g(f(y_0+h)) - g(f(y_0))}{h} = \frac{g(f(y_0)+\tilde{h}) - g(f(y_0))}{\tilde{h}} \frac{f(y_0+h) - f(y_0)}{h}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Funktion f gilt für $h \to 0$ auch $\tilde{h} \to 0$. Es folgt $\frac{1}{\frac{g(f(y_0)+\tilde{h})-g(f(y_0))}{\tilde{h}}} \to \frac{1}{g'(f(y_0))}$, $h \to 0$. $\square$

Definition 4.5. *Wenn f in jedem Punkt des offenen Intervalls (a,b) differenzierbar ist und f' im Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist, so sagen wir, f ist zweimal differenzierbar in x_0 und bezeichnen wir die zweite Ableitung mit $f''(x_0)$.*

Wenn f auf analoge Weise n mal differenzierbar im Punkt x_0 ist, so bezeichnen wir die $n$te Ableitung mit $f^{(n)}(x_0)$.

Ist f in jedem Punkt des Intervalls (a,b)
$n$mal differenzierbar und ist $f^{(n)}$ stetig auf (a,b), so sagen wir, f ist auf (a,b)
$n$mal stetig differenzierbar und schreiben $f \in C^n((a,b))$.

Ist $f \in C^n((a,b))$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so sagen wir $f \in C^\infty((a,b))$.

Beispiel 4.6. *1. Jedes Polynom ist $\in C^\infty((a,b))$.*
2. $\sin x, e^x \in C^\infty((a,b))$.
3.

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

ist in jedem reellen Punkt differenzierbar, aber nicht in $C^1((a,b))$.

5. Satz von Rolle und Mittelwertsatz

Theorem 5.1 (Satz von Rolle)**.** *Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist und außerdem $f(a) = f(b)$ gilt, dann gibt es ein $c \in (a,b)$ so dass $f'(c) = 0$.*

Beweis: Nach Theorem 3.19 nimmt f sein Supremum und Infimum auf $[a,b]$ an. Falls $\max_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f = f(a)$ ist, so erfüllt jedes $c \in (a,b)$ die Aussage des Theorems.

Ansonsten können wir annehmen, dass $f(x_0) = \max_{[a,b]} f > f(a) = f(b)$ (im Fall $\min_{[a,b]} f < f(a)$ arbeiten wir mit $-f$). Im Folgenden zeigen wir, dass $c := x_0$ die Aussage des Theorems erfüllt: Für $h > 0$ ist $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$, und für $h < 0$ ist $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$. Aus den beiden Ungleichungen folgt $f'(x_0) = 0$. $\square$

Theorem 5.2 (Mittelwertsatz)**.** *Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist, dann gibt es ein $c \in (a,b)$ so dass $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.*

Beweis: Wende den Satz von Rolle auf $g(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ an. $\square$

Korollar 5.3. *Ist f auf (a, b) differenzierbar, dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent: 1. f ist monoton wachsend auf (a, b). 2. Für alle $x \in (a, b)$ ist $f'(x) \geq 0$.*

Beweis: Wenn f monoton wachsend auf (a, b) ist, dann gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes $x \in (a, b)$ und jedes genügend kleine $h > 0$. Es folgt $f'(x) \geq 0$. Wenn wir umgekehrt $f(x_1) > f(x_2), a < x_1 < x_2 < b$ annehmen, so folgt aufgrund des Mittelwertsatzes, dass ein $c \in (x_1, x_2)$ existiert, so dass $f'(c) < 0$. Dies ist ein Widerspruch zu 2, so dass die Richtung $\Leftarrow$ ebenfalls gezeigt ist. □

6. Taylorentwicklung

Die Idee der Ableitung war, f in der Nähe eines Punktes x_0 durch die affin lineare Funktion/das Polynom ersten Grades $a_0 + a_1(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ zu approximieren. Als Nächstes betrachten wir eine Approximation höherer Ordnung, nämlich eine Approximation durch das Polynom $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$. In dem Falle, dass $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ ist, gilt $f(x_0) = a_0, f'(x_0) = a_1, f''(x_0) = 2a_2, f'''(x_0) = 6a_3, \ldots$. Eine "gute Approximation" sollte also $a_k = \frac{f^{(k)}}{k!}$ erfüllen.

Theorem 6.1 (Der Satz von Taylor)**.** *Ist die Funktion f auf (a_1, b_1) für ein $n = 1, 2, 3, \ldots$ n mal differenzierbar und ist $a_1 < a < b < b_1$, so gibt es ein $c \in (a, b)$ so dass*

$$f(b) =$$

$$f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

ist. $f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}$ heißt Taylorjet, und das Restglied $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$ bezeichnen wir mit R_n

Beweis: Mit

$$R := f(b) - (f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1})$$

gilt für

$$g(x) := f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + R\frac{(b-x)^n}{(b-a)^n}$$

$g(b) = f(b) = g(a)$. Also können wir den Satz von Rolle anwenden und erhalten ein $c \in (a,b)$, so dass

$$0 = g'(c) = f'(c)+[f''(c)(b-c)-f'(c)]+[\frac{f'''(c)}{2}(b-c)^2-\frac{f''(c)}{2}2(b-c)]+\dots$$
$$+[\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(n-1)(b-c)^{n-2}] - R\frac{n(b-c)^{n-1}}{(b-a)^n}$$
$$= \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} - R\frac{n(b-c)^{n-1}}{(b-a)^n}.$$

□

Folgerungen aus dem Satz von Taylor:

Korollar 6.2. *Wenn $f \in C^2((a,b))$ und $\min_{(a,b)} f = f(m), a < m < b$, dann folgt $f'(m) = 0$ und $f''(m) \geq 0$.*

Beweis: Laut Satz von Taylor gibt es ein $c \in (m, m+\frac{1}{n})$, so dass $f(m+\frac{1}{n}) = f(m)+f'(m)\frac{1}{n}+\frac{f''(c)}{2}(\frac{1}{n})^2$. Andererseits ist $f(m) \leq f(m+\frac{1}{n})$ und (siehe den Beweis des Satzes von Rolle) $f'(m) = 0$. Wir erhalten also $f''(c) \geq 0$. Lassen wir $n \to \infty$, so impliziert die Stetigkeit von f'' auch, dass $f''(m) \geq 0$. □

Damit der Taylorjet eine gute Approximation liefert, muss das Restglied R_n klein werden.

Beispiel 6.3. *Sei $f(x) = e^x$ und $a = 0$. Aufgrund des Satzes von Taylor erhalten wir $f(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^c$. Für festes x und $R := |x|+1$ gilt nun $\frac{|x|^n}{n!}e^c \leq e^R\frac{R}{n}\prod_{k<\min(R,n)}\frac{R}{k} \leq e^R R^R \frac{x}{n}$ für $n > R$, so dass $f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{x^j}{j!}$. Dieser Taylorjet der Exponentialfunktion wird auch zur numerischen Auswertung der Exponentialfunktion verwendet.*

Achtung: $R_n \to 0, n \to \infty$ gilt nicht für alle C^∞-Funktionen (siehe Übungsaufgabe). Mit dem Beispiel der Exponentialfunktion haben wir auch das Folgende gezeigt:

Korollar 6.4. *Wenn $f \in C^\infty((a_1,b_1)), M < \infty$ ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ $\sup_{(a,b)}|f^{(n)}| \leq M^n$ gilt, dann konvergiert der Taylorjet für $n \to \infty$, d.h.*

$$R_n \to 0, n \to \infty.$$

Satz 6.5. *Für $f \in C^2(\mathbb{R})$ sind die folgenden drei Eigenschaften äquivalent:*
1. *f ist konvex.*
2. *f' ist monoton wachsend.*
3. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f''(x) \geq 0$.*

Beweis: Zunächst gilt für alle $x < y \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0,1]$ aufgrund des Mittelwertsatzes, dass

$$\begin{aligned}(1) \qquad & f(tx+(1-t)y) - tf(x) - (1-t)f(y) \\ &= t[f(tx+(1-t)y) - f(x)] + (1-t)[f(tx+(1-t)y) - f(y)] \\ &= t(1-t)(y-x)f'(c) - (1-t)t(y-x)f'(d) \\ &= t(1-t)(y-x)(c-d)f''(e).\end{aligned}$$

Hier sind c, d, e reelle Zahlen mit der Eigenschaft $x < c < e < d < y$.
Wenn wir nun 2. annehmen, so folgt mit (1) 1.
Wenn wir 1. annehmen, $t := \frac{1}{2}$ setzen und durch $(y-x)(c-d)$ teilen, so erhalten wir für $y \to x$, dass $e \to x$, und wir erhalten 3. mit (1).
Als Letztes nehmen wir 3. an und erhalten 2. aus Korollar 5.3.
Also haben wir 2. $\Rightarrow$ 1. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 2. bewiesen. □

Satz 6.6. *Für jede konvexe Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

Beweis: Nach dem Satz von Taylor sowie dem gerade bewiesenen Korollar ist

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + f''(c)\frac{(y-x)^2}{2} \geq f(x) + f'(x)(y-x).$$

□

7. Der Satz von L'Hôpital

Lemma 7.1. *Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Wenn außerdem $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ ist, so gibt es ein $c \in (a,b)$ so dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Beweis: Wir wenden den Saty von Rolle auf die Funktion

$$\phi(x) := (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a))$$

an und erhalten ein $c \in (a,b)$ so dass

$$0 = \phi'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c).$$

Die Annahme $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ impliziert nun mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $g(b) - g(a) \neq 0$, so dass wir durch $g(b) - g(a)$ teilen können. □

Theorem 7.2 (Der Satz von L'Hôpital)**.** *Seien* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *auf* (a,b) *stetig und auf* $(a,b) \setminus \{c\}$ *differenzierbar. Des Weiteren gelte* $c \in (a,b)$, $f(c) = g(c) = 0$, *und* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a,b) \setminus \{c\}$. *Wenn nun* $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert, so existiert auch* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, *und es gilt*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beweis: Laut Lemma 7.1 gibt es für jedes $x \in (a,b) \setminus \{c\}$ ein $d \in (x,c) \cup (c,x)$ so dass

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(d)}{g'(d)}.$$

Da nun für $x \to c$ auch $d \to c$, erhalten wir mit Hilfe der Annahme $g'(x) \neq 0$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$\square$

Beispiel 7.3. *Berechne*

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} :$$

Zunächst ist $(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x}\log(\frac{1+x}{1-x}))$. *Setzen wir* $f(x) := \log(\frac{1+x}{1-x})$ *und* $g(x) = x$, *so gilt* $f'(x) = \frac{2}{(1+x)(1-x)} \to 2, x \to 0$ *sowie* $g'(0) = 1$. *Also sind die Voraussetzungen des Satzes von L'Hôpital erfüllt und wir erhalten* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(\frac{1+x}{1-x}) = 2$ *und* $\lim_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-x})^{\frac{1}{x}} = e^2$.

8. Spezielle Funktionen

8.1. **Exponentialfunktionen.** Zunächst ist für jede natürliche Zahl $p \geq 1$ die Funktion $f(x) = x^p$ auf $[0, +\infty)$ strikt monoton wachsend und demzufolge auch invertierbar. Da $f(0) = 0$ ist und $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, gibt es außerdem laut Zwischenwertsatz zu jedem $a > 0$ und $q \in \mathbb{Z}$ ein $\xi > 0$ so dass $\xi^p = a^q$ ist. Das ξ ist aufgrund der Invertierbarkeit des f eindeutig. Für jede rationale Zahl $r = q/p$ setzen wir nun $a^r := \xi$. Dies ist wohldefiniert: In dem Falle dass $p/q = \tilde{p}/\tilde{q}$ ist, setzen wir $n := p\tilde{q} = \tilde{p}q$ und erhalten aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit von $\xi^n = a^{q\tilde{q}}$, dass der Wert a^r nicht von der Darstellung der rationalen Zahl r abhängt.

Lemma 8.1. *Für $a, b > 0, r, s \in \mathbb{Q}$ gelten die folgenden Rechenregeln:*
1. $a^r a^s = a^{r+s}$
2. $(a^r)^s = a^{rs}$
3. $(ab)^r = a^r b^r$
4. Für $a > 1, r > 0$ *gilt* $a^r > 1$. *Für* $0 < a < 1, r > 0$ *gilt* $a^r < 1$.

Beweis: Übungsaufgabe 20.
Nun definieren wir für $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$ und eine monoton wachsende Folge $r_n \to x$

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Der Limes existiert, da nach obigem Lemma

$$a^{r_{n+1}} = a^{r_n} a^{r_{n+1}-r_n} \geq a^{r_n}$$

und $a^{r_n} \leq a^{r_{n_0}+1}$, wobei n_0 so gewählt ist, dass $|r_{n_0} - x| \leq 1/2$. Der Limes hängt nicht von der Auswahl der Folge ab: Nehmen wir eine zweite monoton wachsende Folge $s_n \to x$, so gilt

$$r_n \leq s_{k_n} \leq r_{m_n}$$

und

$$a^{r_n} \leq a^{s_{k_n}} \leq a^{r_{m_n}},$$

so dass für $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_{k_n}} = \lim_{n\to\infty} a^{r_{m_n}}.$$

Analog definieren wir für $0 < a < 1$, $x \in \mathbb{R}$ und eine monoton fallende Folge $r_n \to x$

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Wie oben erhält man Existenz und Eindeutigkeit des Limes.

Durch Übergang zum Limes in Lemma 8.1 (wobei man für 2. zunächst y rational wählt und $r_n \to x$ gehen lässt und anschließend $s_n \to y$ gehen lässt) folgt auch

Lemma 8.2. *Für $a, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Rechenregeln:*
1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. Für $a > 1, x > 0$ *gilt* $a^x > 1$. *Für* $0 < a < 1, x > 0$ *gilt* $a^x < 1$.

Eine Folge aus 4. ist, dass für $a > 1$

$$f(x) = a^x$$

strikt monoton wachsend (und damit invertierbar) ist und

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

gilt, während für $0 < a < 1$

$$f(x) = a^x$$

strikt monoton fallend (und damit invertierbar) ist und

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

gilt.

Lemma 8.3 (Musterlösung der Aufgabe 23)**.** *Für $a > 1$ ist $f(x) = a^x$ stetig auf $\mathbb{R}$.*

Beweis: Zunächst ist $a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$, so dass es genügt,

$$\lim_{h\to 0} a^h = 1$$

zu zeigen. Da für jede Folge $h_k \to 0, k \to \infty$

$$n_k \to \infty, k \to \infty$$

existiert, so dass

$$-\frac{1}{n_k} \leq h \leq \frac{1}{n_k} (\text{und damit auch } a^{-\frac{1}{n_k}} \leq a^h \leq a^{\frac{1}{n_k}}),$$

genügt es nun,

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

zu zeigen. Dazu beachten wir, dass $a^{\frac{1}{n}} \geq 1$ ist und schreiben $a^{\frac{1}{n}} = 1+b_n$, wo $b_n \geq 0$. Es folgt, dass

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n \geq nb_n,$$

so dass

$$0 \leq b_n \leq \frac{a}{n} \to 0, n \to \infty.$$

Also gilt $a^{\frac{1}{n}} = 1 + b_n \to 1, n \to \infty$. □

8.2. **Das Prinzip der vollständigen Induktion.** Das Prinzip der vollständigen Induktion, um eine Aussage für alle natürlichen Zahlen n zu zeigen, besteht darin, es für die kleinste natürliche Zahl zu zeigen und anschließend zu zeigen, dass, falls die Aussage für n gilt, folgt, dass sie auch für $n + 1$ gilt.
1. Induktionsanfang: Zeige die Aussage für $n = 0$ bzw. $n = 1$.
2. Induktionsschritt: Nimm an, dass die Aussage für n gilt und zeige, dass sie in diesem Fall auch für $n + 1$ gilt.

Beispiel 8.4. *Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n*

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

ist: 1. Induktionsanfang:

$$\sum_{j=0}^{0} j = \frac{0}{2}$$

gilt.
2. Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass

$$\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt. Dann ist

$$\sum_{j=0}^{n+1} j = (n+1) + \sum_{j=0}^{n} j = n+1+\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)(1+\frac{n}{2}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Beispiel 8.5. *Zeige mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n die binomische Formel*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

gilt; hier ist $\binom{n}{k}$ definiert durch

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ für alle natürlichen Zahlen } n,$$
$$\binom{0}{k} = 0 \text{ für alle natürlichen Zahlen } k > 0,$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Es folgt, dass

$$\binom{n}{k} = \frac{n \dots n-k+1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1. Induktionsanfang:

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$$

gilt.
2. Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{m=0}^{n+1} \left(\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} \right) a^m b^{n+1-m} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j},
\end{aligned}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\binom{n}{n+1} = 0$.

8.3. **Exponentialfunktionen (Fortsetzung).**

Lemma 8.6. *Der Limes*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$$

existiert.

Beweis: Nach Axiom genügt es, zu zeigen, dass $a_n = (1 + 1/n)^n$ eine beschränkte monoton wachsende Folge ist. Dazu benutzen wir die binomische Formel und erhalten

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n} + \dots \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\
&\quad + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Ab dem dritten Term der Summe wird jeder einzelne Term mit n größer, also ist $a_{n+1} \geq a_n$. Außerdem ist nach obiger Formel

$$a_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Diese Summe haben wir anläßlich der Taylorentwicklung von e^x bereits abgeschätzt und wissen, dass sie beschränkt ist. □

Definition 8.7 (Exponentialfunktion)**.** *Wir setzen*

$$e := \lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$$

und nennen $f(x) = e^x$ die Exponentialfunktion.

8.4. **Die Logarithmusfunktion.**

Definition 8.8. *Für $a \neq 1$ nennen wir die Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = a^x$ den Logarithmus zur Basis a und schreiben*

$$x = \log_a y.$$

Definitionsbereich ist $(0, +\infty)$ und Wertebereich ist $(-\infty, +\infty)$. $\log_e x$ kürzen wir zu $\log x$ ab.

Es folgt:

Lemma 8.9. *Für $a, b, c > 0$ und $c \neq 1$ gilt:*
1. $a^x = e^{x \log a}$
2. $\log a^x = x \log a$
3. $log_c a = \frac{\log a}{\log c}$

Beweis: 1. $e^{x \log a} = (e^{\log a})^x = a^x$
2. Folgt aus 1.
3. Laut 2. gilt $\log c \log_c a = \log(c^{log_c a}) = \log a$. □

Lemma 8.10. *1. Für $a > 0$ ist a^x eine Funktion der Klasse $C^\infty(\mathbb{R})$, und es gilt*

$$(a^x)' = a^x \log a, (a^x)^{(n)} = a^x (\log a)^n.$$

2. Für $x > 0$ gilt $(\log x)' = \frac{1}{x}$, und $\log x$ ist eine Funktion der Klasse $C^\infty((0, +\infty))$.

Beweis: Als Erstes zeigen wir a) $\lim_{|x|\to\infty}(1 + 1/x)^x = e$ (Aufgabe 22),
b) $\lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$,
c) $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$:
Da

$$\frac{\log(1 + h)}{h} = \log((1 + h)^{1/h}) \to \log(e) = 1$$

ist, erhalten wir auch b).
Schließlich setzen wir $e^h - 1 =: w$ und erhalten $h = \log(w+1)$,

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{w}{\log(w+1)} \to 1, h \to 0.$$

Also ist

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^h - 1}{h} e^x \to e^x, h \to 0,$$

und es folgt

$$(e^x)' = e^x, (a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \log a.$$

Zum Beweis von 2. genügt es zu bemerken, dass aufgrund des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion

$$(\log x)' = \frac{1}{e^{\log x}}.$$

□

8.5. **Trigonometrische Funktionen.**

Lemma 8.11.

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = 1/\cos^2 x.$$

Es folgt, dass $\sin x, \cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$ *und* $\tan x \in C^\infty(-\pi/2, \pi/2)$.

Beweis: Nach dem Additionstheorem für sin

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

ist

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2\frac{\sin(\frac{h}{2})\cos(\frac{2x+h}{2})}{h} = \cos(x + \frac{h}{2})\frac{2\sin(\frac{h}{2})}{h}$$

Wir benutzen nun

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, x \to 0$$

(siehe Aufgabe) und sehen, dass sin stetig und damit auch $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}\,\mathrm{sgn}\ \cos x$ stetig ist und

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 2\frac{\sin(\frac{h}{2})\cos(\frac{2x+h}{2})}{h} = \cos(x+\frac{h}{2})\frac{2\sin(\frac{h}{2})}{h} \to \cos x, h \to 0$$

gilt; hier ist

$$\mathrm{sgn}\ x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

die Signumsfunktion. Damit folgt auch

$$(\cos^2 x)' = (1 - \sin^2 x)' = -2 \sin x \cos x,$$

$$\cos'(x) = \frac{-2 \sin x \cos x}{2 \cos x} = -\sin x.$$

Schließlich ist

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

□

9. Das Riemann Integral

Definition 9.1 (Zerlegung)**.** *Wenn $-\infty < a < b < +\infty$, dann heißt eine endliche Folge von Punkten $x_0, \dots, x_n$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, falls $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ gilt. Wir bezeichnen die Zerlegung mit $\Delta := (x_i)_{i=1}^n$ und bezeichnen*

$$|\Delta| := \max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$$

als die Feinheit der Zerlegung. Des Weiteren definieren wir für jede beschränkte Fuktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und jede Zerlegung $\Delta = (x_i)_{i=1}^n$

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\},$$

$$M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, 1 \le i \le n$$

sowie

$$s(\Delta) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), S(\Delta) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Da nun

$$(b - a) \inf_{[a,b]} f \le s(\Delta) \le S(\Delta) \le (b - a) \sup_{[a,b]} f$$

ist, können wir

$$s := \sup\{s(\Delta) \mid \Delta \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

und

$$S := \inf\{S(\Delta) \mid \Delta \text{ ist eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

definieren, und es gilt $-\infty < s, S < +\infty$.

Definition 9.2 ((Riemann) integrierbar)**.** *Wenn für eine beschränkte Fuktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*

$$S = s$$

gilt, so nennen wir f (Riemann) integrierbar und bezeichnen mit

$$S =: \int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$$

das Integral von f.

Lemma 9.3. *Ist f eine beschränkte Fuktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, so gilt*

$$s \leq S.$$

Beweis: Für $x_{i-1} < x' < x_i$ gilt

$$(x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \leq (x' - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x']} f + (x_i - x') \inf_{[x',x_i]} f.$$

Fügen wir der Zerlegung Δ weitere Punkte zu und verfeineren diese damit zu einer beliebigen Zerlegung $\Delta' \supset \Delta$, so erhalten wir

$$s(\Delta) \leq s(\Delta'), S(\Delta) \geq S(\Delta').$$

Also gilt für zwei beliebige Zerlegungen Δ_1, Δ_2 des Intervalls $[a,b]$, dass

$$s(\Delta_1) \leq s(\Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S(\Delta_1 \cup \Delta_2) \leq S(\Delta_2).$$

Es folgt

$$s \leq S.$$

$\square$

Theorem 9.4. *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. In diesem Fall konvergiert für $k \to \infty$ die Riemannsche Summe*

$$\sum_{i=1}^{n_k} f(v_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1})$$

für jede Folge von Zerlegungen $\Delta_k = (x_{k,i})_{i=1}^n$ so dass $|\Delta_k| \to 0, k \to \infty$ und $v_{k,i} \in [x_{k,i-1}, x_{k,i}]$ gegen $\int_a^b f$.

Beweis: Nach dem gerade bewiesenen Lemma gilt für jede Zerlegung Δ_k

$$0 \leq S - s \leq S(\Delta_k) - s(\Delta_k) = \sum_{i=1}^{n_k} (M_{k,i} - m_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1})$$
$$\leq (b-a) \max_{1 \leq i \leq n_k} (\sup\{f(x) : x_{k,i-1} \leq x \leq x_{k,i}\}$$
$$- \inf\{f(x) : x_{k,i-1} \leq x \leq x_{k,i}\}) \leq (b-a)(f(p_k) - f(r_k));$$

hier befinden sich die Punkte p_k, r_k im gleichen Intervall von Δ_k, so dass $|p_k - r_k| \leq |\Delta_k|$ ist. Nach Lemma 9.5 gilt aufgrund der Stetigkeit von f, dass $|f(p_k) - f(r_k)| \to 0, k \to \infty$. Es folgt

$$S - s = 0.$$

Schließlich gilt für $v_{k,i} \in [x_{k,i-1}, x_{k,i}]$ und $k \to \infty$, dass

$$s \leftarrow s(\Delta_k) \leq \sum_{i=1}^{n_k} f(v_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1}) \leq S(\Delta_k) \to S = s.$$

Also konvergiert $\sum_{i=1}^{n_k} f(v_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1})$ gegen $S = s = \int_a^b f$. $\square$

Lemma 9.5. *Ist $-\infty < a < b < +\infty$ und ist f stetig auf $[a, b]$, so gilt für alle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$, so dass $|a_n - b_n| \to 0, n \to \infty$,*

$$|f(a_n) - f(b_n)| \to 0, n \to \infty.$$

Beweis: Falls die Aussage falsch ist, gibt es Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$, so dass $|a_n - b_n| \to 0, n \to \infty$ und

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Axiom existiert eine Teilfolge $n_k \to \infty, k \to \infty$ so dass

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} b_{n_k} = c \in [a, b].$$

Aus der Stetigkeit von f erhalten wir den Widerspruch

$$0 < \epsilon \leq \lim_{k\to\infty} |f(a_{n_k}) - f(b_{n_k})| = |f(c) - f(c)| = 0.$$

$\square$

Definition 9.6. *Falls f auf dem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ beschränkt und für eine natürliche Zahl $m \geq 0$ auf der Menge $[a, b] \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ stetig ist, so sagen wir, $f \in P([a, b])$.*

Theorem 9.7. *Jede Funktion $f \in P([a, b])$ ist integrierbar. In diesem Fall konvergiert für $k \to \infty$ die Summe*

$$\sum_{i=1}^{n_k} f(v_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1})$$

für jede Folge von Zerlegungen $\Delta_k = (x_{k,i})_{i=1}^n$ so dass $|\Delta_k| \to 0, k \to \infty$ und $v_{k,i} \in [x_{k,i-1}, x_{k,i}]$ gegen $\int_a^b f$.

Beweis: Zu jedem $\kappa > 0$ ist f auf der endlichen Vereinigung abgeschlossener Intervalle

$$A = [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^{m} (z_j - \kappa, z_j + \kappa)$$

stetig, so dass nach Lemma 9.5 für jedes $\epsilon > 0$ und genügend kleines $\delta > 0$

$$a, b \in A, |a - b| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(a) - f(b)| \leq \epsilon.$$

Nehmen wir nun eine Zerlegung $\Delta_k = (x_{k,i})_{i=1}^{n_k}$ und unterscheiden zwei Indexmengen

$$I_k = \{i \in \{1, \dots, n_k\} \mid [x_{k,i-1}, x_{k,i}] \subset A\},$$
$$J_k = \{i \in \{1, \dots, n_k\} \mid [x_{k,i-1}, x_{k,i}] \not\subset A\},$$

so gilt nach Lemma 9.3

$$0 \leq S - s \leq S(\Delta_k) - s(\Delta_k)$$
$$= \sum_{i \in I_k} (M_{k,i} - m_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1}) \ + \sum_{j \in J_k} (\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f)(x_{k,j} - x_{k,j-1})$$
$$\leq (b-a)\epsilon \ + \ 4m\kappa(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f),$$

vorausgesetzt, dass k so groß gewählt ist, dass $|\Delta_k| \leq \kappa$ und $|\Delta_k| \leq \delta(\epsilon)$ ist. Wählen wir für gegebenes $\tau > 0$ nun erst κ so klein, dass $4m\kappa(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f) \leq \tau/2$ und anschließend k so groß, dass $|\Delta_k| \leq \delta(\epsilon/(b-a))$, so erhalten wir

$$0 \leq S - s \leq \tau.$$

Schließlich gilt für $v_{k,i} \in [x_{k,i-1}, x_{k,i}]$ und $k \to \infty$, dass

$$s \leftarrow s(\Delta_k) \leq \sum_{i=1}^{n_k} f(v_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1}) \leq S(\Delta_k) \to S = s.$$

Also konvergiert $\sum_{i=1}^{n_k} f(v_{k,i})(x_{k,i} - x_{k,i-1})$ gegen $S = s = \int_a^b f$. □

Lemma 9.8 (Eigenschaften des Integrals)**.** *1. Ist $-\infty < a \leq b < c \leq d < +\infty$ und ist f auf $[a,d]$ integrierbar, so ist es auch auf $[b,c]$ integrierbar.*
2. Ist $-\infty < a < b < c < +\infty$, und ist f auf $[a,b]$ und auf $[b,c]$ integrierbar, so ist es auch auf $[a,c]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

3. (Linearität des Integrals) Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, und sind f, g auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$ integrierbar, so ist auch $\alpha f + \beta g$ auf $[a,b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

4. (Monotonie des Integrals) Sind f, g auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$ integrierbar, und gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so folgt

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

5. Ist f auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$ integrierbar und gilt $|\phi(x)-\phi(y)| \le C|x-y|$ für alle $x,y \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$, so ist auch $\phi \circ f$ auf $[a,b]$ integrierbar.
6. Ist f auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$ integrierbar, so ist für jedes $p \ge 1$ auch $|f|^p$ auf $[a,b]$ integrierbar, und es gilt

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right|^p \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^p.$$

7. (Mittelwertsatz für das Integral) Ist f auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$ stetig, so gibt es ein $c \in [a,b]$, so dass

$$\int_a^b f = (b-a)f(c) \text{ ist.}$$

Beweis: 1. Bezüglich jeder Zerlegung $\Delta = (x_k)_{k=0}^n$ des Intervalls $[a,d]$, welche die Punkte b und c enthält, gilt für k,ℓ so dass $x_{k-1} = b$ und $x_\ell = c$,

$$\sum_{i=k}^{\ell}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

War die Feinheit der Zerlegung klein genug gewählt, so ist die rechte Seite $\le \epsilon$. Es folgt

$$0 \le S_{[b,c]} - s_{[b,c]} \le \sum_{i=k}^{\ell}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \epsilon,$$

wobei $S_{[b,c]}, s_{[b,c]}$ die zur Definition des Integrals auf $[b,c]$ verwendeten $\inf, \sup$ sind.
2. Bezüglich jeder Zerlegung $\Delta = (x_k)_{k=0}^n$ des Intervalls $[a,c]$, welche den Punkt $b = x_m$ enthält und bei der die Feinheit so klein ist, dass

$$\sum_{i=1}^{m}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \epsilon, \quad \sum_{i=m+1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \epsilon$$

ist, gilt

$$0 \le S_{[a,c]} - s_{[a,c]} \le \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le 2\epsilon.$$

Es folgt, dass

$$\int_a^c f \leftarrow \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$
$$\to \int_a^b f + \int_b^c f.$$

3. Benutzen wir $\sup(f+g) \le \sup f + \sup g, \inf(f+g) \ge \inf f + \inf g, \sup(-f) = -\inf f, \sup(cf) = c \sup f$ für $c \ge 0$, so erhalten wir

$$0 \le S_{\alpha f+\beta g} - s_{\alpha f+\beta g} \le \sum_{i=1}^{n} (M_{i,\alpha f+\beta g} - m_{i,\alpha f+\beta g})(x_i - x_{i-1})$$

$$\le |\alpha| \sum_{i=1}^{n} (M_{i,f} - m_{i,f})(x_i - x_{i-1}) + |\beta| \sum_{i=1}^{n} (M_{i,g} - m_{i,g})(x_i - x_{i-1}) \le \epsilon,$$

vorausgesetzt dass $|\Delta|$ klein genug ist.
Die Formel folgt aus

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) \leftarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha f(v_i) + \beta g(v_i))(x_i - x_{i-1})$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} f(v_i)(x_i - x_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^{n} g(v_i)(x_i - x_{i-1}) \to \alpha \int_a^b f + \int_a^b g.$$

4. Es ist

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) \leftarrow \sum_{i=1}^{n} (g(v_i) - f(v_i))(x_i - x_{i-1}) \ge 0.$$

5.

$$0 \le S_{\phi\circ f} - s_{\phi\circ f} \le \sum_{i=1}^{n} (M_{i,\phi\circ f} - m_{i,\phi\circ f})(x_i - x_{i-1})$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} C(M_{i,f} - m_{i,f})(x_i - x_{i-1}) \le \epsilon,$$

vorausgesetzt dass $|\Delta|$ klein genug ist.
6. Da für alle $v, w \in [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f] =: [A, B]$

$$||v|^p - |w|^p| \le p \max(|A|, |B|)^{p-1} |v - w|$$

ist, folgt die Integrierbarkeit aus 5. und es genügt, die behauptete Ungleichung zu zeigen. Dazu bemerken wir, dass $\phi(z) = |z|^p$ konvex ist und daher

$$\phi\Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i\Big) \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(z_i)$$

ist. Also gilt für jede Riemannsumme $\sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$ unter Benutzung der Stetigkeit von ϕ (siehe Aufgabe 7)

$$\phi\Big(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\Big) \leftarrow \phi\Big(\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}\Big)$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(f(a+i\frac{b-a}{n}))$$

$$= \frac{1}{b-a}\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(f(a+i\frac{b-a}{n})) \to \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f).$$

7. Nehmen wir m und M so dass $\inf_{[a,b]} f = f(m), \sup_{[a,b]} f = f(M), a \leq m, M \leq b$ gilt, so gilt

$$f(m) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq f(M).$$

Folglich erhalten wir aus dem Zwischenwertsatz ein $c \in [m, M]$, so dass

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

ist. □

Definition 9.9 (Lipschitz stetig)**.** *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz stetig auf D, falls es ein $C < +\infty$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \text{ ist.}$$

Beispiel 9.10. *1. $f(x) = \sqrt{x}$ ist auf $[0,1]$ stetig, aber nicht Lipschitz stetig.*
2. $f(x) = |x|$ ist auf $\mathbb{R}$ Lipschitz stetig, aber im Nullpunkt nicht differenzierbar.
3. Jede Funktion in $C^1([a,b])$ ist, vorausgesetzt, dass das Intervall $[a,b]$ beschränkt ist, Lipschitz stetig.

Lemma 9.11 (Youngsche Ungleichung)**.** *Für $p \in (1,+\infty), a, b \in (0,+\infty)$ und $q := (1-1/p)^{-1}$ ist*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Beweis: Zunächst ist aufgrund der Konkavität des Logarithmus für alle $x, y \in (0,+\infty), t \in (0,1)$

$$\log(tx + (1-t)y) \leq t\log x + (1-t)\log y.$$

Es folgt

$$tx + (1-t)y \geq e^{t\log x}e^{(1-t)\log y} = x^t y^{1-t}.$$

Setzen wir nun $t := 1/p, a := x^{\frac{1}{p}}, b := y^{\frac{1}{q}}$, so erhalten wir

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

□

Theorem 9.12 (Die Höldersche Ungleichung)**.** *Für* $f, g \in P([a,b]), p \in (1, +\infty)$ *und* $q := (1-1/p)^{-1}$ *gilt*

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis: Es folgt, dass $fg \in P([a,b])$. Falls $\int_a^b |f|^p = 0$ oder $\int_a^b |g|^p = 0$, so ist nach Übungsaufgabe $fg = 0$, und die Ungleichung gilt. Sind beide Integrale $\neq 0$, so setzen wir

$$\tilde{f} := \frac{|f|}{\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \tilde{g} := \frac{|g|}{\left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Mit Hilfe der Youngschen Ungleichung und Lemma 9.8 erhalten wir nun

$$\int_a^b \tilde{f}\tilde{g} \leq \int_a^b \left(\frac{1}{p}\tilde{f}^p + \frac{1}{q}\tilde{g}^q\right) = \frac{1}{p}1 + \frac{1}{q}1 = 1.$$

Dann ist aber

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \int_a^b |f|\,|g| \leq \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

$\square$

Theorem 9.13. *Sei* f *auf dem beschränkten Intervall* $[a,b]$ *integrierbar und im Punkt* $x_0 \in (a,b)$ *stetig. Dann ist* $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ *auf* $[a,b]$ *stetig und im Punkt* x_0 *differenzierbar, und es gilt* $F'(x_0) = f(x_0)$.

Beweis: Nach Lemma 9.8 ist $|F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq \sup_{[a,b]} |f||y - x|$, so dass F auf $[a,b]$ Lipschitz stetig und damit stetig ist. (Für $y \to x$ gilt $F(y) \to F(x)$)
Da außerdem

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \leq \sup_{[x_0,x_0+h]} f,$$

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \geq \inf_{[x_0,x_0+h]} f$$

ist, gilt auch $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \to f(x_0), h \to 0$. $\square$

Wir haben also salopp formuliert gezeigt, dass

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$

ist. Was passiert umgekehrt, wenn wir zuerst differenzieren und dann integrieren?

Definition 9.14 (Stammfunktion)**.** *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $G : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls G auf (a,b) differenzierbar ist und in allen Punkten $x \in (a,b)$*

$$G'(x) = f(x)$$

gilt.

Korollar 9.15. *Sei f auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$ stetig. Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von f.*

Beweis: Das letzte Theorem. □

Theorem 9.16 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Falls $f \in P([a,b])$ auf (a,b) eine Stammfunktion G besitzt, so gilt $G(b) - G(a) = \int_a^b f$.*

Beweis: Sei $(x_j)_{j=0}^n$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Nach dem Mittelwertsatz (für die Ableitung) gilt

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^{n} (G(x_j) - G(x_{j-1})) = \sum_{j=1}^{n} f(y_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Laut Theorem 9.7 konvergiert $\sum_{j=1}^n f(y_j)(x_j - x_{j-1}) \to \int_a^b f$ für $|\Delta| \to 0$, so dass

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f.$$

□

Korollar 9.17. $a_1 < a < b < b_1, f \in C^1((a_1,b_1)) \Rightarrow f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$

Beweis: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung □

Beispiel 9.18.

$$f(x) := \begin{cases} -1, x \leq 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

gehört zur Klasse $P([-1,1])$, aber besitzt keine Stammfunktion.

Theorem 9.19 (Substitutionsregel)**.** *Ist f auf dem beschränkten Intervall $[a,b]$ stetig, und ist $\phi \in C^1(\mathbb{R}), \phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$ und erfüllt für alle $t \in [\alpha,\beta]$*

$$\phi(t) \in [a,b],$$

so gilt

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

Beweis: Differenziere $\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f$ mit Hilfe der Kettenregel. $\square$

Theorem 9.20 (Partielle Integration)**.** *Ist $a_1 < a < b < b_1$ und ist $f \in C^1((a_1, b_1))$ und ist g auf $[a, b]$ stetig, so gilt*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt \;=\; f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f'(t)G(t)\,dt,$$

wobei G eine Stammfunktion von g ist.

Beweis: Differenziere $f(x)G(x) - f(a)G(a) - \int_a^x f'(t)G(t)\,dt$ bezüglich der Variablen x. $\square$

Theorem 9.21 (Integralversion des Satzes von Taylor)**.** *Ist $a_1 < a < x < b_1$ und $f \in C^{(n)}((a_1, b_1))$, so gilt*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Beweis: Wenden wir partielle Integration auf das Integral der rechten Seite an, so erhalten wir

$$\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$
$$= \; -f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \int_a^x f^{(n-1)}(t)(n-1)(x-t)^{n-2}\,dt.$$

Wir wiederholen diesen Schritt (partielle Integration des Integrals auf der rechten Seite) $n-2$ mal und erhalten die Aussage des Theorems. $\square$

9.1. **Partialbruchzerlegung.** Zur Berechnung von

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)}$$

zerlegen wir den Term in 4 Brüche

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{(x-1)^2} + \frac{c_3}{(x-1)^3} + \frac{c_4}{x-2},$$

die wir alle integrieren können. Dass eine solche Zerlegung stets möglich ist, ist eine algebraische Eigenschaft, die wir hier nicht beweisen. Für jeden einzelnen gegebenen Bruch können wir sie jedoch natürlich verifizieren. Tun wir das im Falle des obigen Beispiels, so geht das folgendermaßen: Wir wollen $c_1, \ldots, c_4$ so bestimmen, dass

$$c_1(x-1)^2(x-2) + c_2(x-1)(x-2) + c_3(x-2) + c_4(x-1)^3 = x+1$$

gilt. Durch Koeffizientenvergleich (siehe LA Vorlesung) erhalten wir

$$x^3(c_4 + c_1) = 0, x^2(-3c_4 + c_2 - 4c_1) = 0,$$

$$x(3c_4 + c_3 - 3c_2 + 5c_1) = x, -2c_1 + 2c_2 - 2c_3 - c_4 = 1.$$

Es muss also

$$c_4 = -c_1, c_2 = c_1, c_3 = c_1 + 1, c_1 = -3,$$

$$c_1 = -3, c_2 = -3, c_3 = -2, c_4 = 3$$

sein. Es folgt

$$\frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{-3}{x-1} + \frac{-3}{(x-1)^2} + \frac{-2}{(x-1)^3} + \frac{3}{x-2},$$

so dass wir mit $-3\log(x-1) + 3\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + 3\log(x-2)$ eine Stammfunktion erhalten.

Beispiel 9.22. *Bestimme eine Stammfunktion von* $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.
Lösung: *Es ist*

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx = -\int_a^b \frac{-2x^2}{(x^2+1)^2} + [\frac{x}{x^2+1}]_a^b.$$

Da außerdem $x^2 = x^2 + 1 - 1$, *erhalten wir*

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\frac{x}{x^2+1}]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx - 2\int_a^b \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Es folgt

$$\int_a^b \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}[\frac{x}{x^2+1}]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}[\frac{x}{x^2+1}]_a^b + \frac{1}{2}[\arctan]_a^b,$$

so dass $\frac{1}{2}(\frac{x}{x^2+1} + \arctan(x))$ *eine Stammfunktion ist.*

Im Falle komplizierter Integrale helfen Stammfunktionen-Tabellen. Diese sind jedoch oft nicht unmittelbar anwendbar, sondern müssen modifiziert werden.

Beispiel 9.23.

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{3x^2 + 9x - 4}}\,dx$$

Wir schreiben das Integral um zu

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{3x^2+9x-4}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2+3x-\frac{4}{3}}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2 - \frac{43}{12}}}dx.$$

Nun können wir die Formel

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\, du = [\log|u+\sqrt{u^2-a^2}|]_a^b$$

aus einer Stammfunktionen-Tabelle anwenden und erhalten

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{3x^2+9x-4}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\log\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{43}{12}}\right|\right]_a^b.$$

10. Uneigentliche Integrale

10.1. Integrale unbeschränkter Funktionen.

Beispiel 10.1. *Die Funktion* $f(x) = x^{\frac{-1}{2}}$ *ist auf dem Intervall* $(0,1]$ *unbeschränkt. Für jedes* $a \in (0,1)$ *ist jedoch* $\int_a^1 f(x)\, dx = [2\sqrt{x}]_a^1$ *wohldefiniert, und für* $a \to 0$ *gilt*

$$\int_a^1 f(x)\, dx = 2 - 2\sqrt{a} \to 2.$$

Wir könnten also $\int_0^1 f(x)\, dx$ *(bislang nicht definiert) als*

$$\lim_{a\to 0} \int_a^1 f(x)\, dx$$

definieren.

Wir verallgemeinern diese Idee zur folgenden

Definition 10.2. *Ist* $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ *für jedes* $c \in (a,b)$ *auf* $[c,b]$ *integrierbar, und existiert der Limes*

$$\lim_{c\to a} \int_c^b f(x)\, dx,$$

so nennen wir diesen Limes das uneigentliche Integral und bezeichnen es mit $\int_a^b f(x) dx$*. Der Fall* $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ *wird analog behandelt. Falls* f *sowohl auf* $[(a+b)/2, b)$ *als auch* $(a,(a+b)/2]$ *integrierbar ist, nennen wir*

$$\int_a^{(a+b)/2} f(x)\, dx + \int_{(a+b)/2}^b f(x)\, dx$$

das uneigentliche Integral von f *auf* (a,b)*.*

Beispiel 10.3. $f(x) = -\frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x})$ *besitzt auf dem Intervall* $(0,1]$ *kein uneigentliches Integral:* $\int_a^1 f(x)\, dx = \sin 1 - \sin\frac{1}{a}$ *konvergiert nicht für* $a \to 0$*.*

10.2. **Integrale auf unbeschränkten Intervallen.**

Definition 10.4. *Ist $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ für jedes $b \in (a, +\infty)$ auf $[a, b]$ integrierbar, und existiert der Limes*

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

so nennen wir diesen Limes das uneigentliche Integral und bezeichnen es mit $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Der Fall $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ wird analog behandelt. Falls f sowohl auf $[0, +\infty)$ als auch $(-\infty, 0]$ integrierbar ist, nennen wir

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx$$

das uneigentliche Integral von f auf $(-\infty, +\infty)$.

Beispiel 10.5. *1. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ist für $\alpha > 1$ auf $[1, +\infty)$ integrierbar und für $\alpha < 1$ auf $[1, +\infty)$ nicht integrierbar.*
2. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist auf $[1, +\infty)$ integrierbar. Zum Beweis benutzen wir jedoch den Begriff der absoluten Konvergenz:

Definition 10.6 (Absolute Konvergenz von Integralen)**.** *Ist f auf jedem beschränkten Teilintervall von I Riemann integrierbar und ist $|f|$ auf I integrierbar, so sagen wir, das (uneigentliche) Integral von f konvergiert auf I absolut.*

Lemma 10.7. *Wenn das uneigentliche Integral von f auf I absolut konvergiert, so existiert auch das uneigentliche Integral von f auf I.*

Beweis: Es genügt, den Beweis für den Fall $I = [a, +\infty)$ zu führen. Zunächst ist für jede Folge $c_n \to +\infty$

$$\int_a^{c_n} f(x)\,dx$$

eine beschränkte reelle Zahlenfolge und besitzt daher eine konvergente Teilfolge

$$\int_a^{c_{n_k}} f(x)\,dx \to S, k \to \infty.$$

Für $c \leq c_{n_k}$ gilt daher

$$\begin{aligned} |\int_a^c f(x)\,dx - S| &\leq |\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^{c_{n_k}} f(x)\,dx| + |\int_a^{c_{n_k}} f(x)\,dx - S| \\ &\leq \int_c^\infty |f(x)|\,dx + |\int_a^{c_{n_k}} f(x)\,dx - S| \to 0, c \to \infty. \end{aligned}$$

$\square$

Kehren wir zum Beispiel 10.5 2 zurück: Es ist $\int_1^a \frac{\sin x}{x} = -\int_1^a \cos x \frac{1}{x^2} +$

$[-\frac{\cos x}{x}]_1^a$, wobei $[-\frac{\cos x}{x}]_1^a \to \cos 1, a \to +\infty$. Andererseits konvergiert das Integral von $g(x) = \cos x \frac{1}{x^2}$ nach Beispiel 10.5 1 auf $[1, +\infty)$ absolut, so dass nach obigem Lemma $\int_1^a \frac{\sin x}{x}$ für $a \to +\infty$ konvergiert. Das Integral von $\frac{\sin x}{x}$ konvergiert jedoch nicht absolut auf $[1, +\infty)$: Für $a \in [(k+1)\pi, (k+2)\pi)$ gilt

$$\int_1^a |\frac{\sin x}{x}|\, dx \geq \sum_{j=1}^k \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} \geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j+1)\pi} \int_0^\pi \sin x\, dx \to +\infty,$$

$a \to +\infty$.

11. Unendliche Reihen

Definition 11.1 (Reihen). *Für jede reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty$ definiert $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n$ eine weitere reelle Zahlenfolge $(S_n)_{n=1}^\infty$. Die Zahlenfolge $(S_n)_{n=1}^\infty$ nennen wir (unendliche) Reihe. Falls $(S_n)_{n=1}^\infty$ gegen $S \in \mathbb{R}$ konvergiert, so nennen wir S den Limes der Reihe und schreiben $S = \sum_{k=1}^\infty a_k$. Falls $(S_n)_{n=1}^\infty$ nicht konvergiert, so sagen wir, die Reihe divergiert.*

Bemerkung: Oft kürzt man die Reihe $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n=1}^\infty$ mit der Kuzschreibweise $\sum_{k=1}^\infty a_k$ ab, so dass mit $\sum_{k=1}^\infty a_k$ je nach Kontext die Reihe oder ihr Limes gemeint ist.

Beispiel 11.2. *Die "harmonische Reihe" $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})_{n=1}^\infty$ divergiert (siehe auch Übungsaufgabe): $S_{2n} - S_n =\geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.*

Bemerkung: Falls die Reihe $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n=1}^\infty$ konvergiert, so folgt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Das Umgekehrte gilt jedoch nicht: $\frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$, aber $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})_{n=1}^\infty$ konvergiert nicht.

Beispiel 11.3 (Geometrische Reihe). *Die Geometrische Reihe*

$$(\sum_{k=1}^n r^{k-1})_{n=1}^\infty$$

konvergiert für $0 \leq r < 1$ gegen $\frac{1}{1-r}$. Für $r \geq 1$ konvergiert sie nicht.

Beweis: Für $r \neq 1$ ist $S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$. Für $r = 1$ ist $S_n = n$. $\square$

11.1. **Nichtnegative Reihen.** Wir betrachten zunächst nichtnegative Reihen, d.h. Reihen, für die $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lemma 11.4. *Für nichtnegative Reihen ist Konvergenz äquivalent zur Beschränktheit.*

Beweis: Nach Axiom konvergieren monoton wachsende beschränkte Folgen. □

Theorem 11.5 (Dominierte Konvergenz). *Seien $a_n, b_n \geq 0$ für alle $n \geq N$ und es gebe eine Konstante $C < +\infty$ so dass $a_n \leq Cb_n$ für alle $n \geq N$. Wenn zusätzlich die Reihe $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n=1}^\infty$ konvergiert, so konvergiert auch die Reihe $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n=1}^\infty$.*

Beweis: Für alle $n \geq N$ ist

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leq C \sum_{k=N}^{n} b_k \leq C \sum_{k=N}^{\infty} b_k = S < +\infty,$$

so dass $(\sum_{k=N}^{N+n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und daher konvergiert. Dann konvergiert aber auch $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Beispiel 11.6. *Für $0 \leq r < 1$ ist $(\sum_{k=1}^n (1 + \sin k) r^{k-1})_{n=1}^\infty$ durch die geometrische Reihe abschätzbar und konvergiert deshalb.*

Theorem 11.7 (Das Konvergenzkriterium von Cauchy). *Sei $a_n \geq 0$ für alle $n \geq N$ und es gebe eine Konstante c so dass $a_n^{\frac{1}{n}} \leq c < 1$ für alle $n \geq N$. Dann konvergiert die Reihe $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n=1}^\infty$.*

Beweis: Da $0 \leq a_n \leq c^n$ für alle $n \geq N$, können wir $(\sum_{k=N}^{N+n} a_k)_{n=1}^\infty$ durch die geometrische Reihe abschätzen und dominierte Konvergenz anwenden. □

Bemerkung: Die Bedingung $a_n^{\frac{1}{n}} < 1$ ist für Konvergenz nicht ausreichend (siehe Übungsblatt). Daher ist es wichtig, dass c nicht von n abhängt.

Theorem 11.8 (Das Konvergenzkriterium von D'Alembert). *Sei $a_n > 0$ für alle $n \geq N$ und es gebe eine Konstante c so dass $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq c < 1$ für alle $n \geq N$. Dann konvergiert die Reihe $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n=1}^\infty$.*

Beweis: Für alle $n \geq N$ ist

$$a_n = a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_N c^{n-N},$$

also können wir $(\sum_{k=N}^{N+n} a_k)_{n=1}^\infty$ durch die geometrische Reihe abschätzen und dominierte Konvergenz anwenden. □

Bemerkung: Die Bedingung $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ist für Konvergenz nicht ausreichend (siehe Übungsblatt). Daher ist es wichtig, dass c nicht von n abhängt.

Beispiel 11.9.

$$a_n = \begin{cases} n^p \alpha^n, n \text{ gerade}, \\ 2n^p \alpha^n, n \text{ ungerade}, \end{cases}$$

wobei $p \neq 0$ *und* $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ *Konstanten sind. Hier gilt*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n})^p \alpha$$

bzw.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2(1 + \frac{1}{n})^p \alpha.$$

Also ist für genügend große n *das Konvergenzkriterium von D'Alembert erfüllt und* $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n=1}^\infty$ *konvergiert. Beachte dass* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *nicht konvergiert.*

Das folgende Lemma ist sehr nützlich zum Nachweis der Konvergenz/Divergenz von Reihen.

Lemma 11.10 (Vergleich mit Integralen)**.** *Ist* $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ *eine monoton fallende Funktion, so ist Konvergenz des uneigentlichen Integrals* $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ *äquivalent zur Konvergenz der Reihe*

$$(\sum_{k=1}^n f(k))_{n=1}^\infty.$$

Beweis: Es gilt

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k),$$

so dass

$$-f(1) + \sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^n f(k).$$

□

11.2. **Allgemeine Reihen.** Zur Betrachtung allgemeiner Reihen, bei welchen die Koeffizienten das Vorzeichen wechseln können, definieren wir zusätzlich zum Begriff der Konvergenz noch den der absoluten Konvergenz:

Definition 11.11 (Absolute Konvergenz)**.** *Falls zu einer gegebenen Reihe* $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ *die Reihe* $(\sum_{k=1}^{n} |a_k|)_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert, so sagen wir,* $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert absolut. Falls* $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert und* $(\sum_{k=1}^{n} |a_k|)_{n=1}^{\infty}$ *divergiert, so sagen wir,* $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert bedingt.*

Lemma 11.12. *Konvergiert eine Reihe absolut, so konvergiert sie.*

Beweis: Da $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist, so existiert eine konvergente Teilfolge $\sum_{k=1}^{n_m} a_k \to S, m \to \infty$. Für $n_m \geq n$ gilt dann $|\sum_{k=1}^{n} a_k - S| \leq |\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n_m} a_k| + |\sum_{k=1}^{n_m} a_k - S| \leq \sum_{k=n+1}^{n_m} |a_k| + |\sum_{k=1}^{n_m} a_k - S| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |\sum_{k=1}^{n_m} a_k - S| \to 0, n \to \infty$ □

Beispiel 11.13. $(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{3k} 2^{-k})_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert absolut, also konvergiert es auch im üblichen Sinn.*

Wir werden später sehen, dass die Umkehrung des obigen Lemmas nicht gilt.

Lemma 11.14. *1. Konvergiert eine Reihe* $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ *absolut, so konvergieren auch* $(\sum_{k=1}^{n} \max(a_k, 0))_{n=1}^{\infty}$ *und* $(\sum_{k=1}^{n} \min(a_k, 0))_{n=1}^{\infty}$ *(absolut), und für die Limes gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \max(a_k, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \min(a_k, 0).$$

2. Konvergiert eine Reihe $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ *bedingt, so divergieren*

$$(\sum_{k=1}^{n} \max(a_k, 0))_{n=1}^{\infty}, (\sum_{k=1}^{n} \min(a_k, 0))_{n=1}^{\infty}$$

beide.

Beweis: 1. $\sum_{k=1}^{n} \max(a_k, 0) \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq C < +\infty$. Analog ist auch $-(\sum_{k=1}^{n} \min(a_k, 0))_{n=1}^{\infty}$ beschränkt und damit konvergent. Es genügt also, in der Formel $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \max(a_k, 0) + \sum_{k=1}^{n} \min(a_k, 0)$ zum Limes überzugehen.
2. Sollte beispielsweise $(\sum_{k=1}^{n} \max(a_k, 0))_{n=1}^{\infty}$ konvergieren, so konvergiert auch

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{n} -a_k + \sum_{k=1}^{n} 2 \max(a_k, 0).$$

Analog erhält man die Divergenz der Reihe $(\sum_{k=1}^{n} \min(a_k, 0))_{n=1}^{\infty}$. □

Theorem 11.15. *Konvergiert die Reihe* $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ *absolut, so konvergiert sie gegen den gleichen Wert, egal in welcher Reihenfolge man die* a_k *aufsummiert.*

Beweis: Sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine eineindeutige (invertierbare) Funktion. Wir betrachten die Reihe $(\sum_{k=1}^n a_{\phi(k)})_{n=1}^\infty$, bei welcher sich die Reihenfolge möglicherweise geändert hat: Als Erstes zeigen wir, dass die Aussage im Falle nichtnegativer Reihen gilt: Sei $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist dann $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n=1}^\infty$ beschränkt, so gilt $\sum_{k=1}^n b_{\phi(k)} \leq \sum_{k=1}^\infty b_k < +\infty$, also ist auch $(\sum_{k=1}^n b_{\phi(k)})_{n=1}^\infty$ beschränkt.
Ist umgekehrt $(\sum_{k=1}^n b_{\phi(k)})_{n=1}^\infty$ beschränkt, so ist mit

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^\infty b_{\phi(k)} < +\infty$$

auch $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n=1}^\infty$ beschränkt. Konvergenz von $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n=1}^\infty$ ist also äquivalent zur Konvergenz von $(\sum_{k=1}^n b_{\phi(k)})_{n=1}^\infty$, und die Limes sind gleich. Insbesondere folgt, dass $(\sum_{k=1}^n a_{\phi(k)})_{n=1}^\infty$ absolut konvergiert und nach Lemma 11.12 konvergiert.
Nach Lemma 11.14 gilt nun andererseits, dass

$$\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k=1}^\infty \max(a_k, 0) + \sum_{k=1}^\infty \min(a_k, 0),$$

$$\sum_{k=1}^\infty a_{\phi(k)} = \sum_{k=1}^\infty \max(a_{\phi(k)}, 0) + \sum_{k=1}^\infty \min(a_{\phi(k)}, 0).$$

Aus dem ersten Teil des Beweises wissen wir aber schon, dass

$$\sum_{k=1}^\infty \max(a_k, 0) = \sum_{k=1}^\infty \max(a_{\phi(k)}, 0), \sum_{k=1}^\infty \min(a_k, 0) = \sum_{k=1}^\infty \min(a_{\phi(k)}, 0).$$

Es folgt also

$$\sum_{k=1}^\infty a_k = \sum_{k=1}^\infty \max(a_{\phi(k)}, 0) + \sum_{k=1}^\infty \min(a_{\phi(k)}, 0) = \sum_{k=1}^\infty a_{\phi(k)}.$$

□

Wir werden später sehen, dass das gerade bewiesene Lemma nicht für bedingt konvergente Reihen gilt.

11.3. **Reihen mit alternierendem Vorzeichen.** Als Letztes betrachten wir Reihen mit alternierendem Vorzeichen:

Theorem 11.16 (Satz von Leibniz)**.** *Ist $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine monoton fallende Folge, die gegen* 0 *konvergiert, so konvergiert die Reihe*

$$(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_k)_{n=1}^\infty.$$

Beweis: Zunächst definiert $T_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k$ eine monoton wachsende beschränkte Zahlenfolge:

$$T_{n+1} - T_n = -a_{2n+2} + a_{2n+1} \geq 0,$$

$$T_n = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1.$$

Nach Axiom konvergiert also $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine reelle Zahl T. Weiterhin ist $\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}a_k = T_n + a_{2n+1} \to T, n \to \infty$, so dass auch $(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen T konvergiert. □

Beispiel 11.17. $(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k})_{n=1}^{\infty}$ *konvergiert bedingt.*

11.4. **Funktionenfolgen und deren Konvergenz.**

Definition 11.18. *Zu einer gegebenen Teilmenge I der rellen Zahlen heißt $f_n : I \to \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, \ldots$ Funktionenfolge. Für jedes feste $x \in I$ ist also $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ eine reelle Zahlenfolge. Falls für jedes feste $x \in I$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ gegen eine reelle Zahl $f(x)$ konvergiert, so definiert $x \mapsto f(x)$ eine Funktion auf I und wir sagen, f_n konvergiert für $n \to \infty$ punktweise gegen die Funktion f. Wir nennen f den Limes/die Limesfunktion. Falls zusätzlich*

$$\sup_I |f_n - f| \to 0, n \to 0,$$

sagen wir, f_n konvergiert für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen die Funktion f.

Beispiel 11.19. *1. $f_n(x) = x^n$ konvergiert auf dem Intervall $I = [0, 1/2]$ punktweise gegen die Funktion $f(x) = 0$. Da außerdem $\sup_I |f_n - f| = 2^{-n} \to 0$ ist, konvergiert f_n auch gleichmäßig gegen die Nullfunktion.*
2. $f_n(x) = x^n$ konvergiert auf dem Intervall $I = [0, 1)$ punktweise gegen die Funktion $f(x) = 0$. Da hier $\sup_I |f_n - f| = 1$ ist, konvergiert in diesem Beispiel die Funktionenfolge nicht gleichmäßig auf dem Intervall $I = [0, 1)$.
3.

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{-n}, x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

konvergiert auf dem Intervall $(-\infty, +\infty)$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 1 \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass Stetigkeit nicht notwendig für gleichmäßige Konvergenz ist.

11.5. **Funktionenreihen und deren Konvergenz.**

Definition 11.20. *Zu jeder Funktionenfolge $(f_n)_{n=0}^\infty$ auf der Menge I definiert $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n=0}^\infty$ eine Funktionenreihe. Für jedes feste $x \in I$ ist also $(\sum_{k=0}^n f_k(x))_{n=1}^\infty$ eine reelle Reihe. Falls für jedes feste $x \in I$ die Reihe $(\sum_{k=0}^n f_k(x))_{n=1}^\infty$ gegen eine reelle Zahl $\sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ konvergiert, so sagen wir, die Funktionenreihe konvergiert auf I für $n \to \infty$ punktweise gegen die Funktion $x \mapsto \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$. Wir nennen $x \mapsto \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ den Limes/die Limesfunktion. Falls zusätzlich*

$$\sup_I |\sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^\infty f_k(x)| \to 0, n \to 0,$$

ist, so sagen wir, die Funktionenreihe konvergiert auf I für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen die Funktion $x \mapsto \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$.
Falls für jedes feste $x \in I$ die Reihe $(\sum_{k=0}^n f_k(x))_{n=1}^\infty$ die Reihe absolut konvergiert, so sagen wir, die Funktionenreihe konvergiert auf I für $n \to \infty$ absolut gegen die Funktion $x \mapsto \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$. Falls zusätzlich

$$\sup_I |\sum_{k=0}^n |f_k(x)| - \sum_{k=0}^\infty |f_k(x)|| \to 0, n \to 0,$$

ist, so sagen wir, die Funktionenreihe konvergiert auf I für $n \to \infty$ gleichmäßig absolut gegen die Funktion $x \mapsto \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$.
Spezielle Beispiele für Funktionenreihen sind Reihen von der Form

$$(\sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k)_{n=0}^\infty$$

(also $f_k(x) = a_k(x-a)^k$). Diese Reihen nennen wir Potenzreihen.

Beispiel 11.21. *1. Jedes Polynom ist eine Potenzreihe, welche auf $I = (-\infty, +\infty)$ punktweise, gleichmäßig, absolut und gleichmäßig absolut konvergiert.*
2. Der Taylorjet der Exponentialfunktion definiert mit

$$(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!})_{n=0}^\infty$$

eine Potenzreihe, welche für jede reelle Zahl auf dem Intervall $[-R, R]$ punktweise, gleichmäßig, absolut und gleichmäßig absolut konvergiert (Beweis im nächsten Beispiel). Auf $[0, +\infty)$ konvergiert die Reihe immer noch punktweise und absolut, aber nicht mehr gleichmäßig:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = e^{sx} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \geq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|,$$

und die rechte Seite ist sogar für jedes n unbeschränkt.

Lemma 11.22 (Das Abelsche Lemma)**.** *Konvergiert die Potenzreihe $(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k)_{n=0}^{\infty}$ in einem festen $x_0 \neq 0$, so konvergiert sie für jedes $r < |x_0|$ gleichmäßig absolut auf dem Intervall $[-r, r]$.*

Beweis: Da $(\sum_{k=0}^{n} a_k {x_0}^k)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert, gilt $a_k {x_0}^k \to 0, k \to \infty$. Also ist $(a_k {x_0}^k)_{k=0}^{\infty}$ beschränkt, d.h. es gibt ein $M < +\infty$ so dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|a_k {x_0}^k| \leq M.$$

Es folgt

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k x^k| \leq \sum_{k=0}^{n} M |\frac{x}{x_0}|^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Theorem 11.5 (Dominierte Konvergenz) konvergiert dann aber $(\sum_{k=0}^{n} |a_k x^k|)_{n=0}^{\infty}$ für jedes $|x| < |x_0|$. Außerdem gilt $\sup_{[-r,r]} |\sum_{k=0}^{n} |a_k x^k| - \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|| \leq \sum_{k=n}^{\infty} M |\frac{r}{x_0}|^k \to 0, n \to \infty$, so dass das Lemma bewiesen ist. $\square$

Beispiel 11.23. *Es folgt, dass*

$$(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!})_{n=0}^{\infty}$$

auf dem Intervall $[-R, R]$ punktweise, gleichmäßig, absolut und gleichmäßig absolut konvergiert.

Als Folge aus dem Abelschen Lemma existiert zu jeder Potenzreihe ein maximales Intervall $(-R, R)$, so dass die Potenzreihe in jedem Punkt des Intervalls konvergiert.

Definition 11.24. *Wir nennen $R := \sup\{r \geq 0 | (\sum_{k=0}^{n} a_k r^k)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert $\}$ den Konvergenzradius der Potenzreihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)_{n=0}^{\infty}$.*

Beispiel 11.25. *1. Der Konvergenzradius der Potenzreihe*

$$(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!})_{n=0}^{\infty}$$

ist $R = +\infty$.
2. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $(\sum_{k=0}^{n} x^k)_{n=0}^{\infty}$ ist aufgrund Vergleich mit der geometrischen Reihe $R = 1$.
3. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $(\sum_{k=0}^{n} k! x^k)_{n=0}^{\infty}$ ist $R = 0$: Für jedes $x > 0$ ist $k! x^k = \left(\frac{(x^{-1})^k}{k!}\right)^{-1} \to +\infty, k \to \infty$ (siehe Beispiel 6.3).

Theorem 11.26. *1. Wenn der Limes* $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = r$ *existiert, so ist* $\frac{1}{r}$ *der Konvergenzradius der Potenzreihe* $(\sum_{k=0}^n a_k x^k)_{n=1}^\infty$*.*
2. Wenn der Limes $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = r$ *existiert, so ist* $\frac{1}{r}$ *der Konvergenzradius der Potenzreihe* $(\sum_{k=0}^n a_k x^k)_{n=1}^\infty$*.*

Beweis: 1. Da $\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}| = r|x|$ ist, konvergiert die Reihe $(\sum_{k=0}^n a_k x^k)_{n=0}^\infty$ für jedes x mit $r|x| < 1$ absolut (Konvergenzkriterium von D'Alembert). Für jedes x mit $r|x| > 1$ konvergiert die Reihe nicht absolut: wir rechnen wie im Beweis des Konvergenzkriteriums von D'Alembert

$$|a_n||x|^n = |a_{n_0}||x|^{n_0}\frac{|a_{n_0+1}||x|^{n_0+1}}{|a_{n_0}||x|^{n_0}}\cdots\frac{|a_n||x|^n}{|a_{n-1}||x|^{n-1}}$$

$$\geq |a_{n_0}||x|^{n_0}(1+\frac{r|x|-1}{2})^{n-n_0}.$$

Folglich ist für $r|x| > 1$ die Reihe $(\sum_{k=0}^n |a_k||x|^k)_{n=1}^\infty$ unbeschränkt, so dass der Konvergenzradius $< \frac{1}{r}$ sein muss.
2. Da $\lim_{n\to\infty}|a_n x^n|^{\frac{1}{n}} = r|x|$ ist, konvergiert die Reihe $(\sum_{k=0}^n a_k x^k)_{n=0}^\infty$ für jedes x mit $r|x| < 1$ absolut (Konvergenzkriterium von Cauchy). Für jedes x mit $r|x| > 1$ konvergiert die Reihe nicht: für genügend große n ist

$$|a_n|^{\frac{1}{n}}|x| \geq K > 1,$$

so dass Vergleich mit der geometrischen Reihe zeigt, dass die Reihe $(\sum_{k=0}^n |a_k||x|^k)_{n=1}^\infty$ unbeschränkt ist, so dass der Konvergenzradius $< \frac{1}{r}$ sein muss. □

12. Bernsteinpolynome und der Satz von Weierstrass

Theorem 12.1. *Ist* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *stetig, so konvergieren die Bernsteinpolynome*

$$p_n(x) := \sum_{j=0}^n f(\frac{j}{n})\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}$$

für $n\to\infty$ *auf* $[0,1]$ *gleichmäßig gegen die Funktion* f*, d.h.*

$$\sup_{[0,1]}|f(x)-p_n(x)| \to 0, n\to\infty.$$

Korollar 12.2 (Satz von Weierstrass)**.** *Zu jeder stetigen Funktion* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *existiert eine Folge von Polynomen* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, so dass* p_n *auf* $[0,1]$ *für* $n\to\infty$ *gleichmäßig gegen die Funktion* f *konvergiert.*

Bemerkung 12.3. *Die Lagrangepolynome*

$$q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(\frac{j}{n}) \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - \frac{i}{n}}{\frac{j}{n} - \frac{i}{n}}$$

konvergieren leider nicht unbedingt gegen f (nicht einmal punktweise).

Beweis des Theorems: Aufgrund der Stetigkeit von f und p_n existiert $x_n \in [0,1]$, so dass $\sup_{[0,1]} |f(x) - p_n(x)| = |f(x_n) - p_n(x_n)|$ ist. Wir definieren die Mengen

$$M := \{j \in \{0,\dots,n\} |\ |x_n - \frac{j}{n}| < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\} \text{ und}$$

$$N := \{j \in \{0,\dots,n\} |\ |x_n - \frac{j}{n}| \geq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\}.$$

Aufgrund Lemma 9.5 genügt es, die Ungleichung
(2)

$$|f(x_n) - p_n(x_n)| \leq \max_{j\in M} |f(x_n) - f(\frac{j}{n})| + \max_{j\in N} \frac{2\sup_{[0,1]}|f|}{n}\left(x_n - \frac{j}{n}\right)^{-2}$$

zu zeigen. Dazu bemerken wir zunächst, dass aus

$$1 = (x + (1-x))^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} =: \sum_{j=0}^{n} q_{nj}(x)$$

die Identität

$$f(x) - p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (f(x) - f(\frac{j}{n}))q_{nj}(x)$$

folgt. Wir müssen also

$$\left|\sum_{j=0}^{n}(f(x_n) - f(\frac{j}{n}))q_{nj}(x_n)\right| \leq \sum_{j\in M} |f(x_n) - f(\frac{j}{n})| q_{nj}(x_n) + \sum_{j\in N} |f(x_n) - f(\frac{j}{n})| q_{nj}(x_n)$$

abschätzen. Die erste Summe der rechten Seite erfüllt

$$\sum_{j\in M} |f(x_n) - f(\frac{j}{n})| q_{nj}(x_n) \leq \max_{j\in M} |f(x_n) - f(\frac{j}{n})|.$$

Die zweite Summe erfüllt

$$\sum_{j\in N} |f(x_n) - f(\frac{j}{n})| q_{nj}(x_n) \leq 2\sup_{[0,1]}|f| \sum_{j\in N} q_{nj}(x_n)\left(x_n - \frac{j}{n}\right)^2 \left(\max_{j\in N}\left(\left(x_n - \frac{j}{n}\right)^{-2}\right)\right),$$

so dass es zum Beweis von (2) genügt,

$$\sum_{j\in N} q_{nj}(x_n)\left(x_n - \frac{j}{n}\right)^2 \le \frac{1}{n} \tag{3}$$

zu zeigen. Dazu zerlegen wir die Summe in die drei Teile

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} q_{nj}(x_n)\left(x_n - \frac{j}{n}\right)^2 \\
=&\sum_{j=0}^{n} q_{nj}(x_n){x_n}^2 - 2\sum_{j=0}^{n} q_{nj}(x_n)x_n\frac{j}{n} + \sum_{j=0}^{n} q_{nj}(x_n)(\frac{j}{n})^2 \\
=&I + II + III.
\end{aligned}$$

Teil $I = {x_n}^2$.
Teil

$$\begin{aligned}
II &= -2x_n \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} {x_n}^j(1-x_n)^{n-j}\frac{j}{n} \\
&= -2{x_n}^2 \sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ j-1 \end{pmatrix} {x_n}^{j-1}(1-x_n)^{(n-1)-(j-1)} \\
&= -2{x_n}^2 \sum_{j=0}^{n-1} q_{n-1,j}(x_n) \\
&= -2{x_n}^2.
\end{aligned}$$

Teil

$$\begin{aligned}
III &= \sum_{j=0}^{n} (\frac{j}{n})^2 \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} {x_n}^j(1-x_n)^{n-j} \\
&= \frac{x_n}{n}\sum_{j=1}^{n} j \begin{pmatrix} n-1 \\ j-1 \end{pmatrix} {x_n}^{j-1}(1-x_n)^{(n-1)-(j-1)} \\
&= \frac{x_n}{n}(1 + \sum_{j=1}^{n}(j-1) \begin{pmatrix} n-1 \\ j-1 \end{pmatrix} {x_n}^{j-1}(1-x_n)^{(n-1)-(j-1)}) \\
&= \frac{x_n}{n} + \frac{{x_n}^2(n-1)}{n}\sum_{j=2}^{n} \begin{pmatrix} n-2 \\ j-2 \end{pmatrix} {x_n}^{j-2}(1-x_n)^{(n-2)-(j-2)} \\
&= \frac{x_n}{n} + {x_n}^2(1-\frac{1}{n}) = {x_n}^2 + \frac{x_n}{n}(1-x_n).
\end{aligned}$$

Also gilt
$$I + II + III = \frac{x_n}{n}(1 - x_n) \leq \frac{1}{n},$$
was (3) und damit (2) impliziert. □

13. Funktionen zweier Variablen

Definition 13.1. *Sei D eine Menge von Punkten in der Ebene. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Funktion (zweier reeller Variablen), wenn f jedem Element (x, y) von D genau eine reelle Zahl $f(x)$ zuweist. D heißt Definitionsmenge von f, und die Menge $f(D) = \{f(x)|x \in D\}$ heißt Wertemenge von f.*

Beispiel 13.2. $f : [0, 1] \times (0, 1] \to \mathbb{R}$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{x}{y}$$
hat die Definitionsmenge $[0, 1] \times (0, 1]$ und die Wertemenge $[0, +\infty)$; hier bezeichnet $[0, 1] \times (0, 1] := \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1\}$ die Produktmenge der Mengen/Intervalle $[0, 1]$ und $(0, 1]$.

Beschränktheit, Maximum, Minimum, Supremum und Infimum einer Funktionen zweier Variablen werden analog zum Falle einer Variablen definiert.

Definition 13.3. *Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ist, so sagen wir, die Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen den Limes/Grenzwert (a, b) und schreiben $(a, b) = \lim_{n\to\infty}(a_n, b_n)$.*

Es gelten die Grenzwertsätze für Linearkombinationen von konvergierenden Folgen. Grenzwerte sind eindeutig, und konvergierende Folgen sind beschränkt.

Definition 13.4 (Limes von Funktionen). *Falls $F \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für jede Zahlenfolge $D \setminus \{(a, b)\} \ni (a_n, b_n) \to (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \to \infty$*
$$f(a_n, b_n) \to F \ , \ n \to \infty$$
gilt, so sagen wir, dass die Funktion f für $(x, y) \to (a, b)$ gegen den Limes F konvergiert. Wir schreiben $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f = F$.

Es gelten die Grenzwertsätze für Linearkombinationen, Produkte und Quotienten von Limes.

Definition 13.5 (Stetigkeit von Funktionen). *Erfüllt die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für ein $(x_0, y_0) \in D$*
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f = f(x_0, y_0)$$

so sagen wir, f ist stetig im Punkt (x_0, y_0). Ist f in jedem Punkt von D stetig, so sagen wir, f ist stetig auf D.

Es gelten die Grenzwertsätze für Linearkombinationen, Produkte und Quotienten stetiger Funktionen. Die Hintereinanderschaltung/Verkettung $g \circ f$ einer stetigen Funktion g einer Variablen mit einer stetigen Funktion zweier Variablen f ist stetig.

Definition 13.6 (Partielle Ableitungen). *Sei $x_0 \in (a, b)$ und sei die Funktion f auf der Menge $(a, b) \times \{y_0\}$ definiert. Wenn der Limes*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

existiert, so sagen wir, die Funktion f ist im Punkt (x_0, y_0) bezüglich der Variablen x differenzierbar. Der Limes heißt partielle Ableitung der Funktion f im Punkt (x_0, y_0) bezüglich der Variablen x und wird mit $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ oder $f_x(x_0, y_0)$ bezeichnet. Partielle Ableitungen bezüglich der Variablen y werden analog definiert.

Beispiel 13.7. $f(x, y) = x^2 y \Rightarrow f_x(x_0, y_0) = 2x_0 y_0, f_y(x_0, y_0) = x_0^2$

Es gelten die Ableitungsregeln für Linearkombinationen, Produkte und Quotienten differenzierbarer Funktionen.

Definition 13.8. *Wenn f in jedem Punkt von $(a, b) \times (c, d)$ bezüglich x und y differenzierbar ist und sowohl f_x als auch f_y auf $(a, b) \times (c, d)$ stetig sind, so sagen wir $f \in C^1((a, b) \times (c, d))$.*

Lemma 13.9 (Kettenregel). *Sind $p : (a, b) \to \mathbb{R}, q : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf (a, b) stetig differenzierbar, und ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, so ist die Funktion $\phi(t) := f(p(t), q(t))$ auf (a, b) stetig differenzierbar, und in jedem $t \in (a, b)$ gilt*

$$\phi'(t) = f_x(p(t), q(t))p'(t) + f_y(p(t), q(t))q'(t).$$

Beweis: Für

$$h_1 := \begin{cases} p(t + h) - p(t), p(t + h) - p(t) \neq 0 \\ h, p(t + h) - p(t) = 0, \end{cases}$$

$$h_2 := \begin{cases} q(t + h) - q(t), q(t + h) - q(t) \neq 0 \\ h, q(t + h) - q(t) = 0, \end{cases}$$

erhalten wir

$$\frac{\phi(t + h) - \phi(t)}{h} =$$

$$\frac{1}{h}(f(p(t+h), q(t+h)) - f(p(t), q(t+h)) + f(p(t), q(t+h)) - f(p(t), q(t)))$$

$$= \frac{f(p(t)+h_1, q(t+h)) - f(p(t), q(t+h))}{h_1} \frac{p(t+h)-p(t)}{h}$$
$$+ \frac{f(p(t), q(t)+h_2) - f(p(t), q(t))}{h_2} \frac{q(t+h)-q(t)}{h}.$$

Wenden wir auf $x \mapsto f(x, q(t+h))$ und $y \mapsto f(p(t), y)$ den Mittelwertsatz an, so ergibt sich, dass

$$\frac{\phi(t+h)-\phi(t)}{h} = f_x(p(t)+\alpha h_1, q(t+h)) \frac{p(t+h)-p(t)}{h}$$
$$+ f_y(p(t), q(t)+\beta h_2) \frac{q(t+h)-q(t)}{h}.$$

Für $h \to 0$ konvergiert die rechte Seite aufgrund der Stetigkeit von f_x, f_y und der stetigen Differenzierbarkeit von p und q gegen

$$f_x(p(t), q(t)) p'(t) + f_y(p(t), q(t)) q'(t).$$

Folglich konvergiert die linke Seite gegen den gleichen Grenzwert und ist die Ableitung von ϕ. □

Beispiel 13.10 (Richtungsableitung)**.** *Wenn* $(v, w) \neq (0, 0)$ *und wenn der Limes*

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv, y_0 + hw) - f(x_0, y_0)}{h}$$

existiert, so nennen wir L *die Richtungsableitung von* f *im Punkt* (x_0, y_0) *in Richtung* (v, w)*. Falls* f *die Voraussetzungen des vorigen Lemmas erfüllt, so gilt*

$$L = f_x(x_0, y_0) v + f_y(x_0, y_0) w =: \nabla f(x_0, y_0) \cdot (v, w).$$

Der Graph jeder Funktion $f(x, y)$ *definiert eine "Landschaft" im* $\mathbb{R}^3$*. Wenn immer der Gradient* $\nabla f(x_0, y_0)$ *ungleich* $(0, 0)$ *ist, so zeigt er in die Richtung, in welcher der Graph von* f *am steilsten ansteigt und steht senkrecht zur Niveaulinie* $\{(x, y) | f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$*.*

14. Einfache Differentialgleichungen

14.1. **Was ist eine gewöhnliche Differentialgleichung?** Alle im Analysiszyklus behandelten gewöhnliche Differentialgleichungen sind von der Form $t \in (-\infty, \infty)$, $y(t)$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^m$, und

$$\text{für alle } t \in (a, b) \text{ ist } y'(t) = \lim_{s \to t} \frac{y(s) - y(t)}{s - t} = f(t, y(t)).$$

Dazu kann noch eine Anfangsbedingung kommen.
In vielen Problemen drückt die Variable t die Zeit aus. Ist $m > 1$, so sagen wir, es handelt sich um ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

14.2. **Wozu sind gewöhnliche Differentialgleichungen gut?** 1. Abstrakte Antwort: In den Naturwissenschaften usw. kommt es oft vor, dass die Wachstumsrate y' einer Beobachtungsgröße y proportional zu y selbst ist oder auf bekannte Weise von y abhängt.
2. Konkretes Beispiel: Halbwertzeit und Altersbestimmung
Ernest Rutherford wies nach, dass die Radioaktivität einer Substanz proportional zur Anzahl ihrer Atome ist. Folglich ist die Rate $y'(t)$, mit der die Anzahl der radioaktiven Atome abnimmt, proportional zu $y(t)$: $-y'(t) \sim y(t)$ bzw.

$$y'(t) = -\lambda y(t);$$

hier ist $y(t)$ die Anzahl der radioaktiven Atome zum Zeitpunkt t. Die Zahl λ ist ein Parameter, der nur von der Substanz abhängt. Es folgt, dass

$$y(t) = y(0)\exp(-\lambda t).$$

Insbesondere existiert eine Zeit T, welche nur von der Substanz abhängt, so dass $\frac{y(T)}{y(0)} = \frac{1}{2}$ ist.

$$T = \frac{-\log(0.5)}{\lambda}$$

heißt Halbwertzeit. Das gleiche Prinzip wird mittels Messung der Konzentration radioaktiver Isotope zur Altersbestimmung von archäologischen Artefakten usw. verwendet. Im 20. Jahrhundert sind damit viele Fälschungen entlarvt worden.
Leider ist es im Allgemeinen nicht möglich, die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichungen wie oben mittels einer Formel auszudrücken. Man versuche z.B., die Lösung $y(t)$ von $y'(t) = t^2 + y^2$ konkret auszurechnen. Für einige Prototypen von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist ein "Lösen" mit konkreter Formel jedoch möglich. Im Folgenden werden wir uns auf mehrere solcher Prototypen konzentrieren und zeigen, wie man für diese eine Lösung $y \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ (also in einem kleinen Intervall um den Anfangszeitpunkt) berechnen kann.

14.3. **Typ 1: $y'(t) = f(t), y(t_0) = y^0$.** (hier wird angenommen, dass f eine stetige Funktion ist)
Nach Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $y(t) = y^0 + \int_{t_0}^t f(s)\,ds$.

14.4. **Typ 2: $y'(t) = f(t)g(y(t)), y(t_0) = y^0$.** (hier wird angenommen, dass f und g stetige Funktionen sind)
Ist $g(y^0) = 0$, so ist die Konstante y^0 eine Lösung. Betrachten wir also den Fall $g(y^0) \neq 0$: In diesem Fall existiert in einer Umgebung von y^0 eine Stammfunktion H von $\frac{1}{g}$, und es existiert eine Stammfunktion F

von f. Existiert eine Lösung $y \in C^1((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ so erhalten wir in einer Umgebung von t_0

$$H(y(t)) - H(y^0) = F(t) - F(t_0).$$

Da H in einer Umgebung von y^0 invertierbar ist, definiert

$$y(t) = H^{-1}(H(y^0) + F(t) - F(t_0))$$

in einer Umgebung von t_0 eine Lösung unseres Anfangswertproblems.

Beispiel 14.1. *1. Für $y'(t) = -\sqrt{y(t)}, y(t_0) = y^0 > 0$ hat $H(x) = 2\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion $H^{-1}(z) = (\frac{z}{2})^2$. Wir erhalten also in einer Umgebung von t_0*

$$y(t) = (\frac{(t_0 - t)}{2} + \sqrt{y^0})^2.$$

Mit dieser Formel kann man auf dem Intervall $(-\infty, t_0 + 2\sqrt{y^0})$ eine Lösung definieren.
2. Für $y'(t) = e^{-y} \cos t, y(t_0) = y^0$ ist $H(x) = e^x, H^{-1}(z) = \log z, F(t) = \sin t$, so dass in einer Umgebung von t_0

$$y(t) = \log(\sin t - \sin t_0 + e^{y^0})$$

eine Lösung definiert. Setzen wir $c := e^{y^0} - \sin t_0$, so können wir mit dieser Formel auf dem Intervall $(\sup\{s < t_0 | c + \sin s \leq 0\}, \inf\{s > t_0 | c + \sin s \leq 0\})$ eine Lösung definieren.

14.5. **Typ 3: Lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y'(t)+a(t)y(t) = f(t), y(t_0) = y^0$.** (hier wird angenommen, dass f und a stetige Funktionen sind)
Als Erstes lösen wir die homogene Gleichung $y'(t)+a(t)y(t) = 0, y(t_0) = y^0$. Diese Gleichung ist vom Typ 2 mit $H(x) = \log x, H^{-1}(z) = e^z, F(t) = -A(t)$, wo A die Stammfunktion von a ist. Also definiert

$$y(t) = \exp(A(t_0) - A(t) + \log(y^0)) = y^0 e^{A(t_0)} e^{-A(t)}$$

eine Lösung auf $\mathbb{R}$.
Nun wenden wir uns der inhomogenen Gleichung zu, d.h. dem Fall $f \neq 0$: Der Ansatz ist, anstatt der Konstanten $y^0 e^{A(t_0)}$ eine Funktion $h(t)$ zu betrachten, und zu sehen, ob $\phi(t) = h(t)e^{-A(t)}$ bei geeigneter Wahl von $h(t)$ eine Lösung ergibt. Es ist

$$\phi'(t) = (h(t)e^{-A(t)})' = h'(t)e^{-A(t)} - h(t)e^{-A(t)}a(t), \phi'(t) + a(t)\phi(t)$$
$$= h'(t)e^{-A(t)}.$$

Damit die rechte Seite zu $f(t)$ wird, muss $h'(t)e^{-A(t)} = f(t)$ sein. Es folgt $h(t) = c + \int_{t_0}^t f(s)e^{A(s)}\,ds$. Setzen wir hier $c := e^{A(t_0)}y^0$, so erhalten wir mit

$$y(t) = e^{-A(t)}\left(e^{A(t_0)}y^0 + \int_{t_0}^t f(s)e^{A(s)}\,ds\right)$$

eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$.