

Übungen - Signale und Systeme 2

Markus Kessler | Mathias Lechner | Martin Wührer

SS14

Aufgabe 1.1

Angabe

Für das zeitbegrenzte Signal

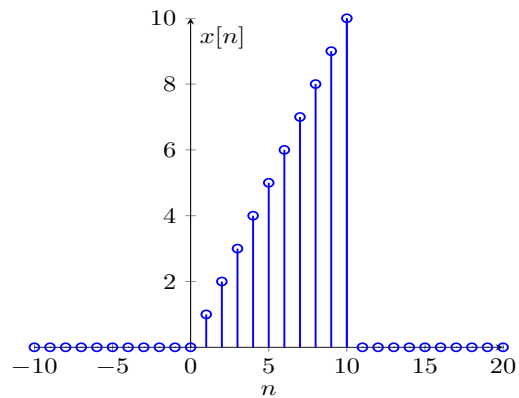
$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n, & 0 \leq n \leq 10 \\ 0, & n > 10 \end{cases}$$

zeichnen Sie folgende Signale:

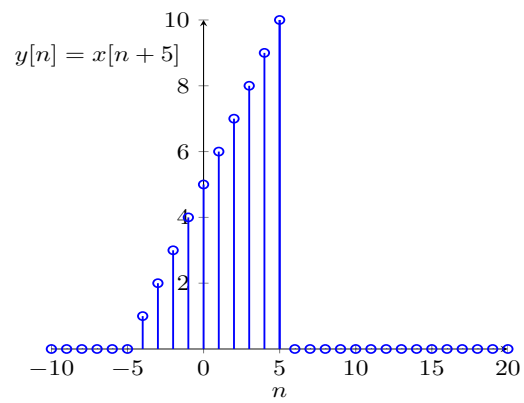
- a) $y[n] = x[n + 5]$
- b) $y[n] = x[-n + 5]$
- c) $y[n] = x[2n]$
- d) gerades und ungerades Teilsignal von $x[n]$
- e) $y[n] = x[n + 10] + x[-n + 10] - 10\delta[n]$

Lösung

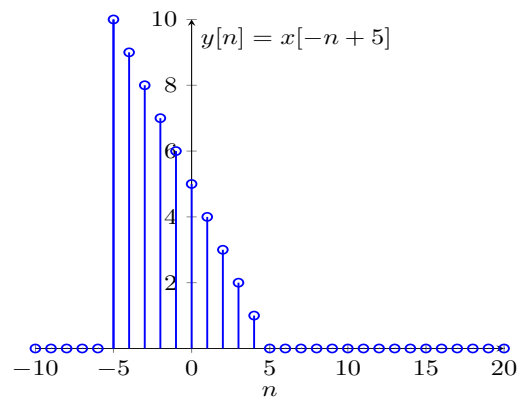
Die gegebene Funktion $x[n]$:



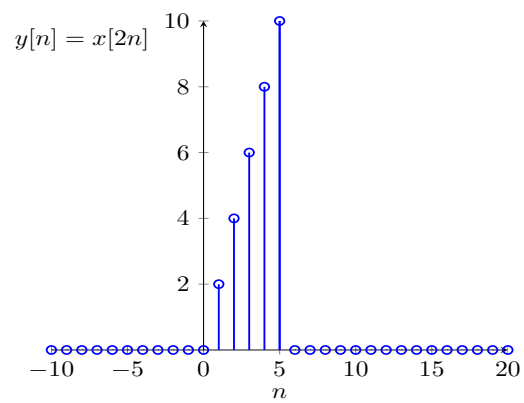
a) $y[n] = x[n + 5]$



b) $y[n] = x[-n + 5]$



c) $y[n] = x[2n]$



d) gerades und ungerades Teilsignal von $x[n]$

Für die geraden und ungeraden Teile definieren wir zuerst allgemein:

$$x[n] = x_g[n] + x_u[n]$$

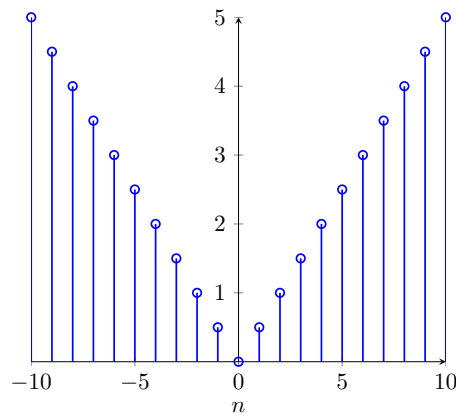
Nun erhalten wir durch umformen:

$$\text{Gerades Signal: } x_g[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x[-n]), \forall n$$

$$\text{Ungerades Signal: } x_u[n] = \frac{1}{2} (x[n] - x[-n]), \forall n$$

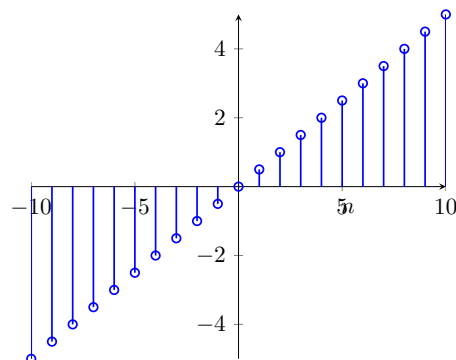
Daraus lassen sich nun die geraden und ungeraden Teilsignale berechnen (einfaches Einsetzen):

$$x_g[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x[-n])$$



Gerades Teilsignal

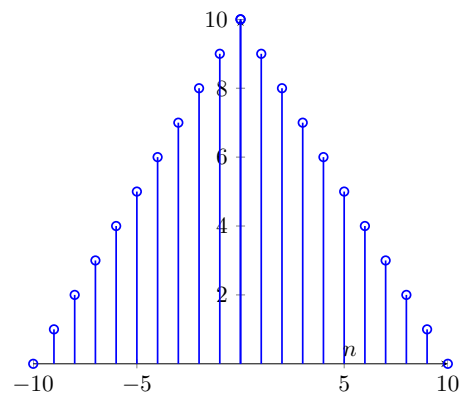
$$x_u[n] = \frac{1}{2} (x[n] - x[-n])$$



Ungerades Teilsignal

e) $y[n] = x[n + 10] + x[-n + 10] - 10\delta[n]$

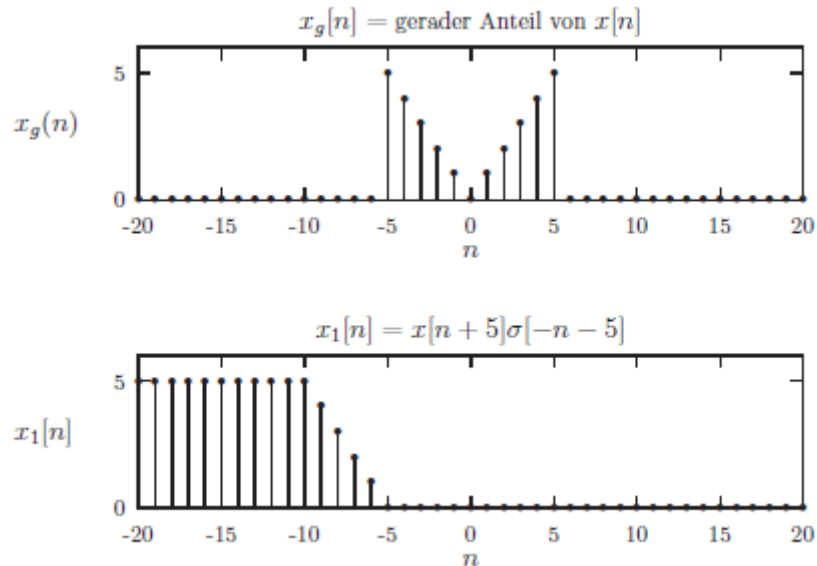
$$x_u[n] = x[n + 10] + x[-n + 10] - 10\delta[n]$$



Aufgabe 1.2

Angabe

Von einem Signal $x[n]$ sei der gerade Anteil $x_g[n]$ und das Signal $x_1[n]$ gegeben. Bestimmen Sie den ungeraden Anteil des Signals $x[n]$.



Lösung

In diesem Beispiel wird der Einheitssprung σ verwendet. Dieser ist definiert mit

$$\sigma[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

Betrachten wir nun die Funktion $x_1[n+5]\sigma[-n-5]$, lässt sich leicht erkennen, dass der Einheitssprung $\sigma[-n-5]$ nur bei $n \leq -5$ Werte zulässt. Wir können das Signal $x[n]$ vorerst nur bis zu dieser Stelle rekonstruieren.

Der Ausdruck $x[n+5]$ verschiebt das Signal $x[n]$ nach links. Es lässt sich aus dem Plot herauslesen, dass $x[n]$ bis zu $n = -5$ den Wert 5 erzeugt, und anschließend linear von -5 gegen 0 abfällt. Wir können definieren:

$$x[n] = \begin{cases} 5, & n < -5 \\ -n, & -5 \leq n < 0 \\ ?, & n \geq 0 \end{cases}$$

Nun fehlt uns noch Definition für positive n -Werte. Dabei bedienen wir uns dem angegebenen $x_g[n]$ und der Umformung:

$$x_g[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \Leftrightarrow x[n] = 2x_g[n] - x[-n]$$

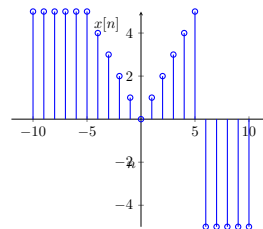
Das heißt, dass wir alle positiven Signalwerte von $x[n]$ berechnen können, indem wir die geraden Anteile $x_g[n]$ und die negativen Signalwerte $x[-n]$ kennen. Nun muss nur noch der Parameter n für $n \geq 0$ variiert werden.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2x_g[n]$	0	2	4	6	8	10	0	0	0	0	0
$x[-n]$	0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
$x[n]$	0	1	2	3	4	5	-5	-5	-5	-5	-5

Somit können wir $x[n]$ vollständig definieren:

$$x[n] = \begin{cases} 5, & n < -5 \\ |n|, & -5 \leq n \leq 5 \\ -5, & n > 5 \end{cases}$$

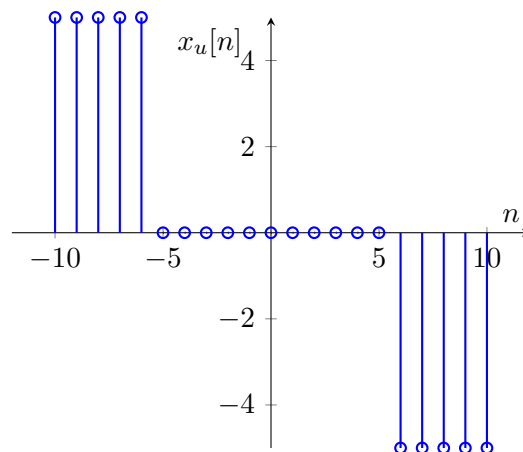
Im letzten Schritt berechnen wir uns nun die ungeraden Teilsignale $x_u[n]$.



$$x_u[n] = \frac{1}{2} (x[n] - x[-n])$$

Daraus erhalten wir:

$$x_u[n] = \begin{cases} 5, & -5 < n \\ 0, & -5 \leq n \leq 5 \\ -5, & 5 < n \end{cases}$$



Aufgabe 1.3

Jedes Signal $x[n]$ kann in ein gerades Signal $x_g[n]$ und in ein ungerades Signal $x_u[n]$ zerlegt werden. Zeigen Sie allgemein, dass

a) das Produkt $x_g[n] x_u[n]$ ein ungerades Signal ist

$$\begin{aligned}x_g[n] &= \frac{1}{2} (x[n] + x[-n]) \\x_u[n] &= \frac{1}{2} (x[n] - x[-n])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_g[n] x_u[n] &= \frac{1}{2} (x[n] - x[-n]) \cdot \frac{1}{2} (x[n] - x[-n]) \\&= \frac{1}{4} (x[n] + x[-n]) \cdot (x[n] - x[-n]) \\&= \frac{1}{4} (x[n]^2 - x[-n]^2)\end{aligned}$$

Das ist dieselbe Form, wie ein ungerades Signal. Genauer gesagt, ist das das ungerade Teilsignal von $\frac{x[n]^2}{2}$.

b) für das ungerade Signal gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u[n] = 0$$

Dafür spalte ich die Summe in drei Teile:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x_u[n] + x_u[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x_u[n]$$

Die erste Summe lässt sich mithilfe einer Indexverschiebung umschreiben:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x_u[n] = \sum_{n=1}^{\infty} x_u[-n]$$

Eine Eigenschaft von ungeraden Signalen ist:

$$x_u[-n] = -x_u[n]$$

Das übernehmen wir nun für die Summe und erhalten:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x_u[n] + x_u[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x_u[n] = x_u[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x_u[n] - \sum_{n=1}^{\infty} x_u[n]$$

c) die Signalenergie gegeben ist durch

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_g^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n]$$

Dafür setzen wir für $x[n]$ die Eigenschaft $x[n] = x_g[n] + x_u[n]$ ein:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_g[n] + x_u[n])^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_g^2[n] + 2x_g[n]x_u[n] + x_u^2[n])$$

Nun müssen wir nur noch beweisen, dass $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_g[n]x_u[n] = 0$ gilt. Dafür ziehe ich die 2 aus der Summe und spalte sie auf:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_g[n]x_u[n] = 2 \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} x_g[n]x_u[n] + x_g[0]x_u[0] + \sum_{n=1}^{\infty} x_g[n]x_u[n] \right)$$

Nun bedienen wir uns den Beweisen aus Aufgabe a und b. Durch a) wissen wir, dass die Multiplikation von einem geraden mit einem ungeraden Signal ein ungerades Signal ergibt. Im Punkt b) haben wir bewiesen, dass die unendliche Summe über ein ungerades Signal gleich 0 ist. Somit verschwinden diese drei Terme und es bleibt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_g^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_u^2[n]$$

Aufgabe 1.4

Angabe

Welche Grundperiode hat das zeitdiskrete Signal

$$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

in Abhängigkeit von den ganzzahligen Größen k und N ?

Lösung

Für ein periodisches Signal $x[n]$ mit der Periode N gilt allgemein

$$x[n] = x[n + m \cdot N], \quad m \in \mathbb{Z}$$

Wenden wir nun diese Eigenschaft auf unser zeitdiskretes Signal an:

$$\begin{aligned} x[n + N] &= e^{j\frac{2\pi}{N}(n+N)k} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{N}nk} e^{j\frac{2\pi}{N}Nk} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \underbrace{e^{j2\pi k}}_{=1} \\ &= e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned}$$

In der Funktion bezeichnen wir N als die **Periodendauer der Grundfrequenz**. Durch die Variation von $k = 0, 1, \dots, N - 1$ erzeugen wir ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz, also harmonische Exponentialschwingungen bzw. Oberschwingungen.

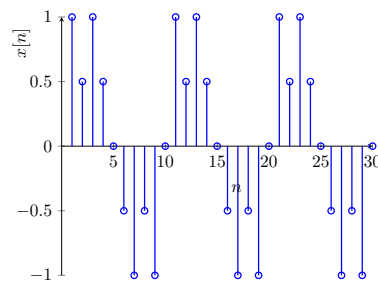
Aufgabe 1.5

Angabe

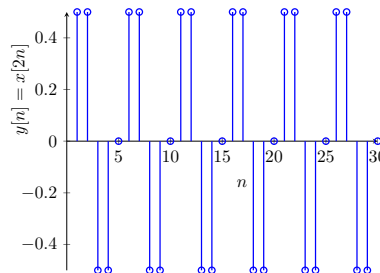
Das Signal $x[n]$ sei periodisch mit der Periode N . Prüfen Sie, ob das Signal $y[n] = x[Mn]$ (M ganzzahlig) ebenfalls periodisch ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Periode von $y[n]$.

Lösung

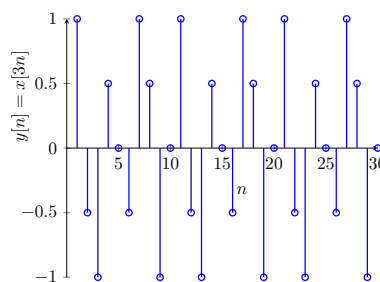
Das Signal $y[n]$ ist auf jeden Fall periodisch. Für die Ermittlung der neuen Periode betrachten wir folgendes Beispielsignal:



Das Signal besitzt offensichtlich die Periode $N = 10$. Nun wählen wir $M = 2$ und erhalten:



Wir wählen nur jeden zweiten Wert, unsere Periode verkürzt sich auf $N = 5$. Dasselbe führen wir mit $M = 3$ durch:



Hier wird nur jeder dritte Wert verwendet. Die Periode ist diesmal $N = 10$. Die Formel lautet

$$N_x = \frac{N}{ggT(N,k)}$$

Aufgabe 1.6

Angabe

Die Fourierreihendarstellungen der periodischen Signale $x[n]$ und $y[n]$ sind gegeben durch

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \Leftrightarrow c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$$

und

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \Leftrightarrow d_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}$$

Berechnen Sie den Zusammenhang zwischen den Fourierreihenoeffizienten d_k und c_k für die folgenden Signalbeziehungen:

- a) $y[n] = x\left[n - \frac{N}{2}\right]$, N gerade
- b) $y[n] = x[N - n]$
- c) $y[n] = \frac{1}{2} (x[n] + x^*[N - n])$
- d) $y[n] = x[2n]$
- e) $y[n] = x[n] \cos \frac{2\pi L}{M} n$, L und M ganzzahlig
- f) $y[n] = x^2[n]$

Lösung

a)

Aufgabe 1.7

Angabe

Für die gegebenen periodischen Signale bestimme man die Fourierreihenkoeffizienten c_k :

a) $x[n] = 1 - \cos \frac{\pi}{4} n$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, -2 \leq n \leq 3$, und $x[n+6] = x[n]$

c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-3k]$

Lösung

Für die Fourierreihenkoeffizienten c_k gilt:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Außerdem hilft uns die Summenformel der endlichen geometrischen Reihe weiter:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x^k = \frac{1-x^N}{1-x}$$

a) $x[n] = 1 - \cos \frac{\pi}{4} n$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{4} n\right)\right) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos \left(\frac{\pi}{4} n\right) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Umformung

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx})$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} - \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{\pi}{4} n} e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} - \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \frac{\pi}{4} n} e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} - \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} n(\frac{N}{8}-k)} - \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} n(-\frac{N}{8}-k)} \end{aligned}$$

Nun wenden wir die Summenformel an und erhalten:

$$c_k = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} - \frac{1}{2N} \frac{1 - e^{j2\pi(N-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)}} - \frac{1}{2N} \frac{1 - e^{j2\pi(-N-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(-N-k)}} -$$

Ich darf den Exponenten beliebig mit N erweitern (siehe Folie 26 - Handout 1):

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} - \frac{1}{2N} \frac{1 - e^{j2\pi(N-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)}} - \frac{1}{2N} \frac{1 - e^{j2\pi(N-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}} - \frac{1}{N} \frac{1 - e^{j2\pi(N-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)}} \end{aligned}$$