

Cálculo Financeiro

Aplicações no
Secundário



LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÉNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

<http://profmat2011.apm.pt>

ProfMat2011

5-6 Setembro

<http://siemxxii.apm.pt>

XXII SIEM

07-08 SETEMBRO

Introdução

São inúmeras as situações do nosso quotidiano em que estão presentes conceitos de Cálculo Financeiro. Podem ser abordadas:

- numa ótica de investimento
- numa ótica de financiamento

Essência do CF

O cerne do CF reside no *Valor*

Temporal do Dinheiro que é um conceito intuitivo.

Um euro, seja investido ou seja emprestado, não tem para nós, o mesmo valor consoante fique disponível imediatamente ou apenas daqui a algum tempo

Esta atitude racional é a chamada *preferência pela liquidez* pois relativamente a uma determinada quantia, preferimos dispor dela imediatamente a dispor dela apenas daqui a algum tempo.

Dispondo imediatamente dessa quantia ficamos com liberdade para decidir o destino a dar-lhe:

- Consumo
- Poupança
- Parte Consumo, parte poupança

Centremo-nos então na poupança:

Podemos aplicar essa quantia num depósito bancário (risco reduzido), que nos proporcionará ao fim de um ano um valor superior - *juros*

Em síntese, relativamente a uma mesma quantia, a preferência é receber o mais cedo possível e pagar o mais tarde possível.

É, pois, intuitiva a importância do factor tempo em qualquer análise que envolva capitais. Vamos então atribuir-lhe um valor: *juro*

Juro - Remuneração do capital durante determinado prazo. É, no fundo, o valor do dinheiro tendo em conta o factor tempo.

Justifica-se por 3 razões:

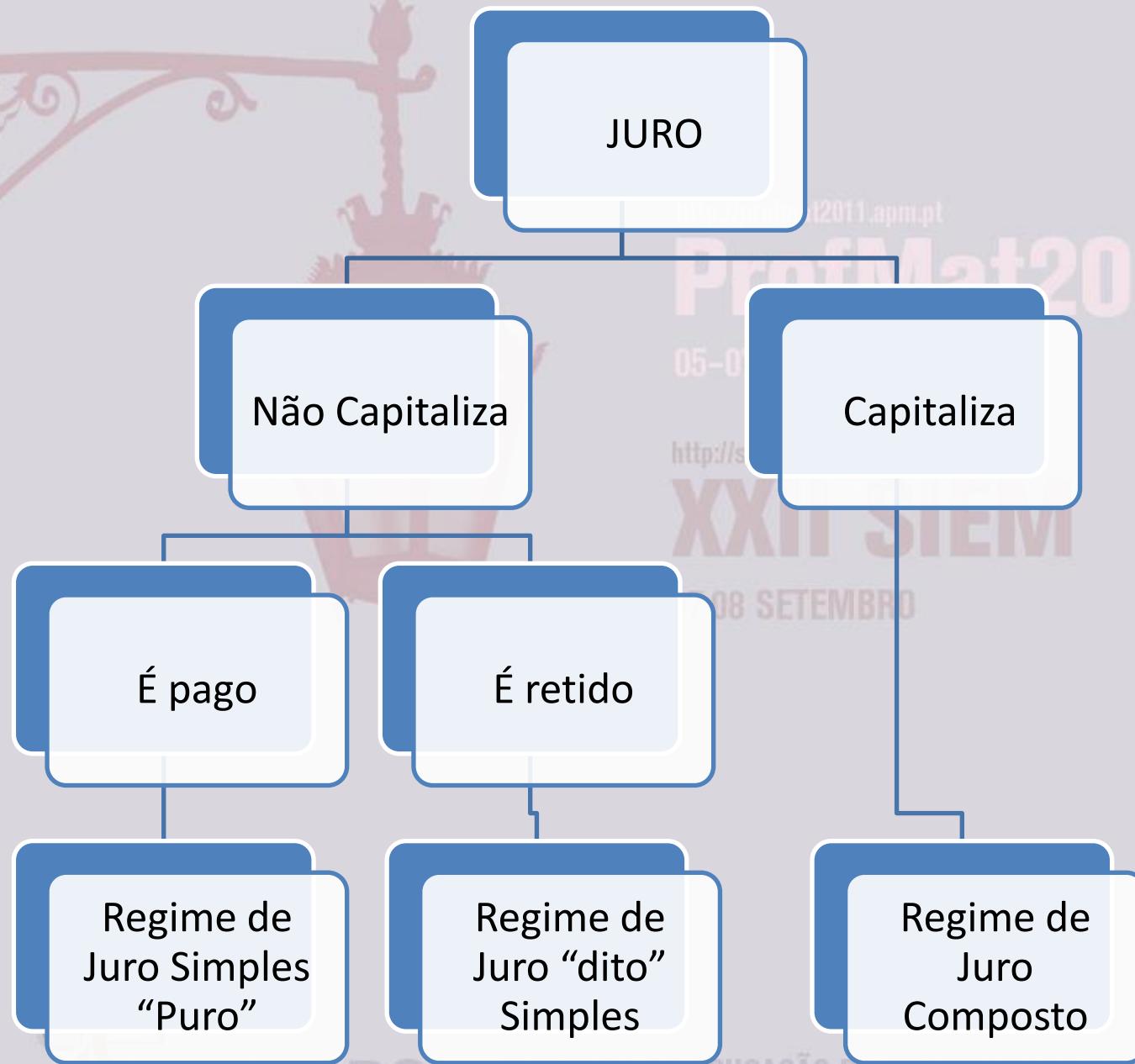
1. Privação da liquidez
2. Perda do poder de compra
3. Risco

Atendendo ao valor temporal do dinheiro, para comparar capitais é necessário que estejam reportados a um mesmo momento. Esta é a chamada *Regra de Ouro do Cálculo Financeiro* e é o âmago de todo e qualquer problema financeiro.



O processo de produção do juro designa-se por *processo de capitalização*. A frequência com que em determinada operação se processa o juro designa-se por *frequência ou periodicidade de capitalização*.

Uma vez produzido 2 coisas podem acontecer ao juro



Exemplo: Determine o juro produzido por um capital de 100€, após um ano, à taxa de 10%, nas 4 situações seguintes:

- a) RJS, capitalização anual
- b) RJS, capitalização semestral
- c) RJC, capitalização anual
- d) RJC, capitalização semestral

a) RJS, capitalização anual

$$J = C \times n \times i$$

$$J = 100 \times 1 \times 0,1$$

$$J = 10$$

Assim o juro total, ao fim de um ano, é 10€.

b) RJS, capitalização semestral

$$J = C \times \frac{n}{2} \times i$$

$$J = 100 \times 0,5 \times 0,1 = 5$$

Como vigora o RJS, estes 5 € não vão capitalizar no período seguinte, pelo que o capital que volta a incidir continua a ser 100€ o juro é o mesmo: 5€

Assim o juro total, ao fim de um ano é, novamente, 10€.



APM

FCUL

LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÉNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

c) RJC, capitalização anual

$$J = C \times n \times i$$

$$J = 100 \times 1 \times 0,1 = 10$$

Neste caso há apenas uma capitalização. Logo não vai haver juros de juros.

Assim o juro total, ao fim de um ano é, novamente, 10€.

d) RJC, capitalização semestral

$$J = 100 \times 0,5 \times 0,1 = 5$$

Como vigora o RJC, estes 5€ vão capitalizar no período seguinte, pelo que o capital sobre o qual vão incidir os juros são 105€.

$$J = 105 \times 0,5 \times 0,1 = 5,25$$

Deste modo o juro total, ao fim de um ano é, agora, 10,25€.

Ora, isto levanta uma questão muito interessante:

Na alínea d), a taxa de juro anual é afinal 10% ou 10,25% ao ano?

A resposta a esta questão é:

AMBAS!

Apenas se trata de diferentes conceitos de taxa de juro.

A primeira, de 10%, é uma *taxa nominal*.

A segunda, de 10,25%, é uma *taxa efetiva*.

Esta distinção ocorreu apenas na situação d) pois é a única em que simultaneamente vigorava o RJC e mais do que uma capitalização no prazo considerado.

Resumindo

IMPORTÂNCIA DA
PERIODICIDADE DAS
CAPITALIZAÇÕES

RELAÇÃO ENTRE TAXA NOMINAL
E TAXA EFETIVA

REGIME DE JURO SIMPLES

IRRELEVANTE

TAXA NOMINAL = TAXA EFECTIVA

REGIME DE JURO COMPOSTO

DETERMINANTE

TAXA NOMINAL \leq TAXA EFECTIVA

TAXAS DE JURO – DIFERENTES CONCEITOS

- Taxas Nominais / Taxas Efetivas
- Taxas Proporcionais / Taxas Equivalentes
- Taxas Ilíquidas / Taxas Líquidas
- Taxas Correntes / Taxas Reais

Taxas Proporcionais / Taxas Equivalentes

Duas taxas, referidas a períodos de tempo diferentes, dizem-se proporcionais se a razão entre elas for a mesma que existe entre os períodos de tempo a que se referem.

Duas taxas, referidas a períodos de tempo diferentes, dizem-se equivalentes quando fazem que um mesmo capital produza o mesmo juro após um mesmo intervalo de tempo.

Assim, relacionando com o exercício

- A taxa anual de 10% e a taxa semestral de 5% são proporcionais;
- À taxa anual nominal de 10%, com capitalizações semestrais, corresponde a taxa anual efetiva de 10,25%
- A taxa semestral equivalente à taxa anual efectiva de 10,25% é 5% (RJC)

- Em RJS não há distinção entre taxas proporcionais e taxas equivalentes nem entre taxas nominais e taxas efetivas.
- Essa distinção só surge em RJC e quando simultaneamente , o período a que se reporta a taxa não coincide com a periodicidade a que são efetuadas as capitalizações.
- É evidente uma relação entre taxas nominais e taxas proporcionais por um lado e entre taxas efectivas e taxas equivalentes por outro. As primeiras não reflectem o efeito das sucessivas capitalizações.

Vamos calcular algumas taxas de juro, para posteriormente podermos sistematizar :

Dada a taxa anual efetiva de 10%, quais as equações que permitem obter as taxas equivalentes (ou equivalentes) para os seguintes períodos?

- a) Semestre
- b) Trimestre
- c) Bimestre
- d) PMês

a)

$$(1+0,10)^1 = (1+i_2)^2 \Leftrightarrow i_2 = 0,0488$$

b)

$$(1+0,10)^1 = (1+i_4)^4 \Leftrightarrow i_4 = 0,02411$$

c)

$$(1+0,10)^1 = (1+i_6)^6 \Leftrightarrow i_6 = 0,0160$$

d)

$$(1+0,10)^1 = (1+i_{12})^{12} \Leftrightarrow i_{12} = 0,00797$$

De uma forma geral



Instituto de Educação
UNIVERSIDADE DE LISBOA

$$(1+0,10)^1 = (1+i_k)^k$$

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÉNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

Exercício:

Qual é a taxa anual efetiva subjacente à taxa anual nominal de 10%, composta mensalmente?

Resolução:

Taxa proporcional à taxa anual

$$i_{12} = \frac{0,1}{12} = 0,008333$$

Taxa mensal nominal igual à taxa mensal efetiva (pois tem igual período de capitalização)

Assim, a taxa anual efetiva equivalente é

$$(1+i) = (1+i_{12})^{12} \Leftrightarrow i = 0,10471$$

Exercício:

Considere a taxa anual nominal de 9% composta trimestralmente, e calcule as seguintes taxas efetivas.

- a) Mensal
- b) Semestral
- c) Trimestral
- d) Anual



Resolução:

a)

Taxa trimestral proporcional $i_4 = \frac{0,09}{4} = 0,0225$

Esta taxa é efetiva trimestral, pois reporta ao mesmo período (trimestre)

Vamos então determinar a taxa efetiva mensal equivalente

$$(1 + i_{12})^{12} = (1 + 0,0225)^4 \Leftrightarrow i_{12} = 0,007444$$



Resolução:

b)

Como um semestre são dois trimestres, vamos determinar a taxa efetiva semestral equivalente:

$$(1 + i_2) = (1 + 0,0225)^2 \Leftrightarrow i_2 = 0,0455$$

c)

A taxa efetiva trimestral equivalente é 0,0225

Resolução:

d) Para calcular a taxa anual efetiva basta lembrar que 1 ano tem 4 trimestres:

$$(1+i) = (1+0,0225)^4 \Leftrightarrow i = 0,09308$$

Exercício:

Considere a taxa anual efetiva de 9% composta trimestralmente e calcule as seguintes taxas:

- a) Mensal efetiva
- b) Semestral efetiva
- c) Trimestral efetiva
- d) Anual nominal



Resolução:

a) Uma vez que a taxa dada de 9% é efetiva, pela relação de equivalência, determinamos a taxa efetiva mensal (é irrelevante o fato das capitalizações serem trimestrais)

$$(1 + 0,09) = (1 + i_{12})^{12} \Leftrightarrow i_{12} = 0,0072$$

b) Da mesma forma

$$(1 + 0,09) = (1 + i_2)^2 \Leftrightarrow i_2 = 0,0440$$

Resolução:

c) Mais uma vez

$$(1+0,09) = (1+i_4)^4 \Leftrightarrow i_4 = 0,02178$$

d) Agora já é importante as capitalizações serem trimestrais. A taxa trimestral equivalente já foi encontrada na alínea c). Por uma relação de proporcionalidade vamos determinar a taxa nominal anual

$$i = 4 \times 0,02178 = 0,08711$$

Para finalizar, só mais umas siglas... sobre taxas.

TAE- Taxa Anual Efetiva

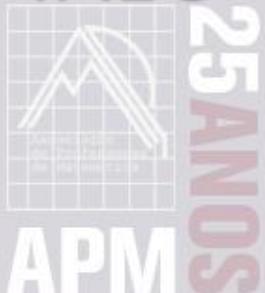
TAN – Taxa Anual Nominal

TANB – Taxa Anual Nominal Bruta

TAEB – Taxa Anual Efetiva Bruta

TAEL – Taxa Anual Efetiva Líquida

TAEG – Taxa Anual Efetiva de Encargos Globais



<http://profmat2011.apm.pt>

ProfMat2011

05-07 SETEMBRO

<http://siemxxii.apm.pt>

SIEM XXII

05-07 SETEMBRO

Regime de Juro Simples e Composto

De acordo com a simbologia que temos vindo
a utilizar, sejam

C – capital inicial

n – nº de períodos de duração da
operação financeira

i – Taxa de juro

Definimos também *Capital Acumulado* num
dado momento à soma do capital inicial
com o juro total produzido até esse
momento. Representemo-lo por **S**

<http://profmat2011.apm.pt>

ProfMat2011

05-07 SETEMBRO

<http://siem2011.apm.pt>

XKIT STEM

07-08 SETEMBRO



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
CENTRO DE CIÉNCIAS DA UNIVERISIDADE DE LISBOA

Regime de Juro Simples

Neste regime o juro total é dado por

$$J=Cni$$

Pelo que o capital acumulado após n períodos de capitalização é

$$S=C+J=C+Cni=C(1+ni)$$

$$S=C(1+ni)$$

A resolução de exercícios neste regime é simples, pelo que passamos à frente.

Regime de Juro Composto

Neste regime vejamos o que acontece:

Ano	Capital Inicial	Juro do ano	Capital acumulado no final de cada ano
1	C	$j_1 = C \times 1 \times i = Ci$	$S_1 = C + j_1 = C + Ci = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$j_2 = C(1+i) \times 1 \times i = Ci(1+i)$	$S_2 = C(1+i) + j_2 = C(1+i) + Ci(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$j_3 = C(1+i)^2 \times 1 \times i = Ci(1+i)^2$	$S_3 = C(1+i)^2 + j_3 = C(1+i)^2 + Ci(1+i)^2 = C(1+i)(1+i)^2 = C(1+i)^3$
...
$n-1$	$C(1+i)^{(n-2)}$	$j_{n-1} = Ci(1+i)^{n-2}$	$S_{n-1} = C(1+i)^{n-1}$
n	$C(1+i)^{(n-1)}$	$J_n = Ci(1+i)^{n-1}$	$S_n = C(1+i)^n$

Relativamente ao Juro periódico evolui em

progressão geométrica de razão $(1+i)$.

O juro total é então a soma dos termos de

uma progressão geométrica

Assim, utilizando a fórmula da soma de termos de uma progressão geométrica temos que

$$S_{PG} = j_1 \times \frac{1 - (1+i)^n}{1 - (1-i)} = Ci \times \frac{1 - (1+i)^n}{-i} = C \left[(1+i)^n - 1 \right]$$

ou seja o valor do Juro Total $J = C \left[(1+i)^n - 1 \right]$

Assim o capital acumulado $S=C+J$

$$S = C + J = C + C \left[(1+i)^n - 1 \right] = C (1+i)^n$$

Exercício:

Foi efectuado um depósito de 10000 € que, após 5 semestres de capitalização em regime de juro composto, gerou o capital acumulado de 11314,08€. A que taxa foi remunerado este depósito?

Resolução:

Equacionar o problema é simples $S = C(1+i)^n$

$$11314.08 = 10000(1+i)^5 \Leftrightarrow (1+i)^5 = 1.13408 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i = \sqrt[5]{1.13408} - 1 \Leftrightarrow i = 0,025$$

Exercício:

Foi efectuado um depósito de 40000 € à taxa anual de 5%. Após algum tempo, o capital acumulado era de 48620,25€ (RJC). Qual a duração deste depósito?

Resolução:

Equacionar o problema é simples $S = C(1+i)^n$

$$48620.25 = 40000(1+0,05)^n \Leftrightarrow (1,05)^n = 1.215506 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n = \log_{1,05}(1.215506) \Leftrightarrow n = 4$$

Como a tx estava em anos a duração é 4 anos.

Para finalizar...

Num livro de MACS do 10º ano surge “caída”
do céu a seguinte fórmula que permite determinar a prestação p para a
amortização de um empréstimo dado C como capital inicial, i a taxa de juro e n a duração do
empréstimo.

$$p = C \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

A fórmula anteriormente apresentada deriva da *Amortização de Empréstimos Clássicos*. De demonstração não aplicável nas condições de uma Sessão Prática, resta-me indicar que estamos perante um sistema de prestações constantes denominado por Sistema Francês. Tem em conta o Valor Temporal do Dinheiro e o fato de que a soma de todas as prestações, reportada ao momento em que o empréstimo é contraído tem exatamente o mesmo valor.

Bibliografia:

MATIAS, ROGÉRIO (2009), *Cálculo Financeiro – Teoria e Prática*, 3.^a edição, Escolar Editora

NEVES, MARIA AUGUSTA FERREIRA e BOLINHAS, SANDRA e FARÍA, LUÍSA (2010), *MACS 10*, 1.^a edição, Porto Ed.

nunangelino@gmail.com



LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA