Problema del Busy Traveller

1 Descrizione del problema

Siamo un turista in visita in un città, il nostro obiettivo è visitare il maggior numero possibile di monumenti popolari nel tempo a nostra disposizione.
Dati/Input:

1. $\mathcal{S}$: Insieme di monumenti;
2. p_k: Grado di popolarità di un monumento ($k \in [1, |\mathcal{S}|]$);
3. d_{ij}: Distanza tra due monumenti ($i, j \in [1, |\mathcal{S}|]$);
4. T: Tempo a disposizione del turista per la visita T;

Output:

1. $\mathcal{I}$:Sottoinsieme ordinato di $\mathcal{S}$ contenente l'itinerario con i monumenti di maggiore popolarità che il turista può visitare con il suo limite di tempo;

Precisazioni:

- Ogni monumento è raggiungibile da ogni altro monumento;
- La distanza tra due monumenti è simmetrica ($d_{ij} = d_{ji}$);
- La posizione iniziale del turista è unica e dalla partenza è in grado di raggiungere ogni monumento;
- Il valore migliore di popolarità è quello con il valore maggiore;

2 Modello PLI

Pensiamo ad ogni monumento come un nodo di un grafo e il loro collegamento come un arco, aggiungiamo in tale grafo anche la posizione iniziale del turista, indiachiamo tale nodo con indice 0. La distanza tra i monumneti sarà il peso di un arco sul grafo, il valore della popolarità sarà associato invece ai nodi, diamo al nodo con la posizione iniziale dell'utente popolarità 0.

Usiamo le seguenti varibili decisionali:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se arco } (i,j) \text{ fa parte dell'itinerario} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa variabile indica se nell'itinerario il turista farà il percorso dal monumento i al monumento j, precisiamo che $x_{ij} \neq x_{ji}$

Usiamo inoltre le sequenti variabili ausiliari:

$$y_i = \begin{cases} k, & k \in [1, |\mathcal{S}|], \text{ se il nodo } i \text{ fa parte dell'itinerario} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h_i = \begin{cases} 1, & \text{se } y_i \neq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Le varibili y indicano la posizione di ogni monumneto nella sequenza dell'itinerario, mentre le h ci serviranno per calcolare accuratamente la popolarità nella funcione obiettivo.

Detto ciò il modello PLI è il segeunte ($n = |\mathcal{S}|$):
Funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i=0}^{n} h_i p_i$$

Vincoli:

(1) $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} d_{ij} \leq T$ Non possiamo viaggiare più del tempo a disposizione

(2) $\sum_{i=0}^{n} x_{ij} \leq 1 \ (i \neq j) \ \forall j$ Solo un arco entrante attivo per nodo

(3) $\sum_{j=0}^{n} x_{ij} \leq 1 \ (i \neq j) \ \forall i$ Solo un arco uscente attivo per nodo

(4) $\mathrm{y}_0 = 1$ Il primo nodo è quello del turista

(5) $\mathrm{y}_i \leq M \sum_{j=0}^{n} x_{ji} \ \forall i \neq 0$ Nessuna y può attivarsi se non ha almeno un nodo entrante

(6) $\mathrm{x}_{ij} \leq y_i \ \forall (i,j)$ Nessuna y può avere nodi uscenti se è uguale a 0

(7) $\mathrm{y}_j \geq y_i + 1 - M(1 - x_{ij}) \ \forall (i,j)$ Le y devono essere sequenziali se gli archi sono attivi

(8) $\mathrm{h}_i \leq y_i \ \forall i$ $h = 1$ se la y corrispettiva è attiva

Con questa rappresentazione sia il numero di vincoli che il numero di variabili sono un $O(n^2)$.

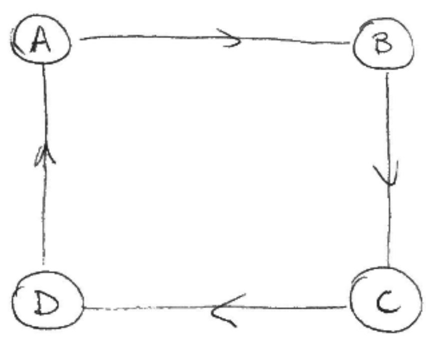
3 Descrizione delle soluzioni ammissibili

Una soluzione ammissibile per questo modello sarà un path che parte dal nodo del turista (indicato dall'indice 0) e si conclude in un qualsiasi altro nodo del grafo.

3.1 Impossibilità dei cicli per una soluzione ammissibile

Proposizione In una soluzione ammissible del problema non è possibile avere cicli

Dimostrazione Consideriamo una soluzione avente un ciclo, come mostrato nella seguente figura (le lettere all'interno dei nodi rapprentano gli indici associati a essi):



Con questa configurazione i valori delle varibiali decisionali sono:

$$x_{AB} = 1 \quad x_{BC} = 1 \quad x_{CD} = 1 \quad x_{DA} = 1$$

E quindi, per il set di vincoli **(7)**, dovranno valere le seguenti relazioni:

$$y_B \geq y_A + 1 \quad \text{perché} \quad x_{AB} = 1$$
$$y_C \geq y_B + 1 \quad \text{perché} \quad x_{BC} = 1$$
$$y_D \geq y_C + 1 \quad \text{perché} \quad x_{CD} = 1$$
$$y_A \geq y_D + 1 \quad \text{perché} \quad x_{DA} = 1$$

Mettendo tutto insieme abbiamo:

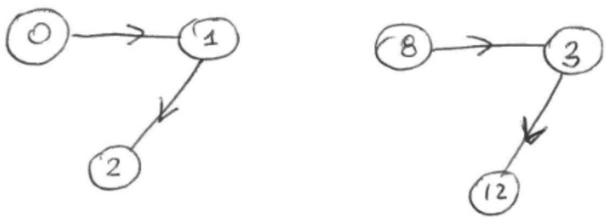
$$y_A \geq y_D + 1 \geq y_C + 2 \geq y_B + 3 \geq y_A + 4$$

Il che è impossibile. Questo ragionamento può essere applicato per cicli di qualunque lunghezza e indipentendemente dai nodi che lo compongono.

3.2 Inammissiblità di soluzioni con due o più path differenti

Proposizione In una soluzione ammissibile del problema deve essere presente un singolo path

Dimostrazione Assumiamo, per assurdo, che esista una soluzione ammissibile con due path come la seguente:



Con questa configurazione i valori delle varibiali decisionali sono:

$$x_{01} = 1 \quad x_{12} = 1 \quad x_{83} = 1 \quad x_{312} = 1$$

Esaminiamo ora i due casi possibili:

Caso 1: $y_8 = 0$
Dal momento che $y_8 = 0$, per il set di vincoli **(6)**, il valore di tutte le varibili decisionali associate agli archi uscenti dal nodo con indice 8 devono essere minori o uguali di y_8, in particolare:

$$x_{83} \leq 0$$

E ciò è in contraddizione con il valore di partenza della soluzione ammissibile

Caso 2: $y_8 \neq 0$
Se $y_8 \neq 0$, diversamente dal Caso 1, il set di vincoli **(6)** è soddisfatto ma, per il set di vincoli **(5)**, il valore di y_8 può essere maggiore di 0 solo se esiste almeno un arco entrante nel nodo di indice 8, e ciò non accade per questa soluzione.
Se aggiungessimo un arco entrante in 8 il problema si trasferirebbe al nodo che abbiamo adesso aggiunto.

L'unica soluzione ammissibile è una soluzione che ha come nodo di partenza il nodo del turista (contrassegnato con 0) perchè è l'unico nodo che non soggetto al set di vincoli **(5)** e che, quindi, può avere un arco uscente senza avere un arco entrante.