LINEÁRIS ALGEBRA

Lineáris függvények, lineáris függvény mátrixa

1. Igazoljuk, hogy a következő $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvények lineárisak (vagyis $f\in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$):

(a) $f(x,y)=(x+2y,\ -x+y)$;

Megoldás. Egy $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvény pontosan akkor lineáris, ha minden $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ skalárok és minden $v_1=(x_1,y_1), v_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ vektorok esetén

$$f(k_1v_1+k_2v_2)=k_1f(v_1)+k_2f(v_2). \tag{1.1}$$

A megadott f függvényre kiszámoljuk mindkét oldalt:

$$\begin{aligned} f(k_1v_1+k_2v_2) &= f(\underbrace{k_1x_1+k_2x_2}_{x},\underbrace{k_1y_1+k_2y_2}_{y})=(x+2y,-x+y)\\ &= \big((k_1x_1+k_2x_2)+2(k_1y_1+k_2y_2),\ -(k_1x_1+k_2x_2)+(k_1y_1+k_2y_2)\big)\\ &= \big(k_1(x_1+2y_1)+k_2(x_2+2y_2),\ k_1(-x_1+y_1)+k_2(-x_2+y_2)\big) \end{aligned}\tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} k_1f(v_1)+k_2f(v_2) &= k_1f(x_1,y_1)+k_2f(x_2,y_2)\\ &= k_1(x_1+2y_1,\ -x_1+y_1)+k_2(x_2+2y_2,\ -x_2+y_2)\\ &= (k_1(x_1+2y_1)+k_2(x_2+2y_2),\ k_1(-x_1+y_1)+k_2(-x_2+y_2)). \end{aligned}\tag{1.3}$$

Mivel a (2.4) és (2.5) megegyeznek, ezért teljesül a (2.1) egyenlőség, tehát a megadott f függvény lineáris. ☐

(b) $f(x,y)=(-3x-y,\ 2x-4y)$;

Megoldás. Minden $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ skalárok és minden $v_1=(x_1,y_1), v_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ vektorok esetén a megadott f függvényre kiszámoljuk, hogy

$$\begin{aligned} f(k_1v_1+k_2v_2) &= f(k_1x_1+k_2x_2,\ k_1y_1+k_2y_2)\\ &= \big(-3(k_1x_1+k_2x_2)-(k_1y_1+k_2y_2),\ 2(k_1x_1+k_2x_2)-4(k_1y_1+k_2y_2)\big)\\ &= \big(k_1(-3x_1-y_1)+k_2(-3x_2-y_2),\ k_1(2x_1-4y_1)+k_2(2x_2-4y_2)\big) \end{aligned}\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} k_1f(v_1)+k_2f(v_2) &= k_1f(x_1,y_1)+k_2f(x_2,y_2)\\ &= k_1\big(-3x_1-y_1,\ 2x_1-4y_1\big)+k_2\big(-3x_2-y_2,\ 2x_2-4y_2\big)\\ &= \big(k_1(-3x_1-y_1)+k_2(-3x_2-y_2),\ k_1(2x_1-4y_1)+k_2(2x_2-4y_2)\big). \end{aligned}\tag{1.5}$$

A (2.4) és (2.5) megegyeznek, vagyis

$$f(k_1v_1+k_2v_2)=k_1f(v_1)+k_2f(v_2),\quad \forall\, k_1,k_2\in\mathbb{R},\quad \forall\, v_1,v_2\in\mathbb{R}^2,$$

ezért a megadott f függvény lineáris. ☐

(c) $f(x,y)=(3x-2y,\ 5x+7y)$;

Megoldás. Minden $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ skalárok és minden $v_1=(x_1,y_1), v_2=(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ vektorok esetén

$$\begin{aligned} f(k_1v_1+k_2v_2) &= f(\underbrace{k_1x_1+k_2x_2}_{x},\underbrace{k_1y_1+k_2y_2}_{y})=(3x-2y,\ 5x+7y)\\ &= \big(3(k_1x_1+k_2x_2)-2(k_1y_1+k_2y_2),\ 5(k_1x_1+k_2x_2)+7(k_1y_1+k_2y_2)\big)\\ &= \big(k_1(3x_1-2y_1)+k_2(3x_2-2y_2),\ k_1(5x_1+7y_1)+k_2(5x_2+7y_2)\big)\\ &= k_1\big(3x_1-2y_1,\ 5x_1+7y_1\big)+k_2\big(3x_2-2y_2,\ 5x_2+7y_2\big)\\ &= k_1f(x_1,y_1)+k_2f(x_2,y_2) \end{aligned}$$

$$= k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2),$$

ezért a megadott f függvény lineáris. □

(d) $f(x, y) = (-6x + y,\ x + y)$.

Megoldás. Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ és minden $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\begin{aligned} f(k_1 v_1 + k_2 v_2) &= f(k_1 x_1 + k_2 x_2,\ k_1 y_1 + k_2 y_2) \\ &= \big(-6(k_1 x_1 + k_2 x_2) + (k_1 y_1 + k_2 y_2),\ (k_1 x_1 + k_2 x_2) + (k_1 y_1 + k_2 y_2) \big) \\ &= \big(k_1(-6x_1 + y_1) + k_2(-6x_2 + y_2),\ k_1(x_1 + y_1) + k_2(x_2 + y_2) \big) \\ &= k_1 \big(-6x_1 + y_1,\ x_1 + y_1 \big) + k_2 \big(-6x_2 + y_2,\ x_2 + y_2 \big) \\ &= k_1 f(x_1, y_1) + k_2 f(x_2, y_2) \\ &= k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2), \end{aligned}$$

ezért a megadott f függvény lineáris. □

2. Igazoljuk, hogy a következő $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ függvények lineárisak (vagyis $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$):

(a) $f(x, y, z) = (x + z,\ -2x + y + 3z)$;

Megoldás. Egy $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ függvény pontosan akkor lineáris, ha minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ skalárok és minden $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén

$$f(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2). \tag{2.1}$$

A megadott f függvényre kiszámoljuk mindkét oldalt:

$$\begin{aligned} f(k_1 v_1 + k_2 v_2) &= f(\underbrace{k_1 x_1 + k_2 x_2}_{x}, \underbrace{k_1 y_1 + k_2 y_2}_{y}, \underbrace{k_1 z_1 + k_2 z_2}_{z}) = (x + z, -2x + y + 3z) \\ &= ((k_1 x_1 + k_2 x_2) + (k_1 z_1 + k_2 z_2),\ -2(k_1 x_1 + k_2 x_2) + (k_1 y_1 + k_2 y_2) + 3(k_1 z_1 + k_2 z_2)) \\ &= (k_1(x_1 + z_1) + k_2(x_2 + z_2),\ k_1(-2x_1 + y_1 + 3z_1) + k_2(-2x_2 + y_2 + 3z_2)), \qquad (2.2) \\ k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) &= k_1 f(x_1, y_1) + k_2 f(x_2, y_2) \\ &= k_1(x_1 + z_1,\ -2x_1 + y_1 + 3z_1) + k_2(x_2 + z_2,\ -2x_2 + y_2 + 3z_2) \\ &= (k_1(x_1 + z_1) + k_2(x_2 + z_2),\ k_1(-2x_1 + y_1 + 3z_1) + k_2(-2x_2 + y_2 + 3z_2)). \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Mivel a (2.4) és (2.5) megegyeznek, ezért teljesül a (2.1) egyenlőség, tehát a megadott f függvény lineáris. □

(b) $f(x, y, z) = (-x - 2y + z,\ y - 4z)$;

Megoldás. Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ skalárok és minden $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén a megadott f függvényre kiszámoljuk, hogy

$$\begin{aligned} f(k_1 v_1 + k_2 v_2) &= f(\underbrace{k_1 x_1 + k_2 x_2}_{x}, \underbrace{k_1 y_1 + k_2 y_2}_{y}, \underbrace{k_1 z_1 + k_2 z_2}_{z}) = (-x - 2y + z, y - 4z) \\ &= (-(k_1 x_1 + k_2 x_2) - 2(k_1 y_1 + k_2 y_2) + (k_1 z_1 + k_2 z_2),\ (k_1 y_1 + k_2 y_2) - 4(k_1 z_1 + k_2 z_2)) \\ &= (k_1(-x_1 - 2y_1 + z_1) + k_2(-x_2 - 2y_2 + z_2),\ k_1(y_1 - 4z_1) + k_2(y_2 - 4z_2)), \qquad (2.4) \\ k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) &= k_1 f(x_1, y_1) + k_2 f(x_2, y_2) \\ &= k_1(-x_1 - 2y_1 + z_1,\ y_1 - 4z_1) + k_2(-x_2 - 2y_2 + z_2,\ y_2 - 4z_2) \\ &= (k_1(-x_1 - 2y_1 + z_1) + k_2(-x_2 - 2y_2 + z_2),\ k_1(y_1 - 4z_1) + k_2(y_2 - 4z_2)). \qquad (2.5) \end{aligned}$$

Mivel a (2.4) és (2.5) megegyeznek, vagyis

$$f(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1f(v_1) + k_2f(v_2), \quad \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ \forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3,$$

ezért a megadott f függvény lineáris. $\square$

(c) $f(x, y, z) = (2x - 4y + 2z,\ 5x - 7z)$;

Megoldás. Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ skalárok és minden $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén

$$\begin{aligned}
f(k_1v_1 + k_2v_2) &= f(\underbrace{k_1x_1 + k_2x_2}_{x}, \underbrace{k_1y_1 + k_2y_2}_{y}, \underbrace{k_1z_1 + k_2z_2}_{z}) = \big(2x - 4y + 2z,\ 5x - 7z\big) \\
&= \big(2(k_1x_1 + k_2x_2) - 4(k_1y_1 + k_2y_2) + 2(k_1z_1 + k_2z_2),\ 5(k_1x_1 + k_2x_2) - 7(k_1z_1 + k_2z_2)\big) \\
&= \big(k_1(2x_1 - 4y_1 + 2z_1) + k_2(2x_2 - 4y_2 + 2z_2),\ k_1(5x_1 - 7z_1) + k_2(5x_2 - 7z_2)\big) \\
&= k_1\big(2x_1 - 4y_1 + 2z_1,\ 5x_1 - 7z_1\big) + k_2\big(2x_2 - 4y_2 + 2z_2,\ 5x_2 - 7z_2\big) \\
&= k_1f(x_1, y_1) + k_2f(x_2, y_2) \\
&= k_1f(v_1) + k_2f(v_2),
\end{aligned}$$

ezért a megadott f függvény lineáris. $\square$

(d) $f(x, y, z) = (-6y + z,\ 2x - 3y + z)$.

Megoldás. Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ skalárok és minden $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ vektorok esetén

$$\begin{aligned}
f(k_1v_1 + k_2v_2) &= f(k_1x_1 + k_2x_2,\ k_1y_1 + k_2y_2) \\
&= \big(-6(k_1y_1 + k_2y_2) + (k_1z_1 + k_2z_2),\ 2(k_1x_1 + k_2x_2) - 3(k_1y_1 + k_2y_2) + (k_1z_1 + k_2z_2)\big) \\
&= \big(k_1(-6y_1 + z_1) + k_2(-6y_2 + z_2),\ k_1(2x_1 - 3y_1 + z_1) + k_2(2x_2 - 3y_2 + z_2)\big) \\
&= k_1\big(-6y_1 + z_1,\ 2x_1 - 3y_1 + z_1\big) + k_2\big(-6y_2 + z_2,\ 2x_2 - 3y_2 + z_2\big) \\
&= k_1f(x_1, y_1, z_1) + k_2f(x_2, y_2, z_2) \\
&= k_1f(v_1) + k_2f(v_2),
\end{aligned}$$

ezért a megadott f függvény lineáris. $\square$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha ${}_KV$ egy vektortér és $f \in End_K(V)$, akkor $S \leq_K V$, ahol $S = \{x \in V \mid f(x) = x\}$ az fixpontjainak halmaza!

Megoldás. Az S halmaz nem üres, mert $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_V$, ahol $\vec{0}_V$ a V vektortér nullvektora. Minden $k_1, k_2 \in K$ skalárok és minden $v_1, v_2 \in S$ vektorok esetén (vagyis $f(v_1) = v_1$ és $f(v_2) = v_2$) az f függvény linearitása miatt

$$f(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1f(v_1) + k_2f(v_2) = k_1v_1 + k_2v_2,$$

ezért $k_1v_1 + k_2v_2 \in S$. Ezek alapján az S lineáris altere a V vektortérnek. $\square$

4. Határozzuk meg a következő $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ függvények $[f]_E$ mátrixát, ahol $E = (e_1, e_2, e_3)$ a kanonikus bázis $\mathbb{R}^3$-ban.

(a) $f(x, y, z) = (x + 2y,\ 4y - 3z,\ 2x + y - 2z)$;

Megoldás. Az értelmezés szerint $[f]_E = [f]_{EE} = \Big([f(e_1)]_E \; [f(e_2)]_E \; [f(e_3)]_E\Big)$, ezért kiszámoljuk a bázisvektorok f függvény általi értékeit:

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= f(1,0,0) = (1+2\cdot 0,\ 4\cdot 0-3\cdot 0,\ 2\cdot 1+0-2\cdot 0) = (1,0,2),\\
f(e_2) &= f(0,1,0) = (0+2\cdot 1,\ 4\cdot 1-3\cdot 0,\ 2\cdot 0+1-2\cdot 0) = (2,4,1),\\
f(e_3) &= f(0,0,1) = (0+2\cdot 0,\ 4\cdot 0-3\cdot 1,\ 2\cdot 0+0-2\cdot 1) = (0,-3,-2),
\end{aligned}$$

A fent kiszámolt függvényértékek koordinátáit felírjuk a kanonikus bázisban:

$$[f(e_1)]_E = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\ [f(e_2)]_E = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\ [f(e_3)]_E = \begin{pmatrix}0\\-3\\-2\end{pmatrix} \ \Rightarrow\ [f]_E = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 4 & -3\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

□

(b) $f(x,y,z) = (3x-y+z,\ 4x+y-2z,\ -2x+z)$;

Megoldás.

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (3,4,-2), \qquad f(e_2) = f(0,1,0) = (-1,1,0), \qquad f(e_3) = f(0,0,1) = (1,-2,1),$$

ezért

$$[f(e_1)]_E = \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix},\ [f(e_2)]_E = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ [f(e_3)]_E = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \ \Rightarrow\ [f]_E = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\4 & 1 & -2\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

□

(c) $f(x,y,z) = (-2y+5z,\ x+6y-z,\ 2x-y-z)$;

Megoldás.

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (0,1,2), \qquad f(e_2) = f(0,1,0) = (-2,6,-1), \qquad f(e_3) = f(0,0,1) = (5,-1,-1),$$

ezért $[f]_E = \begin{pmatrix}0 & -2 & 5\\1 & 6 & -1\\2 & -1 & -1\end{pmatrix}$. □

(d) $f(x,y,z) = (-x+2y-3z,\ x+y-7z,\ 2x+3z)$.

Megoldás. Le is olvasható a lineáris függvény mátrixa a kanonikus bázisban: az első oszlopba az első változó (x) együtthatói, a második oszlopba a második változó (y) együtthatói, a harmadik oszlopba a harmadik változó (z) együtthatói kerülnek.

$$[f]_E = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\1 & 1 & -7\\2 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

□

5. Mutassuk meg, hogy a következő $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris függvények bijektívek és határozzuk meg az inverzüket:

(a) $f(x,y) = (2x-y,\ -x+y)$;

Megoldás. Az f függvény pontosan akkor bijektív, ha (valamely bázisokban felírt) mátrixa invertálható. Felírjuk az f mátrixát a kanonikus bázisban, mert abban a legkönnyebb: $[f]_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Az $[f]_E$ mátrix invertálható, mivel a determinánsa $\det([f]_E) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tehát az f függvény bijektív.

Az f^{-1} inverz függvénynek a mátrixa az f függvény mátrixának inverze, vagyis $[f^{-1}]_E = ([f]_E)^{-1}$. Ez alapján

$$[f^{-1}]_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Az $[f^{-1}]_E$ mátrixból felírjuk az f^{-1} inverz függvény képletét használva, hogy

$$[f^{-1}(x,y)]_E = [f_E^{-1}][(x,y)]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix},$$

ahonnan az inverz függvény képlete $f^{-1}(x,y) = (x+y, x+2y)$. □

(b) $f(x,y) = (3x-4y,\ -2x+3y)$;

Megoldás. Az f függvény kanonikus bázisban felírt mátrixa $[f]_E = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, amelyről meg kell állapítani, hogy invertálható-e. Ehhez kiszámoljuk a determinánsát $\det([f]_E) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Mivel a determinánsa nem nulla ezért az $[f]_E$ mátrix invertálható és így az f függvény bijektív (létezik inverz függvénye).

Az f^{-1} inverz függvény mátrixa $[f^{-1}]_E = [f]_E^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, továbbá

$$[f^{-1}(x,y)]_E = [f_E^{-1}][(x,y)]_E = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4y \\ 2x+3y \end{pmatrix},$$

ahonnan kapjuk, hogy az inverz függvény képlete $f^{-1}(x,y) = (3x+4y, 2x+3y)$. □

(c) $f(x,y) = (-4x+3y,\ -5x+4y)$;

Megoldás. Az f függvény mátrix a kanonikus bázisban $[f]_E = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, amely invertálható, mert determinánsa $\det([f]_E) = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Tehát az f függvény bijektív (létezik inverz függvénye).

Az inverz függvény mátrixa $[f^{-1}]_E = [f]_E^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ és

$$[f^{-1}(x,y)]_E = [f_E^{-1}][(x,y)]_E = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x+3y \\ -5x+4y \end{pmatrix},$$

ahonnan kapjuk, hogy az inverz függvény képlete $f^{-1}(x,y) = (-4x+3y, -5x+4y)$. □

(d) $f(x,y) = (3x+7y,\ x+2y)$.

Megoldás. Az f függvény mátrix a kanonikus bázisban $[f]_E = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, amely invertálható, mert determinánsa $\det([f]_E) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Tehát az f függvény bijektív (létezik inverz függvénye).

Az inverz függvény mátrixa $[f^{-1}]_E = [f]_E^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ és

$$[f^{-1}(x,y)]_E = [f_E^{-1}][(x,y)]_E = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+7y \\ x-3y \end{pmatrix},$$

ahonnan kapjuk, hogy az inverz függvény képlete $f^{-1}(x,y) = (-2x+7y, x-3y)$. □

6. Tekintsük a $B = (v_1, v_2, v_3) = ((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))$ bázist az $\mathbb{R}^3$, illetve a $B' = (v_1', v_2') = ((1,1),(1,-2))$ és a (kanonikus) $E' = (e_1', e_2')$ bázisokat az $\mathbb{R}^2$ valós vektorterekben. Határozzuk meg a következő $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ függvények esetén az $[f]_{E'B}$ és $[f]_{B'B}$ mátrixokat! (Ellenőrizzük le a kapott eredményeket!)

(a) $f(x,y,z) = (x+z,\ -2x+y+3z)$;

Megoldás. Az értelmezés alapján $[f]_{E'B} = \Big([f(v_1)]_{E'}\ [f(v_2)]_{E'}\ [f(v_3)]_{E'}\Big)$.

$$f(v_1) = f(1,1,0) = (1,-1) \quad \Rightarrow \quad [f(v_1)]_{E'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$f(v_2) = f(0,1,1) = (1,4) \quad \Rightarrow \quad [f(v_2)]_{E'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$f(v_3) = f(1,0,1) = (2,1) \quad \Rightarrow \quad [f(v_3)]_{E'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ezért $[f]_{E'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Mivel $[f]_{B'B} = T_{B'E'}[f]_{E'B} = (T_{E'B'})^{-1}[f]_{E'B}$, ezért felírjuk a $T_{E'B'}$ áttérési mátrixot $T_{E'B'} = \Big([v_1']_{E'}\ [v_2']_{E'}\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, ahonnan

$$T_{B'E'} = (T_{E'B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$[f]_{B'B} = T_{B'E'}[f]_{E'B} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzés. Az $[f]_{B'B}$ oszlopaiban az $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ koordinátái kell szerepeljenek a B' bázisban:

$$\frac{1}{3}\cdot v_1' + \frac{2}{3}\cdot v_2' = \frac{1}{3}\cdot(1,1) + \frac{2}{3}\cdot(1,-2) = (1,-1) = f(v_1),$$
$$2\cdot v_1' + (-1)\cdot v_2' = 2\cdot(1,1) + (-1)\cdot(1,-2) = (1,4) = f(v_2),$$
$$\frac{5}{3}\cdot v_1' + \frac{1}{3}\cdot v_2' = \frac{5}{3}\cdot(1,1) + \frac{1}{3}\cdot(1,-2) = (2,1) = f(v_3).$$

□

(b) $f(x,y,z) = (-x-2y+z,\ y-4z)$;

Megoldás. Az értelmezés alapján $[f]_{E'B} = \Big([f(v_1)]_{E'}\ [f(v_2)]_{E'}\ [f(v_3)]_{E'}\Big)$, ezért kiszámoljuk, hogy

$$f(v_1) = f(1,1,0) = (-3,1), \qquad f(v_2) = f(0,1,1) = (-1,-3), \qquad f(v_3) = f(1,0,1) = (0,-4),$$

ahonnan kapjuk, hogy $[f]_{E'B} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Mivel $[f]_{B'B} = T_{B'E'}[f]_{E'B} = (T_{E'B'})^{-1}[f]_{E'B}$, ezért felírjuk a $T_{E'B'}$ áttérési mátrixot $T_{E'B'} = \begin{pmatrix}[v_1']_{E'} & [v_2']_{E'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, ahonnan

$$T_{B'E'} = (T_{E'B'})^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Tehát

$$[f]_{B'B} = T_{B'E'}[f]_{E'B} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -1 & 0\\ 1 & -3 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

Ellenőrzés. Az $[f]_{B'B}$ oszlopaiban az $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ koordinátái kell szerepeljenek a B' bázisban:

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{3}\cdot v_1' - \frac{4}{3}\cdot v_2' &= -\frac{5}{3}\cdot(1,1) - \frac{4}{3}\cdot(1,-2) = (-3,1) = f(v_1),\\
-\frac{5}{3}\cdot v_1' + \frac{2}{3}\cdot v_2' &= -\frac{5}{3}\cdot(1,1) + \frac{2}{3}\cdot(1,-2) = (-1,-3) = f(v_2),\\
-\frac{4}{3}\cdot v_1' + \frac{4}{3}\cdot v_2' &= -\frac{4}{3}\cdot(1,1) + \frac{4}{3}\cdot(1,-2) = (0,-4) = f(v_3).
\end{aligned}$$

□

(c) $f(x,y,z) = (2x - 4y + 2z,\ 5x - 7z)$;

Megoldás. Az értelmezés alapján $[f]_{E'B} = \begin{pmatrix}[f(v_1)]_{E'} & [f(v_2)]_{E'} & [f(v_3)]_{E'}\end{pmatrix}$, ezért kiszámoljuk, hogy

$$f(v_1) = f(1,1,0) = (-2,5), \qquad f(v_2) = f(0,1,1) = (-2,-7), \qquad f(v_3) = f(1,0,1) = (4,-2),$$

ahonnan kapjuk, hogy $[f]_{E'B} = \begin{pmatrix}-2 & -2 & 4\\ 5 & -7 & -2\end{pmatrix}$.

Mivel $[f]_{B'B} = T_{B'E'}[f]_{E'B} = (T_{E'B'})^{-1}[f]_{E'B}$, ezért felírjuk a $T_{E'B'}$ áttérési mátrixot $T_{E'B'} = \begin{pmatrix}[v_1']_{E'} & [v_2']_{E'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, ahonnan

$$T_{B'E'} = (T_{E'B'})^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Tehát

$$[f]_{B'B} = T_{B'E'}[f]_{E'B} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -2 & 4\\ 5 & -7 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{11}{3} & 2\\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & 2\end{pmatrix}.$$

Ellenőrzés. Az $[f]_{B'B}$ oszlopaiban az $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ koordinátái kell szerepeljenek a B' bázisban:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\cdot v_1' - \frac{7}{3}\cdot v_2' &= \frac{1}{3}\cdot(1,1) - \frac{7}{3}\cdot(1,-2) = (-2,5) = f(v_1),\\
-\frac{11}{3}\cdot v_1' + \frac{5}{3}\cdot v_2' &= -\frac{11}{3}\cdot(1,1) + \frac{5}{3}\cdot(1,-2) = (-2,-7) = f(v_2),\\
2\cdot v_1' + 2\cdot v_2' &= 2\cdot(1,1) + 2\cdot(1,-2) = (4,-2) = f(v_3).
\end{aligned}$$

□

(d) $f(x,y,z) = (-6y + z,\ 2x - 3y + z)$.

Megoldás. Az értelmezés alapján $[f]_{E'B} = \begin{pmatrix}[f(v_1)]_{E'} & [f(v_2)]_{E'} & [f(v_3)]_{E'}\end{pmatrix}$, ezért kiszámoljuk, hogy

$$f(v_1) = f(1,1,0) = (-6,-1), \qquad f(v_2) = f(0,1,1) = (-5,-2), \qquad f(v_3) = f(1,0,1) = (1,3),$$

ahonnan kapjuk, hogy $[f]_{E'B} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Mivel $[f]_{B'B} = T_{B'E'}[f]_{E'B} = (T_{E'B'})^{-1}[f]_{E'B}$, ezért felírjuk a $T_{E'B'}$ áttérési mátrixot $T_{E'B'} = \begin{pmatrix} [v_1']_{E'} & [v_2']_{E'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, ahonnan

$$T_{B'E'} = (T_{E'B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$[f]_{B'B} = T_{B'E'}[f]_{E'B} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -5 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} & -4 & \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzés. Az $[f]_{B'B}$ oszlopaiban az $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ koordinátái kell szerepeljenek a B' bázisban:

$$\begin{aligned} -\frac{13}{3}\cdot v_1' - \frac{5}{3}\cdot v_2' &= -\frac{13}{3}\cdot(1,1) - \frac{5}{3}\cdot(1,-2) = (-6,-1) = f(v_1), \\ -4\cdot v_1' + (-1)\cdot v_2' &= -4\cdot(1,1) + (-1)\cdot(1,-2) = (-5,-2) = f(v_2), \\ \frac{5}{3}\cdot v_1' - \frac{2}{3}\cdot v_2' &= \frac{5}{3}\cdot(1,1) - \frac{2}{3}\cdot(1,-2) = (1,3) = f(v_3). \end{aligned}$$

□

7. Tekintsük a $B = (v_1, v_2, v_3) = ((1,0,1),(0,1,1),(-1,3,1))$ bázist $\mathbb{R}^3$-ben és a $B' = (v_1', v_2') = ((1,2),(-2,1))$ bázist $\mathbb{R}^2$-ben. Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineáris függvényeket, amelyek mátrixa:

(a) $[f]_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

Megoldás. Az $[f]_{E'E}$ mátrixból könnyen fel tudjuk majd írni az f képletét, ezért előbb ezt a mátrixot számoljuk ki az $[f]_{E'E} = T_{E'B'}[f]_{B'B}T_{BE}$ képlet alapján. Ehhez ki kell számolni az áttérési mátrixokat:

$$T_{E'B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad T_{BE} = (T_{EB})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ezek alapján

$$[f]_{E'E} = T_{E'B'}[f]_{B'B}T_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 19 & 14 & -16 \end{pmatrix}.$$

Innen $[f(x,y,z)]_{E'} = [f]_{E'E}[(x,y,z)]_E$ képlet alapján

$$[f(x,y,z)]_{E'} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 19 & 14 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x - 3y + 2z \\ 19x + 14y - 16z \end{pmatrix},$$

ezért az f függvény képlete $f(x,y,z) = (-3x - 3y + 2z, 19x + 14y - 16z)$. □

(b) $[f]_{B'B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

Eredmény: $f(x,y,z) = (37x + 25y - 35z,\ 24x + 15y - 20z)$. □

Megoldás. Az $[f]_{E'E}$ mátrixból fogjuk felírni az f függvény képletét, amely mátrixot az $[f]_{E'E} = T_{E'B'}[f]_{B'B}T_{BE}$ képlettel számoljuk ki. Ehhez ki kell számolni az áttérési mátrixokat:

$$T_{E'B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad T_{BE} = T_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ezek alapján

$$[f]_{E'E} = T_{E'B'}[f]_{B'B}T_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 25 & -35 \\ 24 & 15 & -20 \end{pmatrix}.$$

Innen $[f(x,y,z)]_{E'} = [f]_{E'E}[(x,y,z)]_E$ képlet alapján

$$[f(x,y,z)]_{E'} = \begin{pmatrix} 37 & 25 & -35 \\ 24 & 15 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37x + 25y - 35z \\ 24x + 15y - 20z \end{pmatrix},$$

ezért az f függvény képlete $f(x,y,z) = (37x + 25y - 35z,\ 24x + 15y - 20z)$. □

(c) $[f]_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

Eredmény: $f(x,y,z) = (-15x - 7y + 9z, 35x + 26y - 32z)$. □

(d) $[f]_{B'B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Eredmény: $f(x,y,z) = (-6x - 2y + 2z, -22x - 14y + 19z)$. □

8. Tekintsük a $B = (v_1, v_2) = ((1,2),(1,3))$ és $B' = (v_1', v_2') = ((1,0),(2,1))$ bázisokat $\mathbb{R}^2$-ben. A következő $f, g \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ esetén határozzuk meg a következő mátrixokat: $[2f]_B$, $[f+g]_B$, $[f \circ g]_{B'}$:

(a) $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ és $[g]_{B'} = \begin{pmatrix} -7 & -13 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

Megoldás. Minden $k \in \mathbb{K}$ skalár, $f : V \to V$ lineáris függvény és B bázis esetén a V $\mathbb{K}$-vektortéren

$$[k \cdot f]_B = k[f]_B, \qquad [f+g]_B = [f]_B + [g]_B, \qquad [f \circ g]_B = [f]_B[g]_B.$$

Ezek alapján $[2f]_B = 2[f]_B = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Az $[f+g]_B$ kiszámolásához fel kell írjuk a $[g]_B$ mátrixot, amelyet a $[g]_B = T_{BB'}[g]_{B'}T_{B'B}$ képlet alapján tehetünk meg. Az áttérési mátrixokat a következőképpen számoljuk ki ($E = (e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$ a kanonikus bázis az $\mathbb{R}^2$ valós vektortéren):

$$T_{BB'} = T_{BE}T_{EB'} = (T_{EB})^{-1}T_{EB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$T_{B'B} = (T_{BB'})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$[g]_B = T_{BB'}[g]_{B'}T_{B'B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -13 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -32 \\ 13 & 20 \end{pmatrix}.$$

Végül $[f+g]_B = [f]_B + [g]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 & -32 \\ 13 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & -30 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}$.

Az $[f \circ g]_{B'} = [f]_{B'}[g]_{B'}$ kiszámolásához előbb felírjuk a $[f]_{B'}$ mátrixot:

$$[f]_{B'} = T_{B'B}[f]_B T_{BB'} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Végül $[f \circ g]_{B'} = [f]_{B'}[g]_{B'} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -13 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$. □

(b) $[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ és $[g]_{B'} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$;

Megoldás. Minden $k \in \mathbb{K}$ skalár, $f : V \to V$ lineáris függvény és B bázis esetén a V $\mathbb{K}$-vektortéren

$$[k \cdot f]_B = k[f]_B, \qquad [f+g]_B = [f]_B + [g]_B, \qquad [f \circ g]_B = [f]_B[g]_B.$$

Ezek alapján $[2f]_B = 2[f]_B = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Az $[f+g]_B$ kiszámolásához fel kell írjuk a $[g]_B$ mátrixot, amelyet a $[g]_B = T_{BB'}[g]_{B'}T_{B'B}$ képlet alapján tehetünk meg. Az áttérési mátrixokat a következőképpen számoljuk ki ($E = (e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$ a kanonikus bázis az $\mathbb{R}^2$ valós vektortéren):

$$T_{BB'} = T_{BE}T_{EB'} = (T_{EB})^{-1}T_{EB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$T_{B'B} = (T_{BB'})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$[g]_B = T_{BB'}[g]_{B'}T_{B'B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -139 & -232 \\ 87 & 145 \end{pmatrix}.$$

Végül $[f+g]_B = [f]_B + [g]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -139 & -232 \\ 87 & 145 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -137 & -231 \\ 85 & 148 \end{pmatrix}$.

Az $[f \circ g]_{B'} = [f]_{B'}[g]_{B'}$ kiszámolásához előbb felírjuk a $[f]_{B'}$ mátrixot:

$$[f]_{B'} = T_{B'B}[f]_B T_{BB'} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 74 \\ -28 & -43 \end{pmatrix}.$$

Végül $[f \circ g]_{B'} = [f]_{B'}[g]_{B'} = \begin{pmatrix} 48 & 74 \\ -28 & -43 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 710 & 4 \\ -413 & -2 \end{pmatrix}$. □

(c) $[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ és $[g]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

Eredmény. $[2f]_B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$, $[f+g]_B = \begin{pmatrix} -17 & -33 \\ 11 & 30 \end{pmatrix}$, $[f \circ g]_{B'} = \begin{pmatrix} 491 & 447 \\ -297 & -270 \end{pmatrix}$. □

(d) $[f]_B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ és $[g]_{B'} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Eredmény. $[2f]_B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $[f+g]_B = \begin{pmatrix} 70 & 105 \\ -35 & -56 \end{pmatrix}$, $[f \circ g]_{B'} = \begin{pmatrix} 68 & -349 \\ -43 & 219 \end{pmatrix}$. □

Lineáris függvény magja és képe

9. Legyen $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$ a következő mátrixszal a kanonikus bázisban:

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Mutassuk meg, hogy $v = (1, 4, 1, -1) \in \ker f$ és $v' = (2, -2, 4, 2) \in \operatorname{Im} f$;

Megoldás. Értelmezés szerint $v \in \ker f$, ha $f(v) = \vec{0}$. Valóban,

$$[f(v)]_E = [f]_E[v]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 4 - 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 4 + 1\cdot 1 + 4\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 4 - 5\cdot 1 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 4 - 4\cdot 1 + 5\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [\vec{0}]_E,$$

ahonnan következik, hogy $f(v) = \vec{0}$, tehát $v \in \ker f$.

Értelmezés szerint $v' \in \operatorname{Im} f$, ha létezik $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4$ úgy, hogy

$$v' = f(w) \iff [v']_E = [f(w)]_E \iff [v']_E = [f]_E[w]_E$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} w_1 + w_2 - 3w_3 + 2w_4 = 2 \\ -w_1 + w_2 + w_3 + 4w_4 = -2 \\ 2w_1 + w_2 - 5w_3 + w_4 = 4 \\ w_1 + 2w_2 - 4w_3 + 5w_4 = 2 \end{cases}. \tag{9.1}$$

Az első egyenletből $w_1 = 2 - w_2 + 3w_3 - 2w_4$. Összeadva az első két egyelentet kapjuk, hogy $w_2 = w_3 - 3w_4$. Az utóbbit visszahelyettesítve adódik, hogy $w_1 = 2 + 2w_3 + w_4$. Ezeket behelyettesítve a harmadik egyenletbe kapjuk, hogy

$$2(2 + 2w_3 + w_4) + (w_3 - 3w_4) - 5w_3 + w_4 = 4 \iff 0 = 0.$$

Az utolsó egyenletbe helyettesítve a w_1 és w_2 kapott kifejezéseket

$$(2 + 2w_3 + w_4) + 2(w_3 - 3w_4) - 4w_3 + 5w_4 = 2 \iff 0 = 0$$

összefüggéshez jutunk. Tehát a (9.1) egyenletrendszer egyenértékű a

$$\begin{cases} w_1 = 2 + 2w_3 + w_4 \\ w_2 = w_3 - 3w_4 \end{cases}$$

egyenletrendszerrel. Innen adódik, hogy w_1, w_2 főismeretlenek és w_3, w_4 mellékismeretlenek, így ezen egyenletrendszer megoldásai

$$\begin{cases} w_1 = 2 + 2\alpha + \beta \\ w_2 = \alpha - 3\beta \\ w_3 = \alpha \\ w_4 = \beta \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

alakúak. Sajátosan például $\alpha = \beta = 0$ esetén $w = (2, 0, 0, 0)$ egy megoldása a (9.1) egyenletrendszernek, ezért erre a w vektorra $f(w) = v$. Tehát $v \in \operatorname{Im} f$.

Megjegyzés. Úgy is belátható, hogy $v \in \operatorname{Im} f$, ha igazoljuk, hogy a (9.1) egyenletrendszernek létezik megoldása, vagyis kompatibilis. Ehhez be kell látni, hogy

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

(b) Adjunk meg egy-egy bázist a $\ker f$ és $\operatorname{Im} f$ vektorterekben és határozzuk meg a dimenzióikat;

Megoldás. Mivel $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, ezért $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris és értelmezés szerint

$$\ker f = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid f(v) = \vec{0}_{\mathbb{R}^4}\}.$$

Tehát $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \ker f$ pontosan akkor, ha

$$f(v) = \vec{0} \iff [f]_E[v]_E = [\vec{0}]_E \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} v_1 + v_2 - 3v_3 + 2v_4 = 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 + 4v_4 = 0 \\ 2v_1 + v_2 - 5v_3 + v_4 = 0 \\ v_1 + 2v_2 - 4v_3 + 5v_4 = 0 \end{cases}.$$

Ez előző alponthoz hasonlóan kapjuk, hogy a fenti egyenletrendszer egyenértékű a $\begin{cases} v_1 = 2v_3 + v_4 \\ v_2 = v_3 - 3v_4 \end{cases}$ egyenletrendszerrel. Innen kapjuk, hogy v_1, v_2 főismeretlenek és v_3, v_4 pedig mellékismeretlenek, így az egyenletrendszer megoldásai a következő alakúak:

$$\begin{cases} v_1 = 2\alpha + \beta \\ v_2 = \alpha - 3\beta \\ v_3 = \alpha \\ v_4 = \beta \end{cases}, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{9.2}$$

Innen kapjuk, hogy a $\ker f$ vektorai

$$v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (2\alpha + \beta, \alpha - 3\beta, \alpha, \beta) = \alpha(2, 1, 1, 0) + \beta(1, -3, 0, 1), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

alakúak, így a $\ker f$ minden vektora egyértelműen felírható az $u_1 = (2, 1, 1, 0)$ és $u_2 = (1, -3, 0, 1)$ vektorok lineráris kombinációjaként, tehát $B = (u_1, u_2) = ((2, 1, 1, 0), (1, -3, 0, 1))$ egy bázisa a $\ker f$ valós vektortérnek.

Az $\operatorname{Im} f$ egy bázisának meghatározásához a következőképpen járunk el. Az f függvény $\mathbb{R}^4$ értelmezési tartományának $\ker f$ egy lineáris altere, így a $\ker f$ $B = (u_1, u_2)$ bázisa kiegészíthető az $\mathbb{R}^4$ egy bázisává. Legyenek $u_3 = (0, 0, 1, 0)$ és $u_4 = (0, 0, 0, 1)$ (mivel a $\ker f$ kiszámolásánál a v_1 és v_2 főismeretlenek voltak, ezért $u_3 = e_1$ és $u_4 = e_2$ a kanonikus bázisvektorok). Ekkor $B'' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ egy bázisa az $\mathbb{R}^4$ 4-dimenziós valós vektortérnek, mert

$$\det\begin{bmatrix}[u_1]_E & [u_2]_E & [u_3]_E & [u_4]_E\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(az u_1, u_2, u_3, u_4 vektorait beírtuk egy determináns oszlopaiba, majd a harmadik és negyedik oszlopokat felcseréltük az első két oszloppal, így kapva egy felső háromszög determinánst, amelynek értéke a főátlón lévő értékek szorzata). Végül

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{f(v) \mid v \in \mathbb{R}^4\} = \{f(v) \mid v \in \langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle\} = \langle f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4)\rangle \\ &= \langle \vec{0}, \vec{0}, f(u_3), f(u_4)\rangle = \langle f(u_3), f(u_4)\rangle\end{aligned}$$

($u_1, u_2 \in \ker f$, ezért $f(u_1) = f(u_2) = \vec{0}$). Az $f(u_3)$ és $f(u_4)$ nem nulla, lineárisan független vektorok, különben léteznie kellene $k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ nem mind nulla skalároknak úgy, hogy

$$k_3 f(u_3) + k_4 f(u_4) = \vec{0} \iff f(k_3 u_3 + k_4 u_4) = \vec{0} \iff k_3 u_3 + k_4 u_4 \in \ker f = \langle u_1, u_2\rangle.$$

Ez azt jelenti, hogy u_1, u_2, u_3, u_4 lineárisan függőek (ha $k_3 \neq 0$, akkor az u_3 kifejezhető az u_1, u_2, u_4 vektorok lineáris kombinációjaként, ha $k_4 \neq 0$, akkor az u_4 kifejezhető az u_1, u_2, u_3 vektorok lineáris kombinációjaként), ami ellentmond annak, hogy $B' = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ egy bázisa az $\mathbb{R}^4$-nek. Ezek alapján $B'' = (f(u_3), f(u_4)) = ((1, -1, 2, 1), (1, 1, 1, 2))$ egy bázis az $\operatorname{Im} f$-nek, ahol

$$[f(u_3)]_E = [f]_E [u_3]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és}$$

$$[f(u_4)]_E = [f]_E [u_4]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés. Az $\ker f$ mag (u_1, u_2) bázisát kiegészítettük az $\mathbb{R}^4$ értelmezési tartomány egy bázisává az u_3 és u_4 vektorokkal. Ekkor a kiegészítő vektorok f általi képei, a $f(u_3,\ f(u_4)$ vektorok mindig generálják az $\operatorname{Im} f$ képteret és lineárisan függetlenek is, ezért az $\operatorname{Im} f$ egy bázisát alkotják.

□

(c) Határozzuk meg v és v' koordinátáit a (b) pontnál megadott bázisokban;

Megoldás. Ahhoz, hogy meghatározzuk a $v = (1, 4, 1, -1)$ vektor koordinátáit a $B = (u_1 = (2, 1, 1, 0),\ u_2 = (1, -3, 0, 1))$ bázisban, ki kell számolni azokat a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárokat, amelyekre

$$v = \alpha u_1 + \beta u_2 \iff \begin{cases} 1 = 2\alpha + \beta \\ 4 = \alpha - 3\beta \\ 1 = \alpha \\ -1 = \beta \end{cases}.$$

Innen kapjuk, hogy $\alpha = 1$ és $\beta = -1$, tehát $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a $v' = (2, -2, 4, 2)$ vektor koordinátáit a $B'' = (f(u_3) = (1, -1, 2, 1),\ f(u_4) = (1, 1, 1, 2))$ bázisban, ki kell számolni azokat a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárokat, amelyekre

$$v' = \alpha f(u_3) + \beta f(u_4) \iff \begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ -2 = -\alpha + \beta \\ 4 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha + 2\beta \end{cases}.$$

Innen kapjuk, hogy $\alpha = 2$ és $\beta = 0$, tehát $[v']_{B''} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

(d) Írjuk fel az f függvényt.

Megoldás. Az f függvény képletét az $[f(x_1,x_2,x_3,x_4)]_E = [f]_E[(x_1,x_2,x_3,x_4)]_E$ alapján írhatjuk fel:

$$[f(x_1,x_2,x_3,x_4)]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2-3x_3+2x_4 \\ -x_1+x_2+x_3+4x_4 \\ 2x_1+x_2-5x_3+x_4 \\ x_1+2x_2-4x_3+5x_4 \end{pmatrix},$$

ahonnan

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2-3x_3+2x_4,\ -x_1+x_2+x_3+4x_4,\ 2x_1+x_2-5x_3+x_4,\ x_1+2x_2-4x_3+5x_4).$$

□

10. Legyen $f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, $f(x,y,z,t) = (x+2y+z-t,\ x+2y-z+t,\ x+2y,\ z-t)$.

(a) Mutassuk meg, hogy $v = (4,-2,3,3) \in \ker f$ és $v' = (3,-1,1,2) \in \operatorname{Im} f$;

Megoldás. A $v = (4,-2,3,3) \in \ker f$, mert

$$f(v) = f(4,-2,3,3) = (4+2\cdot(-2)+3-3,\ 4+2\cdot(-2)-3+3,\ 4+2\cdot(-2),\ 3-3) = (0,0,0,0) = \vec{0}.$$

A $v' = (3,-1,1,2) \in \operatorname{Im} f$, ha léteznek $w = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ vektor úgy, hogy $f(w) = v'$, vagyis

$$f(x,y,z,t) = (3,-1,1,2)$$

$$\iff (x+2y+z-t,\ x+2y-z+t,\ x+2y,\ z-t) = (3,-1,1,2)$$

(10.1) $$\iff \begin{cases} x+2y+z-t = 3 \\ x+2y-z+t = -1 \\ x+2y = 1 \\ z-t = 2 \end{cases}.$$

Az utolsó két egyenletből kapjuk, hogy $z = t+2$ és $x = 1-2y$, amelyeket behelyettesítve a fenti egyenletrendszer egyenértékű a

$$\begin{cases} (1-2y)+2y+(t+2)-t = 3 \\ (1-2y)+2y-(t+2)+t = -1 \\ x = 1-2y \\ z = t+2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ x = 1-2y \\ z = t+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1-2y \\ z = t+2 \end{cases}$$

egyenletrendszerrel. Innen adódik, hogy x,z főismeretlenek és y,t mellékismeretlenek, így az egyenletrendszer megoldásai

$$\begin{cases} x = 1-2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta+2 \\ t = \beta \end{cases}, \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

alakúak. Sajátosan $\alpha = \beta = 0$ esetén $f(1,0,2,0) = (3,-1,1,2) = v'$, tehát $v' \in \operatorname{Im}, f$.

Megjegyzés. A (10.1) egyenletrendszer megoldása helyett elég belátni, hogy az egyenletrendszernek létezik megoldása, vagyis elég igazolni, hogy kompatibilis. Az egyenletrendszer megoldása felhasználható a $\ker f$ bázisának meghatározásához, elhagyva a szabadtagokat.

□

(b) Adjunk meg egy-egy bázist a $\ker f$ és $\operatorname{Im} f$ vektorterekben és határozzuk meg a dimenzióikat;

Megoldás. A $\ker f$ egy bázisának kiszámolásához meg kell oldanunk az

$$f(x,y,z,t)=(0,0,0,0) \iff (x{+}2y{+}z{-}t,\ x{+}2y{-}z{+}t,\ x{+}2y,\ z{-}t)=(0,0,0,0) \iff \begin{cases} x+2y+z-t=0 \\ x+2y-z+t=0 \\ x+2y=0 \\ z-t=0 \end{cases}$$

egyenletrendszert. Ezt hasonlóan megoldhatjuk, mint az előző alpontban és kapjuk, hogy a megoldásai

$$\begin{cases} x=-2\alpha \\ y=\alpha \\ z=\beta \\ t=\beta \end{cases}, \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

alakúak. Tehát a $\ker f$ vektorai egyértelműen felírhatók

$$(x,y,z,t)=\alpha(-2,1,0,0)+\beta(0,0,1,1), \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

lineáris kombináció alakjába, ezért $(u_1=(-2,1,0,0),\ u_2=(0,0,1,1))$ a $\ker f$ egy bázisa.

Az $\operatorname{Im} f$ bázisának meghatározásához a $\ker f$ bázisát kiegészítjük az $\mathbb{R}^4$ értelmezési tartomány egy bázisává. Mivel x,z (az első és harmadik ismeretlenek) voltak a főismeretlenek, ezért legyenek $u_3=e_1=(1,0,0,0)$, $u_4=e_3=(0,0,1,0)$ vektorok. Ekkor $(u_1=(-2,1,0,0), u_2=(0,0,1,1), u_3=(1,0,0,0), u_4=(0,0,1,0))$ az $\mathbb{R}^4$ egy bázisa, mivel

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

(a harmadik oszlopot felcseréltük az előtte lévő két oszloppal, majd a negyediket az előtte lévő oszloppal, így kapva egy felső háromszög determinánst, amelynek értéke a kapott előjel és a főátlón lévő elemek szorzata). Mivel

$$\operatorname{Im} f=\langle f(u_1),f(u_2),f(u_3),f(u_4)\rangle=\langle\vec{0},\vec{0},f(1,0,0,0),f(0,0,1,0)\rangle=\langle(1,1,1,0),(1,-1,0,1)\rangle,$$

ezért $(f(u_3)=(1,1,1,0), f(u_4)=(1,-1,0,1))$ az $\operatorname{Im} f$ egy bázisa.

Megjegyzés. Az $\operatorname{Im} f$ bázisának meghatározása után könnyebb leellenőrizni, hogy $v'\in\operatorname{Im} f$, mivel a (10.1) egyenletrendszer helyett az egyszerűbb kétismeretlenes

$$k_1(1,1,1,0)+k_2(1,-1,0,1)=v' \begin{cases} k_1+k_2=3 \\ k_1-k_2=-1 \\ k_1=1 \\ k_2=2 \end{cases}$$

egyenletrendszert kell megoldani, amelynek azonnal adódik a megoldása és kompatibilitása.

□

(c) Írjuk fel az $[f]_E$ mátrixot.

Megoldás. Az $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ jelöli az $\mathbb{R}^4$ kanonikus bázisát és

$$[f]_E = \Big[[f(e_1)]_E \quad [f(e_2)]_E \quad [f(e_3)]_E \quad [f(e_3)]_E \Big] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

11. Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy lineáris függvény. Határozzuk meg a $\ker f$ és $\operatorname{Im} f$ vektorterek egy-egy bázisát, ha adott az f mátrixa a kanonikus bázisokban:

(a) $[f]_{E'E} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

Megoldás.

$$f(x, y, z, t) = \vec{0} \iff [f]_{E'E} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x - y - z + t = 0 \\ x + 2y - z - t = 0 \end{cases}.$$

Az első egyenletből kifejezve t-t és behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy a fenti egyenletrendszer egyenértékű a

$$\begin{cases} t = -3x + y + z \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -7x + 3z \\ y = 2z - 4x \end{cases}.$$

Ez alapján x, t főismeretlenek és y, z mellékismeretlenek, így az egyenletrendszer megoldásai

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -4\alpha + 2\beta \\ z = \beta \\ t = -7\alpha + 3\beta \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

alakúak. Tehát a $\ker f$ vektorai egyértelműen felírhatók

$$(x, y, z, t) = (\alpha, -4\alpha + 2\beta, \beta, -7\alpha + 3\beta) = \alpha\,(1, -4, 0, -7) + \beta\,(0, 2, 1, 3)$$

lineáris kombináció alakjában, ezért $(u_1 = (1, -4, 0, -7)\,,\, u_2 = (0, 2, 1, 3))$ a $\ker f$ egy bázisa.

Mivel y, t (az második és negyedik ismeretlenek) a főismeretlenek, ezért a $\ker f$ altér (u_1, u_2) bázisát az $u_3 = e_2$, $u_4 = e_4$ vektorokkal kiegészítjük az $\mathbb{R}^4$ értelmezési tartomány egy bázisává. Ekkor $(f(u_3), f(u_4))$ egy bázisa az $\operatorname{Im} f$ altérnek. Mivel $\operatorname{Im} f$ egy két dimenziós lineáris altere az $\mathbb{R}^2$ szintén két dimenziós vektortérnek (értékkészletnek), ezért $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ és sajátosan választható az $E' = (e'_1 = (1, 0),\ e'_2 = (0, 1))$ is az $\operatorname{Im} f$ egy bázisának.

Megjegyzés.

$$[f(u_3)]_{E'} = [f]_{E'E}[u_3]_E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$[f(u_4)]_{E'} = [f]_{E'E}[u_4]_E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ahonnan kapjuk az $(f(u_3) = (-1, 2),\ f(u_4) = (1, -1))$ bázisát az $\operatorname{Im} f$-nek.

□

(b) $[f]_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$;

Megoldás.

$$f(x, y, z) = \vec{0} \iff [f]_{E'E} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y + 5z = 0 \\ x = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases}.$$

Az első egyenletből kifejezve y-t kapjuk, hogy a fenti egyenletrendszer egyenértékű a

$$\begin{cases} y = 5z \\ x = 0 \\ y = 5z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 5z \end{cases}$$

egyenletrendszerrel. Ez alapján x, y főismeretlenek és z mellékismeretlen, így az egyenletrendszer megoldásai

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

alakúak. Tehát a $\ker f$ vektorai egyértelműen felírhatók

$$(x, y, z) = (0, 5\alpha, \alpha) = \alpha\,(0, 5, 1)$$

lineáris kombináció alakjában, ezért $(u_1 = (0, 5, 1))$ a $\ker f$ egy bázisa.

Mivel x, y (az első és második ismeretlenek) a főismeretlenek, ezért a $\ker f$ altér (u_1) bázisát az $u_2 = e_1$, $u_3 = e_2$ vektorokkal kiegészítjük az $\mathbb{R}^3$ értelmezési tartomány egy bázisává. Ekkor $(f(u_2) = (0, 1, 0),\ f(u_3) = (-1, 0, 1))$ egy bázisa az $\operatorname{Im} f$ altérnek, amelyet következőképpen számoltunk ki:

$$[f(u_2)]_{E'} = [f]_{E'E}[u_2]_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[f(u_3)]_{E'} = [f]_{E'E}[u_3]_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ahonnan $f(u_2) = (0, 1, 0)$ és $f(u_3) = (-1, 0, 1))$.

□

(c) $[f]_{E'E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

Megoldás.

$$f(x,y,z,t)=\vec{0} \iff [f]_{E'E}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}x-3z+2t=0\\-2x+3y+t=0\\3x-3y-z+t=0\end{cases}.$$

Az második egyenletből kifejezve t-t és a harmadik egyenletből pedig z-t kapjuk, hogy a fenti egyenletrendszer egyenértékű a

$$\begin{cases}x-3z+2t=0\\t=2x-3y\\z=3x-3y+t\end{cases} \iff \begin{cases}5x-9y=0\\t=2x-3y\\z=5x-6y\end{cases} \iff \begin{cases}x=\dfrac{9}{5}y\\t=\dfrac{3}{5}y\\z=3y\end{cases}$$

egyenletrendszerrel. Ez alapján x,t,z főismeretlenek és y mellékismeretlen, így az egyenletrendszer megoldásai

$$\begin{cases}x=\dfrac{9}{5}\alpha\\y=\alpha\\z=3\alpha\\t=\dfrac{3}{5}\alpha\end{cases},\qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

alakúak. Tehát a $\ker f$ vektorai egyértelműen felírhatók

$$(x,y,z,t)=\left(\frac{9}{5}\alpha,\alpha,3\alpha,\frac{3}{5}\alpha\right)=\alpha\left(\frac{9}{5},1,3,\frac{3}{5}\right)$$

lineáris kombináció alakjában, ezért $(u_1=\left(\frac{9}{5},1,3,\frac{3}{5}\right))$ a $\ker f$ egy bázisa.

Mivel x,z,t (az első, harmadik és negyedik ismeretlenek) a főismeretlenek, ezért a $\ker f$ altér (u_1) bázisát az $u_2=e_1$, $u_3=e_3$, $u_4=e_4$ vektorokkal kiegészítjük az $\mathbb{R}^4$ értelmezési tartomány egy bázisává. Ekkor $(f(u_2)=(1,-2,3), f(u_3)=(-3,0,-1), f(u_4)=(2,1,1))$ egy bázisa az $\operatorname{Im} f$ altérnek, amelyet következőképpen számoltunk ki:

$$[f(u_2)]_{E'}=[f]_{E'E}[u_2]_E=\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\-2&3&0&1\\3&-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},$$

$$[f(u_3)]_{E'}=[f]_{E'E}[u_3]_E=\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\-2&3&0&1\\3&-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$[f(u_3)]_{E'}=[f]_{E'E}[u_3]_E=\begin{pmatrix}1&0&-3&2\\-2&3&0&1\\3&-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},$$

ahonnan $f(u_2)=(1,-2,3)$, $f(u_2)=(-3,0,1)$ és $f(u_4)=(2,1,1)$.

Megjegyzés. Mivel $\operatorname{Im} f$ egy 3-dimenziós lineáris altere az $\mathbb{R}^3$ szintén 3-dimenziós lineáris vektortérnek (az f értékkészlete), ezért $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$ és válaszható $E' = (e'_1 = (1,0,0), e'_2 = (0,1,0), e'_3 = (0,0,1))$ az $\operatorname{Im} f$ egy bázisának.

□

(d) $[f]_E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Megoldás.

$$f(x,y,z) = \vec{0} \iff [f]_{E'E} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ -x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} .$$

Az első egyenletből kifejezve z-t kapjuk, hogy a fenti egyenletrendszer egyenértékű a

$$\begin{cases} z = -2x - 2y \\ -3x - 5y = 0 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszerrel. Tehát a $\ker f = \{(0,0,0)\}$, így $\ker f$-nek nincs bázisa.

Tekintjük az $\mathbb{R}^3$ értelmezési tartomány $E = (e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0)\ e_3 = (0,0,1))$ kanonikus bázisát. Ekkor az $\operatorname{Im} f$ egy bázisa $(f(e_1) = (2,-1,1),\ f(e_2) = (2,-3,2),\ f(e_3) = (1,1,-1))$, amelyet a következőképpen számolunk ki:

$$[f(e_1)]_{E'} = [f]_{E'E}[e_1]_E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$[f(e_2)]_{E'} = [f]_{E'E}[e_2]_E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$[f(e_3)]_{E'} = [f]_{E'E}[e_3]_E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ahonnan $f(e_1) = (2,-1,1)$, $f(e_2) = (2,-3,2)$ és $f(e_3) = (1,1,-1)$.

Megjegyzés. Mivel $\ker f = \{\vec{0}\}$, ezért az f lineáris függvény injektív, így az $\operatorname{Im} f$ dimenziója megegyezik az f értelmezési tartományának, $\mathbb{R}^3$-nek dimenziójával. Az f értékkészlete $\mathbb{R}^3$ is 3-dimenziós, ezért $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$, vagyis f bijektív. Ezért választható az $\operatorname{Im} f$ egy bázisának az $E = (e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1))$ kanonikus bázis.

□