LINEÁRIS ALGEBRA

Vektorterek

1. *Legyen $\mathbb{K}$ egy test. Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{K}, \mathbb{K}[X], +, \cdot)$ vektortér, ahol a vektorok összeadása a polinomok összeadását jelenti, a skalárral való szorzás pedig a következő módon történik:*

$$k \cdot f = (ka_0) + (ka_1)X + (ka_2)X^2 + \cdots + (ka_n)X^n,$$

minden $k \in \mathbb{K}$ és minden $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ esetén.

Megoldás. Ha $A = a_0 + a_1X + a_2X^n + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ egy polinom, akkor minden $N \geq n$ esetén átírhatjuk $A = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \ldots + a_NX^N$ alakba, ahol $a_{n+1} = \cdots = a_N = 0$. Ez alapján mikor több polinommal dolgozunk, akkor feltehetjük, hogy ugyanannyi együtthatójuk van.

I. A $(\mathbb{K}[X], +)$ egy Abel-csoport, mert

(1) A $\mathbb{K}[X]$-beli polinomok összeadása belső művelet:
minden $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, B = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ polinomok esetén

$$\begin{aligned} A + B &= (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + (b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n \in \mathbb{K}[X], \end{aligned}$$

mivel $a_0 + b_0$, $a_1 + b_1$, $\ldots$,$a_n + b_n \in \mathbb{K}$.

(2) A polinomok összeadása asszociatív:
minden $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, B = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n, C = c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ polinomok esetén

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + ((b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n) + (c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n)) \\ &= (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + ((b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)X + \cdots + (b_n + c_n)X^n) \\ &= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))X + \cdots + (a_n + (b_n + c_n))X^n \\ &\overset{(*)}{=} ((a_0 + b_0) + c_0) + ((a_1 + b_1) + c_1)X + \cdots + ((a_n + b_n) + c_n)X^n, \\ &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n) + (c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n) \\ &((a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + (b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n)) + (c_0 + c_1X + \cdots + c_nX^n) \\ &= (A + B) + C, \end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben felhasználtuk, hogy az $a_0, b_0, c_0, \ldots, a_n, b_n, c_n$ együtthatók a $\mathbb{K}$ testből vannak, ahol értelmezés szerint az összeadás asszociatív.

(3) A polinomok összeadás kommutatív:
minden $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, B = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ polinom esetén

$$\begin{aligned} A + B &= (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + (b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n \\ &\overset{(*)}{=} (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)X + \cdots + (b_n + a_n)X^n \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)X + \cdots + (b_n + a_n)X^n \\ &= (b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n) + (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) \\ &= B + A, \end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben kihasználtuk, hogy az $a_0, b_0, \ldots, a_n, b_n$ együtthatók a $\mathbb{K}$ testből vannak, ahol az összeadás értelmezés szerint kommutatív.

(4) Létezik semleges elem: Legyen $O \in \mathbb{K}[X]$ a zéruspolinom, vagyis az a polinom, amelynek mindegyik együtthatója 0, a $\mathbb{K}$ test zéruseleme. Ekkor, ha $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ egy polinom, akkor a zéruspolinom felírható $O = 0 + 0X + \cdots + 0X^n$ alakba és

$$\begin{aligned} A + O &= (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + (0 + 0X + \cdots + 0X^n) \\ &= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)X + \cdots + (a_n + 0)X^n = (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) \\ &= A. \end{aligned}$$

Az összeadás kommutativitása miatt $O + A = A + O = O$.

(5) Létezik szimmetrikus az összeadásra nézve (ellentett polinom): minden $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ esetén legyen $A' = (-A) = (-a_0) + (-a_1)X + \cdots + (-a_n)X^n \in \mathbb{K}[X]$, az a polinom, amelynek együtthatói az A polinom együtthatóinak ellentettjei. Ekkor

$$\begin{aligned} A + (-A) &= (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + ((-a_0) + (-a_1)X + \cdots + (-a_n)X^n)) \\ &= (a_0 + (-a_0)) + (a_1 + (-a_1))X + \cdots + (a_n + (-a_n))X^n) \\ &= 0 + 0X + \cdots + 0X^n \\ &= O. \end{aligned}$$

Az összeadás kommutativitása miatt $(-A) + A = A + (-A) = O$.

II. (1) Minden $k \in \mathbb{K}$ skalár és minden $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, B = b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ polinomok esetén

$$\begin{aligned} k \cdot (A + B) &= k \cdot ((a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + (b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n)) \\ &= k \cdot ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n) \\ &= k(a_0 + b_0) + k(a_1 + b_1)X + \cdots + k(a_n + b_n)X^n \\ &\overset{(*)}{=} (ka_0 + kb_0) + (ka_1 + kb_1)X + \cdots + (ka_n + kb_n)X^n \\ &= (ka_0 + ka_1X + \cdots + ka_nX^n) + (kb_0 + kb_1X + \cdots + kb_nX^n) \\ &= k \cdot (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + k \cdot (b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n) \\ &= k \cdot A + k \cdot B, \end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben kihasználtuk, hogy a $k, a_0, a_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{K}$ és a $\mathbb{K}$ testben a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

(2) Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ skalár és minden $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ polinom esetén

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) \cdot A &= (k_1 + k_2) \cdot (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) \\ &= (k_1 + k_2)a_0 + (k_1 + k_2)a_1X + \cdots + (k_1 + k_2)a_nX^n \\ &\overset{(*)}{=} (k_1a_0 + k_2a_0) + (k_1a_1 + k_2a_1)X + \cdots + (k_1a_n + k_2a_n)X^n \\ &= (k_1a_0 + k_1a_1X + \cdots + k_1a_nX^n) + (k_2a_0 + k_2a_1X + \cdots + k_2a_nX^n) \\ &= k_1 \cdot (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + k_2 \cdot (a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) \\ &= k_1 \cdot A + k_2 \cdot A, \end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben kihasználtuk, hogy a $k_1, k_2, a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ és a $\mathbb{K}$ testben a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

(3) Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ és minden $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ polinom esetén

$$\begin{aligned}(k_1k_2)\cdot A &= (k_1k_2)\cdot(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n)\\ &= (k_1k_2)a_0 + (k_1k_2)a_1X + \cdots + (k_1k_2)a_nX^n\\ &\overset{(*)}{=} k_1(k_2a_0) + k_1(k_2a_1)X + \cdots + k_1(k_2a_n)X^n\\ &= k_1\cdot(k_2a_0 + k_2a_1X + \cdots + k_2a_nX^n)\\ &= k_1\cdot(k_2\cdot(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n))\\ &= k_1\cdot(k_2\cdot A),\end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben kihasználtuk, hogy $k_1, k_2, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ és a $\mathbb{K}$ testben a szorzás asszociatív.

(1) Ha $1 \in \mathbb{K}$ a test egységeleme, akkor minden $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ polinom esetén

$$\begin{aligned}1\cdot A &= 1\cdot(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n)\\ &= (1\cdot a_0) + (1\cdot a_1)X + \cdots + (1\cdot a_n)X^n\\ &\overset{(*)}{=} a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n\\ &= A,\end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben kihasználtuk, hogy $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ és 1 a $\mathbb{K}$ test egységeleme, ezért $1\cdot a_0 = a_0, 1\cdot a_1 = a_1, \dots, 1\cdot a_n = a_n$.

Ezzel beláttuk, hogy $(\mathbb{K}, \mathbb{K}[X], +, \cdot)$ egy vektortér. □

2. *Legyen $\mathbb{K}$ test és legyenek $m, n \in \mathbb{N}^*$. Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{K}, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ vektortér, ahol $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ az $m \times n$-es mátrixok halmazát jelöli.*

Megoldás.

I. Az $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ egy Abel-csoport:

- A mátrixok összeadása asszociatív: minden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \dots & c_{mn}\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ mátrixok esetén

$$\begin{aligned}A + (B + C) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \dots & c_{mn}\end{pmatrix}\right]\\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & \dots & b_{1n}+c_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1}+c_{m1} & \dots & b_{mn}+c_{mn}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & \dots & a_{1n}+(b_{1n}+c_{1n})\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+(b_{m1}+c_{m1}) & \dots & a_{mn}+(b_{mn}+c_{mn})\end{pmatrix}\\ &\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & \dots & (a_{1n}+b_{1n})+c_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ (a_{m1}+b_{m1})+c_{m1} & \dots & (a_{mn}+b_{mn})+c_{mn}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= (A+B)+C,$$

ahol a $(*)$ összefüggésben felhasználtuk, hogy minden $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ az a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} együtthatók a $\mathbb{K}$ testből vannak, ahol az összeadás asszociatív, ezért $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$.

- A mátrixok összeadása kommutatív:

  minden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ mátrixok esetén

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \dots & b_{1n}+a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & \dots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= B+A,$$

ahol a $(*)$ összefüggésben felhasználtuk, hogy minden $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ az a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} együtthatók a $\mathbb{K}$ testből vannak, ahol az összeadás asszociatív, ezért $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$.

- Létezik semleges elem (zéruselem) az összeadásra nézve. Legyen $O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ a nullmátrix (minden együtthatója 0, a $\mathbb{K}$ test zéruseleme). Ekkor minden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mátrix esetén

$$A+O_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+0 & \dots & a_{1n}+0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+0 & \dots & a_{mn}+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= A.$$

A kommutativitás miatt $A+O_{m,n} = O_{m,n}+A = A$.

- Létezik ellentett elem:
  minden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mátrix esetén legyen $(-A) = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.
  Ekkor
  $$\begin{aligned} A + (-A) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + (-a_{11}) & \dots & a_{1n} + (-a_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + (-a_{m1}) & \dots & a_{mn} + (-a_{mn}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= O_{m,n} \end{aligned}$$
  A kommutativitás miatt $(-A) + A = A + (-A) = O_{m,n}$.

II. (1) Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ és $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mátrix esetén

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) \cdot A = (k_1 + k_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)a_{11} & \dots & (k_1 + k_2)a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (k_1 + k_2)a_{m1} & \dots & (k_1 + k_2)a_{mn} \end{pmatrix} \\ &\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} k_1a_{11} + k_2a_{11} & \dots & k_1a_{1n} + k_2a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_1a_{m1} + k_2a_{m1} & \dots & k_1a_{mn} + k_2a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_1a_{11} & \dots & k_1a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_1a_{m1} & \dots & k_1a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_2a_{11} & \dots & k_2a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_2a_{m1} & \dots & k_2a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= k_1 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= k_1A + k_2A, \end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben felhasználtuk, hogy minden $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ esetén $k_1, k_2, a_{ij} \in \mathbb{K}$ és a $\mathbb{K}$ testben értelmezés szerint a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

(2) Minden $k \in \mathbb{K}$ esetén és $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ mátrixok esetén

$$k \cdot (A + B) = k \cdot \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a_{11} + b_{11}) & \dots & k(a_{1n} + b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ k(a_{m1} + b_{m1}) & \dots & k(a_{mn} + b_{mn}) \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} ka_{11} + kb_{11} & \dots & ka_{1n} + kb_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} + kb_{m1} & \dots & ka_{mn} + kb_{mn} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= kA + kB,$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben felhasználtuk, hogy minden $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ esetén $k, a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{K}$ és a $\mathbb{K}$ testben értelmezés szerint a szorzás disztributív az összeadásra nézve, ezért $k(a_{ij} + b_{ij}) = ka_{ij} + kb_{ij}$.

(3) Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ és minden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mátrix esetén

$$(k_1k_2) \cdot A = (k_1k_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1k_2)a_{11} & \dots & (k_1k_2)a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (k_1k_2)a_{m1} & \dots & (k_1k_2)a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} k_1(k_2a_{11}) & \dots & k_1(k_2a_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ k_1(k_2a_{m1}) & \dots & k_1(k_2a_{mn}) \end{pmatrix} = k_1 \cdot \begin{pmatrix} k_2a_{11} & \dots & k_2a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_2a_{m1} & \dots & k_2a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= k_1 \cdot \left(k_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= k_1 \cdot (k_2 \cdot A),$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben felhasználtuk, hogy minden $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ esetén $k_1, k_2, a_{ij} \in \mathbb{K}$ és a $\mathbb{K}$ testben értelmezés szerint a szorzás asszociatív.

(4) Ha $1 \in \mathbb{K}$ a test egységeleme, akkor minden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mátrix esetén

$$1 \cdot A = 1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a_{11} & \dots & 1 \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 \cdot a_{m1} & \dots & 1 \cdot a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $(\mathbb{K}, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ egy vektortér. □

3. *Legyen $\mathbb{K}$ test, $M \neq \emptyset$ halmaz és $\mathbb{K}^M = \{f | f : M \to \mathbb{K} \text{ függvény}\}$. Értelmezzük a függvények összeadását és skalárral való szorzását a következőképpen: minden $f, g \in \mathbb{K}^M$ függvények és $k \in \mathbb{K}$ skalár esetén*

$$f + g \in \mathbb{K}^M, \ (f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in M,$$
$$kf \in \mathbb{K}^M, \ (k \cdot f)(x) = kf(x), \quad \forall x \in M.$$

Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^M, +, \cdot)$ egy vektortér. Sajátos esetben, ha $M = \mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ függvény}\}$ is vektortér $\mathbb{R}$ fölött (érdekes jelölés: ${}_\mathbb{R}\mathbb{R}^\mathbb{R}$).

Megoldás. A gyűrűknél igazoltuk, hogy ha R egy gyűrű és $M \neq \emptyset$ halmaz, akkor $R^M = \{f \mid f : M \to R \text{ függvény}\}$ egy gyűrű. Egy $\mathbb{K}$ test egyben gyűrű is, ezért $\mathbb{K}^M = \{f \mid f : M \to \mathbb{K} \text{ függvény}\}$ Abel-csoport a függvények összeadásával.

(1) Minden $k \in \mathbb{K}$ esetén és minden $f_1, f_2 \in \mathbb{K}^M$ esetén

$$\begin{aligned} & k \cdot (f_1 + f_2) = k \cdot f_1 + k \cdot f_2 \\ \Leftrightarrow\ & (k \cdot (f_1 + f_2))(x) = (k \cdot f_1 + k \cdot f_2)(x), \quad \forall x \in M \\ \Leftrightarrow\ & k \cdot (f_1 + f_2)(x) = (k \cdot f_1)(x) + (k \cdot f_2)(x), \quad \forall x \in M \\ \Leftrightarrow\ & k \cdot (f_1(x) + f_2(x)) = k \cdot f_1(x) + k \cdot f_2(x), \quad \forall x \in M, \end{aligned}$$

ami teljesül, mert $k, f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{K}$, minden $x \in M$ esetén, és a $\mathbb{K}$ testben a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

(2) Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ esetén és minden $f \in \mathbb{K}^M$ esetén

$$\begin{aligned} & (k_1 + k_2) \cdot f = k_1 \cdot f + k_2 \cdot f \\ \Leftrightarrow\ & ((k_1 + k_2) \cdot f)(x) = (k_1 \cdot f + k_2 \cdot f)(x), \quad \forall x \in M \\ \Leftrightarrow\ & (k_1 + k_2)f(x) = (k_1 \cdot f)(x) + (k_2 \cdot f)(x), \quad \forall x \in M \\ \Leftrightarrow\ & (k_1 + k_2)f(x) = k_1 f(x) + k_2 f(x), \quad \forall x \in M, \end{aligned}$$

ami teljesül, mert $k_1, k_2, f(x) \in \mathbb{K}$, minden $x \in M$ esetén, és a $\mathbb{K}$ testben a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

(3) Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ esetén és minden $f \in \mathbb{K}^M$ esetén

$$\begin{aligned} & (k_1 k_2) \cdot f = k_1 \cdot (k_2 \cdot f) \\ \Leftrightarrow\ & ((k_1 k_2) \cdot f)(x) = (k_1 \cdot (k_2 \cdot f))(x), \quad \forall x \in M \\ \Leftrightarrow\ & (k_1 k_2) f(x) = k_1((k_2 \cdot f)(x)), \quad \forall x \in M \\ \Leftrightarrow\ & (k_1 k_2) f(x) = k_1(k_2 f(x)), \quad \forall x \in M, \end{aligned}$$

ami teljesül, mert $k_1, k_2, f(x) \in \mathbb{K}$, minden $x \in M$ esetén, és a $\mathbb{K}$ testben a szorzás asszociatív.

(4) Ha 1 a $\mathbb{K}$ test egységeleme, akkor minden $f \in \mathbb{K}^M$ esetén

$$\begin{aligned} & 1 \cdot f = f \\ \Leftrightarrow\ & (1 \cdot f)(x) = f(x), \quad \forall x \in M \\ \Leftrightarrow\ & 1 \cdot f(x) = f(x)), \quad \forall x \in M, \end{aligned}$$

ami teljesül, mert $f(x) \in \mathbb{K}$ és 1 a $\mathbb{K}$ test egységeleme.

Ezzel igazoltuk, hogy $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^M, +, \cdot)$ egy vektortér. □

4. *Legyen* $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ *a következő műveletekkel:*

$$x \perp y = xy \quad \text{és} \quad k \top x = x^k, \qquad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in V.$$

Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{R}, V, \perp, \top)$ *vektortér.*

Megoldás. I. A $(V, \perp)$ Abel-csoport, mert $(V, \perp) = ((0, +\infty), \cdot)$ részcsoportja az $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ csoportnak.

- a $V = (0, +\infty) \neq \emptyset$;
- minden $x, y \in V = (0, +\infty)$ esetén $x \cdot y^{-1} \in (0, +\infty)$.

II. (1) Minden $k \in \mathbb{R}$ és minden $x, y \in V = (0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned} k\top(x \perp y) &= k\top(x \cdot y) = (x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k = (k\top x) \cdot (k\top y) \\ &= (k\top x) \perp (k\top y). \end{aligned}$$

(2) Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ és minden $x \in V = (0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)\top x &= x^{k_1+k_2} = x^{k_1} \cdot x^{k_2} = (k_1\top x) \cdot (k_2\top x) \\ &= (k_1\top x) \perp (k_2\top x). \end{aligned}$$

(3) Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ és minden $x \in V = (0, +\infty)$ esetén

$$\begin{aligned} (k_1k_2)\top x &= x^{k_1k_2} = (x^{k_1})^{k_2} = k_2\top(x^{k_1}) \\ &= k_2\top(k_1\top x). \end{aligned}$$

(4) Minden $x \in V$ esetén

$$1\top x = x^1 = x.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $(\mathbb{R}, V, \perp, \top)$ egy vektortér.

□

Lineáris részterek

5. *A következő halmazok közül melyek részterei $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek?*

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$;

Megoldás. Az $\mathbb{R}^3$ vektortér egy vektora pontosan akkor van benne az A halmazban, ha az első komponense nulla, ezért $A = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

- Az $A \neq \emptyset$, mert $(0, 0, 0) \in A$ (a vektor első komponense 0).
- Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ skalárok és $(0, y_1, z_1), (0, y_2, z_2) \in B$ vektorok esetén

$$\begin{aligned} k_1(0, y_1, z_1) + k_2(0, y_2, z_2) &= (k_10 + k_20,\ k_1y_1 + k_2y_2,\ k_1z_1 + k_2z_2) \\ &= (0,\ k_1y_1 + k_2y_2,\ k_1z_1 + k_2z_2) \in A \end{aligned}$$

(mivel a vektor első komponense 0).

Tehát A lineáris résztere az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek ($A \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$).

Megjegyzés. Az A halmaz az yOz koordinátasík a $\mathbb{R}^3$ térben.

□

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \text{ vagy } z = 0\}$;

Megoldás. Az $\mathbb{R}^3$ vektortér egy vektora benne van a B halmazban pontosan akkor, ha az első vagy harmadik komponense 0.

- Az $B \neq \emptyset$, mert $(0, 0, 0) \in B$ (az első komponsense 0).
- A $k_1, k_2 = 1 \in \mathbb{R}$ skalárok és $(0, 1, 1), (1, 1, 0) \in A$ vektorok (az első vektor első komponense 0, míg a második vektor harmadik komponense 0) esetén

$$1 \cdot (0, 1, 1) + 1 \cdot (0, 1, 1) = (1, 2, 1) \notin B,$$

mivel sem az első, sem a harmadik komponense nem 0.

Tehát B nem lineáris résztere az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek ($B \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$).

Megjegyzés. A B halmaz az yOz és xOy koordinátasíkok egyesítése a $\mathbb{R}^3$ térben. A koordinátasíkok külön-külön lineáris részterei az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek, de az egyesítésük már nem az.

□

(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$;

Megoldás. Az $\mathbb{R}^3$ vektortér egy vektora pontosan akkor van benne a C halmazban, ha az első komponense egész.

- Az $C \neq \emptyset$, mert $(0, 0, 0) \in C$ (az első komponsense egész).
- A $k_1 = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ skalár és a $(1, 0, 0) \in C$ vektor (az első komponense egész) esetén
$$\frac{1}{2} \cdot (1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \notin C,$$
mivel az első komponens nem egész.

Tehát C nem lineáris résztere az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek ($C \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$). □

(d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\}$;

Megoldás.

- A $D \neq \emptyset$, mert $(0, 0, 0) \in D$, mivel $2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot 0 = 0$.
- Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ skalárok és minden $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in D$ vektorok esetén be kell látni, hogy
$$\begin{aligned} k_1v_1 + k_2v_2 &= k_1(x_1, y_1, z_1) + k_2(x_2, y_2, z_2) \\ &= (k_1x_1, k_1y_1, k_1z_1) + (k_2x_2, k_2y_2, k_2z_2) \\ &= (k_1x_1 + k_2x_2, k_1y_1 + k_2y_2, k_1z_1 + k_2z_2) \in D, \end{aligned}$$
vagyis $2 \cdot (k_1x_1 + k_2x_2) - (k_1y_1 + k_2y_2) + 3 \cdot (k_1z_1 + k_2z_2) = 0$. Valóban,
$$\begin{aligned} 2 \cdot (k_1x_1 + k_2x_2) - (k_1y_1 + k_2y_2) + 3 \cdot (k_1z_1 + k_2z_2) = 0 \;\Leftrightarrow \\ 2k_1x_1 + 2k_2x_2 - k_1y_1 - k_2y_2 + 3k_1z_1 + 3k_2z_2) = 0 \;\Leftrightarrow \\ (2k_1x_1 - k_1y_1 + 3k_1z_1) + (2k_2x_2 - k_2y_2 + 3k_2z_2) = 0, \end{aligned}$$
mert $2x_1 - y_1 + 3z_1 = 0$, illetve $2x_2 - y_2 + 3z_2 = 0$, mivel $v_1, v_2 \in D$.

Tehát D lineáris résztere az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek ($D \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$). □

(e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 4\}$;

Első megoldás. Az E halmaz nem lineáris résztere az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek ($E \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$), mivel az $\mathbb{R}^3$ vektortér $\vec{0} = (0, 0, 0)$ nullvektora nincs benne az E halmazban. □

Második megoldás. Az E halmaz nem lineáris résztere az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek ($E \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$), mivel $(2, 0, 0) \in E$ (mert $2 \cdot 2 - 0 + 3 \cdot 0 = 4$), de $2 \cdot (2, 0, 0) = (4, 0, 0) \notin E$ (mert $2 \cdot 4 - 0 + 3 \cdot 0 \neq 4$), tehát E nem zárt a skalárral való szorzásra nézve. □

(f) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.

Megoldás. Megjegyezzük, hogy $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\} = \{(u, u, u) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in \mathbb{R}\}$, tehát F olyan vektorokból áll, amelyek minden komponense egyenlő.

- $F \neq \emptyset$, mivel $(0, 0, 0) \in F$.
- Minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ skalárok és $v_1 = (x_1, x_1, x_1), v_2 = (x_2, x_2, x_2) \in F$ vektorok esetén

$$k_1v_1 + k_2v_2 = k_1(x_1, x_1, x_1) + k_2(x_2, x_2, x_2) = (k_1x_1 + k_2x_2, k_1x_1 + k_2x_2, k_1x_1 + k_2x_2) \in F,$$

mivel minden komponense egyenlő.

Tehát F lineáris résztere az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek ($F \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$). □

6. *A következő állítások közül melyek igazak?*

(a) $A = [-1, 1] \times \{0\}$ *résztere az* $\mathbb{R}^2$ *valós vektortérnek;*

Megoldás. Mivel $(1, 0) \in A$, de $2 \cdot (1, 0) = (2, 0) \notin A$, ezért A nem lineáris résztere az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérnek ($A \lneq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$). □

(b) *$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ résztere az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérnek;*

Megoldás. Mivel $(1, 0) \in B$ (mert $1^2+0^2 \leq 1$), de $2\cdot(1, 0) = (2, 0) \notin B$ (mert $2^2+0^2 \not\leq 1$), ezért B nem lineáris résztere az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérnek ($B \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$). □

(c) *$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$ résztere az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérnek;*

Megoldás. Mivel $(1, 0) \in C$ (mert $1^2+0^2 \geq 1$), de $\frac{1}{2}\cdot(1, 0) = (\frac{1}{2}, 0) \notin C$ (mert $(\frac{1}{2})^2+0^2 \not\geq 1$), ezért C nem lineáris résztere az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérnek ($C \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$). □

(d) $D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$ *résztere az $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ racionális ($\mathbb{Q}$-feletti) vektortérnek;*

Megoldás. A $D \neq \emptyset$, mivel $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D$. Továbbá minden $k_1, k_2 \in \mathbb{Q}$ skalárok és $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in D$ esetén

$$k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 = k_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1a_1 + k_2a_2 & k_1b_1 + k_2b_2 \\ 0 & k_1c_1 + k_2c_2 \end{pmatrix} \in D,$$

mivel a második sor első eleme 0. Ezért D lineáris résztere az $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ racionális vektortérnek ($D \leq_{\mathbb{Q}} \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$). □

(e) $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$ *résztere az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ valós vektortérnek;*

Megoldás. Az E nem lineáris résztere az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ valós vektortérnek, mert $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$ és $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, de $\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin E$. □

(f) *$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ résztere az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérnek;*

Megoldás. Az F halmaz nem lineáris résztere az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérnek, mert $(2, 0) \in F$ és $(-1, -1) \in F$, de $(2, 0) + (-1, -1) = (1, -1) \notin F$. □

(g) $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos függvény}\}$ *résztere* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ függvény}\}$ *valós vektortérnek;*

(Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha minden $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens valós számsorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$).

Megoldás. A $C(\mathbb{R})$ halmaz nem üres, mert az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, minden $x \in \mathbb{R}$ konstans függvény folytonos (minden (x_n) konvergens valós számsorozat esetén az $(f(x_n)) = (0)$ konstans sorozat is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$). Továbbá minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ skalár és $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R})$ esetén $k_1f_1 + k_2f_2 \in C(\mathbb{R})$, mert minden (x_n) konvergens valós számsorozat esetén

$$\begin{aligned}
(k_1f_1 + k_2f_2)\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) &= k_1f_1\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + k_2f_2\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\
&= k_1 \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) + k_2 \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} k_1f_1(x_n) + k_2f_2(x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (k_1f_1 + k_2f_2)(x_n).
\end{aligned}$$

□

7. *Bizonyítsuk be, hogy a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai résztерét képezik* $\mathbb{R}^2$ *valós vektortérnek*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}.$$

Megoldás. Jelölje $\mathcal{M}$ a fenti egyenletrendszer megoldásainak halmazát. Belátjuk, hogy $\mathcal{M}$ lineáris résztere az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérnek. Az $\mathcal{M}$ halmaz nem üres, mert $(x_1, x_2) = (0, 0) \in \mathcal{M}$. Legyenek $k', k'' \in \mathbb{R}$ és $(x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2) \in \mathcal{M}$ tetszőlegesek. Az $(x'_1, x'_2) \in \mathcal{M}$ alapján

$$a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 = 0, \tag{7.1}$$

$$a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 = 0, \tag{7.2}$$

illetve az $(x''_1, x''_2) \in \mathcal{M}$ alapján

$$a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 = 0, \tag{7.3}$$

$$a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 = 0. \tag{7.4}$$

A (7.1) egyenletet megszorozva k'-vel, a (7.3) egyenletet megszorozva k''-vel, majd összeadva őket kapjuk, hogy

$$k'(a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2) + k''(a_{11}x''_1 + a_{12}x''_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; a_{11}(k'x'_1 + k''x''_1) + a_{12}(k'x'_2 + k''x''_2) = 0. \tag{7.5}$$

Hasonlóan, a (7.2) egyenletet megszorozva k'-vel, a (7.4) egyenletet megszorozva k''-vel, majd összeadva őket kapjuk, hogy

$$k'(a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2) + k''(a_{21}x''_1 + a_{22}x''_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; a_{21}(k'x'_1 + k''x''_1) + a_{22}(k'x'_2 + k''x''_2) = 0. \tag{7.6}$$

A (7.5) és (7.6) alapján $k'(x'_1, x'_2) + k''(x''_1, x''_2) = (k'x'_1 + k''x''_1, k'x'_2 + k''x''_2) \in \mathcal{M}$. Ezzel beláttuk, hogy minden $k', k'' \in \mathbb{R}$ és minden $(x'_1, x'_2), (x''_1, x''_2) \in \mathcal{M}$ esetén $k'(x'_1, x'_2) + k''(x''_1, x''_2) \in \mathcal{M}$, ezért a fenti egyenletrendszer $\mathcal{M}$ megoldáshalmaza lineáris résztere az $\mathbb{R}^2$ valós vektortérnek. $\square$