3. FELADATLAP

① Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A(2,3,1)$, $B(-4,2,-5)$, $C(0,1,0)$ pontokon!

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0 \qquad (\neq)$$

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -4-2 & 2-3 & -5-1 \\ 0-2 & 1-3 & 0-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -6 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(ABC): (x-2)\cdot(1-12) - (y-3)(6-12) + (z-1)(12-2) = 0$$

$$(ABC): -11(x-2) + 6(y-3) + 10(z-1) = 0$$

$$(ABC): -11x + 6y + 10z + \underbrace{22-18-10}_{-6} = 0$$

$$\boxed{(ABC): -11x + 6y + 10z - 6 = 0}$$

Scanned by CamScanner

(2) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely átmegy az $M_0(1,-2,3)$ ponton és $\parallel$ a $\vec{v_1}(1,-1,0)$, $\vec{v_2}(-3,2,4)$ vektorokkal.

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3).$$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha: (x-1)(-4) - (y+2)(4) + (z-3)(2-3) = 0$$

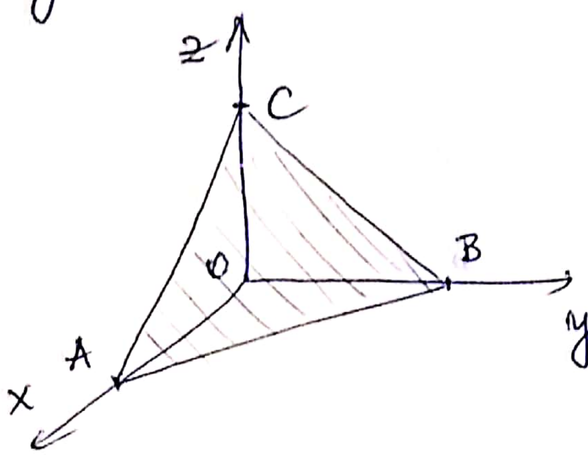
$$\alpha: -4x+4-4y-8-z+3=0$$

$$\alpha: -4x-4y-z-1=0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\alpha: 4x+4y+z+1=0$$

Scanned by CamScanner

(4.) $\alpha = ?$ ú.h. $P(7,-5,2) \in \alpha$ és α a koordináta-tengelyeken ugyanakkora szakaszokat határoz meg.



Sík tengelymetszetes alakja:

$$\left.\begin{array}{l} A(a,0,0) \\ B(0,b,0) \\ C(0,0,c) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$.

$$\Rightarrow (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1.$$

$$\Leftrightarrow \alpha = (ABC): x + y + z = a.$$

$$P(7,-5,2) \in \alpha \Rightarrow 7 - 5 + 2 = a \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha: x + y + z - 4 = 0}$$

Scanned by CamScanner

Sík normálvektora.

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0.$

Ha $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \;\Big|\; \begin{matrix}\Rightarrow\\ \ominus\end{matrix}$

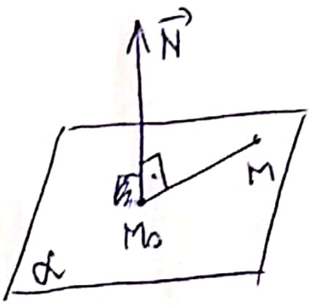
$\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \; (*)$

Legyen $\vec{N}(A, B, C)$
$M(x, y, z) \in \alpha$ tetsz. pont. $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \overrightarrow{MM_0} = 0, \; \forall M \in \alpha. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{N} \perp \overrightarrow{MM_0}, \; \forall M \in \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{N} \perp \alpha.$

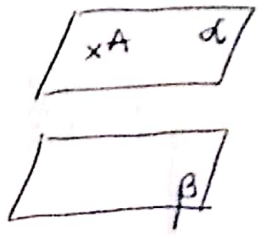


Ért: Az $\vec{N}(A, B, C)$ vektort az α sík normálvektorának nev.

$$\boxed{\vec{N}(A, B, C) \perp \alpha: Ax + By + Cz + D = 0}$$

Megjegyzés: 1) Sík normálvektorának hossza, irányítása nem, de iránya egyértelműen meghatározott.
2) Sík normálvektora lehet bármely vektor, amely rá merőleges.

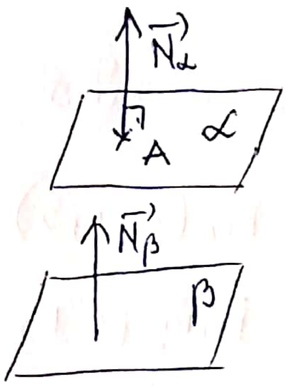
(5.) $\alpha = ?$ u. h. $A(2,-1,3) \in \alpha$ és $\alpha \parallel \beta$ síkkal, ahol $\beta: 2x+4y-z+5=0$.



__Megoldás:__

Ha $\alpha \parallel \beta \iff \vec{N}_\alpha \parallel \vec{N}_\beta(2,4,-1)$

Sőt,



mivel $\vec{N}_\beta \perp \alpha \Rightarrow \vec{N}_\beta$ tekinthető, mint $\vec{N}_\alpha$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha: Ax+By+Cz+D=0 \\ \vec{N}_\alpha = \vec{N}_\beta(2,4,-1) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha: 2x+4y-z+D=0$$

$$A(2,-1,3) \in \alpha \Rightarrow 4-4-3+D=0$$

$$D=3$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha: 2x+4y-z+3=0}$$

__Megjegyzés:__ Két párhuzamos sík, csak a szabadtagban különböző egymástól (eltekintve egy esetleges arányossági tényezőtől)

12. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $M_0(1,2,-1)$ ponton és
a) az $M_1(3,4,0)$ ponton
b) $\parallel \vec{d}(2,-1,5)$
c) $\perp \alpha: 2x-y+3z-10=0.$
d) $\parallel e: \begin{cases} 2x-y+3z+1=0 \\ 5x+4y-z-7=0. \end{cases}$
e) $\parallel Ox$

a) $d = M_0M_1: \boxed{\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0} = \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}} \longrightarrow (15)$

$$M_0M_1: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z+1}{0+1}$$

$$\boxed{M_0M_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}}$$

b) $d: \boxed{\dfrac{x-x_0}{p} = \dfrac{y-y_0}{q} = \dfrac{z-z_0}{r}} \longrightarrow (12)$

$$\boxed{d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{5}}$$

c) $d \perp \alpha: 2x-y+3z-10=0$

$\Rightarrow d \parallel \vec{N}_\alpha(2,-1,3)$ $\Rightarrow d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$

$M_0(1,2,-1) \in d$

(12)

d) $d \parallel e: \begin{cases} \alpha: 2x-y+3z+1=0 \\ \beta: 5x+4y-z-1=0. \end{cases}$

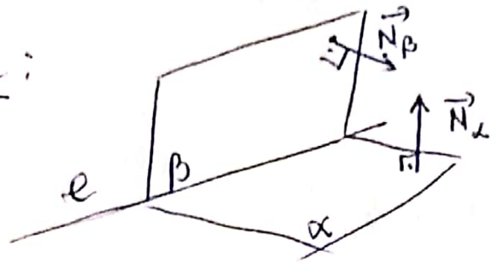
? Mi az e egyenes irányvektora ?

egy vektor ami vele párhuzamos.

Az egyenes irányvektorát több féleképpen lehet meghatározni:

$$e: \begin{cases} \alpha: 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ \beta: 5x + 4y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

1. Módszer:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{N}_\alpha \perp \alpha \Rightarrow \vec{N}_\alpha \perp e \\ \vec{N}_\beta \perp \beta \Rightarrow \vec{N}_\beta \perp e \\ \vec{N}_\alpha \times \vec{N}_\beta \perp (\vec{N}_\alpha, \vec{N}_\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{N}_\alpha \times \vec{N}_\beta \parallel e \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Az } e \text{ egyenes irányvektora: } \vec{e} = \vec{N}_\alpha \times \vec{N}_\beta.}$

$$\vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(1-12) - \vec{j}\,(-2-15) + \vec{k}\,(+8+5)$$

$\Rightarrow \vec{e}\,(-11, +17, 13).$

2. Módszer: Keresünk két pontot az egyenesről: A, B

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{e}.$

3. Módszer: Átírjuk az egyenes egyenletét kanonikus alakba: $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$

$\Rightarrow \vec{d}\,(p, q, r)$ – az egyenes irányvektora

$$e: \begin{cases} 2x-y+3z+1=0 \\ 5x+4y-z-1=0. \end{cases}$$

- megoldjuk az egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x \overset{jel}{=} t \\ -y+3z=-1-2t \\ 4y-z=1-5t \quad |\cdot 3 \end{cases} \oplus$$

$$-y+12y=-1+3-2t-15t$$

$$11y=2-17t$$

$$\underline{y=\frac{2}{11}-\frac{17}{11}t} \Rightarrow z=4y-1+5t$$

$$=\frac{8}{11}-\frac{68}{11}t-1+5t$$

$$\underline{z=-\frac{3}{11}-\frac{13}{11}t}$$

Tehát: $e: \begin{cases} x=t \\ y=\frac{2}{11}-\frac{17}{11}t \\ z=-\frac{3}{11}-\frac{13}{11}t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$

Mivel $(t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 11t\in\mathbb{R}) \Rightarrow e: \begin{cases} x=(11t) \\ y=\frac{2}{11}-\frac{17}{\cancel{11}}\cdot(\cancel{11}t) \\ z=-\frac{3}{11}-\frac{13}{\cancel{11}}\cdot(\cancel{11}t), t\in\mathbb{R} \end{cases}$

$$\Rightarrow e: \begin{cases} x=11t \\ y=\frac{2}{11}-17t \\ z=-\frac{3}{11}-13t \end{cases} \Rightarrow t=\frac{x}{11}=\frac{y-\frac{2}{11}}{-17}=\frac{z+\frac{3}{11}}{-13}$$

$$\Rightarrow \boxed{e: \frac{x}{11}=\frac{y-\frac{2}{11}}{-17}=\frac{z+\frac{3}{11}}{-13}.} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}(11,-17,-13) \text{ az e egyenes iránycvektora} \\ M_0\left(0,\frac{2}{11},\frac{-3}{11}\right)\in e \end{cases}$$

! Ennek a módszernek az az előnye, hogy az irányvektoron kívül megkapjuk az egyenesnek egy pontját is.

12/d.

$d \parallel e: \begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow d \parallel \vec{e}(11, -17, -13)$

$M_0(1, 2, -1) \in d.$

$\Rightarrow d: \dfrac{x-1}{11} = \dfrac{y-2}{-17} = \dfrac{z+1}{-13}.$

e). $\begin{cases} M_0(1, 2, -1) \in d \\ d \parallel Ox. \end{cases}$

? Mi az Ox tengely irányvektora?

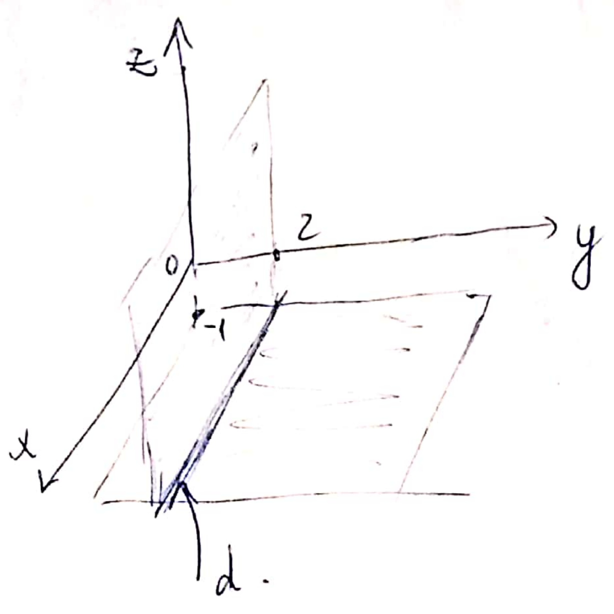
$\vec{i}(1, 0, 0)$

Veszünk 2 pontot pl: $A(2, 0, 0)$, $B(-1, 0, 0)$

$\Rightarrow \vec{AB}(-3, 0, 0)$ is az Ox irányvektora.

$\Rightarrow d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z+1}{0}$

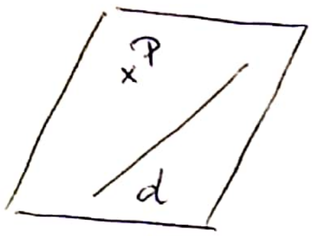
ez az egyenlet ekvivalens: $d: \begin{cases} y - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = -1. \end{cases}$



⑥ $\alpha = ?$ ú. h. $P(-1,2,6) \in \alpha$ és $d \subset \alpha$, ahol

b)

$$d: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + z - 3 = 0. \end{cases}$$



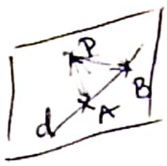
− a síkot meghat → 1º. 1 pont és 2 vektor

vagy

→ 2º. 3 pont.

2º 3 pont?

Legyen $A, B \in d \subset \alpha$, $P \in \alpha$ $\Rightarrow \alpha = (ABP)$



$A: z = 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow -2y + 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{2}$

$A\left(0, \frac{9}{2}, 3\right)$

$B: x = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow 1 - 2y + 3 = 0 \Rightarrow y = 2$

$B(1,2,1)$.

$$\Rightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 0+1 & \frac{9}{2}-2 & 3-6 \\ 1+1 & 2-2 & 1-6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 1 & \frac{5}{2} & -3 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

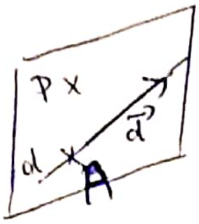
$$\alpha: (x+1)\left(-\frac{25}{2}\right) - (y-2)\cdot(-5+6) + (z-6)(-5) = 0$$

$$-\frac{25}{2}(x+1) - (y-2) - 5(z-6) = 0 \;/\cdot(-2)$$

$$\alpha: +25x + 2y + 10z + \underbrace{25 - 4 - 60}_{-39} = 0$$

$$\boxed{\alpha: 25x + 2y + 10z - 39 = 0}$$

$\boxed{1^{\circ}}$ módszer. 1 pont és 2 vektor.



$\vec{d} = ?$ $\qquad d: \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$

Legyen $x = t \Rightarrow z = 3-2t$

$2y = x+3z = t+9-6t$

$y = -\frac{5}{2}t + \frac{9}{2}$

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5}{2}t + \frac{9}{2} \\ z = 3-2t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = -5t + \frac{9}{2} \\ z = -4t+3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d: \frac{x}{2} = \frac{y-\frac{9}{2}}{-5} = \frac{z-3}{-4} \Rightarrow \vec{d}(2,-5,-4)$$

$A(0,\frac{9}{2},3) \in d.$

$\Rightarrow$ α síkot meghat:
* $A(0,\frac{9}{2},3)$ vagy $P(-1,2,6)$
* $\vec{d}(2,-5,-4)$
* $\vec{PA}(1,\frac{5}{2},-3)$

$$\alpha: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\alpha: (x+1)(15+10) - (y-2)(-6+4) + (z-6)(5+5) = 0.$

$\alpha: 25(x+1) + 2(y-2) + 10(z-6) = 0.$

$\boxed{\alpha: 25x+2y+10z-39=0}$

Scanned by CamScanner

Megjegyzés: A $d: \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases}$ egyenest átírtuk

paraméteres alakba:

$$d: \begin{cases} x=t \\ y=\frac{9}{2}-\frac{5}{2}t \\ z=3-2t. \end{cases} \qquad (*)$$

Nem muszáj átírni a paraméterezést: $t \mapsto 2t$. ahogy az előbb tettük. De ebben az esetben vigyázni kell:

$$(*) \Rightarrow t = x = \frac{y-\frac{9}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{z-3}{-2} \Rightarrow d: \frac{x}{1} = \frac{y-\frac{9}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{z-3}{-2}.$$

$\Rightarrow \vec{d}\left(1,-\frac{5}{2},-2\right)$ irányvektor.

Az előbb $\vec{d}(2,-5,-4)$ -et kaptunk, de ez rendben van mert ezek arányosak, tehát párhuzamosak $\Rightarrow$ bármelyiket vehetjük irányvektornak.

Amire vigyázni kell:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-\frac{9}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{z-3}{-2} \iff \frac{x}{1} = \frac{2y-9}{-5} = \frac{z-3}{-2}$$

Vigyázat! Ebben az esetben (ha x, y, z együtthatója nem egyenlő 1-gyel) $\Rightarrow$ Nem olvasható le a nevezőből az irányvektor! $\rightarrow \vec{d} \neq (1,-5,-2)$

Fekete

⑥ c) $\alpha = ?$ ú. h. $\begin{cases} A(1,1,-2) \in \alpha \\ \alpha \perp d: \begin{cases} 2x+3z=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \end{cases}$

$\alpha \perp d \Rightarrow \vec{d} \perp \alpha$

$\Rightarrow$ $\vec{d}$ irányvektor tekinthető az α sík normálvektorának.

$$\vec{d} = \vec{N_1} \times \vec{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$\Rightarrow \vec{d}(3,1,-2) \perp \alpha.$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \alpha: 3x+y-2z+D=0 \\ A(1,1,-2) \in \alpha. \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow 3+1+4+D=0 \Rightarrow D=-8$

$\Rightarrow \boxed{\alpha: 3x+y-2z-8=0}$

Scanned by CamScanner