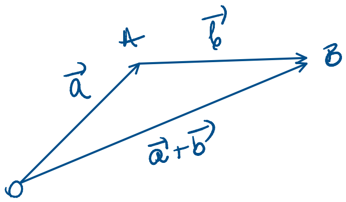
# Vektoralgebra

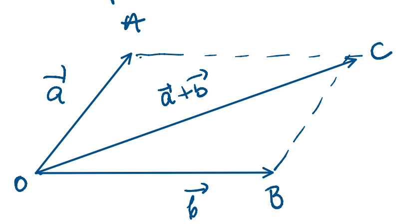
## ① Vektorok összeadása

- Δ-szabály




$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

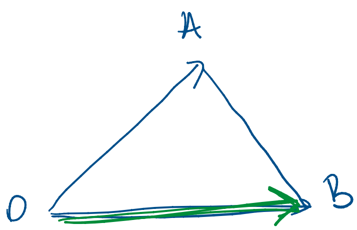
▱-szabály (paral.)




$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$, ahol $OBCA$ ▫ paralelogr.

## ② Vektorok kivonása

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

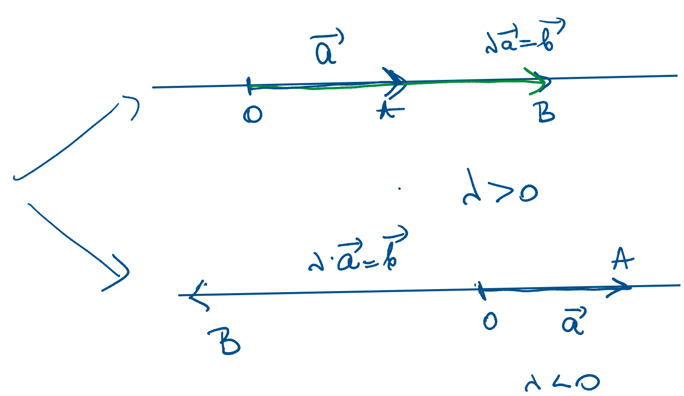



## ③ Skalárral való szorzás

$\vec{a}$ vektor

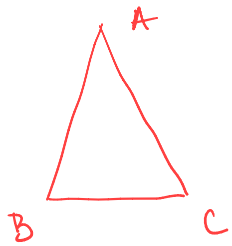
$\lambda\in\mathbb{R}$

$\lambda\cdot\vec{a}=\vec{b}$ :




Egy vektor jellemzői:
- irány : állása
- irányítás :
- nagyság

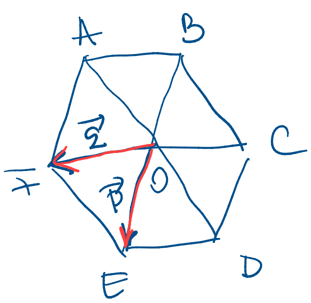
! $\vec{a} = \vec{b} \iff$ iránya, irányítása, nagysága =




AB = AC

? $\vec{AB} = \vec{AC}$ ? NEM !!

(3)




$\vec{OE} = \vec{p}$, $\vec{OF} = \vec{q}$

$\vec{OB} = -\vec{OE} = -\vec{p}$

$\vec{OC} = -\vec{OF} = -\vec{q}$

OAFE ▱ paral. $\Rightarrow$ $\vec{OA} + \vec{OE} = \vec{OF}$

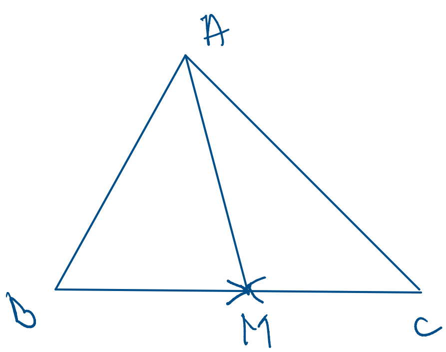
$\vec{OA} = \vec{OF} - \vec{OE} = \vec{q} - \vec{p}$

$\vec{OD} = -\vec{OA} = \vec{p} - \vec{q}$.

---

**4.** Legyen $ABC$ egy tetszőleges háromszög és $M$ a $BC$ oldal felezőpontja. Mutassuk ki, hogy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

p




BM = MC $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})}$

Másképp:

$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$

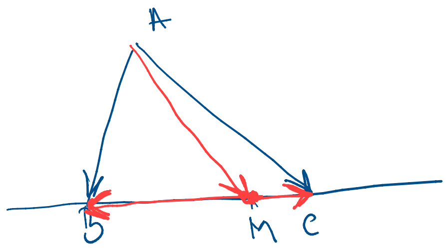
$\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM}$ | (+)

$2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC} + \underbrace{\vec{BM} + \vec{CM}}_{\vec{0}}$

BM = MC $\Rightarrow$ $\vec{BM} = -\vec{CM}$ $\Rightarrow$ $\vec{BM} + \vec{CM} = \vec{0}$

$M \in (BC)$

(5)




F: $\vec{MB} = k\cdot\vec{MC}$

K: $\vec{AM} = \dfrac{\vec{AB} - k\cdot\vec{AC}}{1-k}$

$-\vec{MB} = -k\cdot\vec{MC}$

$\vec{BM} = k\cdot\vec{CM}$

$\vec{BM} = k\,\vec{MC} \Longrightarrow \vec{AM} = \dfrac{\vec{AB} + k\cdot\vec{AC}}{1+k}$

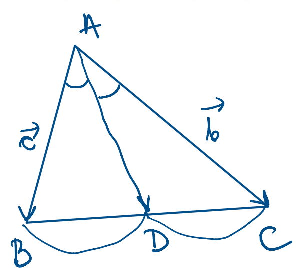
$$\left.\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{AB} + \vec{BM} \\ \vec{AM} &= \vec{AC} + \vec{CM} \quad |\cdot k \end{aligned}\right\} (-)$$

$$\vec{AM}(1-k) = \vec{AB} - k\cdot\vec{AC} + \underbrace{\vec{BM} - \underbrace{k\cdot\vec{CM}}_{\vec{BM}}}_{\vec{BM}-\vec{BM}=\vec{0}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{AM} = \frac{\vec{AB} - k\cdot\vec{AC}}{1-k}}$$

**9.** Egy $ABC$ háromszögben megszerkesztjük az $AD$ szögfelezőt és az $AE$ magasságot. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AE}$ vektorokat az $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ és $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ vektorok valamint az $ABC$ háromszög $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ oldalhosszainak függvényében.




F: $AD$ szögfel., $AE \perp BC$, $E \in (BC)$

K: $\vec{AD}, \vec{AE} = f(\vec{AC} = \vec{b}, \vec{AB} = \vec{c}) = ?$

B: $AD$ szögfelező $\xRightarrow{\text{szögfel. Tétel}}$ $\underbrace{\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{b}}$

$BD = \dfrac{c}{b}\cdot DC$

$\Downarrow$

$\vec{DB} = -\dfrac{c}{b}\,\vec{DC}$

$\Downarrow$

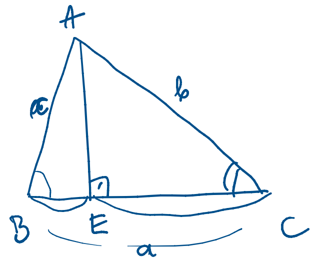
$k = -\dfrac{c}{b}$

$\vec{DB} = k\cdot\vec{DC} \overset{(5)}{\Rightarrow} \vec{AD} = \dfrac{\vec{AB} - k\,\vec{AC}}{1-k}$

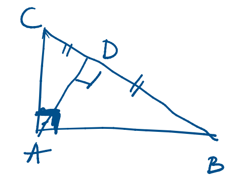
$\vec{AD} = \dfrac{\vec{AB} + \frac{c}{b}\cdot\vec{AC}}{1 + \frac{c}{b}}$

$b\cdot\vec{AB} + c\cdot\vec{AC} \qquad b\cdot\vec{c} + c\cdot\vec{b}$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC}}{b+c} = \frac{b\cdot\vec{c}+c\cdot\vec{b}}{b+c}$$




$\frac{BE}{EC} = ?$




!!

$AD^2 = CD\cdot DB$
$AD = \frac{AB\cdot AC}{BC}$ mag. tétel.

$ABE_\triangle$: $\cos B = \frac{BE}{AB}$

$ACE_\triangle$: $\cos C = \frac{CE}{AC}$

$(:) \Rightarrow \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{BE}{AB}\cdot\frac{AC}{CE}$

$\Downarrow$

$\frac{BE}{CE} = \frac{\cos B}{\cos C}\cdot\frac{\overset{=c}{AB}}{\underset{=b}{AC}}$

$b^2 = a^2+c^2-2ac\cdot\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\Rightarrow \frac{BE}{CE} = \underbrace{\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}}_{>0}\cdot\frac{\cancel{b}}{\cancel{c}}\cdot\frac{\cancel{c}}{\cancel{b}}$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{EB} = -\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}\cdot\overrightarrow{EC}$

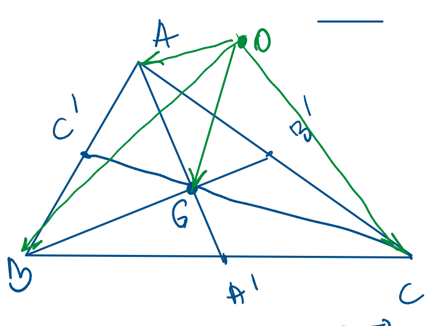
$k$

$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB}-k\cdot\overrightarrow{AC}}{1-k}$

**11.** Legyen $ABC$ egy tetszőleges háromszög és $G$ az $ABC$ háromszög súlypontja. Tekintve egy tetszőleges $O$ pontot a térben mutassuk ki, hogy

(a) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$;

(b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.




F: $AA', BB', CC'$ old. felezők
$AA'\cap BB'\cap CC' = \{G\} \rightarrow$ súlypont!

$G$ súlypont $\Rightarrow \overrightarrow{GA} = -2\cdot\overrightarrow{GA_1}$

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OA}+\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{\cancel{2}}$

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB}+\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{\cancel{2}}$

$(+)$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\boxed{\overrightarrow{CA}} + \overrightarrow{CB}}{\cancel{2}}$$

---

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \vec{0}$$

b) Legyen $O := G \Rightarrow$ a) alpontból következik