Gráfalgoritmusok

Gaskó Noémi

2023. április 3.

Tartalomjegyzék

Egy feladat

Repülõutak, mindegyik Kolozsvárról indul:

A: München $\to$ Zürich $\to$ London $\to$ New York

B: Bécs $\to$ Frankfurt $\to$ Berlin $\to$ New York

C: Budapest $\to$ London $\to$ New York $\to$ Tokió

D: Budapest $\to$ Ljubljana $\to$ Frankfurt

E: Budapest $\to$ Dortmund $\to$ London

F: Bukarest $\to$ Berlin $\to$ New York

G: Bukarest $\to$ Würzburg $\to$ Frankfurt

Egy feladat

Repülõutak, mindegyik Kolozsvárról indul:
A: München → Zürich → London → New York
B: Bécs → Frankfurt → Berlin → New York
C: Budapest → London → New York → Tokió
D: Budapest → Ljubljana → Frankfurt
E: Budapest → Dortmund → London
F: Bukarest → Berlin → New York
G: Bukarest → Würzburg → Frankfurt
Megszorítások:

- csak hétfõn, szerdán és pénteken repülhetnek
- egy nap nem repülhentek el ugyanabba a városba többször

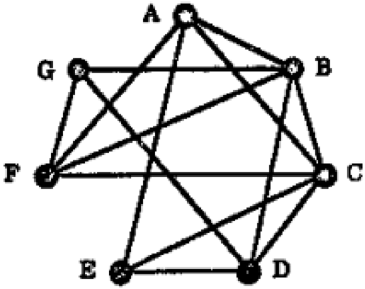
Hogyan fogalmazhatjuk meg a feladatot gráfelméletileg?

Egy feladat

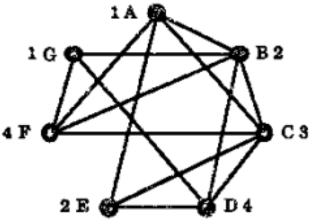
Repülõutak, mindegyik Kolozsvárról indul:
A: München → Zürich → London → New York
B: Bécs → Frankfurt → Berlin → New York
C: Budapest → London → New York → Tokió
D: Budapest → Ljubljana → Frankfurt
E: Budapest → Dortmund → London
F: Bukarest → Berlin → New York
G: Bukarest → Würzburg → Frankfurt
Megszorítások:

- csak hétfõn, szerdán és pénteken repülhetnek
- egy nap nem repülhentek el ugyanabba a városba többször

Hogyan fogalmazhatjuk meg a feladatot gráfelméletileg?
Lehetséges-e így megoldani a repülõutakat?


A
B
C
D
E
F
G

Egy feladat (folyt.)



Gráfok színezése

Általánosan:

Színezés

Minimális számú színnel kifesteni a gráf elemeit (csúcsok, élek, tartományok) úgy, hogy két szomszédos elem ne legyen ugyanolyan színû.

Gráfok színezése

Általánosan:

Színezés

Minimális számú színnel kifesteni a gráf elemeit (csúcsok, élek, tartományok) úgy, hogy két szomszédos elem ne legyen ugyanolyan színû.

Síkgráfok tartományainak a színezése - négyszín probléma, 1976-ban oldották meg (K. Appel és W. Haken).

Gráfok színezése

Általánosan:

Színezés

Minimális számú színnel kifesteni a gráf elemeit (csúcsok, élek, tartományok) úgy, hogy két szomszédos elem ne legyen ugyanolyan színû.

Síkgráfok tartományainak a színezése - négyszín probléma, 1976-ban oldották meg (K. Appel és W. Haken).

Értelmezés

Legyen G egy gráf. Egy csúcsszínezése a G-nek azt jelenti, hogy minden csúcshoz hozzárendeljük az $1, 2, 3, ..., k$ színeket, úgy, hogy a szomszédos csomópontok különbözõ színûek legyenek.

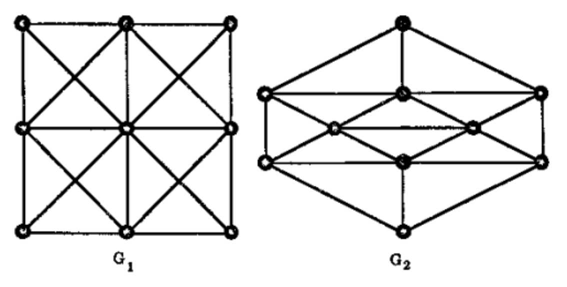
Szinezések

- csúcs színezés
- él szinezés
- terület színezés
- lista szinezés
- teljes szinezés

Kromatikus szám

Az a legkisebb szám, amennyi szinnel ki lehet színezni a gráf csúcsait. Jelölése: $\chi(G)$.

Egy példa



Tétel

- Egy n csomópontú G gráf esetén $\chi(G) \leq n$
- Ha a H a G gráf részgráfja, akkor $\chi(H) \leq \chi(G)$
- $\chi(K_n) = n, \forall n \geq 1$
- ha egy G gráfnak a K_n egy részgráfja, akkor $\chi(G) \geq n$

Tétel

- Egy n csomópontú G gráf esetén $\chi(G) \leq n$
- Ha a H a G gráf részgráfja, akkor $\chi(H) \leq \chi(G)$
- $\chi(K_n) = n, \forall n \geq 1$
- ha egy G gráfnak a K_n egy részgráfja, akkor $\chi(G) \geq n$

Tétel

Egy gráf akkor és csakis akkor színezhetõ két színnel, ha páros gráf.

Tétel

- Egy n csomópontú G gráf esetén $\chi(G) \leq n$
- Ha a H a G gráf részgráfja, akkor $\chi(H) \leq \chi(G)$
- $\chi(K_n) = n, \forall n \geq 1$
- ha egy G gráfnak a K_n egy részgráfja, akkor $\chi(G) \geq n$

Tétel

Egy gráf akkor és csakis akkor színezhetõ két színnel, ha páros gráf.

Bizonyítás

Ha a gráf páros, akkor nyilván kiszinezhetõ két színnel.
Ha $\chi(G) = 2$ akkor legyen X az a halmaz, amelyiket 1-es színnel színezhetjük ki, míg Y az a halmaz, amelyiket 2-es színnel színezhetjük ki.
Így $V = X \cup Y$ lesz a páros gráf két diszjunkt halmaza.

Tétel

Bármely G gráf esetén:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

ahol $\Delta(G)$ a G gráf maximum fokszáma.

Tétel

Bármely G gráf esetén:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

ahol $\Delta(G)$ a G gráf maximum fokszáma.

Bizonyítás

indukció a G gráf csomópontjai szerint

Tétel

Bármely G gráf esetén:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

ahol $\Delta(G)$ a G gráf maximum fokszáma.

Bizonyítás

indukció a G gráf csomópontjai szerint

Mikor teljesül az egyenlõség?

Tétel

Bármely G gráf esetén:

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1,$$

ahol $\Delta(G)$ a G gráf maximum fokszáma.

Bizonyítás

indukció a G gráf csomópontjai szerint

Mikor teljesül az egyenlõség?

Brooks tétele, 1941

Legyen G egy összefüggõ gráf, melyben $\Delta(G) \geq 3$. Ha G nem teljes, akkor

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Bizonyítás

indukció a gráfok csúcsa szerint

Csúcsszínezési szekvenciális algoritmus

1.lépés: $G = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a szinek: $C = \{1, 2, ..., n\}$

Csúcsszínezési szekvenciális algoritmus

1.lépés: $G = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a szinek: $C = \{1, 2, ..., n\}$
2.lépés: minden $i = 1, ..., n$ esetén legyen $C_i = \{1, 2, ..., i\}$ az a szín, amely az x_i csúcsot szine lehet

Csúcsszínezési szekvenciális algoritmus

1.lépés: $G = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a szinek: $C = \{1, 2, ..., n\}$
2.lépés: minden $i = 1, ..., n$ esetén legyen $C_i = \{1, 2, ..., i\}$ az a szín, amely az x_i csúcsot szine lehet
3.lépés: legyen $i = 1$

Csúcsszínezési szekvenciális algoritmus

1.lépés: $G = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a szinek: $C = \{1, 2, ..., n\}$
2.lépés: minden $i = 1, ..., n$ esetén legyen $C_i = \{1, 2, ..., i\}$ az a szín, amely az x_i csúcsot szine lehet
3.lépés: legyen $i = 1$
4.lépés: legyen c_1 a C_i elsõ szine, ezt rendeljük hozzá x_i-hez

Csúcsszínezési szekvenciális algoritmus

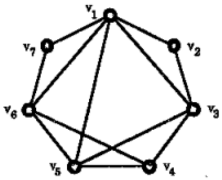
1.lépés: $G = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a szinek: $C = \{1, 2, ..., n\}$
2.lépés: minden $i = 1, ..., n$ esetén legyen $C_i = \{1, 2, ..., i\}$ az a szín, amely az x_i csúcsot szine lehet
3.lépés: legyen $i = 1$
4.lépés: legyen c_1 a C_i elsõ szine, ezt rendeljük hozzá x_i-hez
5.lépés: minden j esetén $i < j$ és x_i az x_j szomszédja, $C_j = C_j - \{c_i\}$; $i = i + 1$; ha $i + 1 \leq n$ térjünk vissza a 4. lépéshez.

Csúcsszínezési szekvenciális algoritmus

1.lépés: $G = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a szinek: $C = \{1, 2, ..., n\}$
2.lépés: minden $i = 1, ..., n$ esetén legyen $C_i = \{1, 2, ..., i\}$ az a szín, amely az x_i csúcsot szine lehet
3.lépés: legyen $i = 1$
4.lépés: legyen c_1 a C_i elsõ szine, ezt rendeljük hozzá x_i-hez
5.lépés: minden j esetén $i < j$ és x_i az x_j szomszédja, $C_j = C_j - \{c_i\}$; $i = i + 1$; ha $i + 1 \leq n$ térjünk vissza a 4. lépéshez.
6.lépés: a csomópontok és megfelelõ szinezések kiiratása

Az algoritmus $O(n^2)$ bonyolultságú, de nem mindig ad jó eredményt.

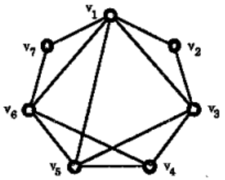
Egy példa



Az algoritmus lépésenként:

1.lépés: a csomópontjaink: v_1, v_2,..., v_n, a szinek: $1, 2, ..., n$

Egy példa

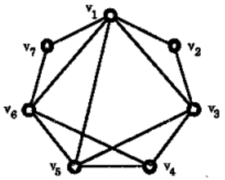


Az algoritmus lépésenként:

1.lépés: a csomópontjaink: v_1, v_2,..., v_n, a szinek: $1, 2, ..., n$

2.lépés: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{1, 2\}$,..., $C_7 = \{1, 2, 3, ..., 7\}$

Egy példa



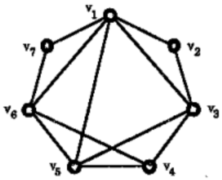
Az algoritmus lépésenként:

1.lépés: a csomópontjaink: v_1, v_2,..., v_n, a szinek: $1, 2, ..., n$

2.lépés: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{1, 2\}$,..., $C_7 = \{1, 2, 3, ..., 7\}$

3.lépés: legyen $i = 1$

Egy példa



Az algoritmus lépésenként:

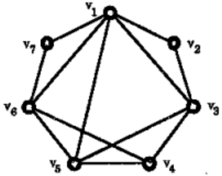
1.lépés: a csomópontjaink: v_1, v_2,..., v_n, a szinek: $1, 2, ..., n$

2.lépés: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{1, 2\}$,..., $C_7 = \{1, 2, 3, ..., 7\}$

3.lépés: legyen $i = 1$

4.lépés: az 1-es szint kiválasztjuk v_1-nek

Egy példa



Az algoritmus lépésenként:

1.lépés: a csomópontjaink: v_1, v_2,..., v_n, a szinek: $1, 2, ..., n$

2.lépés: $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{1, 2\}$,..., $C_7 = \{1, 2, 3, ..., 7\}$

3.lépés: legyen $i = 1$

4.lépés: az 1-es szint kiválasztjuk v_1-nek

5.lépés: a v_2, v_3, v_5, v_6 és v_7 szomszédos a v_1-el, így $C_2 = \{1, 2\} - \{1\}$, $C_3 = \{2, 3\}$, $C_4 = \{1, 2, 3, 4\}$, $C_5 = \{2, 3, 4, 5\}$, $C_6 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $C_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$i = 2$ és visszatérünk a 4-es lépéshez

Egy példa (folyt.)

4.lépés: a 2-es az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_2-höz
5.lépés: v_2 szomszédja v_3, így $C_3 = \{2, 3\} - \{2\} = \{3\}$.

Egy példa (folyt.)

4.lépés: a 2-es az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_2-höz
5.lépés: v_2 szomszédja v_3, így $C_3 = \{2,3\} - \{2\} = \{3\}$.
$i = 3$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: a 3-as az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_3-hoz
5.lépés: v_4 és v_5 szomszédos v_3-al, $C_4 = \{1,2,3,4\} - \{3\} = \{1,2,4\}$,
$C_5 = \{2,4,5\}$.

Egy példa (folyt.)

4.lépés: a 2-es az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_2-höz
5.lépés: v_2 szomszédja v_3, így $C_3 = \{2, 3\} - \{2\} = \{3\}$.
$i = 3$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: a 3-as az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_3-hoz
5.lépés: v_4 és v_5 szomszédos v_3-al, $C_4 = \{1, 2, 3, 4\} - \{3\} = \{1, 2, 4\}$, $C_5 = \{2, 4, 5\}$.
$i = 4$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: az 1-es az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_4-hez
5.lépés: v_5 és v_6 szomszédos v_4-el, $C_5 = \{2, 4, 5\}$, $C_6 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Egy példa (folyt.)

4.lépés: a 2-es az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_2-höz
5.lépés: v_2 szomszédja v_3, így $C_3 = \{2, 3\} - \{2\} = \{3\}$.
$i = 3$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: a 3-as az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_3-hoz
5.lépés: v_4 és v_5 szomszédos v_3-al, $C_4 = \{1, 2, 3, 4\} - \{3\} = \{1, 2, 4\}$, $C_5 = \{2, 4, 5\}$.
$i = 4$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: az 1-es az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_4-hez
5.lépés: v_5 és v_6 szomszédos v_4-el, $C_5 = \{2, 4, 5\}$, $C_6 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
$i = 5$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: a 2-es az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_5-höz
5.lépés: v_6 szomszédos v_5-el, $C_6 = \{3, 4, 5, 6\}$.

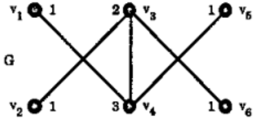
$i = 6$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: a 3-as az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_6-hoz
5.lépés: v_7 szomszédos v_6-al, $C_7 = \{2, 4, 5, 6, 7\}$.

$i = 6$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: a 3-as az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_6-hoz
5.lépés: v_7 szomszédos v_6-al, $C_7 = \{2, 4, 5, 6, 7\}$.
$i = 7$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: a 2-es az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_7-hoz

$i = 6$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: a 3-as az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_6-hoz
5.lépés: v_7 szomszédos v_6-al, $C_7 = \{2, 4, 5, 6, 7\}$.
$i = 7$, visszatérünk a 4-es lépéshez
4.lépés: a 2-es az elsõ szín amelyet hozzárendelünk a v_7-hoz
$i = 8$ az algoritmus leáll
6.lépés: v_1 és v_4 szine , v_2, v_5 és v_7 szine 2; v_3 és v_6 szine 3.

Mikor nem ad jó színezést ez a szenkvenciálsi algoritmus?

Egy példa:



Welsh és Powell algoritmusa

1.lépés: az x_1, x_2,...,x_n csúcsokat rendezzük a fokszámuk szerinti csökkenõ sorrendbe: $d(x_1) \geq d(x_2) \geq ... \geq (x_n)$

a többi lépés megegyezik az elõzõ algoritmus lépéseivel

Legkisebb-utolsó szekvenciális algoritmus

1.lépés:

- válasszuk ki x_n -t a legkisebb fokszámú csomópontot
- minden $i = n-1, n-2, ..., 1$ esetén válasszuk ki x_i-t amely legkisebb fokszámú a $G - \{x_n, x_{n-1}, ..., x_{i+1}\}$ részgráfban, amelyből letöröltük a megfelelõ csúcsokat
- felsoroljuk az x_1,x_2,...,x_n csomópontokat
- felsoroljuk az $1, 2, ..., n$ szineket

a többi lépés megegyezik az elsõ algoritmus lépéseivel

Kempe algoritmusa

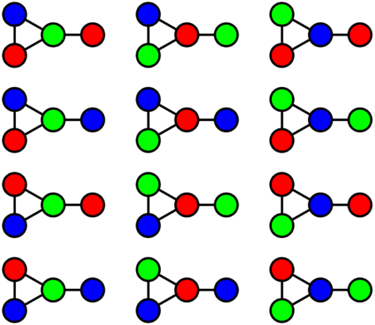
- 6-szinezésre sikgráfok esetén
- minden sikgráf esetén létezik legalább egy csomópont, melynek a fokszáma kisebb vagy egyenlő mint 6
- szedjük ki ezt a pontot
- a maradékot szinezzzük ki rekurzivan

Kromatikus polinom

Kromatikus polinom

A kromatikus polinom összeszámolja, hogy egy gráfot hányféleképpen lehet kiszinezni egy adott számnál nem több szinnel.

Példa:



Kromatikus polinom (folyt.)

Néhány érték:

- K_3 szinezéseinek a lehetõségei: $t(t-1)(t-2)$
- K_n szinezéseinek a lehetõségei: $t(t-1)(t-2)...(t-(n-1))$
- fagráf szinezéseinek a lehetõségei: $t(t-1)^{(n-1)}$
- Petersen gráf szinezéseinek a lehetõségei:
  $t(t-1)(t-2)(t^7-12t^6+67t^5-230t^4+529t^3-814t^2+775t-352)$

Kromatikus polinom meghatározása

Lásd 4. szeminárium

Kritikus gráfok

Értelmezés

Egy G gráfot k-kritikusnak nevezünk, ha $\chi(G) = k$ és $\chi(G - v) < k$ bármely $v \in G$ esetén.

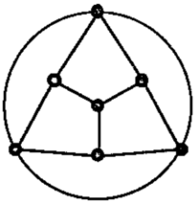
Tehát egy gráf akkor k-kritikus, ha k szín szükséges a színezéséhez, de ha bármely csomópontot letöröljük kiszinezhetõ lenne kevesebb szinnel is.

Kritikus gráfok

Értelmezés

Egy G gráfot k-kritikusnak nevezünk, ha $\chi(G) = k$ és $\chi(G - v) < k$ bármely $v \in G$ esetén.

Tehát egy gráf akkor k-kritikus, ha k szín szükséges a színezéséhez, de ha bármely csomópontot letöröljük kiszinezhetõ lenne kevesebb szinnel is. Egy példa:



Dirac tétele, 1952

Legyen G egy k-kritikus gráf, ekkor:

- G összefüggõ
- G minden csomópontjának a fokszáma legalább $k-1$
- G- nek nincs G_1 és G_2 részgráfja, úgy, hogy $G = G_1 \cup G_2$ és $G_1 \cap G_2$ teljes gráf legyen
- $G - v$ összefüggõ, bármely $v \in G$

Dirac tétele, 1952

Legyen G egy k-kritikus gráf, ekkor:

- G összefüggõ
- G minden csomópontjának a fokszáma legalább $k-1$
- G- nek nincs G_1 és G_2 részgráfja, úgy, hogy $G = G_1 \cup G_2$ és $G_1 \cap G_2$ teljes gráf legyen
- $G - v$ összefüggõ, bármely $v \in G$

Öt-szin tétel

Minden síkgráf kiszinezhetõ 5 szinnel.

Bizonyítás

matematikai indukció

Élszínezés

Élszinezés

Legyen G egy egyszerû gráf. Élszinezés során G-hez az 1,2,3,... szineket rendeljük, úgy, hogy ugyanahhoz a csomóponthoz tartozó élek különbözõ szinûek legyenek.

Élszínezés

Élszinezés

Legyen G egy egyszerû gráf. Élszinezés során G-hez az 1,2,3,... szineket rendeljük, úgy, hogy ugyanahhoz a csomóponthoz tartozó élek különbözõ szinûek legyenek.

Élkromatikus szám

A minimális számú szint, amivel az éleket kiszinezhetjük élkromatikus számnak nevezzük, jelölése $\chi_l(G)$

Élszínezés

Élszinezés

Legyen G egy egyszerû gráf. Élszinezés során G-hez az 1,2,3,... szineket rendeljük, úgy, hogy ugyanahhoz a csomóponthoz tartozó élek különbözõ szinûek legyenek.

Élkromatikus szám

A minimális számú szint, amivel az éleket kiszinezhetjük élkromatikus számnak nevezzük, jelölése $\chi_l(G)$

Tétel

Legyen G egy páros gráf, ebben az esetben:

$$\chi_l(G) = \Delta(G)$$

Vizing tétele

$$\Delta(G) \leq \chi_l(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Vizing tétele

$$\Delta(G) \leq \chi_l(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Shannon tétele

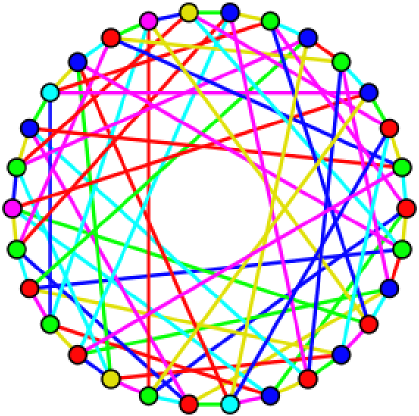
$$\Delta(G) \leq \chi_l(G) \leq [\frac{3\Delta(G)}{2}]$$

Listaszinezés

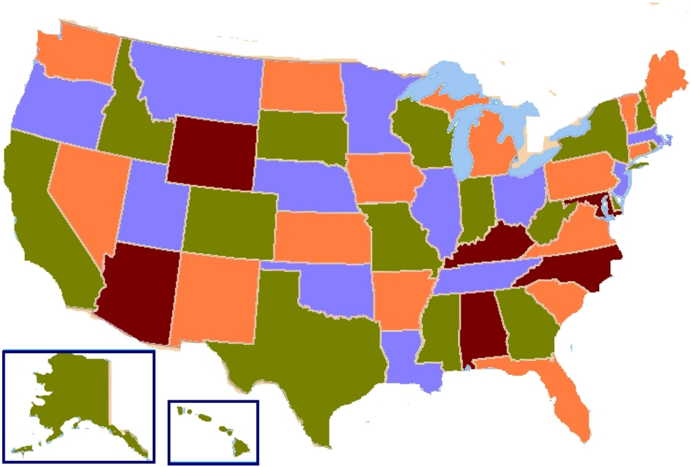
Listaszinezés

Adott gráf csúcsait (vagy éleit) egy adott listában szereplõ szinekkel szeretnénk kiszinezni.

Teljes szinezés



Térkép- tartomány szinezés



4-szin tétel: sokáig sejtés volt, 1976-ban bizonyították be Kenneth Appel és Wolfgang Haken

Alkalmazás - Órarendkészítés (órák beosztása)

Egy egyszerûbb változat: tanárok tanítanak bizonyos tantárgyakat minden héten, bizonyos óraszámban.
Megszorítások: egy tanárnak egyszerre nem lehet több órája, egy diáknak sem lehet egyszerre több kurzusa
Egy példa
négy tanár: x_1,x_2, x_3, x_4
öt csoport: y_1, y_2, y_3, y_4, y_5.
a táblázatban a heti óraszám.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	2	0	0	0
x_2	1	1	1	0	0
x_3	0	1	1	1	1
x_4	0	0	0	1	2

Egy példa (folyt.)

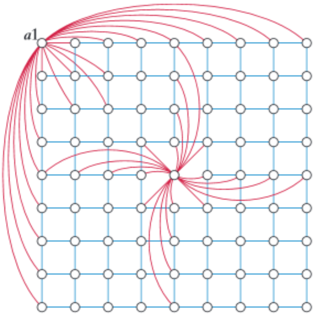
Hours	1	2	3	4	5
x_1	—	—	y_2	y_2	y_1
x_2	—	y_3	y_1	—	y_2
x_3	y_3	y_2	y_5	y_4	—
x_4	y_4	y_5	—	y_5	—

Sudoku

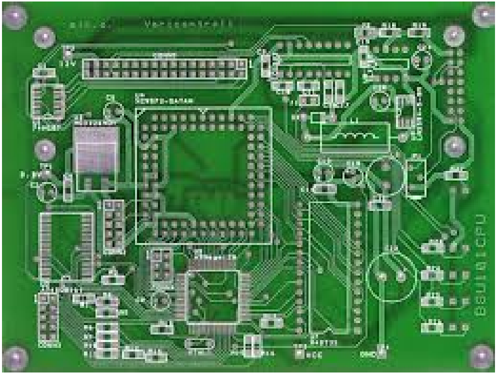
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
a			4	8					
b		9		4	6			7	
c		5					6	1	4
d	2	1		6			5		
e	5	8		7		9		4	1
f			7			8		6	9
g	3	4	5					9	
h		6			3	7		2	
i						4	1		

Sudoku (folyt.)

A Sudoku gráf:
81 csomópontja van, ha két csomópontnak nem lehet ugyanaz az értéke (mert ugyanabban az oszlopban vannak, vagy sorban, stb.) akkor ezt egy éllel jelöljük; minden csomópont fokszáma 20 lesz, összesen 810 élet fog tartalmazni.

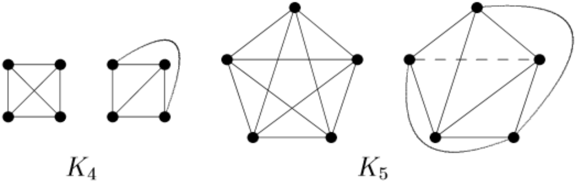


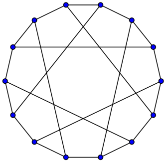
Sudoku (folyt.)



Síkgráf

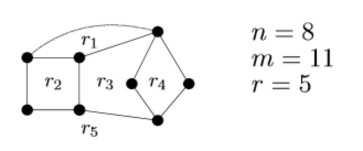
Egy gráf síkba rajzolható, ha lerajzolható a síkban úgy, hogy élei a csúcsokon kívül nem metszik egymást. Egy síkba rajzolható gráfot síkgráfnak nevezünk.





A síkgráf élei és csúcsai tartományokat határoznak meg. Ezek közül egy végtelen, a többi pedig véges.

Egy példa



Euler tétele

Ha egy összefüggõ síkgráfnak gráfnak n csúcsa, m éle és r tartománya van, akkor:

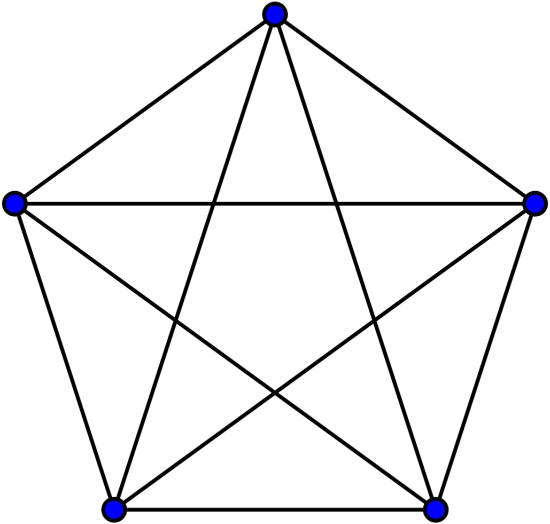
$$n - m + r = 2$$

Bizonyítás

19 különbözõ bizonyítás

Egy bizonyítás

Vizsgáljuk meg az $n - m + r$ értékét egy tetszõleges síkgráfban.
Ha kitörlünk egy körbõl egy élt, akkor az élek száma és a tartományok száma is eggyel csökken, a csúcsok száma változatlan marad.
Tehát az $n - m + r$ kifejezés állandó bármely síkgráf esetében. Addig folytatjuk a körön lévõ élek törlését, amíg fát nem kapunk.
Ebben az esetben is $n - m + r$ értéke ugyanaz az állandó, de fa esetében ez könnyen kiszámítható, mivel $m = n - 1$ és $r = 1$. Tehát $n - m + r = n - (n - 1) + 1 = 2$



Tétel

K_5 nem síkgráf.

Tétel

K_5 nem síkgráf.

Bizonyítás

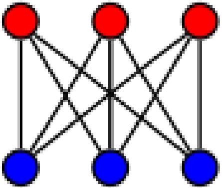
Mivel $n = 5$, $m = 10$ és minden tartományt legalább három él határol:

$$3r \leq 2m,$$

tehát

$$r \leq \frac{2m}{3} = \frac{20}{3}.$$

Mivel r egész szám, $r \leq 6$. Ha K_5 síkgráf, akkor érvényes rá Euler képlete, azaz $r = 2 - n + m = 7$, ami ellentmondás.



Tétel

$K_{3,3}$ nem síkgráf.

Tétel

$K_{3,3}$ nem síkgráf.

Bizonyítás

Mivel $n = 6$, $m = 9$ és minden tartományt legalább 4 él határol:

$$4r \leq 2m,$$

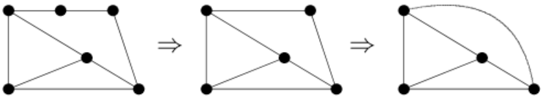
tehát

$$r \leq \frac{m}{2} = \frac{9}{2}.$$

Mivel r egész szám, $r \leq 4$. Ha $K_{3,3}$ síkgráf, akkor érvényes rá Euler képlete, azaz $r = 2 - n + m = 5$, ami ellentmondás.

Gráf összevonása

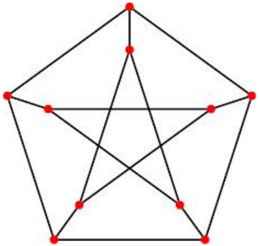
Gráf összevonása: elhagyunk egy gráfból egy kétfokú csúcsot, és a két hozzá illeszkedõ élt eggyel helyettesítjük, amely összeköti az elhagyott élek másik végpontjait.



Kuratowski tétele

Egy összefüggõ G gráf akkor és csakis akkor síkgráf, ha nem tartalmaz egyetlen olyan részgráfot sem, amely a K_5 vagy $K_{3,3}$ gráfok bõvítése.

Síkba rajzolható-e a Petersen gráf?



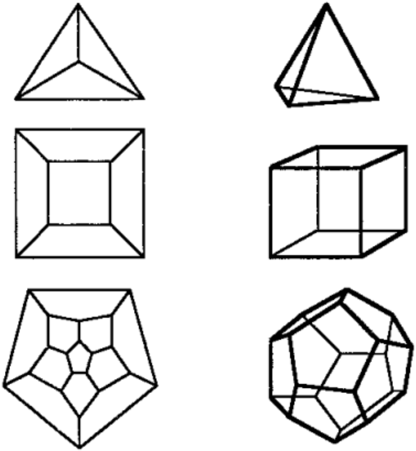
Megoldás

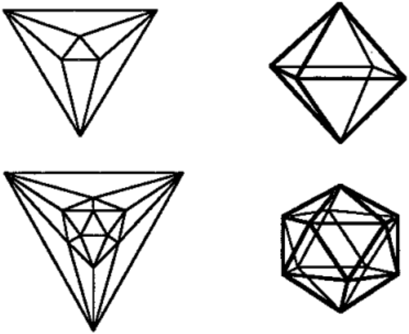
Poliéderek

Síkba rajzolható-e a tetraéder, kocka, dodekaéder, oktaéder, ikozaéder?

Poliéderek

Síkba rajzolható-e a tetraéder, kocka, dodekaéder, oktaéder, ikozaéder?





Tétel

Egy összefüggõ, egyszerû síkgráfban, ahol a csúcsok száma $n \geq 3$ igazak a következõk:

- $r \leq 2(n-2)$
- $m \leq 3(n-2)$.

Tétel

Egy összefüggõ, egyszerû síkgráfban, ahol a csúcsok száma $n \geq 3$ igazak a következõk:

- $r \leq 2(n-2)$
- $m \leq 3(n-2)$.

Bizonyítás

- minden tartományt legalább három él határol, tehát $3r \leq 2m$. Euler képletébõl $3r \leq 2m = 2(n+r-2)$, és innen $r \leq 2n-4$

Tétel

Egy összefüggõ, egyszerû síkgráfban, ahol a csúcsok száma $n \geq 3$ igazak a következõk:

- $r \leq 2(n-2)$
- $m \leq 3(n-2)$.

Bizonyítás

- minden tartományt legalább három él határol, tehát $3r \leq 2m$. Euler képletébõl $3r \leq 2m = 2(n+r-2)$, és innen $r \leq 2n-4$
- az elsõ pontbeli eredményt felhasználva $m = n+r-2 \leq 3n-6$.

Tétel

Egy egyszerû síkgráfban mindig létezik olyan csúcs, melynek foka legfeljebb 5.

Tétel

Egy egyszerû síkgráfban mindig létezik olyan csúcs, melynek foka legfeljebb 5.

Bizonyítás

Ha minden csúcs fokszáma legalább 6, akkor:

$$2m = \sum_{v \in V(G)} deg(v) \geq 6n.$$

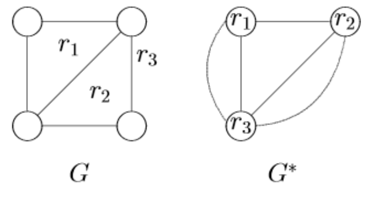
Ebbõl következik, hogy $m \geq 3n$, amely ellentmondás az elõzõ tétellel.

Duális gráf

Duális gráf

G síkgráfnak G^*-gal jelzett duálisa: a G gráf minden tartományának megfeleltetjük a G^* egy-egy csúcsát. G^*-ben két csúcs p párhuzamos éllel van összekötve, ha G-ben a megfelelõ két tartománynak p közös határéle van.

Egy példa



Tétel

Egy összefüggõ gráf akkor és csakis akkor síkgráf, ha létezik duálisa.

Keresztezési szám

Keresztezési szám

Egy gráf keresztezési száma az a legkisebb természetes szám, amely megegyezik a gráf összes lerajzolásai közül a legkisebb élkereszteződések számával.

Jelölése $c(G)$ (crossing number)
Síkgráf: keresztezési száma: 0.
$c(K_5) = 1$, $c(K_{3,3}) = 1$.

Tétel

$c(K_6) = 3$

Bizonyítás

A K_6 helyett értelemzzünk egy új gráfot: K_6 egy lerajzolásában bármely két élének keresztezési pontját tekintsük az új gráf egy-egy csúcsának a megfelelõ élekkel együtt.
Ekkor az így kapott gráf egy síkgráf, melynek $n' = 6 + c$ csúcsa és $m' = 15 + 2c$ éle van. Ezért $m' \leq 3n' - 6$, tehát $15 + 2c \leq 18 + 3c - 6$, azaz $c \geq 3$. De K_6 lerajzolható 3 élkereszteződéssel, így $c(K_6) = 3$.

Tétel

$c(K_6) = 3$

Bizonyítás

A K_6 helyett értelemzzünk egy új gráfot: K_6 egy lerajzolásában bármely két élének keresztezési pontját tekintsük az új gráf egy-egy csúcsának a megfelelõ élekkel együtt.
Ekkor az így kapott gráf egy síkgráf, melynek $n' = 6 + c$ csúcsa és $m' = 15 + 2c$ éle van. Ezért $m' \leq 3n' - 6$, tehát $15 + 2c \leq 18 + 3c - 6$, azaz $c \geq 3$. De K_6 lerajzolható 3 élkeresztezõdéssel, így $c(K_6) = 3$.

K_n élkeresztezõdéseinek a száma

$$c(K_n) \geq \frac{(n-3)(n-4)}{2}, n \geq 3.$$

Felsõ becslés:

$$c(K_n) \leq \frac{1}{4}[\frac{n}{2}][\frac{n-1}{2}][\frac{n-2}{2}][\frac{n-3}{2}]$$

Ha $n <= 10$ akkor egyenlõség áll fenn.

Felsõ becslés:

$$c(K_n) \leq \frac{1}{4}[\frac{n}{2}][\frac{n-1}{2}][\frac{n-2}{2}][\frac{n-3}{2}]$$

Ha $n <= 10$ akkor egyenlõség áll fenn.

$$c(K_{m,n}) \leq [\frac{m}{2}][\frac{m-1}{2}][\frac{n}{2}][\frac{n-1}{2}].$$

$1 \leq min(m,n) \leq 10$ esetében egyenlõség áll fenn.

Algoritmusok - tesztelés, hogy egy gráf síkgráf-e

"Brute-force" módszer

- ha a csomópontok száma ≤ 4, akkor síkbarajzolható
- ha a csomópontok száma ≥ 3, és az élek száma $> 3n - 6$, akkor nem síkbarajzolható
- ha a csomópontok száma > 3, és a gráf nem tartalmaz 3 hosszúságú kört, és az élek száma $> 2n - 4$, akkor nem síkbarajzolható
- K_5 ellenőrzése
- $K_{3,3}$ ellenőrzése

Síkgráf tesztelése "manuálisan"

- keressünk egy Hamilton kört (Hamilton gráfokról részletek egy következő kurzuson)
- rajzoluk le, és a többi élt is a gráfban rajzoljuk bele
- egy listába soroljuk fel a gráf összes élét
- válasszuk ki bármely élt a gráfból és cimkézzük meg I-vel (I- inside, belül van)
- amelyek metszik az I-vel cimkézett élt, azokat cimkézzük O-val (O - outside, kivül van), ha ezek metszik egymást a gráf nem síkbarajzolható
- ismételjük az előző két lépést, ameddig minden élt felcimkézünk

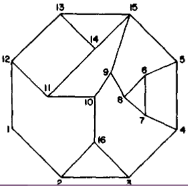
Egy példa: lásd 6_jegyzet.pdf

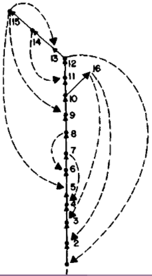
Hopcroft-Tarjan algoritmus

1974-ben, az első lineáris algoritmus, DFS-en alapul

Az algoritmus lépései:

- ha $E > 3V - 3$ nem síkbarajzolható
- mélységi bejárással építsük fel egy T fát
- keressünk ciklusokat és ezeket töröljük le
- ellenőrizzük a darabok síkbarajzolhatóságát plusz az eredeti ciklusnak is
- ellenőrizzük, hogy a beágyazásokból felépíthető-e a gráf





Alkalmazások

- gráfok színezése

Alkalmazások

- gráfok színezése
- nyomtatott áramkör

Forrásanyag

- Kása jegyzet
- Jean Claude Fournier, Graph Theory and Applications, 2009
- Santana Sahu Ray, Graph Theory with Algorithms and its Applications, Springer, 2013