2. Feladatlap

Relációk

1. Az ρ, σ, τ, ν homogén relációk az $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon és a következő módon vannak meghatározva:

$$\begin{aligned} x\,\rho\,y &\iff x < y, \\ x\,\sigma\,y &\iff x \mid y, \\ x\,\tau\,y &\iff \text{lnko}(x, y) = 1, \\ x\,\nu\,y &\iff x \equiv y \pmod 3. \end{aligned}$$

Írjuk fel a relációk grafikonját és vizsgáljuk minden esetben a reflexivitást, szimmetriát, antiszimmetriát és tranzitivitást.

Megoldás.

- A ρ reláció grafikonja:

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in M \times M \ : \ x < y\} \\ &= \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}. \end{aligned}$$

  - A reláció nem reflexív, mert például a $(2, 2) \notin R$, vagyis a 2 elem nincs relációban önmagával.
  - A reláció nem szimmetrikus, mert például a $(2, 3) \in R$, de $(3, 2) \notin R$, vagyis van olyan pár a reláció grafikonjában, amelynek a szimmetrikusa nincs benne a grafikonban.
  - A reláció antiszimmetrikus, mert minden $(a, b) \in R$, $a \neq b$ esetén $(b, a) \notin R$.
  - A reláció tranzitív, mert ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$.
- A σ reláció grafikonja:

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \in M \times M \ : \ x \mid y\} \\ &= \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}. \end{aligned}$$

  - A reláció reflexív, mert minden $a \in M$ esetén $(a, a) \in S$ (a mi esetünkben $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$,$(5, 5)$, $(6, 6) \in S$).
  - A reláció nem szimmetrikus, mert például a $(2, 4) \in S$, de $(4, 2) \notin S$.
  - A reláció antiszimmetrikus, mert minden $(a, b) \in S$, $a \neq b$ esetén $(b, a) \notin S$.
  - A reláció tranzitív, mert ha $x \mid y$ és $y \mid z$, akkor $x \mid z$. Valóban, az $x \mid y$ azt jelenti, hogy létezik $k \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $y = k \cdot x$. Hasonlóan, az $y \mid z$ egyenértékű azzal, hogy létezik $\ell \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $z = \ell \cdot y$. Innen kapjuk, hogy $z = \ell \cdot y = \ell \cdot (k \cdot x) = (\ell \cdot k) \cdot x$, vagyis $x \mid z$.
- A τ reláció grafikonja:

$$\begin{aligned} T &= \{(x, y) \in M \times M \ : \ \text{lnko}(x, y) = 1\} \\ &= \{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 5)\}. \end{aligned}$$

  - A reláció nem reflexív, mert például $(2, 2) \notin T$.
  - A reláció szimmetrikus, mert $\text{lnko}(a, b) = \text{lnko}(b, a)$ minden $a, b \in \mathbb{N}^*$ esetén.
  - A reláció nem antiszimmetrikus, mert például $(2, 3) \in T$ és $(3, 2) \in T$, de $2 \neq 3$.
  - A reláció nem tranzitív, mert például $(2, 3) \in T$ és $(3, 4) \in T$, de $(2, 4) \notin T$.

- A ν reláció grafikonja:

$$\begin{aligned} V &= \{(x,y) \in M \times M \,:\, x \equiv y \pmod 3\} \\ &= \{(2,2),\ (2,5),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,2),\ (5,5),\ (6,6)\}. \end{aligned}$$

  - A reláció reflexív, mert minden $a \in M$ esetén $a \equiv a \pmod 3$. (Úgy is belátható, hogy reflexív, hogy $(2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) \in V$).
  - A reláció szimmetrikus, mert $x \equiv y \pmod 3 \;\Leftrightarrow\; y \equiv x \pmod 3$ minden $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén.
  - A reláció nem antiszimmetrikus, mert például $(2,5) \in V$ és $(5,2) \in V$, de $2 \neq 5$.
  - A reláció tranzitív, mert ha $x \equiv y \pmod 3$ és $y \equiv z \pmod 3$, akkor $x \equiv z \pmod 3$.

$\square$

2. Tekintsük az A és B halmazokat, ahol $|A| = n$, $|B| = m$ $(n, m \in \mathbb{N}^*)$. Határozzuk meg:

(a) az összes lehetséges $\rho = (A, B, R)$ reláció számát;

Megoldás. A $\rho = (A, B, R)$ relációt meghatározza a grafikonja, ezért elég megszámolni, hogy hányféle grafikon lehetséges. Az R grafikon az $A \times B$ halmaz egy részhalmaza, így meg kell számolni az $A \times B$ részhalmazainak számát:

$$|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|} = 2^{n \cdot m}.$$

Tehát a $\rho = (A, B, R)$ relációk száma $2^{n \cdot m}$, ahol $|A| = n$ és $|B| = m$. $\square$

(b) az összes lehetséges $\rho = (A, A, R)$ homogén reláció számát.

Megoldás. A homogén $\rho = (A, A, R)$ relációk esetén $A = B$, így az előző alpont szerint $2^{|A| \cdot |A|} = 2^{n^2}$ van belőlük, ha $|A| = n$. $\square$

3. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho = (A, A, R)$, $\sigma = (A, A, S)$ és $\tau = (A, A, T)$, ahol

$$\begin{aligned} R &= \{(1,2),\ (1,4),\ (2,3),\ (4,4),\ (4,3)\}, \\ S &= \{(2,4),\ (3,4),\ (1,1),\ (4,2)\}, \\ T &= \{(4,4),\ (1,4)\}. \end{aligned}$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

(a) $\overset{-1}{\sigma}$;

Megoldás. A $\overset{-1}{\sigma}$ inverz reláció grafikonja $\overset{-1}{S} = \{(4,2),\ (4,3),\ (1,1),\ (2,4)\}$ (az S grafikonbeli párokat meg kell fordítani). $\square$

(b) $(\rho \circ \sigma) \circ \tau$;

Megoldás. Először felírjuk a $\rho \circ \sigma$ grafikonját, amelyet $R \circ S$-sel fogunk jelölni. Emlékeztetünk, hogy

$$x(\rho \circ \sigma)y \;\Leftrightarrow\; \exists z \text{ ú.h. } x\sigma z \text{ és } z\rho y,$$

tehát $(x, u) \in S$ és $(v, y) \in R$ párokat keresünk, ahol $u = v (= z)$, és amelyekből kapunk egy $(x, y) \in R \circ S$ párt.

- $(2,4) \in S$ és $(4,4) \in R$, tehát $(2,4) \in R \circ S$,
- $(2,4) \in S$ és $(4,3) \in R$, tehát $(2,3) \in R \circ S$,
- $(3,4) \in S$ és $(4,4) \in R$, tehát $(3,4) \in R \circ S$,
- $(3,4) \in S$ és $(4,3) \in R$, tehát $(3,3) \in R \circ S$,
- $(1,1) \in S$ és $(1,2) \in R$, tehát $(1,2) \in R \circ S$,
- $(1,1) \in S$ és $(1,4) \in R$, tehát $(1,4) \in R \circ S$,
- $(4,2) \in S$ és $(2,3) \in R$, tehát $(4,3) \in R \circ S$.

Összegezve $R \circ S = \{(2,4),\ (2,3),\ (3,4),\ (3,3),\ (1,2),\ (1,4),\ (4,3)\}$.

Hasonlóan számoljuk ki a $(\rho \circ \sigma) \circ \tau$ reláció $(R \circ S) \circ T$ grafikonját is:

- $(4,4) \in T$ és $(4,3) \in R \circ S$, tehát $(4,3) \in (R \circ S) \circ T$,
- $(1,4) \in T$ és $(4,3) \in R \circ S$, tehát $(1,3) \in (R \circ S) \circ T$,

tehát

$$(R \circ S) \circ T = \{(1,3),\ (4,3)\}.$$

$\square$

(c) $\rho \circ (\sigma \circ \tau)$;

Megoldás. Először felírjuk a $\sigma \circ \tau$ reláció grafikonját, amelyet $S \circ T$-vel fogunk jelölni: $S \circ T = \{(4,2),\ (1,2)\}$. Végül felírjuk a $\rho \circ (\sigma \circ \tau)$ reláció grafikonját, amelyet $R \circ (S \circ T)$-vel fogunk jelölni:

$$R \circ (S \circ T) = \{(4,3),\ (1,3)\}.$$

(Megjegyezzük, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk, mint az előző alpont esetén, ami elvárható a relációk összetételének asszociativitása miatt.) $\square$

(d) $\sigma \cup \tau$;

Megoldás. A $\sigma \cup \tau$ reláció grafikonja

$$\begin{aligned} S \cup T &= \{(2,4),\ (3,4),\ (1,1),\ (4,2)\} \cup \{(4,4),\ (1,4)\} \\ &= \{(2,4),\ (3,4),\ (1,1),\ (4,2),\ (4,4),\ (1,4)\}. \end{aligned}$$

$\square$

(e) $\sigma \cap \tau$;

Megoldás. A $\sigma \cap \tau$ reláció grafikonja

$$S \cap T = \{(2,4),\ (3,4),\ (1,1),\ (4,2)\} \cap \{(4,4),\ (1,4)\} = \emptyset.$$

$\square$

(f) $(\overset{-1}{\sigma} \cup \tau) \circ \rho$;

Megoldás. Először kiszámoljuk a $(\overset{-1}{\sigma} \cup \tau)$ reláció grafikonját:

$$\begin{aligned} \overset{-1}{S} \cup T &= \{(4,2),\ (4,3),\ (1,1),\ (2,4)\} \cup \{(4,4),\ (1,4)\} \\ &= \{(4,2),\ (4,3),\ (1,1),\ (2,4),\ (4,4),\ (1,4)\}. \end{aligned}$$

Végül a $(\overset{-1}{\sigma} \cup \tau) \circ \rho$ reláció grafikonja

$$\begin{aligned} (\overset{-1}{S} \cup T) \circ R &= \{(4,2),\ (4,3),\ (1,1),\ (2,4),\ (4,4),\ (1,4)\} \circ \{(1,2),\ (1,4),\ (2,3),\ (4,4),\ (4,3)\} \\ &= \{(1,4),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4)\}. \end{aligned}$$

$\square$

(g) $(\sigma \cap \tau) \circ \rho$;

Megoldás. Először kiszámoljuk a $\sigma \cap \tau$ reláció grafikonját:

$$S \cap T = \{(2,4),\ (3,4),\ (1,1),\ (4,2)\} \cap \{(4,4),\ (1,4)\} = \emptyset.$$

Végül a $(\sigma \cap \tau) \circ \rho$ reláció grafikonja:

$$(S \cap T) \circ R = \emptyset \circ R = \emptyset.$$

$\square$

(h) $(\sigma \circ \rho) \cap (\tau \circ \rho)$;

Megoldás. Először kiszámoljuk a $\sigma \circ \rho$ reláció grafikonját

$$\begin{aligned} S \circ R &= \{(2,4),\ (3,4),\ (1,1),\ (4,2)\} \circ \{(1,2),\ (1,4),\ (2,3),\ (4,4),\ (4,3)\} \\ &= \{(1,4),\ (1,2),\ (2,4),\ (4,2),\ (4,4)\}, \end{aligned}$$

majd a $\tau \circ \rho$ reláció grafikonját:

$$\begin{aligned} T \circ R &= \{(4,4),\ (1,4)\} \circ \{(1,2),\ (1,4),\ (2,3),\ (4,4),\ (4,3)\} \\ &= \{(1,4),\ (4,4)\}. \end{aligned}$$

Végül a $(\sigma \circ \rho) \cap (\tau \circ \rho)$ reláció grafikonja:

$$\begin{aligned} (S \circ R) \cap (T \circ R) &= \{(1,4),\ (1,2),\ (2,4),\ (4,2),\ (4,4)\} \circ \{(1,4),\ (4,4)\} \\ &= \{(1,4),\ (4,4)\}. \end{aligned}$$

□

(i) $\rho \circ (\sigma \cap \tau)$;

Megoldás. Először kiszámoljuk a $\sigma \cap \tau$ reláció grafikonját:

$$S \cap T = \{(2,4),\ (3,4),\ (1,1),\ (4,2)\} \cap \{(4,4),\ (1,4)\} = \emptyset,$$

végül az $\rho \circ (\sigma \cap \tau)$ reláció grafikonját:

$$R \circ (S \cap T) = \{(1,2),\ (1,4),\ (2,3),\ (4,4),\ (4,3)\} \circ \emptyset = \emptyset.$$

□

(j) $(\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \tau)$.

Megoldás. Először kiszámoljuk a $\rho \circ \sigma$ reláció grafikonját:

$$\begin{aligned} R \circ S &= \{(1,2),\ (1,4),\ (2,3),\ (4,4),\ (4,3)\} \circ \{(2,4),\ (3,4),\ (1,1),\ (4,2)\} \\ &= \{(2,4),\ (2,3),\ (3,4),\ (3,3)\,(1,2),\ (1,4),\ (4,3)\}, \end{aligned}$$

majd a $\rho \circ \tau$ reláció grafikonját:

$$\begin{aligned} R \circ T &= \{(1,2),\ (1,4),\ (2,3),\ (4,4),\ (4,3)\} \circ \{(4,4),\ (1,4)\} \\ &= \{(4,4),\ (4,3),\ (1,4),\ (1,3)\}, \end{aligned}$$

végül az $(\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \tau)$ reláció grafikonját:

$$\begin{aligned} (R \circ S) \cap (R \circ T) &= \{(2,4),\ (2,3),\ (3,4),\ (3,3)\,(1,2),\ (1,4),\ (4,3)\} \cap \{(4,4),\ (4,3),\ (1,4),\ (1,3)\} \\ &= \{(1,4),\ (4,3)\}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Az (g) és (h), illetve (i) és (j) alpontok alapján az vehető észre, hogy

$$(\sigma \cap \tau) \circ \rho \neq (\sigma \circ \rho) \cap (\tau \circ \rho), \ \text{illetve} \ \rho \circ (\sigma \cap \tau) \neq (\rho \circ \sigma) \cap (\rho \circ \tau),$$

vagyis a relációk összetétele nem disztributív a metszetre nézve egyik oldalról sem.)

□

4. Függvények-e a 3. feladatban szereplő ρ, σ és τ relációk?

Megoldás. Egy $f = (A, B, F)$ reláció függvény az A-ról a B-re, ha minden $a \in A$ esetén létezik egyetlen $b \in B$ úgy, hogy afb. Ekkor az afb helyett használjuk az $f(a) = b$ jelölést is. Ez azt jelenti, hogy az f reláció grafikonjában minden $a \in A$ esetén kell létezzen egyetlen olyan pár, ami a-val kezdődik.

A $\rho = (A, A, R)$ reláció, amelynek grafikonja $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (4, 4), (4, 3)\}$ nem függvény, mert az $1 \in A = \{1, 2, 3, 4\}$ esetén két pár is létezik az R grafikonban, amelyek 1-gyel kezdődnek, éspedig $(1, 2)$ és $(1, 4)$. (Emiatt nem tudnánk egyértelműen értelmezni a $\rho(1)$-et.)

A $\sigma = (A, A, S)$ reláció, amelynek grafikonja $S = \{(2, 4), (3, 4), (1, 1), (4, 2)\}$ függvény, mert minden $a \in A = \{1, 2, 3, 4\}$ létezik egyetlen egy pár az S grafikonban, amely a-val kezdődik, így tudjuk értelmezni a $\sigma : A \to A$ függvényt úgy, hogy $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 4$ és $\sigma(4) = 2$.

A $\tau = (A, A, T)$ reláció, amelynek grafikonja $T = \{(4, 4), (1, 4)\}$ nem függvény, mert az $2 \in A = \{1, 2, 3, 4\}$ esetén nem létezik olyan pár a T grafikonban, amelyek 2-vel kezdődne. (Emiatt nem tudjuk hogyan értelmezni a $\tau(2)$-t.) □

5. Legyen $\rho = (A, B, R)$ és $\sigma = (C, D, S)$ relációk. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\overset{-1}{\overset{-1}{\rho}} = \rho$;

Megoldás. Tetszőleges $x \in A$ és $y \in B$ esetén

$$x \overset{-1}{\overset{-1}{\rho}} y \iff y \overset{-1}{\rho} x \iff x\rho y,$$

ahonnan következik, hogy $\overset{-1}{\overset{-1}{\rho}}$ és ρ relációk megegyeznek. □

(b) $\overset{-1}{\overline{\rho \cup \sigma}} = \overset{-1}{\rho} \cup \overset{-1}{\sigma}$;

Megoldás. Tetszőleges $x \in B \cup D$ és $y \in A \cup C$ elemek esetén

$$x \overset{-1}{\overline{\rho \cup \sigma}} y \iff y(\rho \cup \sigma)x \iff y\rho x \text{ vagy } y\sigma x \iff x \overset{-1}{\rho} y \text{ vagy } x \overset{-1}{\sigma} y \iff x(\overset{-1}{\rho} \cup \overset{-1}{\sigma})y,$$

ahonnan $\overset{-1}{\overline{\rho \cup \sigma}} = \overset{-1}{\rho} \cup \overset{-1}{\sigma}$. □

(c) $\overset{-1}{\overline{\rho \cap \sigma}} = \overset{-1}{\rho} \cap \overset{-1}{\sigma}$;

Megoldás. Tetszőleges $x \in B \cup D$ és $y \in A \cup C$ elemek esetén

$$x \overset{-1}{\overline{\rho \cap \sigma}} y \iff y(\rho \cap \sigma)x \iff y\rho x \text{ és } y\sigma x \iff x \overset{-1}{\rho} y \text{ és } x \overset{-1}{\sigma} y \iff x(\overset{-1}{\rho} \cap \overset{-1}{\sigma})y,$$

ahonnan $\overset{-1}{\overline{\rho \cap \sigma}} = \overset{-1}{\rho} \cap \overset{-1}{\sigma}$. □

(d) $\rho \subseteq \sigma \iff \overset{-1}{\rho} \subseteq \overset{-1}{\sigma}$.

Megoldás.

$\boxed{\Rightarrow}$ Feltételezzük, hogy $\rho \subseteq \sigma$, vagyis ha $x\rho y$, akkor $x\sigma y$. Ekkor, ha $y \overset{-1}{\rho} x$, vagyis $x\rho y$, akkor a feltevés szerint $x\sigma y$, tehát az inverzreláció értelmezése szerint $y \overset{-1}{\sigma} x$. Ezzel beláttuk, hogy $\overset{-1}{\rho} \subseteq \overset{-1}{\sigma}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Mivel $\rho = \overset{-1}{\overset{-1}{\rho}}$ és $\sigma = \overset{-1}{\overset{-1}{\sigma}}$, ezért az ρ, illetve a σ reláció helyett az $\overset{-1}{\rho}$, illetve $\overset{-1}{\sigma}$ relációkat használva az előző irányú implikáció alapján következik, hogy ha $\overset{-1}{\rho} \subseteq \overset{-1}{\sigma}$, akkor $\rho \subseteq \sigma$.

□

6. Legyen r a következő homogén reláció az $M = [-1, 1]$ halmazon: $xry \iff x^2 + y^2 = 1$. Függvény-e ez a reláció? Vizsgáljuk az r reláció esetén a reflexivitást, szimmetriát, antiszimmetriát és tranzitivitást!

Megoldás.

- Az r reláció nem függvény, mert például $0, 1 \in [-1, 1]$, de $0r1$ és $0r-1$, mivel $0^2 + 1^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1$.

- Az r reláció nem reflexív, mert például $0 \in [-1,1]$, de $0 \not r 0$, mivel $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$.
- Az r reláció szimmetrikus, mert tetszőleges $x, y \in [-1,1]$, ha xry, akkor $x^2 + y^2 = 1$, ahonnan $y^2 + x^2 = 1$, tehát yrx.
- Az r reláció nem tranzitív, mert $0, 1 \in [-1,1]$, $1\,r\,0$ és $0\,r\,1$, de $1 \not r 1$, mivel $1^2 + 1^2 = 2 \neq 1$.
- Az r reláció nem antiszimmetrikus, mert $1\,r\,0$ és $0\,r\,1$, de $0 \neq 1$.

$\square$