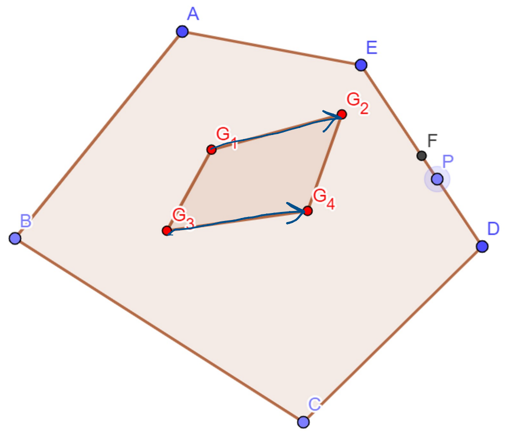
2. szeminarium

Monday, February 28, 2022 3:00 PM

19. Adott az $ABCDE$ ötszög és $P \in [DE]$. Jelöljük rendre G_1,G_2,G_3,G_4-el az ADE, APB, ABC, APC háromszögek súlypontjait. Mutassuk ki, hogy $G_1G_2G_3G_4$ paralelogramma akkor és csak akkor ha P a $[DE]$ szakasz felezőpontja.

$G_1G_2G_3G_4$ paralel. $\overset{?}{\iff}$ P a $[DE]$ fel. p.



$G_1G_2G_3G_4$ paral $\iff$

$\iff \boxed{\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{G_3G_4}}$ $\underbrace{(G_1G_2 = G_3G_4,\ G_1G_2 \parallel G_3G_4)}$

vagy

$\overrightarrow{G_1G_3} = \overrightarrow{G_2G_4}$

vagy

$\overrightarrow{G_3G_1} + \overrightarrow{G_3G_4} = \overrightarrow{G_3G_2}$ (par. szabály)

vagy

$\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_4} = \overrightarrow{OG_3} + \overrightarrow{OG_2}$

G_1 súlyp. — ABP_Δ
G_2 — " — ADE_Δ $\Bigg\} \Rightarrow$ $\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{G_1O} + \overrightarrow{OG_2} = -\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE})$

O tetsz. pont.

$\Rightarrow \overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP})$

G_3 súlyp. $\rightarrow ABC_\Delta$
G_4 súlyp $\rightarrow APC_\Delta$ $\Bigg| \Rightarrow$ $\overrightarrow{G_3G_4} = \overrightarrow{G_3O} + \overrightarrow{OG_4} = \overrightarrow{OG_4} - \overrightarrow{OG_3} =$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

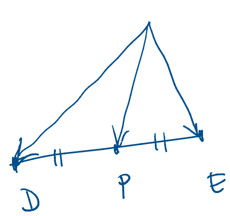
$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB})$

$G_1G_2G_3G_4$ paral $\iff \overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{G_3G_4} \iff \cancel{\frac{1}{3}}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = \cancel{\frac{1}{3}}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB})$

$\iff \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = 2\,\overrightarrow{OP}$

$\iff \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) \iff$

$\iff P$ felezi $[DE]$-t.



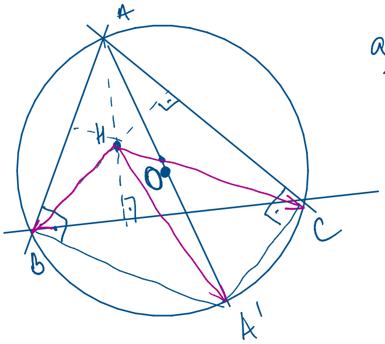
q.e.d.

20. Legyen ABC egy háromszög, H a magasságpont, O a háromszög köré írt kör középpontja és A' az A-nak átmérősen ellentett pontja. Mutassuk ki, hogy

a) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'}$; b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$; (Sylvester összefüggés)

c) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$; d) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$;

e) H, G, O pontok kollineárisak (Euler-féle egyenes) és $2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{HG}$.



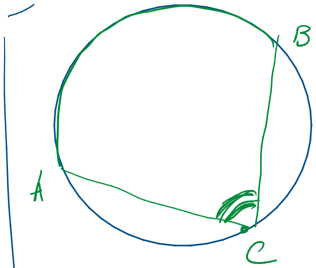
a) $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$?

$[AA']$ átmérő

$\Downarrow$

$m(\widehat{ACA'}) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow A'C \perp AC \\ \text{de } HB \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow HB \parallel A'C$



$m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$

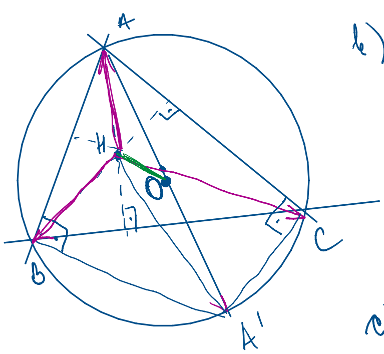
$\Downarrow$

ha $[AB]$ átmérő $\Rightarrow m(\widehat{ACB}) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$[AA']$ átmérő $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A'B \perp AB \\ HC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow A'B \parallel HC$

$\Rightarrow HBA'C_{\square}$ parel. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ ✓



b) $\underbrace{\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}}_{\overset{a)}{=}\ \overrightarrow{HA'}} \overset{?}{=} 2\overrightarrow{HO}$

O felezi az $[AA']$-t $\Rightarrow \overrightarrow{HO} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'}) \overset{a)}{=} \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} \\ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} \end{array}\right\} (+) \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} =$

$= \overrightarrow{OH}$

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} \xrightarrow{b)} 2\overrightarrow{HO}$

d) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$

G súlypont $\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),\ \forall O \in \mathcal{S}$ esetén

$O := H$ ✓

$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG} + \underbrace{(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})}_{= \vec{0}}$ ✓

$\vec{0}$, mert G súlypont!

e) H, G, O pontok kollineárisak (Euler-féle egyenes) és $2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{HG}$.

$\Updownarrow$

$\exists\, k \in \mathbb{R}$ ú.h. $\overrightarrow{HO} = k \cdot \overrightarrow{HG}$

v. $\overrightarrow{HG} = k' \cdot \overrightarrow{GO}$

v. $\overrightarrow{GO} = k'' \cdot \overrightarrow{HO}$

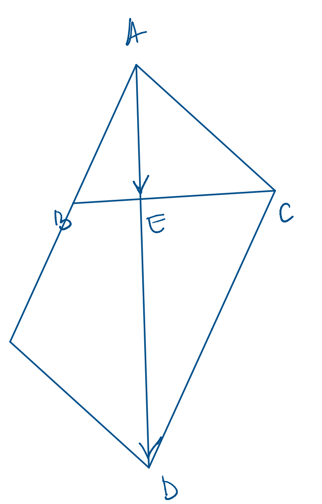
b) $\wedge$ d) $\Rightarrow$ $3\overrightarrow{HG} = 2 \cdot \overrightarrow{HO}$ $\iff$ $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$ $\Longrightarrow$ H, G, O kollin.

$\overrightarrow{HO} = (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GO})$

$\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GO} \iff \frac{1}{\cancel{3}}\overrightarrow{HG} = \frac{2}{\cancel{3}}\overrightarrow{GO} \quad \Big| \cdot 3$

Opc. Hf. H, G, O, I pontok megszerk. (körző + beosztásnélküli vonalzó)

25. Az ABC háromszög síkjában adottak a D és E pontok úgy, hogy $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Igazoljuk, hogy az A, D és E pontok egy egyenesen helyezkednek el! $\iff$ $\exists\, k \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AD}$.



$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

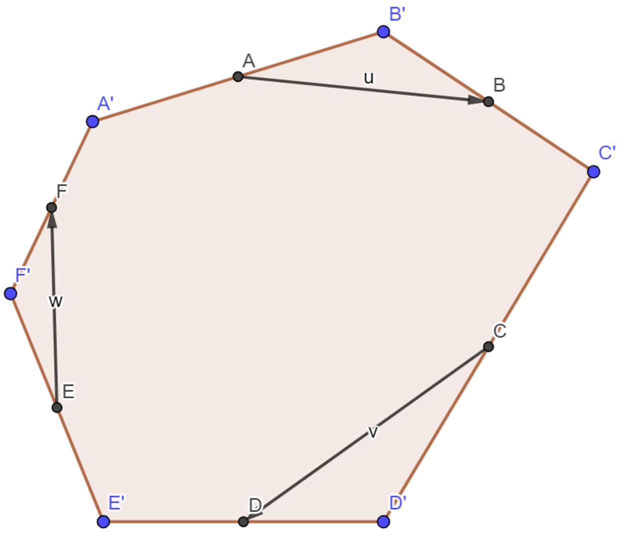
$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$ ✓

$k = \frac{1}{3}$

27. Bizonyítsuk be, hogy ha A, B, C, D, E, F egy hatszög egymás utáni oldalfelezési pontjai, akkor az AB, CD és EF szakaszokkal háromszög szerkeszthető!



AB, CD, EF szakaszokkal Δ szerk-hető

$\iff \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{0}$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}\right) \\ \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{D'D} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'E'}\right) \\ \overrightarrow{EF} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{E'F'} + \overrightarrow{F'A'}\right) \end{aligned}\right\} +$$

$\Rightarrow$ q. e. d.