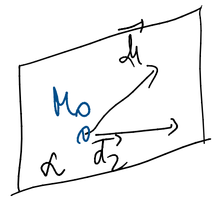
6. szeminárium

Wednesday, March 31, 2021 4:20 PM

Síkok egyenletei

I. Egy pont és két nem párhuzamos irány által meghatározott sík egyenlete. Tekintjük az $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{S}$ rögzített pontot és a $\vec{d_1}(p_1, q_1, r_1)$, $\vec{d_2}(p_2, q_2, r_2) \in \mathcal{V}$ egymással nem párhuzamos vektorokat. Az M_0 ponton áthaladó, $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ vektorokkal párhuzamos sík egyenletei:

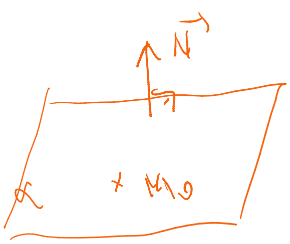
$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.}$$



II. Három nem kollineáris pont által meghatározott sík egyenlete. Legyen $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ egy affin koordináta-rendszer és $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3) \in \mathcal{S}$ három nem kollineáris pont.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}.$$

III. Normálvektorral meghat. sík:



$$\left.\begin{array}{l} \vec{N}(A,B,C) \perp \alpha \\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\alpha:\ A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0}$$

α sík normálvektora: $\vec{N}(A,B,C)$

Fordítva: Ha $\alpha:\ Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{N}(A,B,C) \perp \alpha$.

Egyenesek egyenletei

az egyenes kanonikus alakja

① $M_0(x_0,y_0,z_0) \in d$.
$d \parallel \vec{d}(p,q,r)$
$\Rightarrow \boxed{d: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}}$ → $\vec{d}(p,q,r)$ a d egyenes irányvektora

② $M_1(x_1,y_1,z_1)$
$M_2(x_2,y_2,z_2)$
$\Rightarrow \boxed{M_1M_2: \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}}$

③ Egyenes általános egyenlete:

$$\boxed{d: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \quad \text{ahol} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2}$$

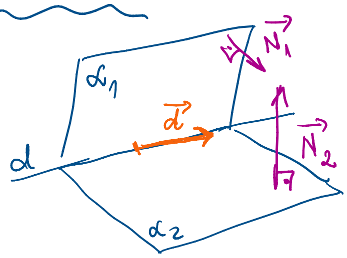
Egyenes irányvektorának meghatározása:

I. módszer: - átírjuk kanonikus alakra és (megoldjuk az egy.-r-t)
a nevezőkből kiolvassuk a koordinátákat.

$$d: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r} \Rightarrow$$

- $\vec{d}(p,q,r)$ = irányvektor
- $A(x_0,y_0,z_0)$ pont az egyenesről.

II. módszer:



$\left.\begin{array}{l} \vec{N_1} \perp \alpha_1 \\ d \subset \alpha_1 \end{array}\right| \Rightarrow \vec{N_1} \perp d$

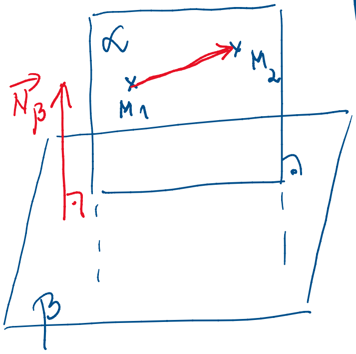
has. $\vec{N_2} \perp d$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow d \perp (\vec{N_1}, \vec{N_2}) \\ \vec{N_1}\times\vec{N_2} \perp (\vec{N_1}, \vec{N_2}) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow d \parallel \vec{N_1}\times\vec{N_2} \Rightarrow \text{Legyen } \boxed{\vec{d} = \vec{N_1}\times\vec{N_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

3. FELADATLAP.

⑧ a) $\alpha = ?$ ú.h. $\begin{cases} M_1(1,-1,3) \in \alpha \\ M_2(1,2,4) \in \alpha \\ \alpha \perp \beta: 2x-3y+z+1=0 \end{cases}$



Van képlet:

$\rightarrow$ ①. 1 pont és 2 vektor
✗ ② 3 pont
✗ ③ 1 pont és egy síkra ⊥ vektor (normálvektor)

} által meghat. síkra

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \Rightarrow \alpha \parallel \vec{N}_\beta(2,-3,1) \\ M_1, M_2 \in \alpha \Rightarrow \alpha \parallel \overrightarrow{M_1M_2}(0,3,1) \\ M_1(1,-1,3) \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

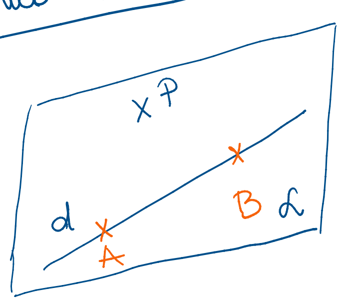
$\alpha: (x-1)(-6)-(y+1)2+(z-3)\cdot 6=0$

$\alpha: -6x-2y+6z+\underbrace{6-2-18}_{-14}=0 \quad \Big| :(-2)$

$$\boxed{\alpha: 3x+y-3z+7=0}$$

b) $\alpha = ?$ ú.h. $\begin{cases} P(-1,2,6) \in \alpha \\ \text{és} \\ \text{tartalmazza a } d: (*) \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+z-3=0 \end{cases} \text{egyenest.} \end{cases}$

I. módszer



Van képlet:

①. 1 pont és 2 vektor
✓ ② 3 pont
③ 1 pont és egy síkra ⊥ vektor (normálvektor)

} által meghat. síkra

Keressük 2 pontot a d-ről: $\left.\begin{array}{l} A, B \in d \\ d \subset \alpha \end{array}\right| \Rightarrow A, B \in \alpha$

$P \in \alpha$

$$\Rightarrow \quad \alpha = (ABP)$$

$$\underline{x := 0} \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} -2y + 3z = 0 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \quad A\left(0, \frac{9}{2}, 3\right) \in d.$$

$$z := 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} 2x = -z + 3 = 2 \Rightarrow x = 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} y = 2$$

$$\Rightarrow \quad B(1, 2, 1) \in d.$$

$\Rightarrow \quad \alpha = (ABP)$:
$P(-1,2,6)$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.}$$

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 1 \\ -2 & 0 & 5 \\ \underbrace{0 - 1}_{-1} & \underbrace{\frac{9}{2} - 2}_{\frac{5}{2}} & \underbrace{3 - 1}_{2} \end{vmatrix} = 0$$

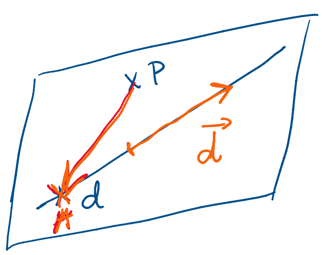
$$\alpha : (x-1) \cdot \left(-\frac{25}{2}\right) - (y-2) \cdot 1 + (z-1)(-5) = 0 \quad \Big/ \cdot 2$$

$$\alpha : -25x + 25 - 2y + 4 - 10z + 10 = 0$$

$$\alpha : -25x - 2y - 10z + 39 = 0$$

$$\boxed{\alpha : 25x + 2y + 10z + 39 = 0}$$

II. módszer:



Van képlet:

✓ ①. 1 pont és 2 vektor
② 3 pont
③ 1 pont és egy síkra ⊥ vektor (normálvektor)

} által meghat. síkra

d kanonikus alakra $\longrightarrow$ $\vec{d}$
$A \in d$.

$\Rightarrow \alpha$ síkot meghat
* P pont
* $\vec{d}$ irányv.
* [illegible]

$\begin{cases} * \ \vec{d} \text{ irányv.} \\ * \ \vec{PA} \text{ vektor} \end{cases}$

$$d: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{x = t} \Rightarrow \underline{z = 3 - 2t} \Rightarrow -2y = -3z - x = -3(3-2t) - t$$

$$-2y = -9 + 5t$$

$$\underline{y = -\frac{5}{2}t + \frac{9}{2}}$$

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5}{2}t + \frac{9}{2} \\ z = 3 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$ – param. egyenlete d-nek

$$d: \begin{cases} x := 2t \\ y = -5t + \frac{9}{2} \\ z = 3 - 4t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow d: (t =) \underbrace{\frac{x}{2} = \frac{y - \frac{9}{2}}{-5} = \frac{z-3}{-4}}_{\text{kanonikus egyenlet}}$$

$\Downarrow$

$\vec{d}(2, -5, -4)$ irányvektor

$A\left(0, \frac{9}{2}, 3\right) \in d.$

$\Rightarrow \alpha$: α síkot meghat. $\begin{cases} * \ P \text{ pont} \\ * \ \vec{d} \text{ irányv.} \\ * \ \vec{PA} \text{ vektor} \end{cases}$ $P(-1, 2, 6) \in \alpha$

$\Downarrow$

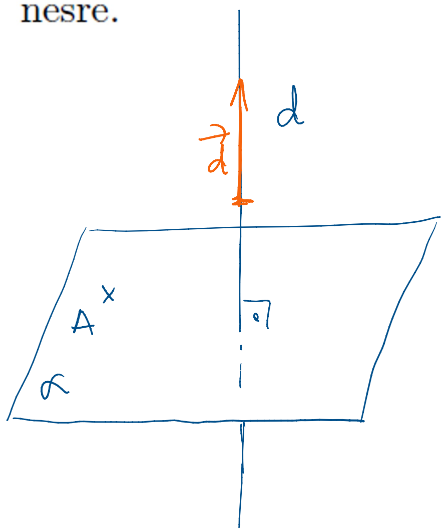
$\vec{PA}\left(1, \frac{5}{2}, -3\right)$

$$\Rightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = 0$$

α: . . . . . .

8. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely

(c) átmegy az $A(1,1,-2)$ ponton és merőleges a $d : \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ egyenesre.



$$\vec{d} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{d} = \vec{i}\cdot 3 - \vec{j}\cdot(-1) - 2\vec{k}$$

$$\vec{d}\,(3, 1, -2)$$

$d \perp \alpha \Rightarrow \vec{d} \perp \alpha \Rightarrow \vec{d} = \vec{N}_\alpha$ (tekinthető a sík normálvektorának)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{N}(A,B,C) \perp \alpha \\ M_0(x_0,y_0,z_0) \in \alpha \end{array}\right| \xRightarrow{\text{képlet}} A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}\,(3,1,-2) \perp \alpha \\ A(1,1,-2) \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow \alpha: 3\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)-2\cdot(z+2)=0$$

$$\alpha: 3x+y-2z-8=0.$$

VAGY: $\vec{d}\,(3,1,-2) \perp \alpha \Rightarrow \alpha: 3x+y-2z+D=0$

$A(1,1,-2) \in \alpha$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3+1-2\cdot(-2)+D=0 \Rightarrow D=-8$

$\Rightarrow \boxed{\alpha: 3x+y-2z-8=0}$

SZÖGEK.

① Két egyenes szöge:

$$\boxed{\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{|\vec{d_1}\cdot\vec{d_2}|}{\|\vec{d_1}\|\cdot\|\vec{d_2}\|}}$$

② Két sík szöge:

$$\boxed{\cos(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = \frac{|\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}|}{\|\vec{N_1}\|\cdot\|\vec{N_2}\|}}$$

③ Egyenes és sík szöge:

$$\boxed{!\ \underline{\sin}(\widehat{d, \alpha}) = \frac{|\vec{d}\cdot\vec{N}|}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{N}\|}}$$

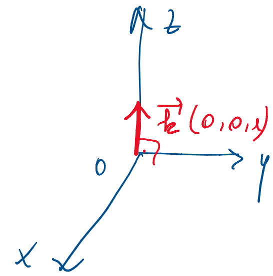
4. FELADATLAP

② $m(\widehat{(xOy), M_1M_2}) = ?$, ahol $M_1(1,2,3)$
$M_2(-2,1,4)$

M_1M_2 egyenes irányvektora: $\overrightarrow{M_1M_2}(-3,-1,1)$

$(xOy): z=0 \Rightarrow \vec{N}_{(xOy)}(0,0,1) = \vec{k}$

$$(xOy):\ z=0 \Rightarrow \vec{N}_{(xOy)}(0,0,1)=\vec{k}$$



$$Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow \vec{N}(A,B,C)$$

$$\sin\left(\widehat{(xOy),\,M_1M_2}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{k}\right|}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|\cdot\|\vec{k}\|}=\frac{|-3\cdot 0-1\cdot 0+1\cdot 1|}{\sqrt{9+1+1}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\Rightarrow m\left(\widehat{(xOy),\,M_1M_2}\right)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{11}}$$

4FL / (4) Adott: $d_1:\ x-3=\dfrac{y-8}{3}=\dfrac{z-3}{4}$

$$d_2:\ \begin{cases}7x-y-z-10=0\\ 3x+y-z-12=0\end{cases}$$

Ig. hogy ez a két egyenes koplanáris (egy síkban van) és írjuk fel ennek a síknak az egyenletét!

$$d_1, d_2 \text{ kopl.} \Leftrightarrow \begin{cases}1^\circ\ \ d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \vec{d_1}\parallel\vec{d_2} \Leftrightarrow \text{a koordináták arányosak}\\ \text{Vagy}\\ 2^\circ\ \ d_1 \text{ metszi } d_2\text{-t} \Leftrightarrow \begin{cases}d_1:\ x-3=\frac{y-8}{3}=\frac{z-3}{4}\\ d_2:\ \begin{cases}7x-y-z-10=0\\ 3x+y-z-12=0\end{cases}\end{cases} \text{ van megoldása.}\end{cases}$$

VAGY

$$\boxed{d_1, d_2 \text{ koplanárisak} \Leftrightarrow \Delta=\left(\vec{d_1},\vec{d_2},\overrightarrow{A_1A_2}\right)=0,\quad \begin{matrix}A_1\in d_1\\ A_2\in d_2\end{matrix}}$$

• $d_1: x-3=\frac{y-8}{3}=\frac{z-3}{4} \Rightarrow \vec{d_1}(1,3,4),\ A_1(3,8,3)$

• $d_2: \begin{cases} 7x-y-z-10=0 \\ 3x+y-z-12=0 \end{cases}$

$x=t \Rightarrow \begin{cases} -y-z=10-7t \\ y-z=12-3t \end{cases} \Big| \oplus \Rightarrow -2z=22-10t$

$z=-11+5t$

$\Rightarrow y=12-3t+5t-11 \Rightarrow y=2t+1$

$d: \begin{cases} x=t \\ y=2t+1 \\ z=5t-11 \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow d_2: (t=)x=\frac{y-1}{2}=\frac{z+11}{5}$

$\Downarrow$

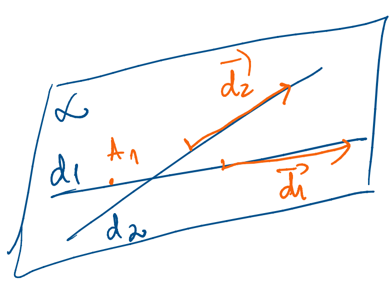
$\vec{d_2}(1,2,5),\ A_2(0,1,-11)$

$\Delta=(\vec{d_1},\vec{d_2},\vec{A_1A_2})=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ -3 & -7 & -14 \end{vmatrix}$ $-1.sor-2\cdot2.sor=3.sor$ $=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_1, d_2$ koplanárisak

$\left.\begin{array}{l} \vec{d_1}(1,3,4) \\ d_2(1,2,5) \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{1}\neq\frac{3}{2}\neq\frac{4}{5} \Rightarrow \vec{d_1}\nparallel\vec{d_2} \Rightarrow d_1\nparallel d_2$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_1, d_2$ metszőek.



$\Rightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x-3 & y-8 & z-3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=0$

6H g/ 3FL: 10, 12, 14/15

4FL: 1, 3, 10, 13/14