

Név:
Csoport:

Algebra parciális
2022.12.06

A

1. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } x < 1 \\ x+1, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ függvények.

(a) (0.5p) Ábrázold az f és g függvényeket!

(b) (0.5p) Injektív-e, szürjektív-e, bijektív-e az f , illetve g függvény?

(c) (0.5p) Számold ki az $f \circ g$ összetételt!

2. (1p) Az $M = \mathbb{Z}$ halmazon értelmezzük a következő homogén relációt: xry akkor és csakis akkor, ha $x^2 + y^2$ páros. Az r reláció esetén tanulmányozd a reflexivitást, szimmetriát, antiszimmetriát és tranzitivitást! Ekvivalenciareláció-e vagy rendezési reláció-e az r az M halmazon?

3. Az $M = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazon adottak a $r = (M, M, R)$ és $s = (M, M, S)$ homogén relációk, ahol $R = \{(1, 2), (3, 2), (3, 1), (4, 2), (4, 4)\}$ és $S = \{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$.

(a) (0.5p) Határozd meg az $r \circ s$ összetett relációt!

(b) (0.5p) Függvények-e az r , illetve s relációk?

4. Legyen $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

(a) (1p) Bizonyítsd be, hogy $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ részgyűrűje az $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ gyűrűnek! Igaz-e, hogy $(\mathcal{M}, +, \cdot)$ test?

(b) (0.5p) Igazold, hogy $f: (\mathcal{M}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$, $f \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} = a$ egy gyűrűmorfizmus!

5. Adottak a $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 9 & 8 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ és $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 9 & 7 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ 9-edrendű permutációk.

(a) (0.25p) Írd fel a σ permutációt diszjunkt ciklusok szorzataként.

(b) (0.5p) Írd fel a $(1\ 3\ 5)(1\ 4\ 2)(2\ 5)$ szorzatot diszjunkt ciklusok szorzataként, majd írd fel 9-edrendű permutáció alakjában!

(c) (1.25p) Határozd meg a következőket: $\sigma\tau$, σ^{-1} , $\text{inv}(\sigma)$, $\text{sgn}(\sigma)$, σ^{2022} .

6. (1p) Invertálható-e a $\widehat{428}$ a \mathbb{Z}_{1331} gyűrűben? Ha igen, akkor számold ki az inverzét!

7. (1p) Az egész számok halmazán oldd meg a következő egyenletet:

$$10x \equiv 6 \pmod{24}.$$

8. (1p) Az egész számok halmazán oldd meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}.$$