5. Feladatlap - Permutációk

Permutációk szorzása

Ha $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ és $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}$ n-edrendű permutációk, akkor a szorzatuk

$$\begin{aligned}\sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \sigma(\tau(3)) & \dots & \sigma(\tau(n)) \end{pmatrix} \in S_n.\end{aligned}$$

(A permutációk szorzása jobbról balra történik.)

A permutációk szorzása asszociatív és van semleges elem $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ egységpermutáció.

Továbbá minden permutációnak van inverze (lásd lennebb).
A permutációk szorzása nem kommutatív.

Példa. A $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ és $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ötödrendű permutációk szorzata

$$\begin{aligned}\sigma\tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \\ \tau\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Permutációk invertálása

A $\sigma \in S_n$ permutáció inverze egy olyan $\sigma^{-1} \in S_n$ permutáció, melyre

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

A $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ permutáció inverzét a következőképpen számoljuk ki:

$$\begin{aligned}\sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= „\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ oszlopait az első sor szerint növekvő sorba rendezzük''.}\end{aligned}$$

Példa. A $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ötödrendű permutáció inverze

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inverziók és a permutációk előjele

Legyen $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ egy n-edrendű permutáció.

Az (i, j) pár $(1 \leq i < j \leq n)$ a σ permutáció egy *inverziója*, ha $\sigma(i) > \sigma(j)$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots < \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(i) & \dots > \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

A σ permutáció inverzióinak számát $\operatorname{inv}(\sigma)$-val jelöljük.

A σ permutáció *előjele* $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)} \in \{\pm 1\}$.

Ha a σ előjele -1 (vagyis $\operatorname{inv}(\sigma)$ páratlan), akkor σ-t *páratlan permutációnak* nevezzük.

Ha σ előjele 1 (vagyis $\operatorname{inv}(\sigma)$ páros), akkor σ-t *páros permutációnak* nevezzük.

Tulajdonság.

(i) A permutációk előjele egy $\operatorname{sgn} : (S_n, \cdot) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$ *csoportmorfizmust definiál, vagyis minden* $\sigma, \tau \in S_n$ *permutációk esetén* $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$.

(ii) Minden $\sigma \in S_n$ *permutáció esetén* $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)^{-1} = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Példa. A $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ permutáció inverziói: $(1,3)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(4,5)$; a σ inverzióinak száma $\operatorname{inv}(\sigma) = 5$, tehát σ páratlan permutáció.

A $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ permutáció inverzióinak száma $\operatorname{inv}(\rho) = 3 + 3 + 2 = 8$, tehát ρ egy páros permutáció.

Transzpozíció

A $\tau_{ij} \in S_n$ permutációt, ahol

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} k, & \text{ha } k \neq i, j \\ j, & \text{ha } k = i \\ i, & \text{ha } k = j \end{cases}$$

transzpozíciónak nevezzük.

Példa. A következő permutációk transzpozíciók:

$$\tau_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_5, \qquad \tau_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_4.$$

Megjegyzés. Minden transzpozíció előjele -1, vagyis a transzpozíciók páratlan permutációk.

Ciklusok

Az n-edrendű permutációknak létezik egy másfajta kódolása is aszerint, hogy a permutáció az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz elemeit, hogyan képezi egymásba.

Példa. A permutációt megadó táblázat első sorát növekvő sorrendbe szoktuk írni, de írhatnánk úgy is, hogy fentről lefele és jobbról balra olvasva legyenek az elemek sorrendben.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ez alapján jobban kitűnik, hogy $\sigma(1) = 5$, $\sigma(\sigma(1)) = \sigma(5) = 3$, $\sigma(\sigma(\sigma(1))) = \sigma(3) = 1$, illetve $\sigma(2) = 6$, $\sigma(\sigma(2)) = \sigma(6) = 2$, illetve $\sigma(4) = 4$.

Ezt röviden a (1 5 3), (2 6), (4) listákkal is kódolhatjuk, amelyeket *ciklusoknak* nevezzünk. Az (1 5 3) ciklus a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 6-odrendű permutációt kódolja.

A σ permutációban az oszlopokat másképpen is rendezhettük volna:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

így a (3 1 5), (6 2), (4) ciklusokat kapva. Tehát a cikluson belül az elemeket felcserélhetjük úgy, hogy a lista elejéről a végre téve a számokat vagy fordítva (ciklikusan permutálhatjuk az elemeket a listán belül), így a (1 5 3), (5 3 1), (3 1 5) mind ugyanazt a ciklust (és permutációt jelölik).

Végül a σ permutációt felírhatjuk ciklusok szorzataként: $\sigma = (1\ 5\ 3)(2\ 6)(4)$.

Legyenek $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{N}^*$ különböző természetes számok. Ekkor az $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ ciklus *hossza* p. Az 1 hosszúságú ciklusok az identikus permutációt jelentik, ezért azok elhagyhatók, mikor a permutációt ciklusok szorzataként írjuk fel.

Példa. $(1\ 5\ 3)(2\ 6)(4) = (1\ 5\ 3)(2\ 6)$.

Permutációk felírása diszjunkt ciklusok szorzatára

Az $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ és $(a_1'\ a_2'\ \dots\ a_{p'}')$ ciklusok *diszjunktak*, ha $\{a_1, a_2, \dots, a_p\} \cap \{a_1', a_2', \dots, a_{p'}'\} = \emptyset$ (diszjunkt halmazok), vagyis a két ciklusnak nincs közös eleme.

Diszjunkt ciklusok szorzata felcserélhető, vagyis diszjunkt ciklusoknak megfelelő permutációk kommutálnak.

Permutáció átírása ciklusok szorzatára diszjunkt ciklusokat eredményez.

Példa. A $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 6 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ permutáció a következőképpen írható fel diszjunkt ciklusok szorzataként:

$$\sigma = (1\ 7)(2\ 4\ 6)(3) = (1\ 7)(2\ 4\ 6).$$

(Az 1 hosszúságú (3) ciklus az identikus permutációnak felel meg, így elhagyható.)

Ciklusok visszaírása permutációra

Az $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ ciklus az a_i elemet az a_{i+1} elembe viszi át, minden $i = 1, \dots, p-1$ esetén, az a_p elemet az a_1-be képezi és a többi elemet fixen hagyja (önmagába képezi).

Példa. A (3 6 2 4) ciklusnak megfelelő 7-edrendű permutáció

$$„\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}" = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ciklusok szorzása

A $c_1 = (a_1\ a_2\ \dots\ a_p)$ és $c_2 = (b_1\ b_2\ \dots\ b_q)$ (n-edrendű permutációknak megfelelő) ciklusok $c_1 c_2$ szorzatát úgy számítjuk ki, hogy minden $1, 2, \dots, n$ elemre előbb megnézzük, hogy a c_2 ciklus hova képezi őket, majd ennek eredményét hova képezi a c_1 ciklus.

Példa. Az (1 4 2 5 3) és (2 3 6) ciklusok szorzata $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)(2\ 3\ 6) = (1\ 4\ 2)(3\ 6\ 5)$.

(1 4 2 5 3)		·		(2 3 6)
4	$\longleftarrow$	1	$\longleftarrow$	1
2	$\longleftarrow$	4	$\longleftarrow$	4
1	$\longleftarrow$	3	$\longleftarrow$	2
6	$\longleftarrow$	6	$\longleftarrow$	3
5	$\longleftarrow$	2	$\longleftarrow$	6
3	$\longleftarrow$	5	$\longleftarrow$	5

Megjegyezzük, hogy permutációk szorzása diszjunkt ciklusok szorzatát eredményezi.

Példa. Az (1 4 5), (1 3 4) és (2 3 5) ciklusok szorzata (1 4 5)(1 3 4)(2 3 5) = (1 3)(2 5)(4) = (1 3)(2 5).

(1 4 5)		·	(1 3 4)	·		(2 3 5)
3	$\longleftarrow$	3	$\longleftarrow$	1	$\longleftarrow$	1
1	$\longleftarrow$	5	$\longleftarrow$	5	$\longleftarrow$	3
5	$\longleftarrow$	4	$\longleftarrow$	3	$\longleftarrow$	2
2	$\longleftarrow$	2	$\longleftarrow$	2	$\longleftarrow$	5
4	$\longleftarrow$	1	$\longleftarrow$	4	$\longleftarrow$	4

Ciklusok (szorzatának) invertálása

A $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k$ (nem diszjunkt) ciklusok, szorzatának inverze

$$(c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_{k-1} \cdot c_k)^{-1} = c_k^{-1} \cdot c_{k-1}^{-1} \cdot \dots \cdot c_2^{-1} \cdot c_1^{-1}.$$

Egy $c = (a_1\ a_2\ \dots a_{p-1}\ a_p)$ ciklus inverze

$$c^{-1} = (a_1\ a_2\ \dots a_{p-1}\ a_p)^{-1} = (a_p\ a_{p-1}\ \dots\ a_2\ a_1)$$

(fordított sorrendbe kell beírni az inverz ciklusba az elemeket).

Példa.

$$\begin{aligned}(2\ 6\ 4\ 3)^{-1} &= (3\ 4\ 6\ 2) = (2\ 3\ 4\ 6),\\ [(1\ 3\ 5)(2\ 3)(1\ 4\ 2\ 6)]^{-1} &= (1\ 4\ 2\ 6)^{-1}(2\ 3)^{-1}(1\ 3\ 5)^{-1} = (6\ 2\ 4\ 1)(3\ 2)(5\ 3\ 1)\\ &= (1\ 6\ 2\ 4)(2\ 3)(1\ 5\ 3).\end{aligned}$$

Ciklusok (diszjunkt szorzatának) hatványozása

Az $c = (a_1\ a_2\ \dots a_p)$ ciklus k-dik hatványa c^k ciklusok olyan szorzata, mely az a_i elemet az $a_{i+k \pmod p}$ elembe képezi, minden $i = 1, 2, \dots, p$ esetén, vagyis a ciklusban balról jobbra haladunk ciklikusan k hosszúságokat lépve. Ez alapján $(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)^p = e$, vagyis egy p hosszúságú ciklus p-dik hatványa az egységpermutációt eredményezi. Továbbá, ha c egy p hosszúságú ciklus, akkor $c^n = c^{n'}$, ahol n' az n-nek p-vel való osztási maradéka.
Megjegyezzük, hogy ciklus hatványozása diszjunkt ciklusokat eredményez.

Példa. A $c = (1\ 4\ 2\ 5\ 3\ 7)$ ciklus hatványai

$$\begin{aligned} c^2 &= (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 7),\\ c^3 &= (1\ 5)(4\ 3)(2\ 7),\\ c^4 &= (1\ 3\ 2)(4\ 7\ 5),\\ c^5 &= (1\ 7\ 3\ 5\ 2\ 4) = c^{-1},\\ c^6 &= e,\\ c^7 &= c,\end{aligned}$$

$$\vdots$$
$$c^{6k+n} = c^n,$$

minden $n, k \in \mathbb{Z}$ esetén.

A $c_1, c_2, \ldots, c_k$ diszjunkt ciklusok szorzatának hatványa $(c_1c_2\ldots c_k)^n = c_1^n c_2^n \ldots c_k^n$.
Egy permutációt általában úgy könnyebb hatványozni, hogy felírjuk diszjunkt ciklusok szorzataként, majd felemeljük a kívánt hatványra, végül az eredményt visszaírjuk ciklusok szorzatáról permutációra.

Permutáció és ciklus rendje
Jelölje e az n-edrendű egységpermutációt. Azt a legkisebb $r > 0$ természetes számot, amelyre $\sigma^r = e$ az $\sigma \in S_n$ permutáció *rendjének* nevezzük és $r = \mathrm{ord}(\sigma)$-val jelöljük.
Hasonlóan, ha a σ permutációt felírjuk $c_1c_2\ldots c_k$ ciklusok szorzataként, akkor a σ rendje lesz a legkisebb r pozitív természetes szám, amelyre $(c_1c_2\ldots c_k)^r = e$.
A ciklus hatványozása alapján egy p hosszúságú ciklus rendje p.
Ha c_i ciklus hossza p_i, minden $i = 1, \ldots, k$ esetén, akkor a $c_1c_2\ldots c_{k-1}c_k$ diszjunkt ciklusok szorzatának a rendje $\mathrm{lkkt}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$, a $p_1, p_2, \ldots, p_k$ legkisebb közös többszöröse:

$$\mathrm{ord}(c_1c_2\ldots c_k) = \mathrm{lkkt}(\mathrm{ord}(c_1), \ldots, \mathrm{ord}(c_k)).$$

Példa. Az (1 6 2 4)(8 3)(9 5 7) diszjunkt ciklusok szorzatának rendje $\mathrm{lkkt}(4, 2, 3) = 12$.

Permutáció, illetve ciklusok átírása transzpozíciók szorzatára
Megjegyezzük, hogy a τ_{ij} permutációt mint $(i\ j) = (j\ i)$ kettő hosszúságú ciklusként tudjuk felírni. Fordítva, minden 2 hosszúságú ciklus egy transzpozíció.
Egy ciklus következőképpen írható át 2 hosszúságú ciklusok (transzpozíciók) szorzataként:

$$(a_1\ a_2\ \ldots\ a_{k-2}\ a_{k-1}\ a_k) = (a_{k-1}\ a_k)(a_{k-2}\ a_k)\ldots(a_2\ a_k)(a_1\ a_k)$$

Ciklusok szorzatát úgy írjuk fel transzpozíciók szorzataként, hogy külön-külön felírjuk a ciklusokat transzpozíciók szorzatára. Ez az eljárás nem eredményez diszjunkt 2 hosszúságú ciklusok szorzatát. Így ha a ciklusban az elemeket ciklikusan felcseréjük (például az utolsó elemet előrehozzuk, vagy az elsőt a végére visszük), majd utána írjuk át a ciklust a fenti módon transzpozíciók szorzatára, akkor az előzőtől eltérő eredményt kapunk.

Példa. Az (1 2 4 5 7) ciklus felírhatjuk kétféleképpen is transzpozíciók szorzataként:

$$(1\ 2\ 4\ 5\ 7) = (5\ 7)(4\ 7)(2\ 7)(1\ 7) \quad \text{és} \quad (1\ 2\ 4\ 5\ 7) = (2\ 4\ 5\ 7\ 1) = (7\ 1)(5\ 1)(4\ 1)(2\ 1).$$

Ciklusok (szorzatának) előjele
Az $c = (a_1\ a_2\ \ldots a_{p-1}\ a_p)$ p-hosszúságú ciklus előjele $\mathrm{sgn}(c) = (-1)^{p-1}$, mivel felírható $(p-1)$ darab transzpozíció szorzataként és minden transzpozíciók előjele (-1). Továbbá a $\sigma = c_1c_2\ldots c_k$ szorzat előjele $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{(h_1-1)+(h_2-1)+\cdots+(h_k-1)}$, ahol h_i a c_i ciklus hossza, minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

Példa. A $c = (1\ 6\ 2\ 4)$ ciklus előjele $\mathrm{sgn}(c) = (-1)^3 = -1$, míg a $\sigma = (1\ 6\ 2\ 4)(2\ 3)(6\ 5\ 7)$ szorzat előjele $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{(4-1)+(2-1)+(3-1)} = (-1)^6 = 1$.

1. Feladatok

1. Számítsd ki $\sigma\tau$ és $\tau\sigma$ szorzatokat a következő permutációk esetén:

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

(b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

Megoldás.

(a) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ és $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$

(b) $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ és $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$

□

2. Számítsuk ki az alábbi permutációk esetén a σ^{-1}-et (a σ permutáció inverzét):

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$ (b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix},$ (c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Megoldás.

(a) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

(b) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix};$

(c) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

□

3. Számítsuk ki az alábbi permutációk esetén $\mathrm{inv}\,(\sigma)$-át (a σ permutáció inverzióinak számát), illetve $\mathrm{sgn}\,(\sigma)$-át (a σ permutáció előjelőjelét):

(a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$ (b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix},$ (c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Megoldás.

(a) A $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ permutáció inverzióinak száma $\mathrm{inv}(\sigma) = 3+2+0+0 = 5$ és előjele $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} = (-1)^5 = -1$, tehát a σ permutáció páratlan.

(b) A $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ permutáció inverzióinak száma $\mathrm{inv}(\sigma) = 3+3+2+0+1+0 = 9$ és előjele $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} = (-1)^9 = -1$, tehát a σ permutáció páratlan.

(c) A $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ permutáció inverzióinak száma $\mathrm{inv}(\sigma) = 2+3+2+1+0 = 8$ és előjele $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} = (-1)^8 = 1$, tehát a σ permutáció páros.

□

4. Legyen $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ és $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg a következőket: $\mathrm{inv}\,(\sigma)$, $\mathrm{sgn}\,(\sigma)$, σ^{-1} , $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^{2012}.

Megoldás. A σ inverzióinak száma $\mathrm{inv}(\sigma) = 1+2+0+0 = 3$, így a σ előjele $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^3 = -1$ (páratlan permutáció). A σ inverze $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Mivel $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e$, ezért $\sigma^{2012} = \sigma^{4\cdot 503} = e^{503} = e$ (egységpermutáció). □

5. Írjuk fel diszjunkt ciklusok szorzataként a következő permutációt:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 12 & 8 & 11 & 6 & 7 & 5 & 3 & 2 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $\tau = (1\ 9\ 2\ 12)(3\ 8)(4\ 11\ 10)(5\ 6\ 7)$. □

6. Írjuk fel a következő diszjunkt ciklusok szorzatát permutációként (mint $\mathcal{S}_8$ eleme):

(a) $(1\ 3\ 2)(4\ 7)(5\ 8\ 6)$; (b) $(1\ 8\ 4\ 5\ 7\ 6\ 2\ 3)$; (c) $(1\ 2\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 3)$.

Megoldás.

(a) A $(1\ 3\ 2)(4\ 7)(5\ 8\ 6)$ ciklusok szorzatának megfelelő nyolcadrendű permutáció

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

(b) A $(1\ 8\ 4\ 5\ 7\ 6\ 2\ 3)$ ciklusok szorzatának megfelelő nyolcadrendű permutáció

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 1 & 5 & 7 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) A $(1\ 2\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 3)$ ciklusok szorzatának megfelelő nyolcadrendű permutáció

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

7. Számoljuk ki a következő ciklusok szorzatát (adjuk meg mint diszjunkt ciklusok szorzataként):

(a) $\sigma_1 = (4\ 5\ 6\ 7)(1\ 2\ 3\ 4)$;

(b) $\sigma_2 = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 4\ 5\ 6\ 7)$;

(c) $\sigma_3 = (1\ 9\ 3\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 7)(9\ 5\ 6\ 8)$;

(d) $\sigma_4 = (9\ 5\ 6\ 8)(1\ 9\ 3\ 6)$

(e) $\sigma_5 = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)$;

(f) $\sigma_6 = (1\ 3\ 4\ 2\ 6\ 5\ 7\ 8)(1\ 2\ 7\ 6\ 8\ 4\ 5)$.

Megoldás.

(a) $\sigma_1 = (4\ 5\ 6\ 7)(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3\ 5\ 6\ 7\ 4)$;

(b) $\sigma_2 = (1\ 2\ 3\ 4)(2\ 4\ 5\ 6\ 7) = (1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6\ 7)$;

(c) $\sigma_3 = (1\ 9\ 3\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 7)(9\ 5\ 6\ 8) = (1\ 2\ 6\ 8\ 3\ 4\ 7\ 9\ 5)$;

(d) $\sigma_4 = (9\ 5\ 6\ 8)(1\ 9\ 3\ 6) = (1\ 5\ 6)(3\ 8\ 9)$;

(e) $\sigma_5 = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5) = (1\ 5\ 4\ 3\ 2)$;

(f) $\sigma_6 = (1\ 3\ 4\ 2\ 6\ 5\ 7\ 8)(1\ 2\ 7\ 6\ 8\ 4\ 5) = (1\ 6)(2\ 8)(3\ 4\ 7\ 5)$.

□

8. Számoljuk ki a következő ciklusok szorzatának inverzét:

(a) $\tau_1 = (2\ 5)$;

(b) $\tau_2 = (2\ 5\ 3)$;

(c) $\tau_3 = (1\ 3\ 4\ 2\ 5)$;

(d) $\tau_4 = (4\ 5\ 6\ 7)(1\ 2\ 3\ 4)$;

(e) $\tau_5 = (1\ 9\ 3\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 7)(5\ 9)$;

(f) $\tau_6 = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)$.

Megoldás.

(a) $\tau_1^{-1} = (2\ 5)^{-1} = (5\ 2) = (2\ 5)$;

(b) $\tau_2^{-1} = (2\ 5\ 3)^{-1} = (3\ 5\ 2) = (2\ 3\ 5)$;

(c) $\tau_3^{-1} = (1\ 3\ 4\ 2\ 5)^{-1} = (5\ 2\ 4\ 3\ 1) = (1\ 5\ 2\ 4\ 3)$;

(d)
$$\begin{aligned}\tau_4^{-1} &= [(4\ 5\ 6\ 7)(1\ 2\ 3\ 4)]^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4)^{-1}(4\ 5\ 6\ 7)^{-1} = (4\ 3\ 2\ 1)(7\ 6\ 5\ 4)\\ &= (1\ 4\ 3\ 2)(4\ 7\ 6\ 5) = (1\ 4\ 7\ 6\ 5\ 3\ 2);\end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned}\tau_5^{-1} &= [(1\ 9\ 3\ 6)(1\ 2\ 3\ 4\ 7)(5\ 9)]^{-1} = (5\ 9)^{-1}(1\ 2\ 3\ 4\ 7)^{-1}(1\ 9\ 3\ 6)^{-1}\\ &= (9\ 5)(7\ 4\ 3\ 2\ 1)(6\ 3\ 9\ 1) = (5\ 9)(1\ 7\ 4\ 3\ 2)(1\ 6\ 3\ 9) = (1\ 6\ 2)(3\ 5\ 9\ 7\ 4);\end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned}\tau_6^{-1} &= [(1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)]^{-1} = (1\ 5)^{-1}(1\ 4)^{-1}(1\ 3)^{-1}(1\ 2)]^{-1}\\ &= (5\ 1)(4\ 1)(3\ 1)(2\ 1) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5).\end{aligned}$$

□

9. Számítsuk ki a következő σ permutációk rendjét és σ^{2023} hatványát:

(a) $\sigma_1 = (1\ 3\ 4\ 2\ 5)$;

(b) $\sigma_2 = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 8\ 4\ 7)$;

(c) $\sigma_3 = (1\ 5\ 3)(2\ 6)(4\ 7\ 9\ 8)$;

(d) $\sigma_4 = (1\ 5\ 3\ 8)(2\ 6\ 3\ 7)$;

(e) $\sigma_5 = (1\ 2\ 5)(6\ 5)$;

(f) $\sigma_6 = (1\ 3\ 2)(2\ 4\ 3)$;

Megoldás.

(a) A σ_1 csak egy 5 hosszúságú ciklusból áll, ezért a rendje 5, tehát $\sigma_1^5 = e$ (az egységpermutáció). Maradékosan elosztjuk 2023-et 5-tel: $2023 = 404 \cdot 5 + 3$. Ezek alapján
$$\sigma_1^{2023} = \sigma_1^{404\cdot 5+3} = (\sigma_1^5)^{404}\sigma_1^3 = e^{404}\sigma_1^3 = \sigma_1^3 = (1\ 2\ 3\ 5\ 4).$$

(b) A σ_2 két diszjunkt ciklus szorzata, melyek hossza (így a rendjük is) 3, illetve 5, ezért σ_2 rendje $\mathrm{lkkt}(3,5) = 15$. Kiszámoljuk a σ_2 permutáció 2023-dik hatványát. Ehhez a maradékos osztás alapján felírjuk, hogy $2023 = 134 \cdot 15 + 13$, ahonnan

$$\begin{aligned}\sigma_2^{2023} &= (\sigma_2^{15})^{134}\sigma_2^{13} = e^{134}\sigma_2^{13} = [(1\ 5\ 3)(2\ 6\ 8\ 4\ 7)]^{13} = (1\ 5\ 3)^{13}(2\ 6\ 8\ 4\ 7)^{13}\\ &= (1\ 5\ 3)^{3\cdot4+1}(2\ 6\ 8\ 4\ 7)^{5\cdot2+3} = (1\ 5\ 3)^1(2\ 6\ 8\ 4\ 7)^3\\ &= (1\ 5\ 3)(2\ 4\ 6\ 7\ 8).\end{aligned}$$

A σ_2^{2023}-et úgy is kiszámolhatjuk, hogy a diszjunkt ciklusok 2023-dik hatványát számoljuk ki külön-külön:

$$\begin{aligned}\sigma_2^{2023} &= [(1\ 5\ 3)(2\ 6\ 8\ 4\ 7)]^{2023} = (1\ 5\ 3)^{2023}(2\ 6\ 8\ 4\ 7)^{2023}\\ &= (1\ 5\ 3)^{3\cdot674+1}(2\ 6\ 8\ 4\ 7)^{5\cdot404+3} = (1\ 5\ 3)^1(2\ 6\ 8\ 4\ 7)^3\\ &= (1\ 5\ 3)(2\ 4\ 6\ 7\ 8).\end{aligned}$$

(c) A σ_3 három diszjunkt ciklus szorzata, amelyek hossza (így a rendjük is) 3, 2 illetve 4, ezért σ_3 rendje $\mathrm{lkkt}(3,2,4) = 12$. Kiszámoljuk a σ_3 permutáció 2023-dik hatványát. A maradékos osztás alapján felírjuk, hogy $2023 = 168 \cdot 12 + 7$, ahonnan

$$\begin{aligned}\sigma_3^{2023} &= (\sigma_3^{12})^{168}\sigma_3^{7} = e^{168}\sigma_3^{7} = [(1\ 5\ 3)(2\ 6)(4\ 7\ 9\ 8)]^{7} = (1\ 5\ 3)^{7}(2\ 6)^{7}(4\ 7\ 9\ 8)^{7}\\ &= (1\ 5\ 3)^{3\cdot2+1}(2\ 6)^{2\cdot3+1}(4\ 7\ 9\ 8)^{4+3} = (1\ 5\ 3)^1(2\ 6)^1(4\ 7\ 9\ 8)^3\\ &= (1\ 5\ 3)(2\ 6)(4\ 8\ 9\ 7).\end{aligned}$$

A σ_3^{2023}-et úgy is kiszámolhatjuk, hogy a diszjunkt ciklusok 2023-dik hatványát számoljuk ki külön-külön:

$$\begin{aligned}\sigma_3^{2023} &= [(1\ 5\ 3)(2\ 6)(4\ 7\ 9\ 8)]^{2023} = (1\ 5\ 3)^{2023}(2\ 6)^{2023}(4\ 7\ 9\ 8)^{2023}\\ &= (1\ 5\ 3)^{3\cdot674+1}(2\ 6)^{2\cdot1011+1}(4\ 7\ 9\ 8)^{4\cdot505+3} = (1\ 5\ 3)^1(2\ 6)^1(4\ 7\ 9\ 8)^3\\ &= (1\ 5\ 3)(2\ 6)(4\ 8\ 9\ 7).\end{aligned}$$

(d) Mivel σ_4 nem diszjunkt ciklusok szorzata, ezért előbb felírjuk diszjunkt ciklusok szorzataként (elvégezve a megadott ciklusok szorzását): $\sigma_4 = (1\,5\,3\,8)(2\,6\,3\,7) = (1\,5\,3\,7\,2\,6\,8)$. A σ_4 megadható egy 7 hosszúságú ciklussal, ezért a rendje 7. Végül

$$\sigma_4^{2023} = (1\ 5\ 3\ 7\ 2\ 6\ 8)^{2023} = (1\ 5\ 3\ 7\ 2\ 6\ 8)^{7\cdot289} = e^{289} = e.$$

(e) Mivel σ_5 nem diszjunkt ciklusok szorzata, ezért előbb felírjuk diszjunkt ciklusok szorzataként (elvégezve a megadott ciklusok szorzását): $\sigma_5 = (1\ 2\ 5)(6\ 5) = (1\ 2\ 5\ 6)$. A σ_5 megadható egy 4 hosszúságú ciklussal, ezért a rendje 4. Végül

$$\sigma_5^{2023} = (1\ 2\ 5\ 6)^{2023} = (1\ 2\ 5\ 6)^{4\cdot505+3} = (1\ 2\ 5\ 6)^3 = (1\ 6\ 5\ 2).$$

(f) Mivel σ_6 nem diszjunkt ciklusok szorzata, ezért előbb felírjuk diszjunkt ciklusok szorzataként (elvégezve a megadott ciklusok szorzását): $\sigma_6 = (1\ 3\ 2)(2\ 4\ 3) = (1\ 3)(2\ 4)$. A σ_6 megadható két darab 2 hosszúságú diszjunkt ciklusok szorzataként, ezért a rendje $\mathrm{lkkt}(2,2) = 2$. Végül

$$\sigma_6^{2023} = \sigma_6^{2\cdot1011+1} = \sigma_6 = (1\ 3)(2\ 4).$$

□

10. Írjuk fel a következő permutációkat transzpozíciók szorzataként, két különböző módon:

(a) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Megoldás. A permutációkat felírjuk ciklusok szorzataként, majd a ciklusokat átírjuk transzpozíciók szorzatára és az eredményt permutációként.

(a) A $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ permutáció felírható mint $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 8)(7) = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 8)$ ciklusok szorzataként. A szorzatot alkotó ciklusokat átírjuk transzpozíciók szorzatára: $(1\ 2\ 3) = (2\ 3)(1\ 3)$ és $(4\ 5\ 6\ 8) = (6\ 8)(5\ 8)(4\ 8)$, így

$$(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 8) = (2\ 3)(1\ 3)(6\ 8)(5\ 8)(4\ 8).$$

Ez alapján a σ_1 permutáció transzpozíciók szorzataként a következőképpen írható fel: $\sigma_1 = \tau_{2,3}\tau_{1,3}\tau_{6,8}\tau_{5,8}\tau_{4,8}$, ahol $\tau_{i,j} \in S_8$ transzpozíció.

A σ_1 permutáció másképpen is felírható transzpozíciók szorzatára. Ehhez a ciklusokat átírjuk egy egyenértékű alakra azáltal, hogy a ciklusok első elemét a ciklus végére visszük. Majd az így kapott ciklusokat írjuk át transzpozíciók szorzatára:

$$(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 8) = (2\ 3\ 1)(5\ 6\ 8\ 4) = (1\ 3)(1\ 2)(4\ 8)(4\ 6)(4\ 5).$$

Ez alapján a σ_1 permutáció transzpozíciók szorzataként a következőképpen írható fel: $\sigma_1 = \tau_{1,3}\tau_{1,2}\tau_{4,8}\tau_{4,6}\tau_{4,5}$, ahol $\tau_{i,j} \in S_8$ transzpozíció.

(b) A $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ permutáció a következőképpen írható fel ciklusok és transzpozíciók szorzataként:

$$(1\ 3\ 2)(4\ 8\ 7\ 6\ 5) = (2\ 3)(2\ 1)(5\ 6)(5\ 7)(5\ 8)(5\ 4),$$

ahonnan $\sigma_2 = \tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{5,6}\tau_{5,7}\tau_{5,8}\tau_{4,5}$, ahol $\tau_{i,j} \in S_8$.

A σ_2 permutáció egy másik felírása transzpozíciók szorzataként:

$$(1\ 3\ 2)(4\ 8\ 7\ 6\ 5) = (3\ 2\ 1)(8\ 7\ 6\ 5\ 4) = (1\ 2)(1\ 3)(4\ 5)(4\ 6)(4\ 7)(4\ 8),$$

ahonnan $\sigma_2 = \tau_{1,2}\tau_{1,3}\tau_{4,5}\tau_{4,6}\tau_{4,7}\tau_{4,8}$, ahol $\tau_{i,j} \in S_8$.

□

11. Írjuk fel a következő permutációkat (ciklusok szorzatát) transzpozíciók szorzataként (2 hosszú ciklusok szorzataként), két különböző módon, majd számoljuk ki a permutáció előjelét:

(a) $\sigma_1 = (1\ 3\ 4\ 2\ 5)$; (b) $\sigma_2 = (1\ 3\ 4\ 5)(2\ 8\ 7\ 6)$; (c) $\sigma_3 = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 3)$.

Megoldás.

(a) $\sigma_1 = (1\ 3\ 4\ 2\ 5) = (5\ 2)(5\ 4)(5\ 3)(5\ 1)$, ahonnan

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\sigma_1) &= \operatorname{sgn}[(5\ 2)(5\ 4)(5\ 3)(5\ 1)] = \operatorname{sgn}(5\ 2)\operatorname{sgn}(5\ 4)\operatorname{sgn}(5\ 3)\operatorname{sgn}(5\ 1)\\ &= (-1)(-1)(-1)(-1) = (-1)^4 = 1.\end{aligned}$$

A σ_1 egy másik felírása transzpozíciók szorzataként:

$$\sigma_1 = (1\ 3\ 4\ 2\ 5) = (3\ 4\ 2\ 5\ 1) = (1\ 5)(1\ 2)(1\ 4)(1\ 3).$$

(b) $\sigma_1 = (1\ 3\ 4\ 5)(2\ 8\ 7\ 6) = (5\ 4)(5\ 3)(5\ 1)(6\ 7)(6\ 8)(6\ 2)$, ahonnan

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1) = \operatorname{sgn}[(5\ 4)(5\ 3)(5\ 1)(6\ 7)(6\ 8)(6\ 2)] = (-1)^6 = 1.$$

A σ_1 egy másik felírása transzpozíciók szorzataként:

$$\sigma_1 = (1\ 3\ 4\ 5)(2\ 8\ 7\ 6) = (3\ 4\ 5\ 1)(8\ 7\ 6\ 2) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(2\ 6)(2\ 7)(2\ 8).$$

(c) A σ_3 már transzpozíciók szorzataként van megadva, így már van egy felírásunk, továbbá az előjele $\text{sgn}[(1\ 2)(2\ 3)(1\ 3)] = \text{sgn}[(1\ 2)]\text{sgn}[(2\ 3)]\text{sgn}[(1\ 3)] = (-1)^3 = -1$.
A σ_3 egy másik felírása transzpozíciók szorzataként:

$$\sigma_3 = (1\ 2)(2\ 3)(1\ 3) = (1)(2\ 3) = (2\ 3).$$

□

12. Legyen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \in \mathcal{S}_8$, ahol

$$\sigma_1 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7),$$
$$\sigma_2 = (3\ 4)(5\ 2\ 6\ 1\ 8),$$
$$\sigma_3 = (1\ 3\ 4)(2\ 3\ 5\ 7)(1\ 8\ 4\ 6),$$
$$\sigma_4 = (8\ 2\ 1\ 4\ 3)(1\ 2)(1\ 5),$$
$$\sigma_5 = (8\ 7\ 4\ 3\ 1\ 2)(5\ 6).$$

Számoljuk ki a következő permutációkat (ciklusok szorzataként): σ_1^3, $\sigma_2^2\sigma_1$, $\sigma_3\sigma_4\sigma_5$, $\sigma_3^4\sigma_4^2$ és $\sigma_5\sigma_4\sigma_3$.

Megoldás.

- A σ_1 diszjunkt ciklusok szorzata, ezért
$$\sigma_1^3 = [(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7)]^3 = (1\ 2\ 3)^3(4\ 5\ 6\ 7)^3 = (1)(2)(3)(4\ 7\ 6\ 5) = (4\ 7\ 6\ 5).$$
- A σ_2 diszjunkt ciklusok szorzata, ezért $\sigma_2^2 = [(3\ 4)(5\ 2\ 6\ 1\ 8)]^2 = (3\ 4)^2(5\ 2\ 6\ 1\ 8)^2 = (3)(4)(5\ 6\ 8\ 2\ 1) = (5\ 6\ 8\ 2\ 1)$, továbbá
$$\sigma_2^2\sigma_1 = (5\ 6\ 8\ 2\ 1)(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7) = (1)(2\ 3\ 5\ 8)(4\ 6\ 7) = (2\ 3\ 5\ 8)(4\ 6\ 7).$$
- $\sigma_3\sigma_4\sigma_5 = (1\,3\,4)(2\,3\,5\,7)(1\,8\,4\,6)(8\,2\,1\,4\,3)(1\,2)(1\,5)(8\,7\,4\,3\,1\,2)(5\,6) = (1\,6\,8\,2\,4)(3\,7\,5)$.
- Előbb felírjuk σ_3-at, illetve σ_4-et diszjunkt ciklusok szorzata, majd elvégezzük a hatványozást, végül a hatványokat összeszorozzuk:

$$\sigma_3 = (1\ 3\ 4)(2\ 3\ 5\ 7)(1\ 8\ 4\ 6) = (1\ 8)(2\ 4\ 6\ 3\ 5\ 7), \text{ ahonnan}$$
$$\sigma_3^4 = [(1\ 8)(2\ 4\ 6\ 3\ 5\ 7)]^4 = (1\ 8)^4(2\ 4\ 6\ 3\ 5\ 7)^4 = (1)(8)(2\ 5\ 6)(4\ 7\ 3) = (2\ 5\ 6)(3\ 4\ 7);$$
$$\sigma_4 = (8\ 2\ 1\ 4\ 3)(1\ 2)(1\ 5) = (1\ 5)(2\ 4\ 3\ 8), \text{ ahonnan}$$
$$\sigma_4^2 = [(1\ 5)(2\ 4\ 3\ 8)]^2 = (1)(5)(2\ 3)(4\ 8) = (2\ 3)(4\ 8);$$

Végül $\sigma_3^4\sigma_4^2 = (2\ 5\ 6)(3\ 4\ 7)(2\ 3)(4\ 8) = (2\ 4\ 8\ 7\ 3\ 5\ 6)$.
- $\sigma_5\sigma_4\sigma_3 = (8\,7\,4\,3\,1\,2)(5\,6)(8\,2\,1\,4\,3)(1\,2)(1\,5)(1\,3\,4)(2\,3\,5\,7)(1\,8\,4\,6) = (1\,8\,6\,7\,3\,2)(4\,5)$.

□

13. Egy 4×4-es négyzetrácsos táblán 15 mozaik található, amin számok szerepelnek 1-től 15-ig. A mozaikokat mozgathatjuk a táblán úgy, hogy egy mozaikot áthúzhatunk a mellette lévő (élszomszédos) üres négyzetre (például a bal oldali rajzon a 11-est lefele vagy a 8-ast jobbra húzhatjuk). Kezdő és végső állásban az üres négyzet a tábla jobb alsó négyzete. A feladat, hogy egy adott kezdő állapotból elérjük azt a végállapotot, amikor a mozaikokon a számok sorba szerepelnek, ha balról jobbra, illetve fentről lefele haladva olvassuk őket. Pl. a bal oldali állapotból jussunk el a jobb oldaliba. Mindig megtehető ez?

15	2	13	5
1	14	10	7
12	9	3	11
6	4	8	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	