15. Határozzuk meg azt a $\vec{p}$ vektort, amely merőleges az $\boxed{\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}}$ és $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ vektorokra, hossza 14 és az Oy tengellyel tompaszöget zár be!

$\vec{p}(x,y,z) = ?$

u. h. $\left\{ \begin{array}{ll} (1) & \vec{p} \perp \vec{a} \\ (2) & \vec{p} \perp \vec{b} \\ (3) & \|\vec{p}\| = 14 \\ (4) & m(\widehat{\vec{p}, Oy}) \in (90^\circ, 180^\circ) \end{array} \right.$

$\vec{a}(3,2,2)$
$\vec{b}(18,-22,-5)$

(1) $\vec{p} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 3x+2y+2z=0 \quad |\cdot 6$

(2) $\vec{p} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 18x-22y-5z=0$

$(-) \Rightarrow -34y-17z=0 \quad |:(-17)$

$2y+z=0$

$\boxed{z=-2y}$

(3) $\|\vec{p}\| = 14 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 14 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = 196$

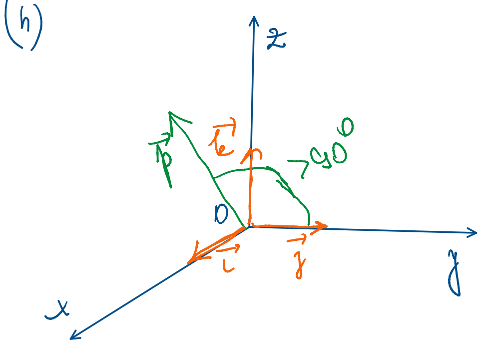
$(1)\cdot 11 + (2) \Rightarrow 51x+17z=0$

$3x+z=0$

$3x-2y=0$

$\boxed{x = \frac{2}{3}y}$

(4)



$m(\widehat{\vec{p}, Oy})$ tompaszög $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{p}, \vec{j}})$ ~

$\Leftrightarrow \vec{p}\cdot\vec{j} < 0$

$\vec{j}(0,1,0)$

$\Leftrightarrow 0\cdot x + 1\cdot y + 0z < 0 \Leftrightarrow \boxed{y<0}$ (4)

(3) $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 196 \\ z=-2y \\ x = \frac{2}{3}y \\ y<0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\frac{4}{9}+1+4\right)y^2 = 196$

$\frac{4+9+36}{9}y^2 = 196$

$\left. \begin{array}{l} y^2 = \frac{196\cdot 9}{49} \Rightarrow y = \pm\frac{14\cdot 3}{7} = \pm 6 \\ y<0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-6 \Rightarrow x = \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}(-6) = -4$

$z = -2y = 12$

$\vec{p}(-4,-6,12)$

Másképp: $\left. \begin{array}{l} \vec{p} \perp \vec{a} \\ \vec{p} \perp \vec{b} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{a}\times\vec{b}$ (mert $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}, \perp \vec{b}$)

Másképp: $\left.\begin{array}{l}\vec{p}\perp\vec{a}\\ \vec{p}\perp\vec{b}\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\vec{p}\parallel\vec{a}\times\vec{b}}$ (mert $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\perp\vec{b}$)

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 18 & -22 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(-10+44) - \vec{j}\cdot(-15-36) + \vec{k}(-66-36)$$

$$= 34\vec{i} + 51\vec{j} - 102\vec{k}$$

$$= \boxed{17}(2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k})$$

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}\,(34, 51, -102)$$

$$\Rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\| = 17\cdot\|2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}\|$$

$$= 17\cdot\sqrt{4+9+36} = 17\cdot 7$$

- $\vec{p}\parallel\vec{a}\times\vec{b} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = k\cdot(\vec{a}\times\vec{b})} \Rightarrow \|\vec{p}\| = \|k\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\| =$

$$= |k|\cdot\|\vec{a}\times\vec{b}\| =$$

$$= |k|\cdot 17\cdot 7$$

- $\|\vec{p}\| = 14 \Rightarrow$ $\|\vec{p}\| = 14$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |k|\cdot 17\cdot 7 = 14 \Rightarrow |k| = \frac{\cancel{14}\,2}{\cancel{7}\cdot 17} = \frac{2}{17}$$

$$k = \pm\frac{2}{17}.$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \pm\frac{2}{17}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \pm\frac{2}{\cancel{17}}\cancel{17}(2,3,-6) = \pm(4, 6, -12)$$

$$m(\widehat{\vec{p}, Oy}) > 90^\circ \Rightarrow y < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{p} = (-4, -6, 12)$$

34. Adottak az $\vec{a}(8,4,1)$, $\vec{b}(2,2,1)$ és $\vec{c}(1,1,1)$ vektorok. Határozzuk meg azt az egységnyi hosszúságú $\vec{d}$ vektort, amelyik az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal ugyanakkora szöget zár be, merőleges a

$\vec{c}$ vektorra, valamint az $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ és $\{\vec{a},\vec{b},\vec{d}\}$ rendszerekről tudjuk, hogy azonos irányításúak (mindkettő jobb- vagy mindkettő balsodrású).

$\vec{d}(\ ,\ ,\ )$?

$\vec{d}\,(x, y, z) = ?$

(1) $\|\vec{d}\| = 1 \iff \boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 1}$

(2) $m(\widehat{\vec{a}, \vec{d}}) = m(\widehat{\vec{b}, \vec{d}}) \iff \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{d}}) = \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{d}}) \iff$

$\iff \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{\|\vec{a}\| \cdot \cancel{\|\vec{d}\|}} = \dfrac{\vec{b} \cdot \vec{d}}{\|\vec{b}\| \cdot \cancel{\|\vec{d}\|}} \iff$

$\vec{a}\,(8, 4, 1) \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{64 + 16 + 1} = 9$

$\vec{b}\,(2, 2, 1) \Rightarrow \|\vec{b}\| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$

$\iff \dfrac{8x + 4y + z}{\cancel{9}\ 3} = \dfrac{2x + 2y + z}{\cancel{3}}$

$\iff 8x + 4y + z = 6x + 6y + 3z$

$\iff 2x - 2y - 2z = 0 \;/ : 2$

$\iff \boxed{x - y - z = 0}$ (2)

(3) $\vec{d} \perp \vec{c} \iff \vec{d} \cdot \vec{c} = 0 \iff \boxed{x + y + z = 0}$ (3).

$\vec{c}\,(1, 1, 1)$

$\vec{d}\,(x, y, z)$

$\left.\begin{array}{l} (2) \\ (3) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} x = 0$

$y + z = 0$

$y = -z$

$\Rightarrow \vec{d}\,(0, -z, z) \Rightarrow$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} 0^2 + (-z)^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 2z^2 = 1 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ és $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ rendszerekről tudjuk, hogy azonos irányításúak

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ jobbsodrású $\iff (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$

balsodr. $\iff (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \overset{\text{ért.}}{=} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{16} + 4 + \cancel{2} - \cancel{2} - \cancel{8} - 8 = 4 > 0$

$\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ jobbsodr. $\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ is jobbsodr.

$\Rightarrow \{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ jobbsodr. $\Rightarrow \{\vec{a},\vec{b},\vec{d}\}$ is jobbsodr.

$$\Rightarrow (\vec{a},\vec{b},\vec{d})>0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -z & z \end{vmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow 16z - 2z + \cancel{8z} - 8z = 14z > 0 \Rightarrow z>0$$

$$\left.\begin{matrix} z>0 \\ z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \vec{d}\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Síkok egyenletei

①
$$\left.\begin{matrix} \alpha \parallel \vec{d_1}(p_1, q_1, r_1) \\ \alpha \parallel \vec{d_2}(p_2, q_2, r_2) \quad (\vec{d_1} \nparallel \vec{d_2}) \\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

a sík *algebrai* vagy *kanonikus egyenlete*:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.}$$

② $M_1, M_2, M_3 \in \alpha \Rightarrow$
$$\alpha: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

③ a sík általános egyenlete: $Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét ~~különböző formákban~~, amely átmegy az $A(2,3,1)$, $B(-4,2,-5)$, $C(0,1,0)$ pontokon. E: $-11x+6y+10z-6=0$.

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 2-0 & 3-1 & 1-0 \\ -4-0 & 2-1 & -5-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(ABC): \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(ABC): \; x\cdot(-11) - (y-1)(-6) + z\cdot 10 = 0$$

$$(ABC): \; -11x + 6y + 10z - 6 = 0$$

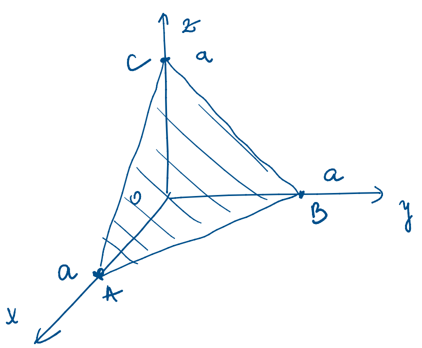
2. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $M_0(1,-2,3)$ ponton és párhuzamos a $\vec{v}_1(1,-1,0)$, $\vec{v}_2(-3,2,4)$ vektorokkal. E: $4x+4y+z+1=0$.

$\alpha \parallel \vec{v}, \quad \alpha \parallel \vec{v}_2, \quad M_0 \in \alpha \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(7,-5,2)$ ponton és a koordinátatengelyeken ugyanakkora pozitív szakaszokat határoz meg. E: $x+y+z-4=0$.



$?, \begin{cases} A(a,0,0) \\ B(0,a,0) \\ C(0,0,a), \quad a>0. \end{cases}$

$(ABC) = ?$ ú. h. $P \in (ABC)$

Sík tengelymetszetes alakja: $\underline{\dfrac{x}{a}} + \underline{\dfrac{y}{b}} + \underline{\dfrac{z}{c}} = 1$

$A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$

$\Rightarrow (ABC): \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{a} = 1 \;\Big|\cdot a$

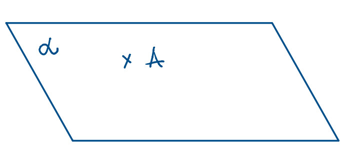
$(ABC): x+y+z=a$

$P(7,-5,2) \in (ABC)$ $\Rightarrow$ $7-5+2=a$ $\Rightarrow$ $a=4$

$\Rightarrow (ABC): x+y+z=4$

5. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A(2,-1,3)$ ponton és párhuzamos a $2x+4y-z+5=0$ síkkal. E: $2x+4y-z+3=0$.

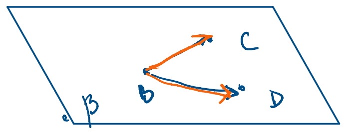
$\alpha = ?$, ú. h. $A(2,-1,3) \in \alpha$ és $\alpha \parallel \beta$: $2x+4y-z+5=0$.



• Legyen $x=0$, $y=0$ $\overset{\beta}{\Rightarrow}$ $2\cdot 0+4\cdot 0-z+5=0$

$z=5$

$\Rightarrow B(0,0,5) \in \beta$



- $x=2$, $y=-1$, $z=5$ $\Rightarrow C(2,-1,5) \in \beta$
- $D(0,1,9) \in \beta$

$\overrightarrow{BC}(x_C - x_B,\ y_C - y_B,\ z_C - z_B) \Rightarrow \overrightarrow{BC}(2,-1,0)$

$\overrightarrow{BD}(0,1,4)$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \subset \beta \\ \beta \parallel \alpha\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC} \parallel \alpha,\ \overrightarrow{BD} \parallel \alpha \\ A(2,-1,3) \in \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\alpha: (x-2)(-4) - (y+1)8 + (z-3)2 = 0$

$\alpha: -4x - 8y + 2z \cancel{+8} \cancel{-8} - 6 = 0 \ |:(-2)$

$\boxed{\alpha:\ 2x + 4y - z + 3 = 0}$