5. szeminárium

Thursday, March 25, 2021 10:57 AM

SIKOK EGYENLETEI

I. Egy pont és két nem párhuzamos irány által meghatározott sík egyenlete. Tekintjük az $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ rögzített pontot és a $\vec{d}_1(p_1, q_1, r_1)$, $\vec{d}_2(p_2, q_2, r_2) \in \mathcal{V}$ egymással nem párhuzamos vektorokat. Az M_0 ponton áthaladó, $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ vektorokkal párhuzamos sík egyenletei:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.}$$

II. Három nem kollineáris pont által meghatározott sík egyenlete. Legyen $\mathcal{R} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ egy affin koordináta-rendszer és $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3) \in \mathcal{S}$ három nem kollineáris pont.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0}.$$

1. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét különböző formákban, amely átmegy az $A(2,3,1)$, $B(-4,2,-5)$, $C(0,1,0)$ pontokon. E: $-11x + 6y + 10z - 6 = 0$.

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -4-2 & 2-3 & -5-1 \\ 0-2 & 1-3 & 0-1 \end{vmatrix} = 0$$

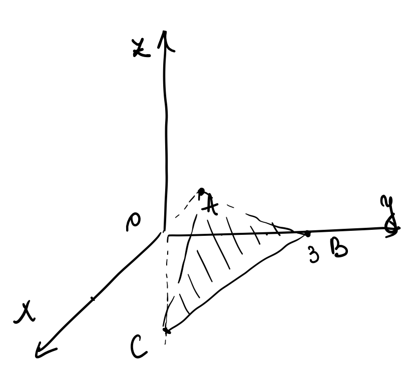
$$(ABC): \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -6 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(ABC): $(x-2)\cdot(-11) \overset{!}{-} (y-3)\cdot(-6) + (z-1)\, 10 = 0$

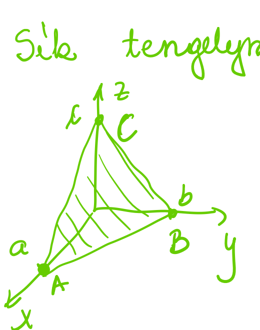
(ABC): $-11x + 22 + 6y - 18 + 10z - 10 = 0$

(ABC): $-11x + 6y + 10z - 6 = 0$

3. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely az Ox, Oy, Oz koordinátatengelyeket az A, B, C pontokban metszi, ahol $A(-1,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,-2)$. E:



Sík tengelymetszetes alakja:



$A(a,0,0)$
$B(0,b,0)$
$C(0,0,c)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$

$\Rightarrow (ABC): \frac{x}{-1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1 \; / \cdot(-6)$

(ABC): $6x - 2y + 3z + 6 = 0$

2. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $M_0(1,-2,3)$ ponton és párhuzamos a $\vec{v}_1(1,-1,0)$, $\vec{v}_2(-3,2,4)$ vektorokkal. E: $4x + 4y + z + 1 = 0$.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.}$$

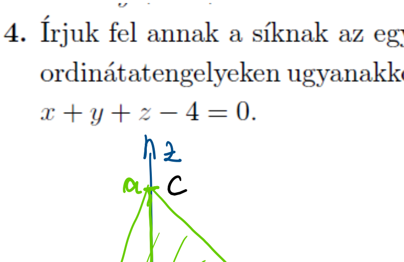
$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

α: $(x-1)\cdot(-4) - (y+2)\cdot 4 + (z-3)\cdot(-1) = 0$

α: $-4x + 4 - 4y - 8 - z + 3 = 0$

α: $+4x + 4y + z + 1 = 0$

4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(7,-5,2)$ ponton és a koordinátatengelyeken ugyanakkora pozitív szakaszokat határoz meg. E: $x + y + z - 4 = 0$.



$a > 0$.

$(ABC) = \alpha$: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1. \; / \cdot a$

α: $x + y + z = a$?
$P(7,-5,2) \in \alpha$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 7 - 5 + 2 = a \Rightarrow a = 4$

$\Rightarrow \alpha: x + y + z - 4 = 0$

5. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy az $A(2,-1,3)$ ponton és párhuzamos a $2x + 4y - z + 5 = 0$ síkkal. E: $2x + 4y - z + 3 = 0$.

$\beta: 2x + 4y - z + 5 = 0$

$\alpha = ?$ ú.h. $\alpha \parallel \beta$ és $A \in \alpha$.

$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$ két metsző egyenesével

$\Leftrightarrow (\alpha \parallel MN, \; \alpha \parallel MP)$

$\Leftrightarrow (\alpha \parallel \overrightarrow{MN}, \; \alpha \parallel \overrightarrow{MP})$

$\overrightarrow{MN} = ?$, $\overrightarrow{MP} = ?$

$\beta: 2x + 4y - z + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} M(0,0,5) \in \beta \\ N(-1,-1,-1) \in \beta \\ P(-2,0,1) \in \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}(-1,-1,-6) \\ \overrightarrow{MP}(-2,0,-4) \end{cases}$

$(\overrightarrow{MN} \nparallel \overrightarrow{MP}$, M, N, P nem koll.$)$

$\boxed{\begin{matrix} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \end{matrix} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$

Tehát az α síkot meghatározza: $\begin{cases} * \; A(2,-1,3) \\ * \; \overrightarrow{MN}(-1,-1,-6) \parallel \alpha \\ * \; \overrightarrow{MP}(-2,0,-4) \parallel \alpha. \end{cases}$

$$\Rightarrow \alpha: \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

α: $(x-2)\cdot 4 \overset{!}{-} (y+1)\cdot(-8) + (z-3)\cdot(-2) = 0$

α: $4x - \cancel{8} + 8y + \cancel{8} - 2z + 6 = 0 \; | : 2$

α: $2x + 4y - z + 3 = 0$

Adva volt: $\beta: 2x + 4y - z + 5 = 0$, $\beta \parallel \alpha$.

Megjegyzés: Két párhuzamos sík egyenlete csak a szabadtagban különbözik egymástól (eltekintve egy arányossági tényezőtől).

$\begin{matrix} \beta: 2x + 4y - z + 5 = 0 \\ \alpha \parallel \beta \end{matrix} \Big/ \Rightarrow \alpha: 2x + 4y - z + \boxed{D} = 0$, $A(2,-1,3) \in \alpha \Rightarrow \cancel{4} - \cancel{4} - 3 + D = 0$, $D = 3$

Egyenesek egyenletei

① $\begin{matrix} M_0(x_0, y_0, z_0) \in d. \\ d \parallel \vec{d}(p, q, r) \end{matrix} \Rightarrow \boxed{d: \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}}$

az egyenes kanonikus alakja

$\vec{d}(p, q, r)$ a d egyenes irányvektora

② $\begin{matrix} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \end{matrix} \Rightarrow \boxed{M_1M_2: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$

③ Egyenes általános egyenlete:

$$\boxed{d: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ahol } \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2}$$

6. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $M_0(1,2,-1)$ ponton és

(a) az $M(3,4,0)$ ponton;
(b) párhuzamos a $\vec{d}(2,-1,5)$ vektorral;
(c) merőleges a $2x - y + 3z - 10 = 0$ síkra;
(d) párhuzamos az $e: \begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$ egyenessel;
(e) párhuzamos az Ox tengellyel.

(a)

$\boxed{M_1M_2: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$

$M_0(1,2,-1)$, $M(3,4,0) \Rightarrow M_0M: \frac{x-3}{1-3} = \frac{y-4}{2-4} = \frac{z-0}{-1-0}$

$M_0M: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{-1} \; / \cdot(-1)$

$M_0M: \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{1}$ ✓

$\Downarrow$

$M_0M: \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z+1}{0+1}$

$M_0M: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ ✓

b)

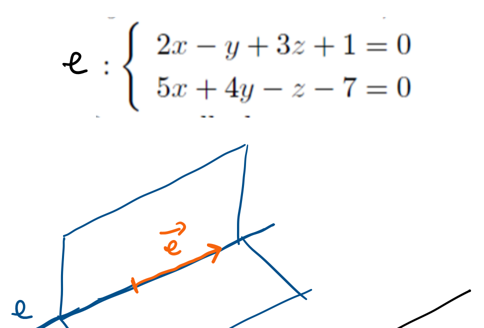
$\boxed{d: \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}}$

$\begin{matrix} M_0(1,2,-1) \in d \\ d \parallel \vec{d}(2,-1,5) \end{matrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$

d) $d = ?$ ú.h. $d \parallel e$, $M_0(1,2,-1) \in d$

$e: \begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$



$\left.\begin{matrix} d \parallel e \\ e \parallel \vec{e} \; (\vec{e} \text{ az e egyenes irányvektora}) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow d \parallel \vec{e}$

Írjuk át kanonikus alakba az e egyenletét!

$e: \begin{cases} 2x - y + 3z + 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = t \\ -y + 3z = -2t - 1 \\ 4y - z = -5t + 7 \; | \cdot 3 \end{cases} \oplus$

$11y = -17t + 20$

$y = -\frac{17}{11}t + \frac{20}{11}$

$\Rightarrow \frac{17}{11}t - \frac{20}{11} + 3z = -2t - 1$

$3z = \left(-2 - \frac{17}{11}\right)t - 1 + \frac{20}{11}$

$3z = -\frac{39}{11}t + \frac{9}{11} \; | : 3$

$z = -\frac{13}{11}t + \frac{3}{11}$

$\Rightarrow e: \begin{cases} x = \boxed{t} \\ y = -\frac{17}{11}t + \frac{20}{11} \\ z = -\frac{13}{11}t + \frac{3}{11}, \; t \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow$ e egyenes paraméteres egyenletei

Legyen: $e: \begin{cases} x = \boxed{11 \cdot t} \\ y = -17t + 20/11 \\ z = -13t + 3/11, \; t \in \mathbb{R} \end{cases}$

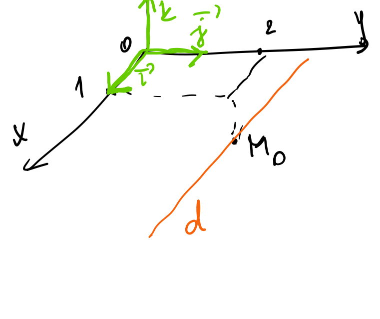
$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{11} \\ t = \frac{y - \frac{20}{11}}{-17} \\ t = \frac{z - \frac{3}{11}}{-13} \end{cases} \Rightarrow \boxed{e: \frac{x}{11} = \frac{y - \frac{20}{11}}{-17} = \frac{z - \frac{3}{11}}{-13}}$

e egyenes kanonikus egyenlete

$\Rightarrow \vec{e}(11, -17, -13)$ - az e egyenes irányvektora

$M\left(0, \frac{20}{11}, \frac{3}{11}\right) \in e$.

e) $d = ?$ ú.h. $\begin{cases} M_0(1,2,-1) \in d \\ Ox \parallel d \end{cases}$



• Ox irányvektora $\rightarrow \vec{i}(1,0,0)$
Oy — " — $\rightarrow \vec{j}(0,1,0)$
Oz — " — $\rightarrow \vec{k}(0,0,1)$

$\Rightarrow d \parallel Ox \Rightarrow d \parallel \vec{i}(1,0,0)$

$\Rightarrow d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d: \begin{cases} y - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow d: \begin{cases} y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

514 / 372: 7, 9, 11, 17.