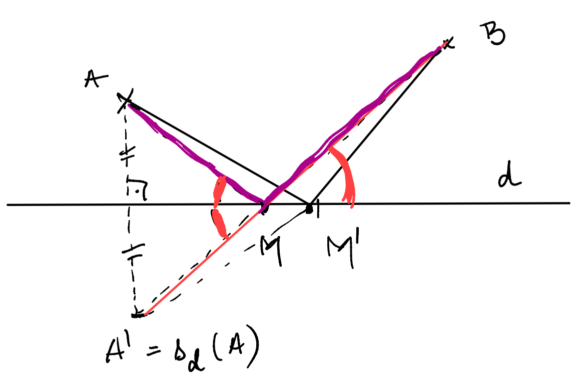
14. szeminarium

Wednesday, January 12, 2022 11:12 AM

1. Legyen d egy egyenes és legyen A, B két pont a d egyenes ugyanazon az oldalán. Határozzuk meg az M helyzetét a d egyenesen úgy, hogy az $AM + MB$ összeg minimális legyen!



$M \in d$? ú.h. $AM + MB$ minim.

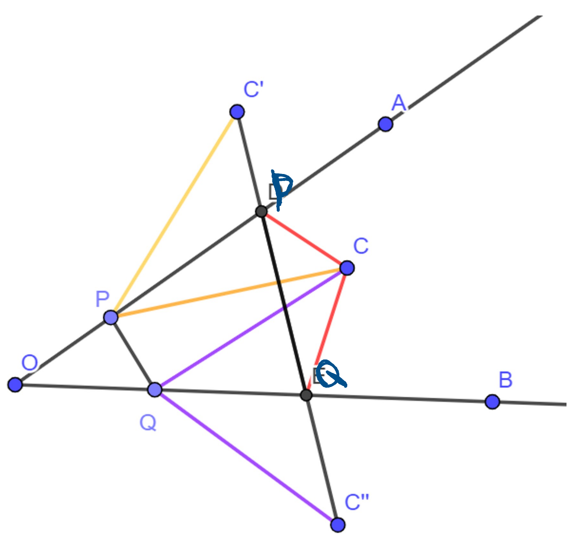
$A' = s_d(A) \Rightarrow MA = MA'$

$AM + MB = MA' + MB$ minim. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $M \in A'B$, de $M \in d$ $\Big| \Rightarrow \{M\} = A'B \cap d$

- fény is a minimális úton
- biliárdgolyó

2. Legyen C egy pont AOB szög belsejében. Határozzuk meg a $P \in (OA$ és $Q \in (OB$ pontok helyzetét úgy, hogy a CPQ háromszög kerülete minimális legyen!



$C' = s_{OA}(C) \Rightarrow CP = C'P$

$C'' = s_{OB}(C) \Rightarrow CQ = C''Q$

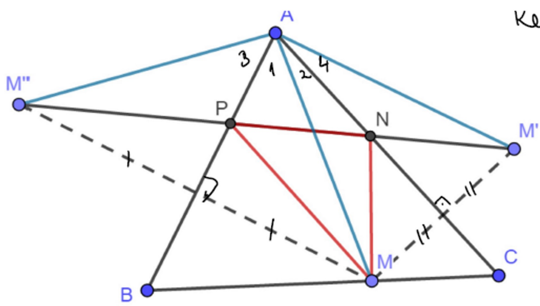
$\Rightarrow Ker = CP + PQ + QC =$

$= C'P + PQ + QC''$ minimum, ha C', P, Q, C'' kollin.

$\Leftrightarrow$ $P, Q \in CC''$, de $P \in (OA$, $Q \in (OB$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \{P\} = C'C'' \cap (OA$, $\{Q\} = C'C'' \cap (OB$

3. Az ABC hegyesszögű háromszögbe írjunk be egy minimális kerületű háromszöget!



Kezdetben legyen $M \in BC$, egy rögzített pont. $\Rightarrow$ az N és P pontokat ú. legyük, h. (2. fel.) az $M'M''$ egyenest metssze az AB, AC oldalakkal ahol $M' = s_{AC}(M)$, $M'' = s_{AB}(M)$.

$\Rightarrow$ $Ker(MNP_\triangle) = MP + PN + NM = M'M''$

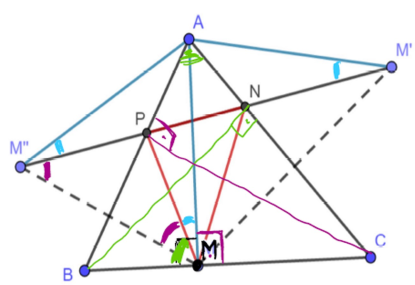
$M' = s_{AC}(M)$, $M'' = s_{AB}(M) \Rightarrow AM'' = AM = AM'$

$AMM''_\triangle$, $AMM'_\triangle$ egyenlő szárú $\triangle$, ahol AB ill. AC old-felező merőleges

$\Rightarrow$ AB ill. AC szögfelező is $\Rightarrow \hat{A}_1 \equiv \hat{A}_3$, $\hat{A}_2 \equiv \hat{A}_4 \Rightarrow m(\widehat{M'AM''}) = 2m(\widehat{BAC}) =$ áll.

Tehát az $M \in (BC)$ bármilyen pozíciójára az $AM'M''_\triangle$ egy. szárú és az A csúcsnál mért szöge állandó. Ekkor az $AM'M''_\triangle$ alapja, az $M'M''$ szakasz hossza (ami épp a kerület) akkor lesz a legkisebb, amikor az $AM'' = AM'$ szárak hossza a legkisebb. De $AM = AM' = AM''$ $\Rightarrow$ [AM] hossza a legrövidebb kell legyen $\Rightarrow$ [AM] magassága kell legyen az $ABC_\triangle$-nek.

Tehát az M pont az A-ból húzott magasság talppontja kell legyen.



- Ig. hogy az N és P pontok is a B illetve C pontokhoz tartozó magasságok talppontjai!

$AM'M''_\triangle$ egy. szárú $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{AM''M'}) = \dfrac{180° - m(\widehat{M'AM''})}{2} = 90° - m(\widehat{BAC})$

$m(\widehat{AMP}) = m(\widehat{AM''M'}) = 90° - m(\widehat{BAC})$

de $m(\widehat{AMP}) + m(\widehat{PMB}) = 90°$

$\Rightarrow m(\widehat{PMB}) = m(\widehat{BAC}) \Rightarrow$

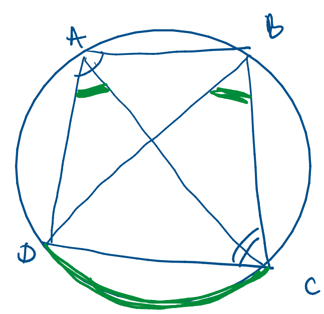
$\Rightarrow$ $APMC_\square$ körbeírható $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{APC} \equiv \widehat{AMC}$

Tul. $AM \perp MC$

$\Rightarrow AP \perp PC$

$\Rightarrow$ AP magasság



Tul: ABCD körbeírható $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{DBC}$

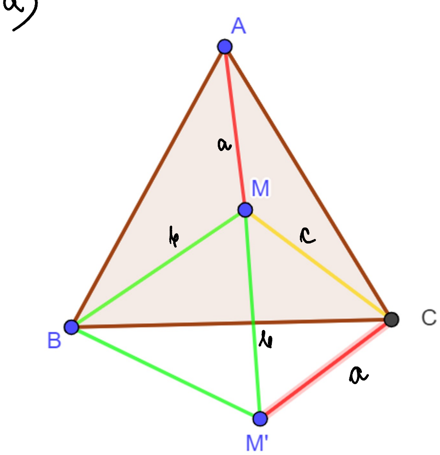
Tehát az ABC_Δ-be írható legkisebb kerületű háromszög nem más, mint az ABC_Δ talpponti háromszöge!

11. Legyen ABC egy egyenlő oldalú háromszög és M egy tetszőleges pont a síkban.

a) Igazoljuk, hogy ha az M pont nincs rajta az ABC háromszög köré írt körön, akkor az MA, MB, MC szakaszokkal egy háromszöget lehet alkotni!

b) Mi történik, ha ha az M pont rajta van az ABC háromszög köré írt körön? Ebben az esetben milyen kapcsolat van a háromszög oldalai között?

a)



Legyen $M' = r_{B,-60^\circ}(M)$

$\Rightarrow BM = BM'$
$m(\widehat{MBM'}) = 60^\circ$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow BMM'_\Delta$ egy. oldalú

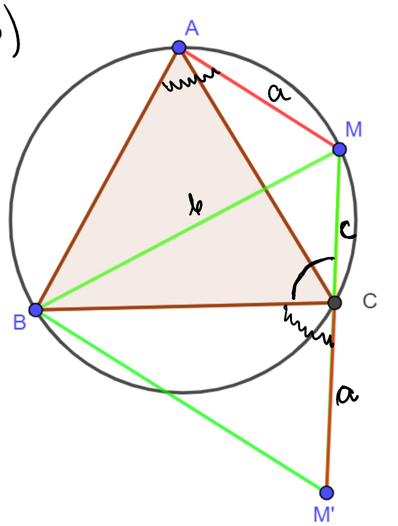
$\Rightarrow \underline{BM = MM'} = b$

Mivel $C = r_{B,-60^\circ}(A)$
$M' = r_{B,-60^\circ}(M)$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = CM' = a$

Tehát az $MM'C_\Delta$ oldalai: a, b, c $\Rightarrow$ a) q.e.d.

b)



$M \in \mathcal{C}(A,B,C) \overset{?}{\Longrightarrow} C \in MM'$?

$$\left.\begin{array}{l} C = r_{B,-60^\circ}(A) \\ M' = r_{B,-60^\circ}(M) \end{array}\right| \Rightarrow BAM_\triangle \equiv BCM'_\triangle$$

$$\Downarrow$$

$$\widehat{BAM} \equiv \widehat{BCM'} \quad (*)$$

de $M \in \mathcal{C}(A,B,C) \Rightarrow ABCM_\square$ körbeírható

$$\Rightarrow \underbrace{m(\widehat{BAM})}_{\substack{\| (*) \\ m(\widehat{BCM'})}} + m(\widehat{MCB}) = 180^\circ \Big/ \Rightarrow$$

$\Rightarrow C \in MM'$

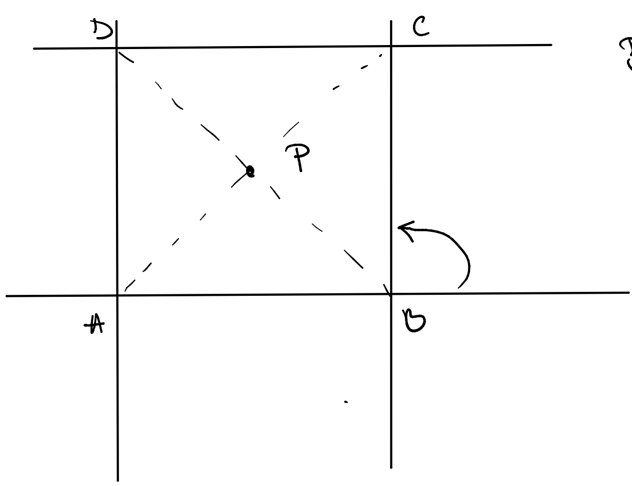
$\Rightarrow M'M = MC + CM' \iff b = c + a \quad (M \in \widehat{AC})$

ha $M \in \widehat{BC} \Rightarrow a = b + c$

$M \in \widehat{AB} \Rightarrow c = a + b$.

24. Egy négyzet egyik oldalának egyenlete $x + 3y - 5 = 0$. Határozzuk meg a négyzet többi oldalának az egyenleteit, ha tudjuk, hogy a négyzet szimmetriaközéppontja a $P(-1, 0)$ pontban található.

E: $-3x + y + 3 = 0$, $-3x + y - 9 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$.



$BC = r_{P,+90^\circ}(AB)$

$P(-1,0) \Rightarrow \vec{PO}(1,0)$

$r_{P,90^\circ} = t_{\vec{OP}} \circ r_{O,90^\circ} \circ t_{\vec{PO}}$

$t_{\vec{PO}}: \begin{cases} x' = x + 1 = x+1 \\ y' = y + 0 = y \end{cases}$

$(x' \quad (\cos 90^\circ \quad -\sin 90^\circ) \quad (x+1) \quad (-1)$

$$r_{P,90°}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x' = -y-1 \\ y' = x+1 \end{cases}}$$

$AB: x+3y-5=0$? $r_{P,90°}(AB) = BC = ?$

I. módszer: legyen $M \in AB$: $M(5,0)$
$N \in AB$: $N(-1,2)$

$$r_{P,90°}(M) = M' : \begin{cases} x_{M'} = -y_M - 1 = -1 \\ y_{M'} = x_M + 1 = 6 \end{cases}$$

$M'(-1,6)$

$$r_{P,90°}(N) = N' : \begin{cases} x_{N'} = -y_N - 1 = -3 \\ y_{N'} = x_N + 1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow N'(-3,0)$

BC egyenes = $M'N'$ egyenes : $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$6x - 2y + 18 = 0 \,|:2$

$BC: 3x - y + 9 = 0$

II. módszer: $AB: x+3y-5=0$

$$AB: \begin{cases} x = -3t+5 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

tetsz. pont AB-ről : $M(\underbrace{-3t+5}_{x}, \underbrace{t}_{y})$

$r_{P,90°}(M) = \{ M'$ $\Rightarrow$

$\varphi, 90°$

$$\boxed{\begin{cases} x' = -y-1 \\ y' = x+1 \end{cases}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M': \begin{cases} x' = -t-1 \\ y' = -3t+5+1 = -3t+6 \end{cases} \Rightarrow \quad t = -x'-1$$

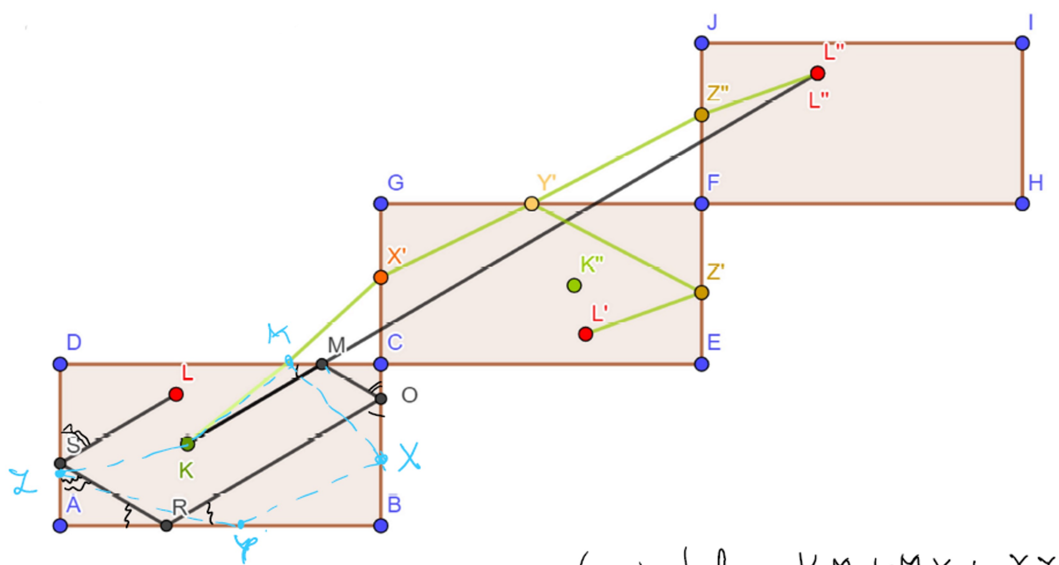
$\uparrow$ $\in BC$ tetsz. pont

$y' = -3(-x'-1)+6$

$y' = +3x'+9$

$BC:\ 3x'-y'+9=0$

4. Legyen M, N két golyó az $ABCD$ biliárdasztalon. Hogyan kell az M golyót megütni ahhoz, hogy sorra érintve az AB, BC, CD és DA falakat megüsse az N golyót!



? hol kell legyen $M \in (CD)$ u.h. $\underbrace{KM+MX+XY+YZ+ZL}_{S}$ összeg minimális legyen?

Legyen $X' = s_C(X)$, $Y' = s_C(Y)$, $Z' = s_C(Z)$, $L' = s_C(L)$ $\Rightarrow$ $MX = MX'$, $XY = X'Y'$, $ZY = Y'Z'$, $ZL = L'Z'$

Legyen $F = s_C(A)$, $Z'' = s_F(Z')$, $L'' = s_F(L')$ $\Rightarrow$ $Y'Z' = Y'Z''$, $L'Z' = L''Z''$

$\Rightarrow \mathcal{S} = KM + MX' + X'Y' + Y'Z'' + Z''L''$ minimum, ha a pontok mind kollineárisak $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{\{M\} = LL'' \cap CD}}$

További 2 feladat: 7 Feladatlap / 24, 26 $\rightarrow$ lásd előadás