LINEÁRIS ALGEBRA

Lineáris függőség és függetlenség

1. Bizonyítsuk be, hogy a $v_1, v_2, v_3 \in_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ vektorok lineárisan függőek (fejezzük ki az egyiket a többiek segítségével), illetve igazoljuk, hogy v_1, v_2 vektorok lineárisan függetlenek az alábbi esetekben

(a) $v_1 = (1, 1, 4)$, $v_2 = (-1, 3, 2)$, $v_3 = (0, 2, 3)$;

Megoldás. A $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben pontosan, akkor ha a $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ skalárokra $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0}$, akkor $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

$$\begin{aligned} & k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & k_1(1, 1, 4) + k_2(-1, 3, 2) + k_3(0, 2, 3) = (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow\ & (k_1 - k_2, k_1 + 3k_2 + 2k_3, 4k_1 + 2k_2 + 3k_3) = (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} k_1 - k_2 = 0 \\ k_1 + 3k_2 + 2k_3 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenletrendszer első egyenletéből kifejezve k_1-et ($k_1 = k_2$) és behelyettesítve a másik két egyenletbe kapjuk, hogy $\begin{cases} 4k_2 + 2k_3 = 0 \\ 6k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$. Innen adódik, hogy $k_3 = -2k_2$. Tehát a fenti egyenletrendszer megoldásai $k_1 = \alpha$, $k_2 = \alpha$, $k_3 = -2\alpha$, minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel például $\alpha = 1$ esetén a $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = -2$ egy nem csupa nulla megoldás, ezért a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függőek. Az $\alpha = 1$ esetén kapjuk, hogy

$$v_1 + v_2 - 2v_3 = \vec{0}, \tag{1.1}$$

ahonnan kifejezhetjük v_1-et a v_2 és v_3 segítségével: $v_1 = -v_2 + 2v_3$. (Ellenőrzésképpen, valóban $(1, 1, 4) = -(-1, 3, 2) + 2 \cdot (0, 2, 3)$.) Megjegyezzük, hogy az (1.1) összefüggésből kifejezhetük volna v_2-t vagy v_3-at is.

Végül igazoljuk, hogy a v_1, v_2 vektorok lineárisan függetlenek:

$$k_1v_1 + k_2v_2 = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ k_1(1, 1, 4) + k_2(-1, 3, 2) = (0, 0, 0) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (k_1 - 2k_2, k_1 + 3k_2, 4k_1 + 2k_2) = (0, 0, 0) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} k_1 - 2k_2 = 0 \\ k_1 + 3k_2 = 0 \\ 4k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases},$$

az egyenletrendszer első két egyenletét kivonva egymásból kapjuk, hogy $5k_2 = 0$, vagyis $k_2 = 0$; ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy $k_1 = 0$. Mivel csak a $k_1 = k_2 = 0$ esetén teljesül, hogy $k_1v_1 + k_2v_2 = \vec{0}$, ezért a v_1, v_2 vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben. □

(b) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, $v_3 = (2, 1, 2)$;

Megoldás. A $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben pontosan, akkor ha a $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ skalárokra $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0}$, akkor $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

$$\begin{aligned} & k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0} \\ \Leftrightarrow\ & k_1(1, 1, 1) + k_2(1, 2, 1) + k_3(2, 1, 2) = (0, 0, 0) \\ \Leftrightarrow\ & (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + 2k_2 + k_3, k_1 + k_2 + 2k_3) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \end{cases}.$$

Észrevehető, hogy az első és a harmadik egyenlet megegyezik. Az első két egyenletet kivonva egymásból kapjuk, hogy $k_2 = k_3$, ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe adódik, hogy $k_1 = -3k_3$. Tehát a fenti egyenletrendszer megoldásai $k_1 = -3\alpha$, $k_2 = \alpha$, $k_3 = \alpha$, minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel például $\alpha = -1$ esetén a $k_1 = 3$, $k_2 = -1$, $k_3 = -1$ egy nem csupa nulla megoldás, ezért a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függőek. Az $\alpha = -1$ esetén kapjuk, hogy

$$3v_1 - v_2 - v_3 = \vec{0},$$

ahonnan kifejezhetjük v_2-et a v_1 és v_3 segítségével: $v_2 = 3v_1 - v_3$. (Ellenőrzésképpen, valóban $(1, 2, 1) = 3 \cdot (1, 1, 1) - (2, 1, 2)$.)

Végül igazoljuk, hogy a v_1, v_2 vektorok lineárisan függetlenek:

$$k_1v_1 + k_2v_2 = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; k_1(1, 1, 1) + k_2(1, 2, 1) = (0, 0, 0) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (k_1 + k_2, k_1 + 2k_2, k_1 + k_2) = (0, 0, 0) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \end{cases},$$

az egyenletrendszer első két egyenletét kivonva egymásból kapjuk, hogy $k_2 = 0$; ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy $k_1 = 0$. Mivel csak a $k_1 = k_2 = 0$ esetén teljesül, hogy $k_1v_1 + k_2v_2 = \vec{0}$, ezért a v_1, v_2 vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben. □

(c) $v_1 = (1, -1, 4)$, $v_2 = (1, 0, 3)$, $v_3 = (-1, -2, -1)$;

Megoldás. A $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben pontosan, akkor ha a $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ skalárokra $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0}$, akkor $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow\; k_1(1, -1, 4) + k_2(1, 0, 3) + k_3(-1, -2, -1) = (0, 0, 0)$$
$$\Leftrightarrow\; (k_1 + k_2 - k_3, -k_1 - 2k_3, 4k_1 + 3k_2 - k_3) = (0, 0, 0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ -k_1 - 2k_3 = 0 \\ 4k_1 + 3k_2 - k_3 = 0 \end{cases}$$

Az utóbbi egyenletrendszer második egyenletéből kapjuk, hogy $k_1 = -2k_3$, ezt behelyettesítve a másik két egyenletbe kapjuk, hogy $\begin{cases} k_2 - 3k_3 = 0 \\ 3k_2 - 9k_3 = 0 \end{cases}$. Innen adódik, hogy $k_2 = 3k_3$. Tehát a fenti egyenletrendszer megoldásai $k_1 = -2\alpha$, $k_2 = 3\alpha$, $k_3 = \alpha$, minden $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel például $\alpha = 1$ esetén $k_1 = -2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$ egy nem csupa nulla megoldás, ezért a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függőek. Az $\alpha = 1$ esetén kapjuk, hogy

$$-2v_1 + 3v_2 + v_3 = \vec{0},$$

ahonnan kifejezhetjük v_3-at a v_1 és v_2 segítségével: $v_3 = 2v_1 - 3v_2$. (Ellenőrzésképpen, valóban $(-1, -2, -1) = 2 \cdot (1, -1, 4) - 3 \cdot (1, 0, 3)$.)

Végül igazoljuk, hogy a v_1, v_2 vektorok lineárisan függetlenek:

$$k_1v_1 + k_2v_2 = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; k_1(1, -1, 4) + k_2(1, 0, 3) = (0, 0, 0) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (k_1+k_2,-k_1,4k_1+3k_2)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} k_1+k_2=0\\ -k_1=0\\ 4k_1+3k_2=0\end{cases},$$

ahonnan kapjuk, hogy $k_1=0$; ezt visszahelyettesítve adódik, hogy $k_2=0$. Mivel csak a $k_1=k_2=0$ esetén teljesül, hogy $k_1v_1+k_2v_2=\vec{0}$, ezért a v_1, v_2 vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben. □

(d) $v_1=(2,-3,4)$, $v_2=(5,-6,4)$, $v_3=(1,0,-4)$.

Megoldás. A $v_1,v_2,v_3\in\mathbb{R}^3$ vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben pontosan, akkor ha a $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R}$ skalárokra $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=\vec{0}$, akkor $k_1=k_2=k_3=0$.

$$\begin{aligned}&k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &k_1(2,-3,4)+k_2(5,-6,4)+k_3(1,0,-4)=(0,0,0)\\ \Leftrightarrow\ &(2k_1+5k_2+k_3,-3k_1-6k_2,4k_1+4k_2-4k_3)=(0,0,0)\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}2k_1+5k_2+k_3=0\\ -3k_1-6k_2=0\\ 4k_1+4k_2-4k_3=0\end{cases}\end{aligned}$$

Az utóbbi egyenletrendszer második egyenletéből kapjuk, hogy $k_1=-2k_2$, ezt behelyettesítve a másik két egyenletbe kapjuk, hogy $\begin{cases}k_2+k_3=0\\ -4k_2-4k_3=0\end{cases}$. Innen adódik, hogy $k_3=-k_2$. Tehát a fenti egyenletrendszer megoldásai $k_1=-2\alpha$, $k_2=\alpha$, $k_3=-\alpha$, minden $\alpha\in\mathbb{R}$ esetén. Mivel például $\alpha=-1$ esetén a $k_1=2$, $k_2=-1$, $k_3=1$ egy nem csupa nulla megoldás, ezért a v_1,v_2,v_3 vektorok lineárisan függőek. Az $\alpha=-1$ esetén kapjuk, hogy

$$2v_1-v_2+v_3=\vec{0},$$

ahonnan kifejezhetjük v_2-t a v_1 és v_3 segítségével: $v_2=2v_1+v_3$. (Ellenőrzésképpen, valóban $(5,-6,4)=2\cdot(2,-3,4)+(1,0,-4)$.)

Végül igazoljuk, hogy a v_1, v_2 vektorok lineárisan függetlenek:

$$k_1v_1+k_2v_2=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ k_1(2,-3,4)+k_2(5,-6,4)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (2k_1+5k_2,-3k_1-6k_2,4k_1+4k_2)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}2k_1+5k_2=0\\ -3k_1-6k_2=0\\ 4k_1+4k_2=0\end{cases}.$$

A harmadik egyenletből kapjuk, hogy $k_1=-k_2$; ezt visszahelyettesítve adódik, hogy $\begin{cases}3k_2=0\\ -3k_2=0\end{cases}$, ahonnan $k_2=0$. Mivel csak a $k_1=k_2=0$ esetén teljesül, hogy $k_1v_1+k_2v_2=\vec{0}$, ezért a v_1, v_2 vektorok lineárisan függetlenek az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben. □

2. Igazoljuk, hogy a következő vektorok lineárisan függetlenek:

(a) $v_1=(1,0,2)$, $v_2=(-1,2,1)$, $v_3=(3,1,1)$ az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ vektortérben;

Első megoldás. A v_1,v_2,v_3 vektorok lineárisan függetlenek, ha csak a $k_1=k_2=k_3=0$ skalárok esetén teljesül, hogy $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=\vec{0}$.

$$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ k_1(1,0,2)+k_2(-1,2,1)+k_3(3,1,1)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (k_1-k_2+3k_3,\ 2k_2+k_3,\ 2k_1+k_2+k_3)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} k_1-k_2+3k_3=0\\ 2k_2+k_3=0\\ 2k_1+k_2+k_3=0\end{cases}.$$

Az utóbbi egyenletrendszer második egyenletéből $k_3=-2k_2$, amit behelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy $k_1=7k_3$. Végül ezeket a harmadik egyenletbe helyettesítve adódik, hogy $13k_3=0$, vagyis $k_3=0$ s így $k_1=k_2=0$. Tehát az egyenletrendszernek csak $k_1=k_2=k_3=0$ megoldása létezik, ezért a v_1,v_2,v_3 vektorok lineárisan függetlenek. □

Második megoldás. A v_1,v_2,v_3 vektorok lineárisan függetlenek, ha csak a $k_1=k_2=k_3=0$ skalárok esetén teljesül, hogy $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=\vec{0}$.

$$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ k_1(1,0,2)+k_2(-1,2,1)+k_3(3,1,1)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (k_1-k_2+3k_3,\ 2k_2+k_3,\ 2k_1+k_2+k_3)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} k_1-k_2+3k_3=0\\ 2k_2+k_3=0\\ 2k_1+k_2+k_3=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ha az egyenletrendszer A mátrixa invertálható, vagyis $\det A\neq 0$, akkor

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

tehát $k_1=k_2=k_3=0$, ezért a v_1,v_2,v_3 vektorok lineárisan függetlenek. Valóban,

$$\det A=\begin{vmatrix}1&-1&3\\0&2&1\\2&1&1\end{vmatrix}=-13\neq 0,$$

tehát az A mátrix invertálható, ezért a v_1,v_2,v_3 vektorok valóban lineárisan függetlenek. □

(b) $v_1=(2,-2,1)$, $v_2=(3,5,-4)$, $v_3=(1,0,7)$ az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ vektortérben;

Megoldás. A v_1,v_2,v_3 vektorok lineárisan függetlenek, ha csak a $k_1=k_2=k_3=0$ skalárok esetén teljesül, hogy $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=\vec{0}$.

$$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=\vec{0}\ \Leftrightarrow\ k_1(2,-2,1)+k_2(3,5,-4)+k_3(1,0,7)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (2k_1+3k_2+k_3,\ -2k_1+5k_2,\ k_1-4k_2+7k_3)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} 2k_1+3k_2+k_3=0\\ -2k_1+5k_2=0\\ k_1-4k_2+7k_3=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \underbrace{\begin{pmatrix}2&3&1\\-2&5&0\\1&-4&7\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Mivel az egyenletrendszer A mátrixának determinánsa

$$\det A=\begin{vmatrix}2&3&1\\-2&5&0\\1&-4&7\end{vmatrix}=70+8+0-5-0+42=115\neq 0,$$

ezért az A mátrix invertálható és a fenti egyenletet balról szorozva az A inverzével kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, ezért a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függetlenek. □

(c) $v_1 = (4, 0, -2)$, $v_2 = (3, -1, 1)$, $v_3 = (3, 6, 7)$ az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ vektortérben;

Megoldás. A v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függetlenek, ha csak a $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ skalárok esetén teljesül, hogy $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0}$.

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0} \iff k_1(4, 0, -2) + k_2(3, -1, 1) + k_3(3, 6, 7) = (0, 0, 0) \iff$$
$$\iff (4k_1 + 3k_2 + 3k_3,\ -k_2 + 6k_3,\ -2k_1 + k_2 + 7k_3) = (0, 0, 0) \iff$$
$$\iff \begin{cases} 4k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 0 \\ -k_2 + 6k_3 = 0 \\ -2k_1 + k_2 + 7k_3 = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az egyenletrendszer A mátrixának determinánsa

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -94 \neq 0,$$

ezért az A mátrix invertálható és a fenti egyenletet balról szorozva az A inverzével kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Tehát $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, ezért a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függetlenek. □

(d) $v_1 = (2, -1, 6)$, $v_2 = (0, 5, -4)$, $v_3 = (1, -2, 3)$ az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ vektortérben;

Megoldás. A v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függetlenek, ha csak a $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ skalárok esetén teljesül, hogy $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0}$.

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0} \iff k_1(2, -1, 6) + k_2(0, 5, -4) + k_3(1, -2, 3) = (0, 0, 0) \iff$$
$$\iff (2k_1 + k_3,\ -k_1 + 5k_2 - 2k_3,\ 6k_1 - 4k_2 + 3k_3) = (0, 0, 0) \iff$$
$$\iff \begin{cases} 2k_1 + k_3 = 0 \\ -k_1 + 5k_2 - 2k_3 = 0 \\ 6k_1 - 4k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az egyenletrendszer A mátrixának determinánsa

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 6 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 30 + 4 + 0 - 30 - 16 - 0 = -12 \neq 0,$$

ezért az A mátrix invertálható és a fenti egyenletet balról szorozva az A inverzével kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Tehát $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, ezért a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függetlenek. □

(e) $v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (2,3,4,1)$, $v_3 = (3,4,1,2)$, $v_4 = (4,1,2,3)$ az $_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ vektortérben;

Megoldás. A v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függetlenek, ha csak a $k_1, k_2, k_3, k_4 = 0$ skalárok esetén teljesül, hogy $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = \vec{0}$.

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = \vec{0} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; k_1(1,2,3,4) + k_2(2,3,4,1) + k_3(3,4,1,2) + k_4(4,1,2,3) = (0,0,0,0) \;\Leftrightarrow$$

$$(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4,\; 2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + k_4,\; 3k_1 + 4k_2 + k_3 + 2k_4,\; 4k_1 + k_2 + 2k_3 + 3k_4) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + k_4 = 0 \\ 3k_1 + 4k_2 + k_3 + 2k_4 = 0 \\ 4k_1 + k_2 + 2k_3 + 3k_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az egyenletrendszer A mátrixának determinánsa

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-36) - 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 4 - 4 \cdot (-44) = 160 \neq 0,$$

ezért az A mátrix invertálható és a fenti egyenletet balról szorozva az A inverzével kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Tehát $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, ezért a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok lineárisan függetlenek. □

3. Határozzuk meg $a \in \mathbb{R}$ paramétert úgy, hogy a $v_1, v_2, v_3 \in_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ vektorok lineárisan függetlenek legyenek, ha

(a) $v_1 = (1,a,0)$, $v_2 = (a,1,1)$, $v_3 = (1,0,a)$;

Megoldás. Legyenek $k_1, k_2, k_4 \in \mathbb{R}$ skalárok úgy, hogy

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow\; k_1(1,\, a,\, 0) + k_2(a,\, 1,\, 1) + k_3(1,\, 0,\, a) = (0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow\; (k_1 + ak_2 + k_3,\; ak_1 + k_2,\; k_2 + ak_3) = (0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} k_1 + ak_2 + k_3 = 0 \\ ak_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + ak_3 = 0 \end{cases},$$

ahonnan

$$k_2 = -ak_1,\ k_3 = -k_1 - ak_2 = (-1+a^2)k_1,\ -ak_1 + a(-1+a^2)k_1 = 0 \Leftrightarrow (a^3-2a)k_1 = 0. \tag{3.1}$$

Ha $a^3 - 2a \neq 0 \iff a(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2}) \neq 0 \iff a \neq 0$ és $a \neq \sqrt{2}$ és $a \neq -\sqrt{2}$, akkor a 3.1 összefüggések alapján $k_1 = 0$, $k_2 = (-1+a^2)k_1 = 0$, $k_2 = -ak_1 = 0$. Tehát, ha $a^3 - 2a \neq 0$, vagyis $a \neq 0$, $a \neq -\sqrt{2}$, $a \neq \sqrt{2}$, akkor a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függetlenek.

Ha $a_3 - 2a = 0$, akkor legyen $k_1 = 1$, $k_2 = -a$, $k_3 = a^2 - 1$. Ekkor

$$\begin{cases} k_1 + ak_2 + k_3 = 1 + a\cdot(-a) + (a^2-1) = 0 \\ ak_1 + k_2 = a + (-a) = 0 \\ k_2 + ak_3 = (-a) + a(a^2-1) = a^3 - 2a = 0 \end{cases},$$

ahonnan következik, hogy a $k_1 = 1$, $k_2 = -a$, $k_3 = a^2 - 1$ nem mind nulla skalárok esetén $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0}$, tehát $a = 0$ vagy $a = -\sqrt{2}$ és $a = \sqrt{2}$ esetekben a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függőek.

Megjegyzés. Azt kaptuk, hogy a v_1, v_2, v_3 vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0$.

□

(b) $v_1 = (1, a, -1)$, $v_2 = (0, a, 3)$, $v_3 = (a, 1, -1)$;

Megoldás. Legyenek $k_1, k_2, k_4 \in \mathbb{R}$ skalárok úgy, hogy

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0}$$
$$\iff k_1(1,\ a,\ -1) + k_2(0,\ a,\ 3) + k_3(a,\ 1,\ -1) = (0,0,0)$$
$$\iff (k_1 + ak_3,\ ak_1 + ak_2 + k_3,\ -k_1 + 3k_2 - k_3) = (0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} k_1 + ak_3 = 0 \\ ak_1 + ak_2 + k_3 = 0 \\ -k_1 + 3k_2 - k_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = -ak_3 \\ k_2 = \frac{k_1+k_3}{3} = \frac{1-a}{3}k_3 \\ (-a^2 + \frac{a(1-a)}{3} + 1)k_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = -ak_3 \\ k_2 = \frac{1-a}{3}k_3 \\ (4a^2 - a - 3)k_3 = 0 \end{cases}.$$

Ha $4a^2 - a - 3 \neq 0 \iff a \neq 1$ és $a \neq -\frac{3}{4}$, akkor $k_3 = 0$, $k_2 = \frac{1-a}{3}k_3 = 0$, $k_1 = -ak_3 = 0$. Tehát, ha $4a^2 - a - 3 \neq 0$, vagyis $a \neq 1$, $a \neq -\frac{3}{4}$, akkor a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függetlenek.

Ha $4a^2 - a - 3 = 0$, akkor legyen $k_3 = 3$, $k_2 = 1 - a$, $k_1 = -3a$. Ekkor

$$\begin{cases} k_1 + ak_3 = -3a + a\cdot 3 = 0 \\ ak_1 + ak_2 + k_3 = -3a^2 + a(1-a) + 3 = -4a^2 + a + 3 = 0 \\ -k_1 + 3k_2 - k_3 = 3a + 3(1-a) - 3 = 0 \end{cases}$$

ahonnan következik, hogy a $k_1 = -3a$, $k_2 = 1 - a$, $k_3 = 3$ nem mind nulla skalárok esetén $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \vec{0}$, tehát $a = 1$ és $a = -\frac{3}{4}$ esetekben a v_1, v_2, v_3 vektorok lineárisan függőek.

Megjegyzés. Azt kaptuk, hogy a v_1, v_2, v_3 vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & a & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

□

(c) $v_1 = (1, 0, -a)$, $v_2 = (2, -1, a)$, $v_3 = (a, 3, 18)$;

(d) $v_1 = (a, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 2a)$, $v_3 = (1, a, 1)$.

Bázis. Vektor felírása egy bázisban

4. Legyenek $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 2)$ és $v_3 = (1, 1, 1)$ vektorok az ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ vektortérben.

(a) Mutassuk meg, hogy $B = (v_1, v_2, v_3)$ bázis az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben;

Megoldás. A $B = (v_1, v_2, v_3)$ egy bázis az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben pontosan akkor, ha minden $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén egyértelműen léteznek $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ skalárok úgy, hogy

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = w \iff k_1(1,1,0) + k_2(-1,0,2) + k_3(1,1,1) = (w_1, w_2, w_3) \iff$$
$$\iff (k_1 - k_2 + k_3,\ k_1 + k_3,\ 2k_2 + k_3) = (w_1, w_2, w_3) \iff$$
$$\iff \begin{cases} k_1 - k_2 + k_3 = w_1 \\ k_1 + k_3 = w_2 \\ 2k_2 + k_3 = w_3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Mivel az A mátrix determinánsa

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 2 + 1 = 1 \neq 0,$$

ezért az A mátrix invertálható és

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

ami azt jelenti, hogy minden $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén a $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ skalárok egyértelműen meghatározottak a mátrix inverzének egyértelműsége miatt. Tehát a $B = (v_1, v_2, v_3)$ az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér egy bázisa. □

(b) Írjuk fel az $E = (e_1, e_2, e_3)$ kanonikus bázis vektorait a B bázisban;

Megoldás. Az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér kanonikus bázisa $E = (\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3})$. Az e_1, e_2, e_3 vektorokat fel kell írni a v_1, v_2, v_3 vektorok lineáris kombinációjaként. Tetszőleges $w = (a, b, c) \in V = \mathbb{R}^3$ vektor esetén

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = w \iff k_1(1,1,0) + k_2(-1,0,2) + k_3(1,1,1) = (a, b, c) \iff$$
$$\iff (k_1 - k_2 + k_3, k_1 + k_3, 2k_2 + k_3) = (a, b, c) \iff$$
$$\iff \begin{cases} k_1 - k_2 + k_3 = a \\ k_1 + k_3 = b \\ 2k_2 + k_3 = c \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = -2a + 3b - c \\ k_2 = -a + b \\ k_3 = 2a - 2b + c \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \ [w]_B = [(a,b,c)]_B = \begin{pmatrix} -2a+3b-c \\ -a+b \\ 2a-2b+c \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

A $w = e_1$, $w = e_2$, $w = e_3$ esetekben kapjuk, hogy a kanonikus bázisvektorok B bázisbeli koordinátái

$$[e_1]_B = [(1,0,0)]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [e_2]_B = [(0,1,0)]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad [e_3]_B = [(0,0,1)]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

(c) Írjuk fel az $u = (1,-1,2)$ vektort mindkét bázisban.

Megoldás. Az $u = (1,-1,2)$ vektor E kanonikus bázisbeli koordinátái $[u]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, mivel $u = (1,-1,2) = (1,0,0) - (0,1,0) + 2 \cdot (0,0,1) = e_1 - e_2 + 2e_3$.

Az $u = (1,-1,2)$ vektor B bázisbeli koordinátáit a (4.2) segítségével számoljuk ki ($w = u$ esetén):

$$[u]_B = [(1,-1,2)]_B = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 + 3\cdot(-1) - 2 \\ -1 + 1\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 - 2\cdot(-1) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(Ellenőrzés: $-7v_1 - 2v_2 + 6v_3 = -7\cdot(1,1,0) + (-2)\cdot(-1,0,2) + 6\cdot(1,1,1) = (1,-1,2) = u$.) □

5. Tekintsük az $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, illetve $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixokat. Bizonyítsuk be, hogy $E = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ és $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ bázisai $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$-nek és határozzuk meg $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vektor koordinátáit mindkét bázisban.

Megoldás. Legyen $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ egy tetszőleges mátrix.

$$k_1E_1 + k_2E_2 + k_3E_3 + k_4E_4 = P$$

$$\Longleftrightarrow k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} k_1 = a \\ k_2 = b \\ k_3 = c \\ k_4 = d \end{cases}.$$

Tehát minden $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix esetén egyértelműen léteznek $k_1 = a$, $k_2 = b$, $k_3 = c$, $k_4 = d$ skalárok úgy, hogy $P = k_1E_1 + k_2E_2 + k_3E_3 + k_4E_4$, ezért $E = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ valós vektortér egy bázisa.

Az $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot felírjuk az E_1, E_2, E_3, E_4 mátrixok lineáris kombinációjaként a fenti számolás alapján: $P = M$ választás esetén $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$, ahonnan $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 1$, $k_4 = 0$, így

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 + 1 \cdot E_2 + 1 \cdot E_3 + 0 \cdot E_4 \;\Leftrightarrow\; [M]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ahol $[M]_E$ az M koordinátái az E bázisban.

Hasonlóan járunk el abban az esetben is, mikor a $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$-ről akarjuk igazolni, hogy bázisa az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ valós vektortérnek. Be fogjuk látni, hogy tetszőleges $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix egyértelműen felírható az A_1, A_2, A_3, A_4 mátrixok lineáris kombinációjaként.

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4 = P \;\Leftrightarrow \tag{5.1}$$

$$\Leftrightarrow\; k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 & k_2 + k_3 + k_4 \\ k_3 + k_4 & k_1 + k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = a \\ k_2 + k_3 + k_4 = b \\ k_3 + k_4 = c \\ k_1 + k_4 = d \end{cases} \tag{5.2}$$

Belátjuk, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ valós paraméterek esetén ennek az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Ehhez átírjuk az egyenletrendszert mátrix alakba:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Mivel a rendszer Q mátrixának determinánsa

$$\det Q = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0,$$

ezért az (5.4) egyenletet balról szorozva a Q mátrix inverzével kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Ez alapján a $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ együtthatók egyértelműen meghatározottak minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén, tehát $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ egy bázisa az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ valós vektortérnek.

Az $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix B bázisbeli koordinátáinak meghatározásához az M mátrixot fel kell írni az A_1, A_2, A_3, A_4 mátrixok lineáris kombinációjaként vagyis $M = k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4$ alakban. A fenti számolás alapján ($P = M$) meg kell oldani az (5.2) rendszert $a = 2$, $b = c = 1$, $d = 0$ esetén:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2 \\ k_2 + k_3 + k_4 = 1 \\ k_3 + k_4 = 1 \\ k_1 + k_4 = 0 \end{cases}.$$

Az egyenletrendszer első egyenletéből kivonva a másodikat kapjuk, hogy $k_1 = a - b = 2 - 1 = 1$. Ezt levonva a negyedik egyenletből kapjuk, hogy $k_4 = d - a + b = 0 - 1 = -1$. A harmadik egyenletből kapjuk, hogy $k_3 = c - d + a - b = 1 - (-1) = 2$. Végül a második egyenletből kivonva a harmadikat adódik, hogy $k_2 = b - c = 0$. Ezek alapján az M koordinátái az B bázisban:

$$[M]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Ellenőrzésképpen $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Megjegyzés. Úgy is igazolhatuk volna, hogy $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ bázis, hogy megoldva az (5.2) egyenletrendszert megmutatjuk, hogy egyetlen megoldása létezik minden a, b, c, d esetén: $k_1 = a - b$, $k_2 = b - c$, $k_3 = a - b + c - d$, $k_4 = -a + b + d$. Az M mátrix B bázisbeli koordinátáihoz meghatározásához már csak be kell helyettesíteni az $a = 2$, $b = c = 1$, $d = 0$ értékeket így kapva az (5.5) koordinátákat.

□

6. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{R}[X]_2 = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok halmaza lineáris résztere az $\mathbb{R}[X]$ valós együtthatós polinomok vektorterének.

Legyenek $E_1 = 1$, $E_2 = X$, $E_3 = X^2$, illetve $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = 1 - X$, $P_3 = X + X^2$ polinomok. Bizonyítsuk be, hogy $E = (E_1, E_2, E_3)$ és $B = (P_1, P_2, P_3)$ bázisai az $(\mathbb{R}, \mathbb{R}[X]_2, +, \cdot)$ vektortérnek és határozzuk meg $Q = -2 + 3X + 7X^2$ koordinátáit mindkét bázisban.

Megoldás. Az $\mathbb{R}_2[X] \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]$, mert $\mathbb{R}_2[X] \neq \emptyset$ (pl. $X \in \mathbb{R}_2[X]$) és minden $A' = a' + b'X + c'X^2, A'' = a'' + b''X + c''X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ és minden $k', k'' \in \mathbb{R}$ skalárok esetén

$$\begin{aligned} k'A' + k''A'' &= k'(a' + b'X + c'X^2) + k''(a'' + b''X + c''X^2) \\ &= (k'a' + k''a'') + (k'b' + k''b'')X + (k'c' + k''c'')X^2 \in \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

Tetszőleges $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ polinom felírható egyértelműen az $E_1 = 1$, $E_2 = X$, $E_3 = X^2$ polinomok valós lineáris kombinációjaként,

$$P = a + bX + cX^2 = aE_1 + bE_2 + cE_3,$$

tehát $E = (E_1, E_2, E_3)$ az $\mathbb{R}_2[X]$ egy bázisa.

Hasonlóan, tetszőleges $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ polinom felírható egyértelműen az $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = 1 - X$, $P_3 = X + X^2$ polinomok valós lineáris kombinációjaként. Valóban,

$$P = k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3 \;\Leftrightarrow\; a + bX + cX^2 = k_1(1 + X + X^2) + k_2(1 - X) + k_3(X + X^2) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; a + bX + cX^2 = (k_1 + k_2) + (k_1 - k_2 + k_3)X + (k_1 + k_3)X^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = a \\ k_1 - k_2 + k_3 = b \\ k_1 + k_3 = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Mivel a rendszer determinánsa $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, ezért $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, ami alapján a $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ együtthatók egyértelműen kiszámolhatók minden $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát a $B = (P_1, P_2, P_3)$ az $\mathbb{R}_2[X]$ valós vektortér egy bázisa.

Végül a $Q = -2 + 3X + 7X^2$ koordinátái az E bázisban $[Q]_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, mivel $Q = -2E_1 + 3E_2 + 7E_3$.

A fenti számolás alapján ($P = Q$-t véve) a $Q = -2 + 3X + 7X^2$ koordinátái az B bázisban $[Q]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$. □

7. Igazoljuk, hogy $S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ a 2×2-es valós szimmetrikus mátrixok halmaza lineáris résztere az $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ vektortérnek.

Tekintsük az $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, illetve $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixokat.

Bizonyítsuk be, hogy $M = (M_1, M_2, M_3)$ és $B = (A_1, A_2, A_3)$ bázisai az $(\mathbb{R}, S, +, \cdot)$ vektortérnek és határozzuk meg $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ koordinátáit mindkét bázisban.

Megoldás. Megjegyezzük, hogy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix esetén $A = A^t$ pontosan akkor, ha $b = c$, vagyis $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ alakú.

Az $S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ a 2×2-es valós szimmetrikus mátrixok halmaza lineáris résztere az $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ vektortérnek, mert

- $S \neq \emptyset$, mivel $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$;
- minden $k, k' \in \mathbb{R}$ skalárok és minden $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix} \in S$ esetén

$$kA + k'A' = k \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + k' \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka + k'a' & kb + k'b' \\ kb + k'b' & kd + k'd' \end{pmatrix} \in S,$$

mivel $(kA + k'A')^t = kA + k'A'$.

□

Minden $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in S$ mátrix esetén

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aM_1 + bM_2 + dM_3, \tag{7.1}$$

tehát minden $A \in S$ szimmetrikus mátrix egyértelműen felírható az M_1, M_2, M_3 vektorok lineáris kombinációjaként, így $M = (M_1, M_2, M_3)$ bázisa az S valós vektortérnek.

Minden $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in S$ mátrix esetén

$$\begin{aligned} & A = k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 \qquad (7.2) \\ \iff & \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 + k_3 \\ -k_2 + k_3 & 2k_1 + k_3 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} a = k_1 + k_2 + k_3 \\ b = -k_2 + k_3 \\ d = 2k_1 + k_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 2 = 3 \neq 0$, ezért a rendszer mátrixa invertálható és

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix},$$

vagyis a mátrix inverzének egyértelműsége miatt a $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ skalárok egyértelműen meghatározottak az $a, b, d \in \mathbb{R}$ együtthatók által. Tehát $B = (A_1, A_2, A_3)$ egy bázisa az S valós vektortérnek.

Végül felírjuk a $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ mátrix koordinátáit előbb az $M = (M_1, M_2, M_3)$, majd a $B = (A_1, A_2, A_3)$ bázisban.

Ha $Q = k_1M_1 + k_2M_2 + k_3M_3$, akkor a (7.1) alapján $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, $k_3 = -3$, így a Q koordinátái az M bázisban $Q(2, 1, -3)_M$, illetve a koordinátamátrixa

$$[Q]_M = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ha $Q = k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3$, akkor a (7.2) egyenértékűségek alapján

$$\begin{cases} 2 = k_1 + k_2 + k_3 \\ 1 = -k_2 + k_3 \\ -3 = 2k_1 + k_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = k_1 + k_2 + k_3 \\ k_2 = -1 + k_3 \\ k_1 = -\frac{3+k_3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = \frac{3}{2}k_3 - \frac{5}{2} \\ k_2 = -1 + k_3 \\ k_1 = -\frac{3+k_3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = 3 \end{cases}.$$

Tehát a Q koordinátái a $B=(A_1,A_2,A_3)$ bázisban $Q(-3,2,3)_B$, illetve a koordinátamátrixa

$$[Q]_B=\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}.$$

8. Igazoljuk, hogy $B=(v_1,\dots,v_n)$ bázisa V-nek és határozzuk meg az x koordinátáit a B bázisban, ahol:

(a) $V=\mathbb{Z}_5^3$, $v_1=(\hat{2},\hat{3},\hat{1})$, $v_2=(\hat{1},\hat{2},\hat{4})$, $v_3=(\hat{0},\hat{1},\hat{1})$, $x=(\hat{4},\hat{2},\hat{1})$.

Megoldás. Minden $w=(a,b,c)\in V=\mathbb{Z}_5^3$ vektor esetén

$$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=w \;\Leftrightarrow\; k_1(\hat{2},\hat{3},\hat{1})+k_2(\hat{1},\hat{2},\hat{4})+k_3(\hat{0},\hat{1},\hat{1})=(a,b,c)\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;(\hat{2}\cdot k_1+\hat{1}\cdot k_2,\hat{3}\cdot k_1+\hat{2}\cdot k_2+\hat{1}\cdot k_3,\hat{1}\cdot k_1+\hat{4}\cdot k_2+\hat{1}\cdot k_3)=(a,b,c)\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{2}\cdot k_1+\hat{1}\cdot k_2=a\\ \hat{3}\cdot k_1+\hat{2}\cdot k_2+\hat{1}\cdot k_3=b\\ \hat{1}\cdot k_1+\hat{4}\cdot k_2+\hat{1}\cdot k_3=c\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\underbrace{\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{3}&\hat{2}&\hat{1}\\\hat{1}&\hat{4}&\hat{1}\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

Mivel az A mátrix determinánsa $\det A=\begin{vmatrix}\hat{2}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{3}&\hat{2}&\hat{1}\\\hat{1}&\hat{4}&\hat{1}\end{vmatrix}=\hat{4}+\hat{0}+\hat{1}-\hat{0}-\hat{8}-\hat{3}=-\hat{6}=\hat{4}\neq\hat{0}\in\mathbb{Z}_5$, ezért az A mátrix invertálható és balról szorozva az A inverzével egyértelműen felírható a $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}_5$ az $a,b,c\in\mathbb{Z}_5$ függvényében, pontosabban

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{3}&\hat{2}&\hat{1}\\\hat{1}&\hat{4}&\hat{1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

Ezzel beláttuk, hogy a $B=(v_1,v_2,v_3)$ egy bázisa a $V=\mathbb{Z}_5^3$ $\mathbb{Z}_5$-feletti vektortérnek.

Az $x=(\hat{4},\hat{2},\hat{1})$ vektor koordinátáinak kiszámításához meg kell oldani a fenti egyenletrendszert $(a,b,c)=(\hat{4},\hat{2},\hat{1})$ esetén vagy pedig ugyanezen értékekre el kell végezni a (8.1) bal oldalán a számításokat:

$$[x]_B=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}&\hat{0}\\\hat{3}&\hat{2}&\hat{1}\\\hat{1}&\hat{4}&\hat{1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\hat{4}\\\hat{2}\\\hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{2}&\hat{1}&\hat{4}\\\hat{2}&\hat{3}&\hat{2}\\\hat{0}&\hat{2}&\hat{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{4}\\\hat{2}\\\hat{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{4}\\\hat{1}\\\hat{3}\end{pmatrix}.$$

$\square$

(b) $V=\mathbb{R}^4$, $v_1=(2,1,3,-2)$, $v_2=(-1,1,-2,1)$, $v_3=(4,5,3,-1)$, $v_4=(1,5,-3,1)$ és $x=(1,1,1,1)$.

Megoldás. Minden $w=(a,b,c,d)\in V=\mathbb{R}^4$ vektor esetén

$$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3+k_4v_4=w\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;k_1(2,1,3,-2)+k_2(-1,1,-2,1)+k_3(4,5,3,-1)+k_4(1,5,-3,1)=(a,b,c,d)\;\Leftrightarrow$$
$$(2k_1-k_2+4k_3+k_4,k_1+k_2+5k_3+5k_4,3k_1-2k_2+3k_3-3k_4,-2k_1+k_2-k_3+k_4)=(a,b,c,d)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2k_1-k_2+4k_3+k_4=a\\k_1+k_2+5k_3+5k_4=b\\3k_1-2k_2+3k_3-3k_4=c\\-2k_1+k_2-k_3+k_4=d\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\underbrace{\begin{pmatrix}2&-1&4&1\\1&1&5&5\\3&-2&3&-3\\-2&1&-1&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}.$$

Mivel az A mátrix determinánsa $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$, ezért az A mátrix invertálható és balról szorozva az A inverzével egyértelműen felírható a $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ az $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ függvényében, pontosabban

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Ezzel beláttuk, hogy a $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ egy bázisa $V = \mathbb{R}^4$ valós vektortérnek.

Az $x = (1,1,1,1)$ vektor koordinátáinak kiszámításához meg kell oldani a fenti egyenletrendszert $(a,b,c,d) = (1,1,1,1) = x$ esetén vagy pedig ugyanezen értékekre el kell végezni a (8.2) bal oldalán a számításokat:

$$[x]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{6}{15} & \frac{9}{15} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{16}{15} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

□

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (2,3,3)$, $v_3 = (3,7,1)$ és $x = (1,1,1)$.

Megoldás. Minden $w = (a,b,c) \in V = \mathbb{R}^3$ vektor esetén

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = w \iff$$
$$\iff k_1(1,2,1) + k_2(2,3,3) + k_3(3,7,1) = (a,b,c) \iff$$
$$(k_1 + 2k_2 + 3k_3, 2k_1 + 3k_2 + 7k_3, k_1 + 3k_2 + k_3) = (a,b,c)$$
$$\iff \begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 = a \\ 2k_1 + 3k_2 + 7k_3 = b \\ k_1 + 3k_2 + k_3 = c \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Mivel az A mátrix determinánsa $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, ezért az A mátrix invertálható és balról szorozva az A inverzével egyértelműen felírható a $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ az $a, b, c \in \mathbb{R}$ függvényében, pontosabban

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

Ezzel beláttuk, hogy a $B = (v_1, v_2, v_3)$ egy bázisa a $V = \mathbb{R}^3$ valós vektortérnek.

Az $x = (1,1,1)$ vektor koordinátáinak kiszámításához meg kell oldani a fenti egyenletrendszert $(a,b,c) = (1,1,1)$ esetén vagy pedig ugyanezen értékekre el kell végezni a (8.3) bal oldalán a számításokat:

$$[x]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Résztér bázisa és dimenziója

9. Adjunk a következő lineáris részterek egy-egy bázist és határozzuk meg a dimenziójukat:

(a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x + 4y - 5z = 0\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$;

Megoldás. Az $3x + 4y - 5z = 0$ egyenletetből kapjuk, hogy $x = \frac{5z-4y}{3}$, ami alapján x főismeretlen, y, z mellékismeretlenek. Ez alapján az egyenlet megoldásai

$$(x,y,z) = \left(\frac{5\beta - 4\alpha}{3}, \alpha, \beta\right) = \alpha\left(-\frac{4}{3}, 1, 0\right) + \beta\left(\frac{5}{3}, 0, 1\right),$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek. Tehát az A lineáris résztér minden vektora (az egyenlet minden megoldásvektora) egyértelműen felírható a $v_1 = \left(-\frac{4}{3}, 1, 0\right)$ és $v_2 = \left(\frac{5}{3}, 0, 1\right)$ vektorok lineáris kombinációjaként, ezért a $B = (v_1, v_2) = \left(\left(-\frac{4}{3}, 1, 0\right), \left(\frac{5}{3}, 0, 1\right)\right)$ egy bázisa A-nak. (Megjegyezzük, hogy a $B' = (v_2, v_1)$ is bázisa az A-nak.) □

(b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - 2y + 3z = 0\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$;

Megoldás. A $2x - 2y + 3z = 0$ egyenletből kapjuk, hogy $z = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y$, ami alapján z főismeretlen és x, y pedig mellékismeretlenek. Ez alapján az egyenlet megoldásai

$$(x,y,z) = \left(\alpha, \beta, -\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta\right) = \alpha\left(1, 0, -\frac{2}{3}\right) + \beta\left(0, 1, \frac{2}{3}\right),$$

minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér B lineáris résztérének minden vektora egyértelműen felírható a $v_1 = \left(1, 0, -\frac{2}{3}\right)$ és $v_2 = \left(0, 1, \frac{2}{3}\right)$ vektorok lineáris kombinációjaként, így $(v_1, v_2) = \left(\left(1, 0, -\frac{2}{3}\right), \left(0, 1, \frac{2}{3}\right)\right)$ a B lineáris altér egy bázisa.

Megjegyzés. Ha az előbbi bázis vektorait megszorozzuk egy-egy nem nulla számmal, akkor a kapott vektorrendszer szintén bázis marad. Így felírhatjuk a B lineáris altér egy olyan bázisát, amelynek vektorai egész komponensüek: $(3v_1, 3v_2) = ((3, 0, -2), (0, 3, 2))$ is bázisa B-nek.

□

(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = z = 0\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$;

Megoldás. A C halmaz az $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldáshalmaza. Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai

$$(x,y,z) = (0, \alpha, 0) = \alpha(0, 1, 0)$$

alakúak, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Tehát a C lineáris altér minden eleme egyértelműen felírható a $v_1 = (0, 1, 0)$ vektor többszöröseként (lineáris kombinációjaként), ezért $(v_1) = ((0, 1, 0))$ a C lineáris altér egy bázisa. □

(d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y = z = 0\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.

Megoldás. A D lineáris altér az $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldáshalmaza, ahol x, z főismeretlenek és y mellékismeretlen. Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai

$$(x, y, z) = (\alpha, \alpha, 0) = \alpha(1, 1, 0)$$

alakúak, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Tehát a D lineáris altér minden eleme egyértelműen felírható a $v_1 = (1, 1, 0)$ vektor többszöröseként (lineáris kombinációjaként), ezért $(v_1) = ((1, 1, 0))$ a D lineáris altér egy bázisa. □

10. Legyen K test és $S = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n \,|\, x_1 + \ldots + x_n = 0\}$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $S \leq_K K^n$;

Megoldás. Az $S = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n \,|\, x_1 + \ldots + x_n = 0\}$ halmaz nem üres, mert $(0, \ldots, 0) \in S$, továbbá minden $k', k'' \in K$ skalárok és $w' = (x'_1, \ldots, x'_n), w'' = (x''_1, \ldots, x''_n) \in S$ vektorok esetén (vagyis $x'_1 + \cdots + x'_n = 0$ és $x''_1 + \ldots + x''_n = 0$)

$$k'w' + k''w'' = (k'x'_1 + k''x''_1, \ldots, k'x'_n + k''x''_n) \in S,$$

mert $(k'x'_1 + k''x''_1) + \cdots + (k'x'_n + k''x''_n) = k'(x'_1 + \cdots + x'_n) + k''(x''_1 + \cdots + x''_n) = k' \cdot 0 + k'' \cdot 0 = 0$. Ezek alapján az S halmaz a K^n K-vektortér egy lineáris altere. □

(b) Adjunk meg egy bázist S-ben és határozzuk meg S dimenzióját.

Megoldás. Az S lineáris altér az $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ lineáris egyenlet megoldáshalmaza. Ez az egyenlet egyenértékű az $x_1 = -x_2 - \cdots - x_n$ egyenlettel, ezért x_1 főismeretlen és $x_2, \ldots, x_n$ melléksimeretlenek. Ennek az egyenletnek a megoldásai

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (-\alpha_2 - \cdots - \alpha_n, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \\ &= \alpha_2(-1, 1, 0, \ldots, 0) + \alpha_3(-1, 0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + \alpha_n(-1, 0, \ldots, 0, 1)\end{aligned}$$

alakúak, ahol $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek. Tehát minden megoldás egyértelműen felírható a $v_1 = (-1, 1, 0, \ldots, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, $v_{n-1} = \alpha_n(-1, 0, \ldots, 0, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként, így

$$(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) = ((-1, 1, 0, \ldots, 0), (-1, 0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (-1, 0, \ldots, 0, 1))$$

egy bázisa az S lineáris altérnek (mint K-vektortérnek). □

11. Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ vektortér, adjunk egy bázist és határozzuk meg a dimenzióját. Hasonlítsuk össze a $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ vektortérrel.

Megoldás. A $(\mathbb{C}, +)$ egy Abel-féle csoport, továbbá

- minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ és $v \in \mathbb{C}$ esetén $(k_1 + k_2) \cdot v = k_1 v + k_2 v$, mert $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ és a komplex számok szorzása disztributív az összeadásra nézve;
- minden $k \in \mathbb{R}$ és $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ esetén $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$, mert $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ és a komplex számok szorzása disztributív az összeadásra nézve;
- minden $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ és $v \in \mathbb{C}$ esetén $(k_1 k_2)v = k_1(k_2 v)$, mert $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ és a komplex számok szorzása asszociatív;
- minden $v \in \mathbb{C}$ esetén $1 \cdot v = v$.

Ezek alapján $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ vektortér.

Minden $z \in \mathbb{C}$ komplex szám egyértelműen felírható $z = a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$ alakba, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Ez alapján $(1, i)$ egy bázisa az $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ vektortérnek, tehát ez a vektortér 2-dimenziós.

A $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ vektortér 1-dimenziós és (1) egy bázisa, mivel minden $z \in \mathbb{C}$ esetén $z = z \cdot 1$.

Megjegyzés. Minden n-dimenziós komplex V vektortér tekinthető valós vektortérnek is, mivel a valós számok $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ teste részteste a komplex számok $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ testének. Valóban, ha $B = (v_1, \dots, v_n)$ egy bázisa a V n-dimenziós komplex vektortérnek, akkor minden $v \in V$ vektor egyértelmű felírható $v = k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n$ alakba, ahol $k_1 = a_1 + ib_1, \dots, k_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$ skalárok. Ekkor $v = a_1 v_1 + b_1(iv_1) + \cdots + a_n v_n + b_n(iv_n)$ egyértelmű felírás, ahol $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, ezért $B' = (v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n)$ egy bázisa a V-nek, mint valós vektortérnek. Például a $\mathbb{C}^n$ komplex vektortér kanonikus bázisa

$$E = (e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)),$$

míg $\mathbb{C}^n$-nek, mint valós vektortérnek egy bázisa

$$E' = (e_1 = (1, 0, \dots, 0),\ ie_1 = (i, 0, \dots, 0),\ \dots,\ e_n = (0, \dots, 0, 1),\ ie_n = (0, \dots, 0, i)).$$

$\square$

Bázisáttérés

12. Tekintsük $\mathbb{R}^3$-nak a következő két bázisát: $B = (v_1, v_2, v_3) = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ és $B' = (v_1', v_2', v_3') = ((1, 1, 0), (-1, 0, 0), (0, 0, 1))$. Határozzuk meg a $T_{BB'}$, $T_{B'B}$ áttérési mátrixokat és a $v = (2, 0, -1)$ vektor koordinátáit mindkét bázisban.

Első megoldás. Az értelmezés szerint $T_{B'B} = [[v_1]_{B'}\ [v_2]_{B'} [v_3]_{B'}]$, vagyis a $B = (v_1, v_2, v_3)$ bázis vektorainak B' bázisbeli koordinátáit kell beírni a $T_{B'B}$ áttérési mátrix oszlopaiba. Ehhez ki kell fejezni a $w = v_i$, $i = 1, 2, 3$ vektorokat lineáris kombinációként:

$$w = k_1 v_1' + k_2 v_1' + k_3 v_3' \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (a, b, c) = k_1(1, 1, 0) + k_2(-1, 0, 0) + k_3(0, 0, 1) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (a, b, c) = (k_1 - k_2, k_1, k_3) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = k_1 - k_2 \\ b = k_1 \\ c = k_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b - a \\ c \end{pmatrix}. \tag{12.1}$$

Az $w = v_i$, $i = 1, 2, 3$ esetekben megkapjuk a B bázisvektorainak B'-beli koordinátáit:

$$[v_1]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [v_2]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [v_1]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ahonnan

$$T_{B'B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ és } \ T_{BB'} = (T_{B'B})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A $v = (2, 0, -1)$ vektor B' bázisbeli koordinátáit a $w = v$ esetben a (12.1) segítsével számolhatjuk ki:

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0-2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Ellenőrzés: $0 \cdot v'_1 + (-2) \cdot v'_2 + (-1) \cdot v'_3 = 0 \cdot (1, 1, 0) + (-2) \cdot (-1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 0, 1) = (2, 0, -1) = v$.)
Végül $v = (2, 0, -1)$ vektor B bázisbeli koordinátáit az áttérési képlet alapján számolhatjuk ki:

$$[v]_B = T_{BB'}[v]_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Ellenőrzés: $(-1) \cdot v_1 + (-3) \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 = (-1) \cdot (1, 0, 1) + (-3) \cdot (0, 1, 1) + 3 \cdot (1, 1, 1) = (2, 0, -1) = v$.)

$\square$

Második megoldás. Legyen $E = (e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér kanonikus bázisa. A megadott v_1, v_2, v_3 vektorok koordinátái könnyen felírhatók az E bázisban, így a T_{EB} áttérési mátrix is. Mivel $v_1 = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$, $v_2 = (0, 1, 1) = e_2 + e_3$, $v_3 = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3$, ezért

$$[v_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [v_2]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [v_3]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ahonnan } T_{EB} = \big([v_1]_E \ [v_2]_E \ [v_3]_E\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Észrevehetjük, hogy a v_1, v_2, v_3 vektorok komponenseit írtuk be a T_{EB} mátrix oszlopaiba). Hasonlóan felírhatjuk a $T_{EB'}$ áttérési mátrixot is. Mivel $v'_1 = e_1 + e_2$, $v'_2 = -e_1$, $v'_3 = e_3$, ezért

$$T_{EB'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A T_{EB} és $T_{EB'}$ áttérési mátrixokból kiszámolhatjuk a $T_{BB'}$ és $T_{B'B}$ áttérési mátrixokat:

$$T_{BB'} = T_{BE}T_{EB'} = (T_{EB})^{-1}T_{EB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T_{B'B} = (T_{BB'})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Végül a $v = (2, 0, -1)$ vektor B, illetve B' bázisbeli koordinátáinak kiszámolásához előbb felírjuk a kanonikus bázisbeli koordinátáit. Mivel $v = (2, 0, -1) = 2e_1 - e_3$, ezért

$$[v]_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ahonnan

$$[v]_B = T_{BE}[v]_E = (T_{EB})^{-1}[v]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$[v]_{B'} = T_{B'B}[v]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

13. Az $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}[X] \mid a_0, a_1, a_2, \}$ a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok vektorterének tekintsük a következő bázisait:

$$E = (1, X, X^2), \quad B = (1, X-a, (X-a)^2) \quad \text{és} \quad B' = (1, X-b, (X-b)^2),$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg a T_{EB}, T_{BE}, illetve $T_{BB'}$ áttérési mátrixokat.

Megoldás.

$$T_{EB} = \left([1]_E \; [X-a]_E \; [(X-a)^2]_E\right) = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{BE} = (T_{EB})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$T_{EB'} = \left([1]_E \; [X-b]_E \; [(X-b)^2]_E\right) = \begin{pmatrix} 1 & -b & b^2 \\ 0 & 1 & -2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{BB'} = T_{BE}T_{EB'} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b & b^2 \\ 0 & 1 & -2b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-b & (a-b)^2 \\ 0 & 1 & 2(a-b) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

14. Legyen $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek a következő két bázisa: $B = (v_1, v_2, v_3)$ és $B' = (v_1', v_2', v_3')$, ahol $v_1 = v_1' + v_2' + v_3'$, $v_2 = v_2' + v_3'$ és $v_3 = v_3'$. Határozzuk meg a $T_{BB'}$ és $T_{B'B}$ áttérési mátrixokat.

Megoldás. Az értelmezés szerint $T_{B'B} = \Big[[v_1]_{B'} \; [v_2]_{B'}[v_3]_{B'}\Big]$, vagyis a $B = (v_1, v_2, v_3)$ bázis vektorainak B' bázisbeli koordinátáit kell beírni a $T_{B'B}$ áttérési mátrix oszlopaiba.
Mivel $v_1 = v_1' + v_2' + v_3'$, $v_2 = v_2' + v_3'$, $v_3 = v_3'$, ezért

$$[v_1]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; [v_2]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; [v_3]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ahonnan } T_{B'B} = \Big[[v_1]_{B'} \; [v_2]_{B'} \; [v_3]_{B'}\Big] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Végül

$$T_{BB'} = (T_{B'B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

15. Legyenek a

$$B = (v_1, v_2, v_3, v_4) = ((1, 2, -1, 0), (1, -1, 1, 1), (-1, 2, 1, 1), (-1, -1, 0, 1))$$

és

$$B' = (v_1', v_2', v_3', v_4') = ((2, 1, 0, 1), (0, 1, 2, 2), (-2, 1, 1, 2), (1, 3, 1, 2))$$

listák. Igazoljuk, hogy B és B' bázisai $\mathbb{R}^4$-nek és határozzuk meg a $T_{BB'}$ áttérési mátrixot.

Megoldás. Legyen $E = (e_1, e_2, e_3, e_4) = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ az $\mathbb{R}^4$ valós vektortér kanonikus bázisa. A megadott v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok koordinátái könnyen felírhatók az E bázisban, így a T_{EB} áttérési mátrix is. Mivel

$$v_1 = (1, 2, -1, 0) = e_1 + 2e_2 - e_3, \qquad v_2 = (1, -1, 1, 1) = e_1 - e_2 + e_3 + e_4,$$
$$v_3 = (-1, 2, 1, 1) = -e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4, \qquad v_4 = (1, 3, 1, 2) = -e_1 - e_2 + e_4,$$

ezért

$$[v_1]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ [v_2]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [v_3]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ [v_4]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ahonnan

$$T_{EB} = \big([v_1]_E \ [v_2]_E \ [v_3]_E \ [v_4]_E\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Észrevehetjük, hogy a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok komponenseit írtuk be a T_{EB} mátrix oszlopaiba). Hasonlóan felírhatjuk a $T_{EB'}$ áttérési mátrixot is, beírva a v_1', v_2', v_3', v_4' koordinátáit a mátrix oszlopaiba

$$T_{EB'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A T_{EB} és $T_{EB'}$ áttérési mátrixokból kiszámolhatjuk a $T_{BB'}$ és $T_{B'B}$ áttérési mátrixokat:

$$T_{BB'} = T_{BE}T_{EB'} = (T_{EB})^{-1}T_{EB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & \frac{4}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{8}{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

16. Legyen V egy két dimenziós vektortér $\mathbb{Z}_2$ fölött. Határozzuk meg a következő halmazok számosságát: $|V|$, $|End_{\mathbb{Z}_2}(V)|$, $|Aut_{\mathbb{Z}_2}(V)|$.

Megoldás. A V egy 2-dimenziós $(\mathbb{Z}_2 = \{\hat{0}, \hat{1}\}, +, \cdot)$ test feletti vektortér, ezért minden bázisa két bázisvektorból áll. Legyen $B = (v_1, v_2)$ a V vektortér egy bázisa. Ekkor minden $v \in V$ vektor esetén egyértelműen léteznek $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_2$ skalárok úgy, hogy $v = k_1v_1 + k_2v_2$, vagyis $[v]_B = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$. Tehát a V vektortérnek pontosan annyi elemet van, mint ahány módon megválaszhatók a $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_2$ koordináták. Mindkét koordináta külön-külön $|\mathbb{Z}_2| = 2$ módon válaszható meg, így V-nek 4 eleme van. (Tulajdonképpen egy $B = (v_1, v_2)$ bázis megválasztása egy $\phi_B : V \to \mathbb{Z}_2^2$, $\phi_B(v) = (k_1, k_2)$ bijektív megfeleltetést határoz meg, így $|V| = |\mathbb{Z}_2^2| = |\mathbb{Z}_2|^2 = 2^2 = 4$.)

Megjegyezzük, hogy $End_{\mathbb{Z}_2}(V) = \{f \mid f : V \to V \text{ lineáris}\}$. Ha $B = (v_1, v_2)$ egy rögzített bázisa a V $\mathbb{Z}_2$-vektortérnek, akkor az f-et meghatározza a B bázisban felírt

$$[f]_B = \begin{bmatrix} [f(v_1)]_B & [f(v_2)]_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

mátrixa, ahol $[f(v_1)]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ és $[f(v_2)]_B = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_2$. Fordítva minden $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ mátrix meghatároz egy $f \in End_{\mathbb{Z}_2}(V)$ endomorfizmust az $[f(v)]_B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} [v]_B$ összefüggés által, vagyis $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = [f]_B$. Összegezve, $\Phi_B : End_{\mathbb{Z}_2}(V) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$, $\Phi_B(f) = [f]_B$ egy bijektív megfeleltetés, így

$$|End_{\mathbb{Z}_2}(V)| = |\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)| = |\mathbb{Z}_2|^4 = 2^4 = 16$$

($[f]_B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ mátrixban az $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_2$ együtthatókat egymástól függetlenül $|\mathbb{Z}_2| = 2$-féleképpen válaszhatjuk meg, ezért $2^4 = 16$ mátrixunk van).

Megjegyezzük, hogy $Aut_{\mathbb{Z}_2}(V) = \{f \mid f : V \to V \text{ lineáris és bijektív}\} \subset End_{\mathbb{Z}_2}(V)$. Ha B egy bázisa a V vektortérnek, akkor $\Psi_B : Aut_{\mathbb{Z}_2}(V) \to GL_2(\mathbb{Z}_2) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2) \mid \det A \neq 0\}$, $\Psi_B(f) = [f]_B$ egy bijekció, így elég meghatározni a 2×2-es $\mathbb{Z}_2$ -együtthatós invertálható mátrixok számát. Legyen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_2)$ mátrix. Megjegyezzük, hogy $\det A = ad - bc = 0$ egyenértékű azzal, hogy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vagyis az A mátrix oszlopai arányosak. Tehát az A mátrix pontosan akkor invertálható, ha az első oszlopa nem nulla (nem csupa $\hat{0}$-ból áll) és a második oszlopa nem többszöröse az első oszlopának. Ekkor az A első oszlopát $4 - 1 = 3$-féleképpen válaszhatjuk meg (a 4 lehetséges esetből levonjuk azt az esetet, mikor az első oszlop nulla), míg a második oszlopát $4 - 2 = 2$-féleképpen (a 4 lehetséges esetből levonjuk az a két esetet, mikor a második oszlop az elsőnek $\hat{0}$-szorosa, illetve $\hat{1}$-szerese), így összesen $3 \cdot 2 = 6$ invertálható mátrix van, vagyis

$$|GL_2(\mathbb{Z}_2)| = |Aut_{\mathbb{Z}_2}(V)| = 6.$$

□