# 1. Feladatlap

## Halmazok

*Halmaz karakterisztikus függvénye* Legyen $X$ egy nem üres halmaz. Az $A \subseteq X$ részhalmaz *karakterisztikus függvénye*

$$\chi_A : X \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}.$$

A karakterisztikus függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

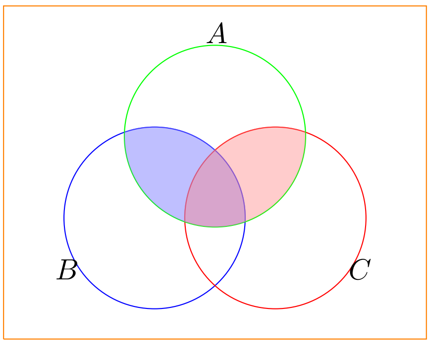
(1) $\chi_\emptyset \equiv 0$ (konstans 0 függvény) és $\chi_X \equiv 1$ (konstans 1 függvény);
(2) $\chi_A^2 = \chi_A$, minden $A \subseteq X$ részhalmaz esetén;
(3) minden $A, B \subseteq X$ esetén $A \subseteq B \iff \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$, minden $x \in X$ elemre.
(4) minden $A, B \subseteq X$ részhalmaz esetén $A = B \iff \chi_A = \chi_B$;
(5) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, minden $A, B \subseteq X$ részhalmaz esetén;
(6) $\chi_{X\setminus A} = 1 - \chi_A$, minden $A \subseteq X$ részhalmaz esetén;
(7) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A \cdot (1 - \chi_B)$, minden $A, B \subseteq X$ részhalmaz esetén;
(8) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$, minden $A, B \subseteq X$ részhalmaz esetén;
(9) $1-\chi_{A\cup B} = (1-\chi_A)\cdot(1-\chi_B)$, vagyis $\chi_{X\setminus(A\cup B)} = \chi_{X\setminus A}\cdot\chi_{X\setminus B}$ minden $A, B \subseteq X$ esetén;
(10) $|A| = \sum_{x\in X} \chi_A(x)$, minden $A \subseteq X$ esetén;
(11) bármely $A \subseteq X$ és $B \subseteq Y$ részhalmazok esetén $\chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y)$, minden $x \in X$, $y \in Y$ esetén.

*Feladatok*

**1.** Igazoljuk, hogy bármely $A$, $B$, $C$ halmazra igazak a következő egyenlőségek:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

*Megoldás.*

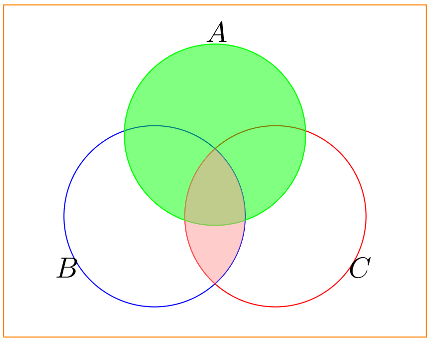



$$\begin{aligned}
\chi_{A\cap(B\cup C)} &= \chi_A \cdot \chi_{B\cup C} = \chi_A \cdot (\chi_B + \chi_C - \chi_B\chi_C) \\
&= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C, \\
\chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)} &= \chi_{A\cap B} + \chi_{A\cap C} - \chi_{A\cap B}\chi_{A\cap C} = \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_A\chi_C \\
&= \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C,
\end{aligned}$$

tehát $\chi_{A\cap(B\cup C)} = \chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}$, ezért $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. □

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

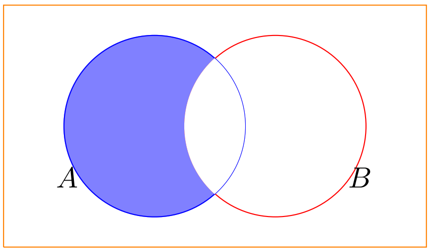
*Megoldás.*




$$\begin{aligned}
\chi_{A\cup(B\cap C)} &= \chi_A + \chi_{B\cap C} - \chi_A\chi_{B\cap C} = \chi_A + \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C,\\
\chi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)} &= \chi_{A\cup B}\chi_{A\cup C} = (\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B)(\chi_A + \chi_C - \chi_A\chi_C)\\
&= \chi_A^2 + \chi_A\chi_C - \chi_A^2\chi_C + \chi_A\chi_B + \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C - \chi_A^2\chi_B - \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C\\
&= \chi_A + \chi_A\chi_C - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B + \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C\\
&= \chi_A + \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C,
\end{aligned}$$

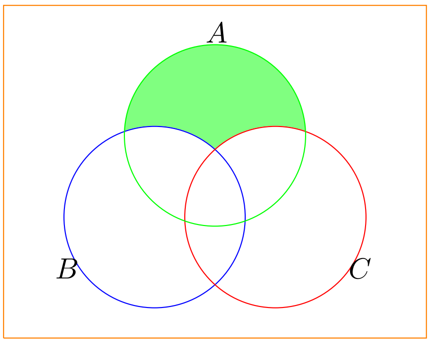
tehát $\chi_{A\cup(B\cap C)} = \chi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}$, ezért $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$. □

(c) $A\setminus B = A\cap(X\setminus B)$;




*Megoldás.* $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1-\chi_B) = \chi_A\chi_{X\setminus B} = \chi_{A\cap(X\setminus B)}$, ahonnan $\chi_{A\setminus B} = \chi_{A\cap(X\setminus B)}$, ezért $A\setminus B = A\cap(X\setminus B)$. □

(d) $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C) = (A\setminus B)\setminus C$;

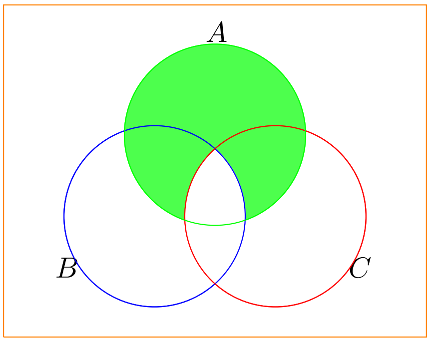



*Megoldás.*

$$\begin{aligned}
\chi_{A\setminus(B\cup C)} &= \chi_A(1-\chi_{B\cup C}) = \chi_A(1-\chi_B-\chi_C+\chi_B\chi_C) = \chi_A(1-\chi_B)(1-\chi_C),\\
\chi_{(A\setminus B)\cap(A\setminus C)} &= \chi_{A\setminus B}\chi_{A\setminus C} = \chi_A(1-\chi_B)\chi_A(1-\chi_C) = \chi_A(1-\chi_B)(1-\chi_C),\\
\chi_{(A\setminus B)\setminus C} &= \chi_{A\setminus B}(1-\chi_C) = \chi_A(1-\chi_B)(1-\chi_C),
\end{aligned}$$

ahonnan $\chi_{A\setminus(B\cup C)} = \chi_{(A\setminus B)\cap(A\setminus C)} = \chi_{(A\setminus B)\setminus C}$, ezért $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C) = (A\setminus B)\setminus C$. □

(e) $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

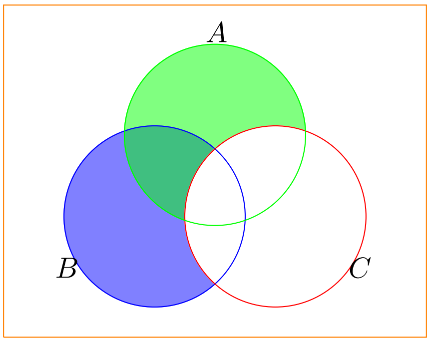



*Megoldás.*

$$\begin{aligned}
\chi_{A\setminus(B\cap C)} &= \chi_A(1-\chi_{B\cap C}) = \chi_A(1-\chi_B\chi_C) = \chi_A - \chi_A\chi_B\chi_C,\\
\chi_{(A\setminus B)\cup(A\setminus C)} &= \chi_{A\setminus B} + \chi_{A\setminus C} - \chi_{A\setminus B}\chi_{A\setminus C}\\
&= \chi_A(1-\chi_B) + \chi_A(1-\chi_C) - \chi_A(1-\chi_B)\chi_A(1-\chi_C)\\
&= \chi_A(1-\chi_B) + \chi_A(1-\chi_C) - \chi_A^2(1-\chi_B) + \chi_A^2\chi_C - \chi_A^2\chi_C\chi_B\\
&= \chi_A(1-\chi_B) + \chi_A - \chi_A\chi_C - \chi_A(1-\chi_B) + \chi_A\chi_C - \chi_A\chi_C\chi_B\\
&= \chi_A - \chi_A\chi_B\chi_C,
\end{aligned}$$

ahonnan $\chi_{A\setminus(B\cap C)} = \chi_{(A\setminus B)\cup(A\setminus C)}$ , ezért $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\setminus C)$. □

(f) $(A\cup B)\setminus C = (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$;

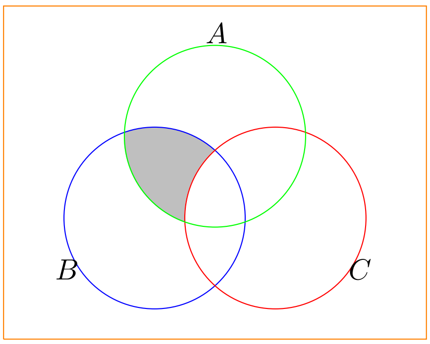



*Megoldás.*

$$\begin{aligned}
\chi_{(A\cup B)\setminus C} &= \chi_{A\cup B}(1-\chi_C) = (\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B)(1-\chi_C),\\
\chi_{(A\setminus C)\cup(B\setminus C)} &= \chi_{A\setminus C} + \chi_{B\setminus C} - \chi_{A\setminus C}\chi_{B\setminus C} = \chi_A(1-\chi_C) + \chi_B(1-\chi_C) - \chi_A(1-\chi_C)\chi_B(1-\chi_C)\\
&= \chi_A(1-\chi_C) + \chi_B(1-\chi_C) - \chi_A(1-\chi_C)\chi_B\\
&= (\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B)(1-\chi_C),
\end{aligned}$$

ahonnan $\chi_{(A\cup B)\setminus C} = \chi_{(A\setminus C)\cup(B\setminus C)}$, tehát $(A\cup B)\setminus C = (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$. □

(g) $(A\cap B)\setminus C = (A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.



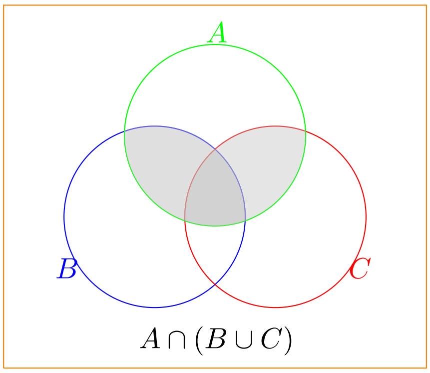
*Megoldás.*

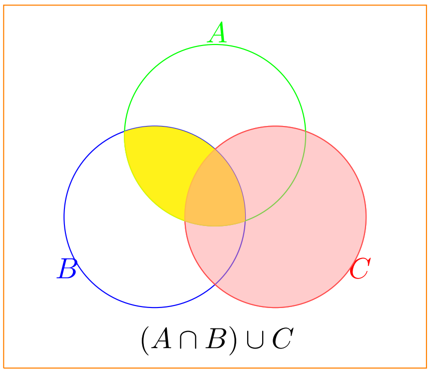
$$\begin{aligned}
\chi_{(A\cap B)\setminus C} &= \chi_{(A\cap B)}(1-\chi_C) = \chi_A\chi_B(1-\chi_C),\\
\chi_{(A\setminus C)\cap(B\setminus C)} &= \chi_{A\setminus C}\chi_{B\setminus C} = \chi_A(1-\chi_C)\chi_B(1-\chi_C) = \chi_A\chi_B(1-2\chi_C+\chi_C^2)\\
&= \chi_A\chi_B(1-2\chi_C+\chi_C) = \chi_A\chi_B(1-\chi_C),
\end{aligned}$$

ahonnan $\chi_{(A\cap B)\setminus C} = \chi_{(A\setminus C)\cap(B\setminus C)}$, tehát $(A\cap B)\setminus C = (A\setminus C)\cap(B\setminus C)$. □

**2.** Bármely $A, B, C$ halmazokra teljesül az $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup C$ egyenlőség? Ha nem teljesül, akkor adjunk ellenpéldát.

*Megoldás.* Az ábra alapján, ha $C\setminus A$ nem üres, akkor a két halmaz nem egyenlő. Például, $A=\{a,d\}$, $B=\{d,b\}$, $C=\{c,d\}$ esetén $A\cap(B\cup C) = \{a,d\}\cap(\{b,d\}\cup\{c,d\}) = \{a,d\}\cap\{b,c,d\} = \{d\}$, míg $(A\cap B)\cup C = (\{a,d\}\cap\{b,d\})\cup\{c,d\} = \{d\}\cup\{c,d\} = \{c,d\}$, tehát $A\cap(B\cup C)\neq(A\cap B)\cup C$, bármely $A, B, C$ halmazokra.




□

**3.** Igazold, hogy bármely $A, B, C$ halmazokra teljesül, hogy $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup C$.

*Megoldás.* Legyen $X$ egy halmaz, amely tartalmazza az $A, B, C$ halmazokat (például $X = A\cup B\cup C$).

$$\begin{aligned}
\chi_{A\cap(B\cup C)} &= \chi_A\chi_{B\cup C} = \chi_A(\chi_B+\chi_C-\chi_B\chi_C) = \chi_A\chi_B+\chi_A\chi_C-\chi_A\chi_B\chi_C,\\
\chi_{(A\cap B)\cup C} &= \chi_{A\cap B}+\chi_C-\chi_{A\cap B}\chi_C = \chi_A\chi_B+\chi_C-\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

Mivel a $\chi_A$ függvény csak 0 vagy 1 értékeket vesz fel, ezért $\chi_A\le 1$, ahol 1 a konstans függvény az $X$ halmazon, ezért $\chi_A\chi_C\le\chi_C$. Ekkor $\chi_A\chi_B+\chi_A\chi_C-\chi_A\chi_B\chi_C\le\chi_A\chi_B+\chi_C-\chi_A\chi_B\chi_C$, ahonnan $\chi_{A\cap(B\cup C)}\le\chi_{(A\cap B)\cup C}$, ezért $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup C$. □

**4.** Adjuk meg a $\mathcal{P}(X)$ hatványhalmazt a következő esetekben:

(a) $X=\emptyset$;
(b) $X=\{a\}$;
(c) $X=\{a,b\}$;
(d) $X=\{a,b,c\}$;
(e) $X=\{a,b,c,d\}$.

*Megoldás.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\},\\
\mathcal{P}(\{a\}) &= \{\emptyset,\{a\}\},\\
\mathcal{P}(\{a,b\}) &= \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\},\\
\mathcal{P}(\{a,b,c\}) &= \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\},\\
\mathcal{P}(\{a,b,c,d\}) &= \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\\
&\qquad \{d\},\{a,d\},\{b,d\},\{a,b,d\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}.
\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a $\mathcal{P}(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ hatványhalmaz megkapható úgy, hogy $\mathcal{P}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ halmaz elemei mellé még vesszük azokat a részhalmazokat is, amelyeket úgy kapunk, hogy a $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ összes részhalmazához hozzáadjuk az $a_n$ elemet is.
Képletben kifejezve $\mathcal{P}(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \{A, A \cup \{a_n\} \mid A \in \mathcal{P}(a_1, \ldots, a_{n-1})\}$. A fenti példákat is ezzel a módszerrel adtuk meg. □

**5.** Az $A = \{x, y\}$ és $B = \{a, b, c\}$ halmazok esetén adjuk meg az $A \times B$ és $B \times A$ halmazokat!

*Megoldás.*

$$A \times B = \{(x,a),\ (x,b),\ (x,c),\ (y,a),\ (y,b),\ (y,c)\},$$
$$B \times A = \{(a,x),\ (b,x),\ (c,x),\ (a,y),\ (b,y),\ (c,y)\}.$$

□

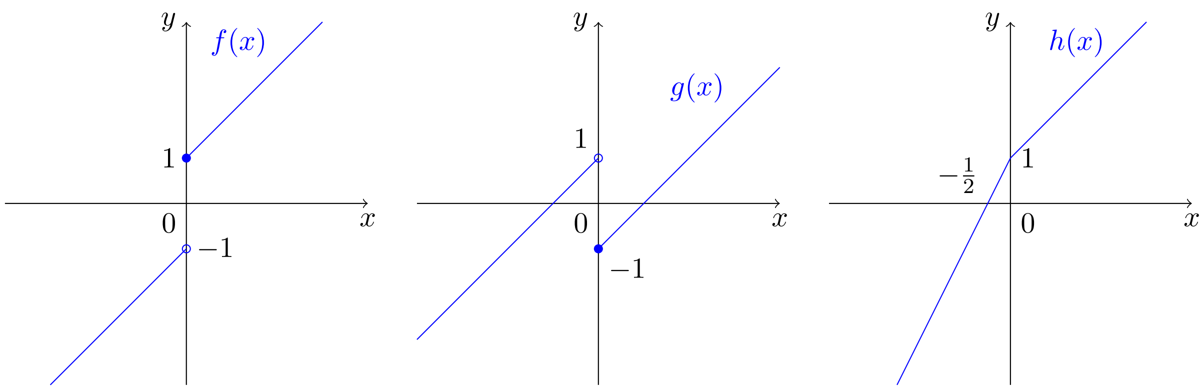
**Függvények**

**6.** Legyen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \geq 0 \\ x-1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \geq 0 \\ x+1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \geq 0 \\ 2x+1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ellenőrizzük, hogy a megadott függvények injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e. A bijektív függvények esetén határozzuk meg az inverzüket is.

*Megoldás.* Alább ábrázoltuk a három függvényt.




Az első ábrán látható, hogy az $f$ függvény injektív, mivel az $f$ grafikonját minden vízszintes egyenes legfeljebb egy pontban metszi. Az is látható az ábrán, hogy az $f$ nem szürjektív, mivel az $f$ függvény $\mathbb{R}$ értékkészletének pontjain keresztül húzott vízszintes egyenesek nem mindig metszik a grafikont. Például az 0 ponton keresztül húzott vízszintes egyenes (az $Ox$-tengely) nem metszi a grafikont. Úgy is beláthatjuk, hogy $f$ nem szürjektív, ha kiszámítjuk az $f$ függvény képhalmazát:

$$\operatorname{Im} f = \{x - 1 \,|\, x < 0\} \cup \{x + 1 \,|\, x \geq 0\} = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \neq \mathbb{R}.$$

A második ábrán látható, hogy a $g$ függvény nem injektív, mivel van olyan vízszintes egyenes, ami a $g$ grafikonját több mint egy pontban metszi. Ilyen víszintes egyenes például az $Ox$-tengely. Ez azt jelenti, hogy a 0 értéket többször is felveszi a $g$ függvény. Valóban $g(-1) = -1 + 1 = 0$ és $g(1) = 1 - 1 = 0$. Az is látható az ábrán, hogy a $g$ szürjektív, mivel a $g$ függvény $\mathbb{R}$ értékkészletének pontjain keresztül húzott vízszintes egyenesek mindig metszik a grafikont. A szürjektivitás úgy is belátható, ha kiszámítjuk az $g$ függvény képhalmazát:

$$\operatorname{Im} g = \{x + 1 \,|\, x < 0\} \cup \{x - 1 \,|\, x \geq 0\} = (-\infty, 1) \cup [-1, +\infty) = \mathbb{R}.$$

A harmadik ábrán látható, hogy a $h$ függvény injektív, mivel minden vízszintes egyenes legfeljebb egyszer metszi a $g$ grafikonját. Az is látható az ábrán, hogy a $h$ szürjektív, mivel a $h$ függvény $\mathbb{R}$ értékkészletének pontjain keresztül húzott vízszintes egyenesek mindig metszik a grafikont. Tehát a $h$ függvény bijektív. A $h$ inverzét a következőképpen számolhatjuk ki. Ha $x < 0$, akkor $y = h(x) = 2x + 1 < 2 \cdot 0 + 1 = 1$, ahonnan $x = \dfrac{y-1}{2}$. Tehát $h^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$, ha $y < 1$. Hasonlóan, ha $x \geq 0$, akkor $y = h(x) = x + 1 \geq 0 + 1 = 1$, ahonnan $x = y - 1$. Tehát $h^{-1}(y) = y - 1$, ha $y \geq 1$. Összegezve $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{y-1}{2}, & \text{ha } y < 1 \\ y - 1, & \text{ha } y \geq 1 \end{cases}.$$

Megjegyezzük, hogy ha beláttuk, hogy a $h$ függvénynek van inverze (vagyis $h^{-1} \circ h = id_{\mathbb{R}}$ és $h \circ h^{-1} = id_{\mathbb{R}}$), akkor a $h$ függvény bijektív. □

**7.** Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ x - 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$.

(a) Ellenőrizzük, hogy $f$ injektív, illetve szürjektív-e!

(b) Határozzuk meg $f \circ g$ és $g \circ f$ függvény összetételeket!

*Megoldás részlet.*

(a) Az előző feladatban beláttuk, hogy a $g$ függvény injektív és nem szürjektív. Az $f$ másodfokú függvény nem injektív, mivel $f(0) = 2 = f(-3)$, illetve nem szürjektív, mert a minimuma $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$, így $\operatorname{Im} f = [-\frac{1}{4}, +\infty)$.

(b)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= g(x)^2 + 3g(x) + 2 \\ &= \begin{cases} (x+1)^2 + 3(x+1) + 2, & \text{ha } x \geq 0 \\ (x-1)^2 + 3(x-1) + 2, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 + 5x + 6, & \text{ha } x \geq 0 \\ x^2 + x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} f(x) + 1, & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ f(x) - 1, & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Mivel $f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, így $f(x) \geq 0$, ha $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$ és $f(x) < 0$, ha $x \in (-2, -1)$. Tehát

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= \begin{cases} f(x) + 1, & \text{ha } f(x) \geq 0 \\ f(x) - 1, & \text{ha } f(x) < 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x^2 + 3x + 2) + 1, & \text{ha } x \in (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty) \\ (x^2 + 3x + 2) - 1, & \text{ha } x \in (-2, -1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} x^2 + 3x + 3, & \text{ha } x \in (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty) \\ x^2 + 3x + 1, & \text{ha } x \in (-2, -1) \end{cases} \\
&= \begin{cases} x^2 + 3x + 3, & \text{ha } \quad x \leq -2 \\ x^2 + 3x + 1, & \text{ha } -2 < x < -1 \\ x^2 + 3x + 3, & \text{ha } -1 \leq x \end{cases}.
\end{aligned}
$$

□

**8.** Ellenőrizzük, hogy a megadott függvények injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e:

(a) $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, $f(x) = \hat{3}x + \hat{7}$;

*Megoldás.* Az $f$ függvény táblázata:

| $x$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{5}$ | $\widehat{6}$ | $\widehat{7}$ | $\widehat{8}$ | $\widehat{9}$ | $\widehat{10}$ | $\widehat{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\widehat{7}$ | $\widehat{10}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{7}$ | $\widehat{10}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{7}$ | $\widehat{10}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{4}$ |

Mivel $f(\widehat{0}) = f(\widehat{4}) = \widehat{7}$, ezért a függvény nem injektív. A táblázat alsó sorában nem szerepel a $\widehat{2}$, ezért az $f$ függvény nem veszi fel ezt az értéket, tehát $f$ nem szürjektív. Az $f$ függvény nem bijektív, mert se nem injektív, se nem szürjektív. □

(b) $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$, $f(x) = \hat{5}x + \hat{4}$;

*Megoldás.* Az $f$ függvény táblázata:

| $x$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{5}$ | $\widehat{6}$ | $\widehat{7}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\widehat{4}$ | $\widehat{1}$ | $\widehat{6}$ | $\widehat{3}$ | $\widehat{0}$ | $\widehat{5}$ | $\widehat{2}$ | $\widehat{7}$ |

A függvény táblázatána alsó sorában a $\mathbb{Z}_8$ halmaz minden eleme pontosan egyszer szerepel, ezért a függvény bijektív. □

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$;

*Megoldás.* Az $f$ függvény nem injektív, mert $f(1) = f(-1) = 2$. Az $f$ függvény nem szürjektív, mert nem vesz fel 1-nél kisebb értékeket: $\operatorname{Im} f = [1, +\infty) \neq \mathbb{R}$. A függvények nem bijektív, mert nem injektív, sem szürjektív. □

(d) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = 3x + 5y$.

*Megoldás.* Az $h$ függvény nem injektív, mert $h(0, 0) = h(5, -3) = 0$. Az $h$ szürjektív, mert minden $z \in \mathbb{R}$ esetén létezik $(x, y) = (\frac{z}{3}, 0) \in \mathbb{R}^2$ úgy, hogy $f(x, y) = f(\frac{z}{3}, 0) = 3 \cdot \frac{z}{3} + 5 \cdot 0 = z$. A $h$ függvény nem bijektív, mivel nem injektív. □

**9.** Ellenőrizzük, hogy a következő függvények jól vannak-e megadva:

(a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = m + n$;

*Megoldás.* Az $f$ függvény nincs jól értelmezve, mert $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, de $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 \neq f\left(\frac{2}{4}\right) = 2 + 4$. □

(b) $f : \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{Q}$, $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{2n}{2m - n}$.

*Megoldás.* Az $f$ függvény jól értelmezett, mert $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{2n}{2m-n} = \frac{2n}{2n} \cdot \frac{1}{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{m}{n}-\frac{1}{2}}$, amely csak az $\frac{m}{n}$ tört értékétől függ nem külön a számlálótól és nevezőtől. □

**10.** Legyen $f : A \to B$ függvény és $X, Y \subseteq A$ részhalmazok. Bizonyítsuk be, hogy:

(a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

*Megoldás.* Minden $b \in f(X \cup Y)$ esetén létezik $a \in X \cup Y$ úgy, hogy $b = f(a)$. Mivel $a \in X \cup Y$, ezért $a \in X$ vagy $a \in Y$. Az előbbi esetben $b = f(a) \in f(X)$, míg az utóbbi esetben $b = f(a) \in f(Y)$. Tehát $b = f(a) \in f(X)$ vagy $b = f(a) \in f(Y)$, azaz $b = f(a) \in f(X) \cup f(Y)$. Ezzel beláttuk, hogy $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$.

Minden $b \in f(X) \cup f(Y)$ esetén $b \in f(X)$ vagy $b \in f(Y)$. Ha $b \in f(X)$, akkor létezik $a \in X$ úgy, hogy $b = f(a)$, illetve ha $b \in f(Y)$, akkor létezik $a \in Y$ úgy, hogy $b = f(a)$. Tehát létezik $a \in X$ vagy $a \in Y$ úgy, hogy $b = f(a)$, ami egyenértékű azzal, hogy létezik $a \in X \cup Y$ úgy, hogy $b = f(a)$, vagyis $b \in f(X \cup Y)$. Ezzel beláttuk, hogy $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$.

A kétoldali bennfoglaltatás alapján $f(X) \cup f(Y) = f(X \cup Y)$. □

(b) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$;

*Megoldás.* Ha $X$ vagy $Y$ üresek, akkor fennáll a bennfoglaltatás, mivel $f(\emptyset) = \emptyset$. Minden $b \in f(X \cap Y)$ esetén létezik $a \in X \cap Y$ úgy, hogy $b = f(a)$. Mivel $a \in X \cap Y$, ezért $a \in X$ és $a \in Y$, ahonnnan $b = f(a) \in f(X)$ és $b = f(a) \in f(Y)$. Ebből következik, hogy $b = f(a) \in f(X) \cap f(Y)$. Ezzel beláttuk, hogy $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$. □

(c) $f$ injektív $\Leftrightarrow$ $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y), \forall X, Y \subseteq A$.

*Megoldás.* Az előző alpont alapján elég belátni, hogy $f$ injektív akkor és csakis akkor, ha $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$. Elég belátni ezt az egyenértékűséget abban az esetben, ha $X$ és $Y$ részhalmazok nem üresek, mivel $f(\emptyset) = \emptyset$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Feltétlezzük, hogy az $f$ függvény injektív. Minden $b \in f(X) \cap f(Y)$ esetén $b \in f(X)$ és $b \in f(Y)$, vagyis létezik $x \in X$ és $y \in Y$ úgy, hogy $b = f(x) = f(y)$. Mivel $f$ injektív, ezért $x = y$, így létezik $a = x = y \in X \cap Y$ úgy, hogy $b = f(a) \in f(X \cap Y)$. Ezzel beláttuk, hogy $f$ injektív függvény esetén $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Feltételezzük, hogy $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$. Ha $b = f(x) = f(y)$, akkor legyen $X = \{x\}$ és $Y = \{y\}$. Ekkor $\{b\} = \{f(x)\} \cap \{f(y)\} = f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y) = f(\{x\} \cap \{y\})$, ahonnan $\{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset$, vagyis $x = y$. Tehát az $f$ függvény injektív. □

**11.** Legyen $f : A \to B$ függvény, ahol $A$ és $B$ véges nem üres egyenlő elemszámú halmazok ($|A| = |B|$). Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:

(a) $f$ injektív; (b) $f$ szürjektív; (c) $f$ bijektív.

*Megoldás.* Elég belátni, hogy ha $|A| = |B| = n$, akkor minden injektív függvény szürjektív és minden szürjektív függvény injektív. Ha $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, akkor az $f$ függvény megadható egy táblázattal, amelynek első sorába az $A$ halmaz elemeit írjuk, míg a második sorába az $f$ függvény nekik megfelelő értékei kerülnek.

| $x$ | $a_1$ | $a_2$ | $\ldots$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(a_1)$ | $f(a_2)$ | $\ldots$ | $f(a_n)$ |

Tegyük fel, hogy az $f$ függvény injektív. Ekkor az alsó sorban az $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n) \in B$ elemek nem ismétlődnek, vagyis az alsó sorban a $B$ halmaznak $n = |B|$ darab különböző eleme szerepel. Tehát a $B$ halmaz összes eleme előfordul az alsó sorban, vagyis az $f$ függvény szürjektív.

Fordítva, tegyük fel, hogy az $f$ függvény szürjektív. Ekkor a táblázat alsó sorában a $B$ halmaz összes eleme szerepel legalább egyszer. Mivel a $B$ halmaznak $n$ eleme van és a táblázat alsó sorában $n$ hely van, ezért nem szerepelhet egy elem többször, különben valamelyik kimarad. Emiatt az $f$ függvény injektív is lesz. $\square$

**Számlálások**

*Elméleti összefoglaló* Az $A$ és $B$ halmazok esetén létezik $f : A \to B$ bijektív függvény, akkor $|A| = |B|$.

(**Szitaformula**) Legyenek $A_1, A_2, ..., A_n$ véges halmazok. Ekkor

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \dots$$
$$+ (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n+1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

*Megjegyzés:* A szitaformula egy másik, a fentivel ekvivalens formája a következő:
Legyen $M$ egy nem üres véges halmaz és $A_1, A_2..., A_n \subseteq M$ részhalmazai. Bevezetjük a következő jelölést:

$$A_I = \begin{cases} A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} & \text{ha } I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \neq \emptyset \\ M & \text{ha } I = \emptyset \end{cases},$$

ahol $I \subseteq \{1, 2, ...n\}$. Ekkor

$$\left| M \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \right| = \sum_{I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|.$$

*Feladatok*

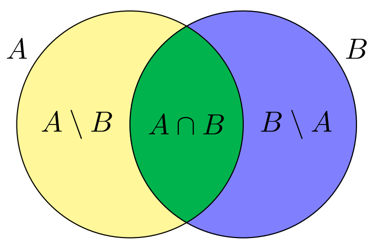
**12.** Igazoljuk, hogy bármely $A$ és $B$ véges halmazok esetén $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$, ahol $|X|$ az $X$ halmaz számosságát jelöli.

*Első megoldás.* Feltételezhetjük, hogy az $A$ és $B$ halmazok végesek, különben az egyenlőség mindkét oldala végtelen.

Ha az $M$ és $N$ halmaz diszjunktak, vagyis $M \cap N = \emptyset$, akkor az egyesítésre használjuk az $M \uplus N = M \cup N$ jelölést is (diszjunkt unió). Ha továbbá az $M$ és $N$ diszjunkt halmazok végesek, akkor $|M \uplus N| = |M| + |N|$.

Ezek alapján írhatjuk, hogy

$$A = (A \setminus B) \uplus (A \cap B),$$
$$B = (B \setminus A) \uplus (A \cap B),$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \uplus (A \cap B) \uplus (B \setminus A).$$



Innen

$$\begin{aligned}|A|+|B| &= \underbrace{|A\setminus B|+|A\cap B|}_{|A|}+\underbrace{|B\setminus A|+|A\cap B|}_{|B|}\\ &= \underbrace{|A\setminus B|+|A\cap B|+|B\setminus A|}_{|A\cup B|}+|A\cap B|\\ &= |A\cup B|+|A\cap B|.\end{aligned}$$

□

*Második megoldás.* Ha az $A, B$ halmazok végesek, akkor a szitaformula alapján $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, ahonnan $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$. Ha $A$ vagy $B$ végtelen, akkor $|A \cup B|$ is végtelen, így az előbbi egyenlőség mindkét oldalán végtelen áll. □

**13.** Határozzuk meg egy véges halmaz részhalmazainak számát! (Formálisan: Legyen $M$ egy halmaz, $|M| = n$ és $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$. $|\mathcal{P}(M)| =?$)

*Első megoldás.* Megszámoljuk a részhalmazokat azok számossága szerint. Az $M$ $n$-elemű halmaz egy részhalmazának 0, 1, ... vagy $n$ eleme lehet.

Nulla elemű részhalmazból csak egy van, éspedig az üres halmaz ($\emptyset \subseteq M$). Az $M$ egy elemű részhalmazából pontosan annyi van, ahány elem van $M$-nek, éspedig $n$ darab. Általánosan az $M$ halmaz $k$ elemű részhalmazaiból pontosan annyi van, ahányféleképpen ki tudunk választani az $M$ halmaz elemeiből $k$ darabot, ezekből az elemekből alkotva egy $k$ elemű részhalmazt. Ezt $C_n^k$-féleképpen tehetjük meg. Összegezve az $M$ részhalmazainak száma:

$$\begin{aligned}&\underbrace{C_n^0}_{0 \text{ elemű részhalmazok száma}} + \underbrace{C_n^1}_{1 \text{ elemű részhalmazok száma}} + \dots + \underbrace{C_n^k}_{k \text{ elemű részhalmazok száma}} + \dots\\ &+ \underbrace{C_n^{n-1}}_{(n-1) \text{ elemű részhalmazok száma}} + \underbrace{C_n^n}_{n \text{ elemű részhalmazok száma}} =\\ &= (1+1)^n = 2^n\end{aligned}$$

a Newton binomális tétele alapján,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^k x^k y^{n-k} + \cdots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + C_n^n y^n,$$

$x = y = 1$ választás esetén. □

*Második megoldás.* Legyen $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Ekkor minden $A \subseteq M$ részhalmazhoz hozzárendelhetünk egy $n$ számjegyből álló $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ bináris számot (egy $n$-bittes számot) úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, n$ esetén

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } m_i \in A \\ 0, & \text{ha } m_i \notin A \end{cases},$$

vagyis az $A$ részhalmazhoz hozzárendelt $n$-bittes szám $i$-dik számjegye pontosan akkor 1-es, ha az $m_i$ eleme az $A$ részhalmaznak, különben 0-ás. Például az $A = \emptyset$ üreshalmazhoz a csupa nullásokból álló $\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ számjegy}}$ számot rendeljük, míg az $A = M$ részhalmazhoz a csupa egyesekből álló $\underbrace{1\ldots1}_{n \text{ számjegy}}$ számot rendeljük.

Erről a megfeleltetésről be fogjuk látni, hogy bijektív. Injektív, mert két különböző részhalmazhoz két különböző $n$-bittes számot feleltetünk meg. Valóban, ha $A, B \subseteq M$ két különböző részhalmaz, akkor van olyan $m_i \in M$ elem, ami benne van $A$-ban, de nincs benne a $B$-ben vagy fordítva. Az első esetben az $A$-hoz rendelt szám $i$-dik számjegye 1-es, míg a $B$-hez rendelt szám

$i$-dik számjegye 0-ás. A második esetben, ha $m_i$ benne van $B$-ben, de nincs benne $A$-ban, akkor az $A$-hoz rendelt szám $i$-dik számjegye 0-ás, míg a $B$-hez rendelt szám $i$-dik számjegye 1-es. Ezzel beláttuk, hogy a megfeleltetés injektív.

A megfeleltetés szürjektív is, mert minden $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ $n$-bittes szám valamely $A \subseteq M$ részhalmazhoz rendelhető. Egy ilyen $A$ részhalmazt a következőképpen szerkeszthetünk meg. Minden $i = 1,\dots,n$ esetén az $m_i \in M$ elem az $A$ részhalmaznak is eleme, ha $a_i = 1$, különben nem eleme. Röviden, minden $i = 1,\dots,n$ esetén

$$m_i \in A \;\Leftrightarrow\; a_i = 1.$$

Az így megszerkesztett $A$ részhalmazhoz pontosan az $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ $n$-bittes szám lesz rendelve. Ezzel beláttuk, hogy a megfeleltetés szürjektív.

Mivel a megfeleltetés injektív és szürjektív, ezért bijektív, vagyis a $M$ részhalmazai és az $n$-bittes számok párba állíthatók. Ez azt jelenti, hogy ugyanannyi részhalmaza van az $M$ halmaznak, mint amennyi $n$-bittes szám van. Megszámoljuk, hogy hány $n$-bittes szám van. Az $n$-bittes számok minden egyes számjegyét ($n$ darabot) egymástól függetlenül kétféleképpen választhatunk meg, ezért

$$\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n \text{ választás}} = 2^n$$

lehetőségünk van egy $n$-bittes szám megalkotására. Ezzel beláttuk, hogy az $M$ részhalmazaiból és a $n$-bittes számokból is $2^n$ darab van. □

*Harmadik megoldás.* Minden $A \subseteq M$ részhalmazhoz hozzárendelhetünk egy $\chi_A : M \to \{0,1\}$ karakterisztikus függvényt úgy, hogy

$$\chi_A(m) = 1 \;\Leftrightarrow\; m \in A, \quad \forall m \in M.$$

Az $\chi_\bullet : \mathcal{P}(M) \to \{f \mid f : M \to \{0,1\} \text{ függvény}\}$, $A \mapsto \chi_A$ megfeleltetés bijektív, amit hasonlóan láthatunk be mint az előző megoldás esetén. Két különböző részhalmaz esetén van olyan eleme az $M$ halmaznak, amely benne van az egyikben, de nincs benne a másikban, ezért az hozzájuk rendelt karakterisztikus függvények különböző értéket vesznek fel az $m$ pontba (az egyik 1-et, míg a másik 0-át). Ezzel beláttuk, hogy a megfeleltetés injektív. Mivel

$$A = \chi_A^{-1}(1) = \{m \in M \mid \chi_A(m) = 1\},$$

vagyis az $A$ részhalmaz a 1 érték $\chi_A$ karakterisztikus függvény általi ősképe, ezért a megfeleltetés szürjektív is.

Beláttuk, hogy bijektív megfeleltetés van az $M$ részhalmazai és az $M \to \{0,1\}$ függvények között, így ugyanannyi van mindkettőből. Egy későbbi feladatban igazoljuk, hogy az $M \to \{0,1\}$ függvények száma $|\{0,1\}|^{|M|} = 2^n$. □

**14.** Ha $A$ egy $m$ elemű és $B$ egy $n$ elemű halmaz, akkor hány eleme van az $A \times B$ halmaznak?

*Megoldás.* Az $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\, b \in B\}$ halmaznak az elemei olyan párokból állnak, amelynek az első eleme az $A$ halmazból van, így $|A| = m$-féleképpen választható meg, míg a pár második eleme a $B$ halmazból van, így $|B| = n$-féleképpen választható meg. Tehát $|A \times B| = |A| \cdot |B| = m \cdot n$ eleme van. □

**15.** Igazoljuk, hogy minden véges nem üres halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint páratlan elemszámú!

*Megoldás.* Legyen $M$ egy nem üres véges halmaz és legyen $|M| = n$ az elemeinek száma. Megszámoljuk a páratlan és páros elemszámú részhalmazokat az elemszámok alapján.

Bevezetjük a következő jelöléseket. Legyen $p$ a legnagyobb páratlan szám, ami $n$-nél nem nagyobb és $q$ a legnagyobb páros szám, ami $n$-nél nem nagyobb. Tehát, ha $n$ páros, akkor $p = n - 1$ és $q = n$, míg ha $n$ páratlan, akkor $p = n$ és $q = n - 1$.

Páros elemszámú részhalmazoknak $0, 2, 4 \dots$ vagy $q$ számú eleme lehet. Az 0 elemszámú részhalmazokból $C_n^0$ darab, a 2 elemszámú részhalmazokból $C_n^2$ darab, a 4 elemszámú részhalmazokból $C_n^4$ darab, …, a $q$ elemszámúból $C_n^q$ darab van. Tehát összesen $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2k} + \dots + C_n^q$ darab páros elemszámú részhalmaz van.

Páratlan elemszámú részhalmazoknak $1, 3, 5, \dots$ vagy $p$ számú eleme lehet. Az 1 elemszámú részhalmazokból $C_n^1$ darab, a 3 elemszámú részhalmazokból $C_n^3$ darab, …, a $p$ elemszámúból $C_n^p$ darab van. Tehát összesen $C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{2k+1} + \dots + C_n^p$ darab páratlan elemszámú részhalmaz van.

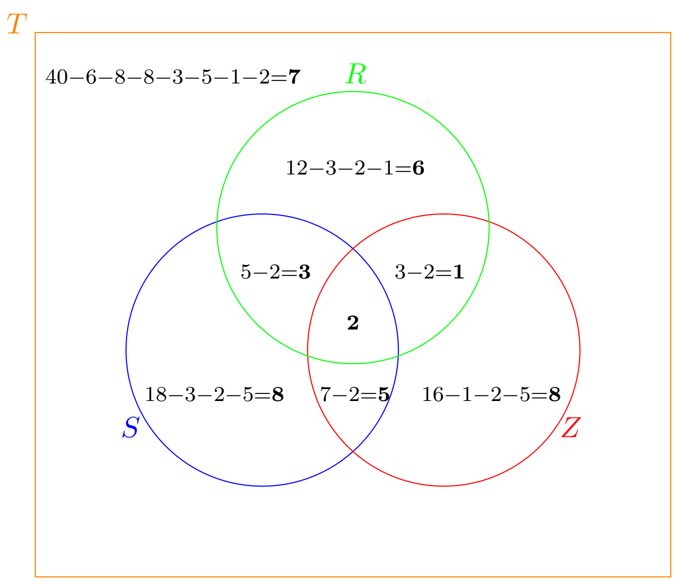
Végül a páros, illetve páratlan elemszámú részhalmazok száma megegyezik, mert

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{2k} + \dots + C_n^q = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{2k+1} + \dots + C_n^p \Leftrightarrow$$
$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 + \dots + C_n^{2k} - C_n^{2k+1} + \dots + C_q^n - C_p^n = 0 \Leftrightarrow$$
$$C_n^0 + (-1)^1 C_n^1 + (-1)^2 C_n^2 + (-1)^3 C_n^3 + (-1)^4 C_n^4 + \dots + (-1)^{2k} C_n^{2k} + (-1)^{2k+1} C_n^{2k+1} + \dots$$
$$+(-1)^q C_q^n + (-1)^p C_p^n = 0 \Leftrightarrow$$
$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 + \dots + C_n^{2k} - C_n^{2k+1} + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0 \Leftrightarrow$$
$$\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell C_n^\ell = 0 \Leftrightarrow$$
$$(1-1)^n = 0$$

a Newton binomiális tétele alapján. □

**16.** Egy osztályban összesen 40 tanuló van, ebből 18 sakkozik, 16 zenél valamilyen hangszeren, 12 rajzol, 7 sakkozik és zenél, 5 sakkozik és rajzol, 3 zenél és rajzol, 2 sakkozik, zenél és rajzol. Hány tanuló nem végez egyetlen tevékenységet sem az említettek közül?

*Első megoldás.* Legyen $T$ az osztály tanulóinak halmaza, $Z$ a zenélő, $R$ a rajzoló, $S$ a sakkozó tanulók halmaza.




A mindhárom tevékenységet végzők száma

$$|Z \cap R \cap S| = 2.$$

A csak rajzoló és sakkozó (de nem zenélő) tanulók száma

$$|(R \cap S) \setminus (Z \cap R \cap S)| = |R \cap S| - |Z \cap R \cap S)| = 5 - 2 = 3.$$

A csak rajzoló és zenélő (de nem sakkozó) tanulók száma

$$|(R \cap Z) \setminus (Z \cap R \cap S)| = |R \cap Z| - |Z \cap R \cap S)| = 3 - 2 = 1.$$

A csak sakkozó és zenélő (de nem rajzoló) tanulók száma

$$|(S \cap Z) \setminus (Z \cap R \cap S)| = |S \cap Z| - |Z \cap R \cap S)| = 7 - 2 = 5.$$

A csak sakkozó (de nem rajzoló és nem zenélő) tanulók száma:

$$\begin{aligned}
|\underbrace{S \setminus (Z \cup R)}_{\text{csak sakk}}| &= |S \setminus [(Z \cup R) \cap S]| \\
&= |S \setminus \Big(\underbrace{[(S \cap Z) \setminus (Z \cap R \cap S)]}_{\text{csak sakk és zene}} \cup \underbrace{[(S \cap R) \setminus (Z \cap R \cap S)]}_{\text{csak sakk és rajz}} \cup \underbrace{(S \cap R \cap Z)}_{\text{rajz, sakk és zene}}\Big)| \\
&\overset{(*)}{=} |\underbrace{S}_{\text{sakk}}| - |\underbrace{(S \cap Z) \setminus (Z \cap R \cap S)}_{\text{csak sakk és zene}}| - |\underbrace{(S \cap R) \setminus (Z \cap R \cap S)}_{\text{csak sakk és rajz}}| - |\underbrace{S \cap R \cap Z}_{\text{rajz, sakk és zene}}| \\
&= 18 - 5 - 3 - 2 = 8,
\end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben kihasználjuk, hogy a $(S \cap Z) \setminus (Z \cap R \cap S)$, $(S \cap R) \setminus (Z \cap R \cap S)$, $S \cap R \cap Z$ diszjunkt részhalmazai a $S$ halmaznak, illetve az egyesítésük kiadja az $(Z \cup R) \cap S$ részhalmazt.

A csak rajzoló (de nem sakkozó és nem zenélő) tanulók száma:

$$\begin{aligned}
|\underbrace{R \setminus (Z \cup S)}_{\text{csak rajz}}| &= |R \setminus [(Z \cup S) \cap R]| \\
&= |R \setminus \Big(\underbrace{[(R \cap Z) \setminus (Z \cap R \cap S)]}_{\text{csak rajz és zene}} \cup \underbrace{[(R \cap S) \setminus (Z \cap R \cap S)]}_{\text{csak rajz és sakk}} \cup \underbrace{(S \cap R \cap Z)}_{\text{rajz, sakk és zene}}\Big)| \\
&\overset{(\dagger)}{=} |\underbrace{R}_{\text{rajz}}| - |\underbrace{(R \cap Z) \setminus (Z \cap R \cap S)}_{\text{csak rajz és zene}}| - |\underbrace{(R \cap S) \setminus (Z \cap R \cap S)}_{\text{csak rajz és sakk}}| - |\underbrace{S \cap R \cap Z}_{\text{rajz, sakk és zene}}| \\
&= 12 - 1 - 3 - 2 = 6,
\end{aligned}$$

ahol a $(\dagger)$ egyenlőségben kihasználjuk, hogy a $(R \cap Z) \setminus (Z \cap R \cap S)$, $(R \cap S) \setminus (Z \cap R \cap S)$, $S \cap R \cap Z$ diszjunkt részhalmazai a $R$ halmaznak, illetve az egyesítésük kiadja az $(Z \cup S) \cap R$ részhalmazt.

A csak zenélő (de nem rajzoló és nem sakkozó) tanulók száma:

$$\begin{aligned}
|\underbrace{Z \setminus (S \cup R)}_{\text{csak zene}}| &= |Z \setminus [(S \cup R) \cap Z]| \\
&= |Z \setminus \Big(\underbrace{[(Z \cap S) \setminus (Z \cap R \cap S)]}_{\text{csak sakk és zene}} \cup \underbrace{[(Z \cap R) \setminus (Z \cap R \cap S)]}_{\text{csak zene és rajz}} \cup \underbrace{(S \cap R \cap Z)}_{\text{rajz, sakk és zene}}\Big)| \\
&\overset{(\ddagger)}{=} |\underbrace{Z}_{\text{sakk}}| - |\underbrace{(Z \cap S) \setminus (Z \cap R \cap S)}_{\text{csak zene és sakk}}| - |\underbrace{(Z \cap R) \setminus (Z \cap R \cap S)}_{\text{csak zene és rajz}}| - |\underbrace{S \cap R \cap Z}_{\text{rajz, sakk és zene}}| \\
&= 16 - 5 - 1 - 2 = 8,
\end{aligned}$$

ahol a $(\ddagger)$ egyenlőségben kihasználjuk, hogy a $(Z \cap S) \setminus (Z \cap R \cap S)$, $(Z \cap R) \setminus (Z \cap R \cap S)$, $S \cap R \cap Z$ diszjunkt részhalmazai a $Z$ halmaznak, illetve az egyesítésük kiadja az $(S \cup R) \cap Z$ részhalmazt.

Tehát a valamilyen tevékenységet végzők száma: $8+8+6+3+1+5+2=33$. Így az egyetlen tevékenységet sem végzők száma $40-33=7$. □

*Második megoldás.* Jelölje $T$ az osztály tanulóinak halmazát, $S$ a sakkozó, $R$ a rajzoló, $Z$ a zenélő tanulók halmazát.

Meg akarjuk számolni a valamilyen tevékenységet végzőket. Ha összeadjuk a sakkozók, zenélők és rajzolók számát ($|S|+|R|+|Z|$), akkor egyszer vannak beleszámolva (helyesen), akik pontosan egy tevékenységet végeznek, de többször vannak beleszámolva, akik több tevékenységet végeznek (helytelenül). A pontosan két tevékenységet végzők kétszer vannak beleszámolva. Például, ha valaki sakkozik és rajzol, akkor ő sakkozóként is és rajzolóként is bele van számítva az előbb említett összegbe (helytelenül). Ezért a fenti összegből levonjuk azokat számát, akik sakkoznak és rajzolnak, sakkoznak és zenélnek, illetve rajzolnak és zenélnek:

$$|S|+|R|+|Z|-|S\cap R|-|S\cap Z|-|R\cap Z|.$$

Ez a korrigálás nem érinti azokat, akik egy tevékenységet végeznek, hiszen továbbra is egyszer lesznek beleszámolva (helyesen), ellenben a pontosan két tevékenységet végzőket most csak egyszer számoljuk bele (helyesen). A módosított összeg továbbra sem számolja jól a pontosan három tevékenységet végzőket. Beleszámolódnak sakkozóként, rajzolóként, zenélőkként külön-külön (összesen háromszor) és levonódnak, mint sakkozók és zenélők, sakkozók és rajzolók, zenélők és rajzolók külön-külön (összesen szintén háromszor). Tehát a pontosan három tevékenységet végzők egyszer sem számolódnak bele a módosított összegbe. Emiatt újra korrigáljuk az összeget, hozzáadva az előbbihez a pontosan három tevékenységet végzők számát:

$$|S|+|R|+|Z|-|S\cap R|-|S\cap Z|-|R\cap Z|+|S\cap R\cap Z|=18+16+12-5-3-7+2=33.$$

Ez utóbbi összeg már jól számolja a legalább egy tevékenységet végzők számát.

Végül az osztály tanulóinak számából levonva a legalább egy tevékenységet végzők számát megkapjuk azon tanulók számát, akik nem végeznek egyetlen tevékenységet sem:

$$|T|-|S|-|R|-|Z|+|S\cap R|+|S\cap Z|+|R\cap Z|-|S\cap R\cap Z|=40-33=7.$$

□

*Harmadik megoldás.* Jelölje $T$ az osztály tanulóinak halmazát, $S$ a sakkozó, $R$ a rajzoló, $Z$ a zenélő tanulók halmazát. Az $S\cup R\cup Z$ a valamilyen tevékenységet végző tanulók halmaza és $T\setminus(S\cup R\cup Z)$ a tevékenységet nem végző tanulók halmaza. A szitaformula alapján

$$\begin{aligned}|T\setminus(S\cup R\cup Z)|&=|T|-|S|-|Z|-|R|+|S\cap R|+|S\cap Z|+|R\cap Z|-|S\cap R\cap Z|\\&=40-18-16-12+7+5+3-2=7.\end{aligned}$$

□

**17.** Legyen $f:A\to B$ függvény, ahol az $A$ és $B$ halmazok elemeinek száma $|A|=n$, $|B|=m$, ($n,m\in\mathbb{N}^*$). Bizonyítsuk, hogy:

(a) $\left|B^A\right|=\left|\{f\mid f:A\to B \text{ függvény}\}\right|=|B|^{|A|}=m^n$;

*Megoldás.* Legyenek $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ és $B=\{b_1,\dots,b_m\}$. Minden $f:A\to B$ függvény megadható egy táblázattal, ahol a táblázat első sorába az $A$ értelmezési tartomány elemeit írjuk, a második sorába pedig az $f$ függvény nekik megfelelő értékei kerülnek:

$$\begin{array}{c|cccc} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \hline f(x) & f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n)\end{array}.$$

A táblázat alsó sorának $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)$ elemeit egymástól függetlenül megválaszthatjuk. Minden egyes $f(a_i) \in B$ elemet $|B|$-féleképpen válaszhatunk meg. Így összesen

$$\underbrace{|B| \cdot |B| \cdot \dots \cdot |B|}_{|A| = n\text{-szer}} = |B|^{|A|} = m^n$$

módon tölthető ki az alsó sor. Tehát összesen $|B|^{|A|} = m^n$ számú $f : A \to B$ függvény van. $\square$

(b) $\left|\{f \mid f : A \to B \text{ injektív függvény}\}\right| = V_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$, ha $n \leq m$;

*Megoldás.* Legyenek $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Minden $f : A \to B$ függvény megadható egy táblázattal, ahol a táblázat első sorába az $A$ értelmezési tartomány elemeit írjuk, a második sorába pedig az $f$ függvény nekik megfelelő értékei kerülnek:

$$\begin{array}{c|cccc} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \hline f(x) & f(a_1) & f(a_2) & \dots & f(a_n) \end{array}.$$

Ha $f$ injektív függvény, akkor a táblázat alsó sorában az $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \in B$ elemek páronként különbözőek kell legyenek. (Ez csak abban az esetben állhat fenn, ha a $B$ halmaznak van legalább $n$ eleme, vagyis $m \geq n$.)

Megszámoljuk, hogy hányféleképpen tölthető ki a táblázat alsó sora a $B$ elemeivel úgy, hogy az elemek ne ismétlődjenek. Az első elem, $f(a_1)$ bármilyen értéket felvehet a $B$ halmazból, így $|B| = m$-féleképpen választható meg. A második elem, $f(a_2)$ már nem veheti fel a korábban megválasztott $f(a_1)$ értéket a $B$ halmazból, vagyis az $f(a_2)$ az érték az $B \setminus \{f(a_1)\}$ halmazból választható meg, amit $|B \setminus \{f(a_1)\}| = m - 1$ módon tehetünk meg. Így folytatva a $k$-dik elem, $f(a_k)$ nem veheti fel a korábban megválasztott $f(a_1), \dots, f(a_{k-1})$ értékeket a $B$ halmazból, vagyis csak a $B \setminus \{f(a_1), \dots, f(a_{k-1})\}$ halmazból veheti fel az értékét, amit $|B \setminus \{f(a_1), \dots, f(a_{k-1})\}| = m - (k-1)$ módon tehet meg (mivel az $f(a_1), \dots, f(a_{k-1})$ mind különbözőek). Végül az utolsó elemet, $f(a_n)$-et $|B \setminus \{f(a_1), \dots, f(a_{n-1})\}| = m - n + 1$ módon válaszhatjuk meg. Összegezve a táblázat alsó sora

$$m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

módon tölthető ki a $B$ halmaz elemeivel úgy, hogy az elemek ne ismétlődjenek. Ez a szám adja meg az $f : A \to B$ injektív függvények számát, ha $m \geq n$, különben nem létezik $f : A \to B$ injektív függvény. $\square$

(c) $\left|\{f \mid f : A \to B \text{ szürjektív függvény}\}\right| = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^{m-i} (m-i)^n$, ha $n \geq m$;

*Megoldás.* A szitaformula segítségével fogjuk megszámolni a szürjektív függvényeket. Legyenek $M = \{f : A \to B \text{ függvény}\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_m\}$.

Először megszámoljuk az $f : A \to B$ nem szürjektív függvényeket. Egy $f : A \to B$ függvény pontosan akkor nem szürjektív, ha a $B$ halmaz valamely elemét nem veszi fel értékként, vagyis létezik olyan $b_i \in B$, hogy $b_i \notin f(A) = \operatorname{Im} f$. Jelölje minden $i = 1, \dots, m$ esetén $M_i$ azoknak a függvényeknek a halmazát, amelyek nem veszik fel a $b_i$ értéket, vagyis

$$M_i = \{f : A \to B \mid b_i \notin f(A)\}, \quad \forall\, i = 1, \dots, m.$$

Ekkor a nem szürjektív függvények halmaza $M_1 \cup \ldots \cup M_m$ és a szitaformula alapján a számuk

$$\begin{aligned}
|M_1 \cup \ldots \cup M_m| &= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,m\}} (-1)^{|I|+1} M_I \\
&= (|M_1| + \cdots + |M_n|) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} |M_{i_1} \cap M_{i_2}| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap M_{i_3}| - \\
&\quad \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} |M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}| + \ldots \\
&\quad + (-1)^m \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{m-1} \le m} |M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_{m-1}}|.
\end{aligned}$$

Ha $f \in M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}$, akkor az $f$ függvényt megadó

| $x$ | $a_1$ | $a_2$ | $\ldots$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(a_1)$ | $f(a_2)$ | $\ldots$ | $f(a_n)$ |

táblázat alsó sorában csak a $B \setminus \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\}$ halmaz elemei szerepelhetnek (mivel nem veszi fel a $b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}$ értékeket). Így a táblázatot $|B \setminus \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\}|^{|A|} = (m-k)^n$-féleképpen tölthetjük ki, és ezért az $M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}$ halmaznak $(m-k)^n$ eleme van. Tehát a fenti képlet alapján

$$\begin{aligned}
|M_1 \cup \ldots \cup M_m| &= (\underbrace{(m-1)^n + \cdots + (m-1)^n}_{m = C_m^1\text{-szer}}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} (m-2)^n \\
&\quad + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} (m-3)^n - \ldots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} (m-k)^n + \ldots \\
&\quad + (-1)^m \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{m-1} \le m} (m-(m-1))^n \\
&= C_m^1 (m-1)^n - C_m^2 (m-2)^n + C_m^3 (m-3)^n - \ldots \\
&\quad + (-1)^{k+1} C_m^k (m-k)^n + \cdots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} 1^m \\
&= C_m^{m-1} (m-1)^n - C_m^{m-2} (m-2)^n + C_m^{m-3} (m-3)^n - \ldots \\
&\quad + (-1)^{k+1} C_m^{m-k} (m-k)^n + \cdots + (-1)^m C_m^1 1^m \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} C_m^{m-k} (m-k)^m.
\end{aligned}$$

Végül a szürjektív függvények száma

$$\begin{aligned}
|M \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_m)| &= m^n - \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} C_m^{m-k} (m-k)^m \\
&= C_m^0 m^n + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k C_m^{m-k} (m-k)^m \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_m^{m-k} (m-k)^m \\
&= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^{m-k} (m-k)^m.
\end{aligned}$$

□

(d) $\big|\{f \mid f : A \to B \text{ bijektív függvény}\}\big| = n!$, ha $n = m$.

*Megoldás.* Megjegyezzük, hogy csak akkor létezik $A$-ról $B$-re menő bijektív függvény, ha $A$-nak és $B$-nek ugyanannyi eleme van, vagyis $n = |A| = |B| = m$.

Feltételezzük, hogy $n = m$. Az $f : A \to B$ bijektív függvény injektív és szürjektív, tehát az $f$ függvényt megadó

| $x$ | $a_1$ | $a_2$ | $\dots$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $f(a_1)$ | $f(a_2)$ | $\dots$ | $f(a_n)$ |

táblázat alsó sorában a $B$ halmaz elemei pontosan egyszer fordulnak elő. Észrevehető, hogy ha úgy töltjük ki a táblázat alsó sorát a $B$ halmaz elemeivel, hogy azok ne ismétlődjenek (vagyis az $f$ injektív legyen), akkor a $B$ halmaz minden elemét fel fogjuk használni (vagyis az $f$ szürjektív lesz). Tehát minden $f : A \to B$ injektív függvény egyben bijektív is lesz. Emiatt az $n = m$ esetben az injektív és bijektív függvények száma megegyezik és egyenlő

$$m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = m! = n!\text{-ral.}$$

□