17. Adottak az $\vec a(3,-1,-2)$ és $\vec b(1,2,-1)$ vektorok. Számítsuk ki az alábbi vektorokat:

$$\vec a\times\vec b,\ (2\vec a+\vec b)\times\vec b,\ (2\vec a+b)\times(2\vec a-\vec b).$$

$$\vec a\times\vec b = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix} = \vec i\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix} - \vec j\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix} + \vec k\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 5\vec i+\vec j+7\vec k$$

!

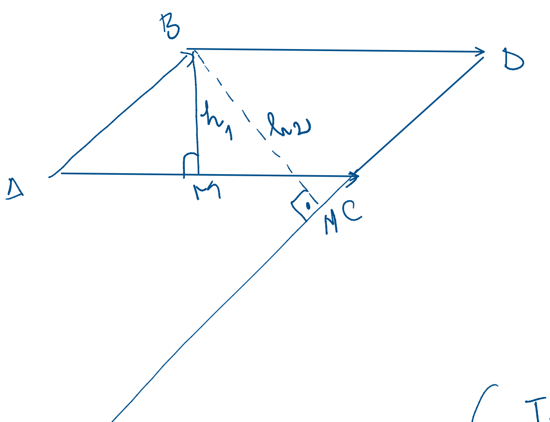
$(-1)^{\text{sor+oszlop}}$ $\quad (-1)^{1+2}$ $\quad (-1)^{1+3}$

$$(2\vec a+\vec b)\times\vec b = (10,2,14)$$

$$(2\vec a+\vec b)\times\vec b = 2\vec a\times\vec b + \underbrace{\vec b\times\vec b}_{\vec 0} = 2(\vec a\times\vec b) = (10,2,14)$$

$$(2\vec a+\vec b)\times(2\vec a-\vec b) = \underbrace{2\vec a\times 2\vec a}_{\vec 0} + \underbrace{\vec b\times 2\vec a}_{2\vec b\times\vec a} + \underbrace{2\vec a\times(-\vec b)}_{-2(\vec a\times\vec b)} - \underbrace{\vec b\times\vec b}_{\vec 0} = 2\underbrace{\vec b\times\vec a}_{-\vec a\times\vec b} - 2\vec a\times\vec b = -4\vec a\times\vec b = (-20,-4,-28)$$

18. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}(6,0,2)$ és $\overrightarrow{AC}(1.5,2,1)$ vektorokra épített paralelogramma párhuzamos oldalai közti távolságokat!



ABDC▱ paral.

$BM\perp AC \Rightarrow BM = d(AC,BD)$

$BN\perp CD \Rightarrow BN = d(AB,CD)$

$$T_{ABDC} = AC\cdot h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{T}{AC} = \frac{13}{\sqrt{2{,}25+4+1}} = \frac{13}{\sqrt{7{,}25}}$$

$$T_{ABDC} = CD\cdot h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{13}{\sqrt{40}} = \frac{13}{2\sqrt{10}}$$

$$T_{ABC_\triangle} = \frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{2}$$

$$T_{ABCD} = 2\cdot T_{ABC} = \|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k\\ & & \\ & & \end{vmatrix} =$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-4,-3,12) \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{16+9+144} = 13 = T_{ABCD}$$

28. Legyen $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ három nem kollineáris vektor. Ha $\overrightarrow{BC}=\vec a$, $\overrightarrow{CA}=\vec b$, $\overrightarrow{AB}=\vec c$, akkor igazoljuk, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen az ABC háromszög az, hogy: $\vec a\times\vec b = \vec b\times\vec c = \vec c\times\vec a$. Innen vezessük le a szinusz tételt.

$\vec a, \vec b, \vec c$ Δ-et alkotnak $\Longleftrightarrow$ $\vec a \times \vec b = \vec b \times \vec c = \vec c \times \vec a$

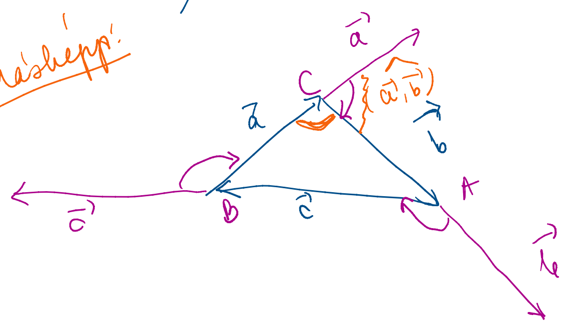
„⇒" $\vec a, \vec b, \vec c$ Δ-et alkotnak $\Longleftrightarrow$ $\vec a + \vec b + \vec c = \vec 0$

$$\vec a = -\vec b - \vec c \;\Big/ \times \vec b$$

$$\vec a \times \vec b = -\underbrace{\vec b \times \vec b}_{\vec 0} - \vec c \times \vec b = \vec b \times \vec c \quad ✓$$

$$\vec c \times \Big/ \; \vec a = -\vec b - \vec c \Rightarrow \vec c \times \vec a = -\vec c \times \vec b - \underbrace{\vec c \times \vec c}_{\vec 0} = \vec b \times \vec c \quad ✓$$

Másképp:



- irányítás ✓ (ugyanarra forgatunk)
- irány: $\vec a \times \vec b \perp (ABC)$, $\vec b \times \vec c \perp (ABC)$, $\vec c \times \vec a \perp (ABC)$ ✓
- hosszúság: $\|\vec a \times \vec b\| = \|\vec b \times \vec c\| = \|\vec c \times \vec a\| \;\Big/ :2$

$$T_{ABC} = T_{ABC} = T_{ABC}$$

$$\|\vec a \times \vec b\| = \|\vec a\| \cdot \|\vec b\| \cdot \underbrace{\sin(\pi - B\hat{C}A)}_{\sin(B\hat{C}A)} = 2T_{ABC}$$

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin C}{\cancel{2}} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{\cancel{2}} = \frac{c \cdot a \sin B}{\cancel{2}} \;\Big/ \cdot 2, \; : abc$$

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \text{(sin-tétel)} \quad ✓$$

„⇐" $\vec a \times \vec b = \vec b \times \vec c = \vec c \times \vec a \overset{?}{\Rightarrow} \vec a + \vec b + \vec c = \vec 0$

$$\vec a \times \vec b - \vec b \times \vec c = \vec 0$$

$$\vec a \times \vec b + \vec c \times \vec b = \vec 0$$

$$(\vec a + \vec c) \times \vec b = \vec 0 \Rightarrow \vec b = \vec 0 \text{ v. } \vec a + \vec c = \vec 0 \text{ v. } \boxed{(\vec a + \vec c) \parallel \vec b}$$

$\vec b = \vec 0$: ↯

$\vec a = -\vec c$ $\Updownarrow$ $\vec a, \vec c$ koll., ami nem lehetséges felt. szerint

$$(\vec a + \vec c) \parallel \vec b \Rightarrow \vec b = k \cdot (\vec a + \vec c)$$

$$\vec a \times \vec b = \vec c \times \vec a$$

$$\Rightarrow \vec b = -(\vec a + \vec c)$$

$$\vec a \times \vec b = \vec c \times \vec a$$

$$\vec a \times [k\cdot(\vec a+\vec c)] = \vec c \times \vec a$$

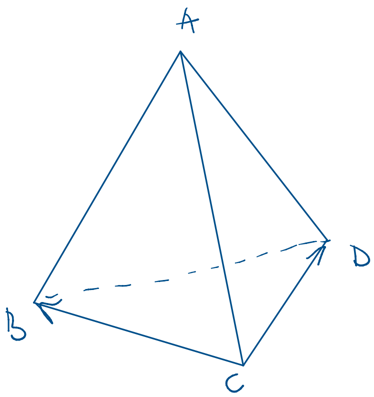
$$\underbrace{k\cdot \vec a \times \vec a}_{\vec 0} + k\,\vec a \times \vec c = \vec c \times \vec a \Rightarrow k=-1$$

$$\Rightarrow \vec b = -(\vec a+\vec c)$$

$$\vec a+\vec b+\vec c=\vec 0$$

q.e.d.

29. (Sündisznó tétel) Legyen az $[ABCD]$ tetraéder. Igazoljuk, hogy azon kifele irányuló vektorok összege, amelyek merőlegesek a tetraéder lapjaira, és nagyságuk rendre a megfelelő lap területével egyenlő, a zérus vektor.



$$S = \vec v_{ABC} + \vec v_{ACD} + \vec v_{ABD} + \vec v_{BCD} \stackrel{?}{=} \vec 0$$

- $\vec v_{ABC} = \dfrac{\vec{AB}\times\vec{AC}}{2}$
- $\vec v_{ABD} = \dfrac{\vec{AD}\times\vec{AB}}{2}$
- $\vec v_{ACD} = \dfrac{\vec{AC}\times\vec{AD}}{2}$
- $\vec v_{BCD} = \dfrac{\vec{CB}\times\vec{CD}}{2} = \dfrac{(\vec{CA}+\vec{AB})\times(\vec{CA}+\vec{AD})}{2} =$

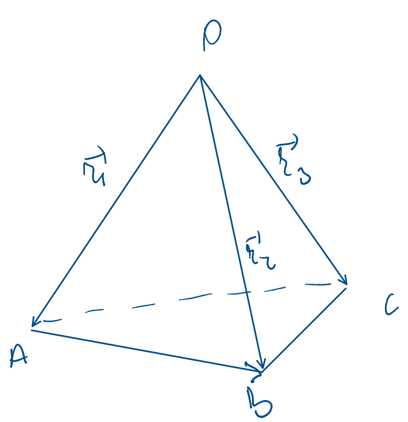
$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\vec{CA}\times\vec{CA}}_{\vec 0} + \vec{CA}\times\vec{AD} + \vec{AB}\times\vec{CA} + \vec{AB}\times\vec{AD}\Big]$$

$+$

$$S = \vec 0.$$

területével egyenlő, a zérus vektor.

30. Adott három vektor: $\vec{r_1} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r_2} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{r_3} = \overrightarrow{OC}$. Igazoljuk, hogy az $\vec R = \vec{r_1}\times\vec{r_2} + \vec{r_2}\times\vec{r_3} + \vec{r_3}\times\vec{r_1}$ vektor merőleges az (ABC) síkra.



$$\vec R = \vec r_1\times\vec r_2 + \vec r_2\times\vec r_3 + \vec r_3\times\vec r_1 \stackrel{?}{\perp} (ABC)$$

I. módszer (Sündisznó tétel)

$$\vec R + \vec{AC}\times\vec{AB} = \vec 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec R = -\vec{AC}\times\vec{AB}$$

$$= \vec{AB}\times\vec{AC} \perp (ACB)$$

II. módszer: $\vec{R} \perp (ABC) \iff \left(\vec{R} \perp AB \text{ és } \vec{R} \perp AC\right)$

$$\iff \left(\vec{R} \perp \overrightarrow{AB} \text{ és } \vec{R} \perp \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\iff \left(\vec{R} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ és } \vec{R} \cdot \overrightarrow{AC} = 0\right)$$

$$\vec{R} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1\right) \cdot \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)$$

$$= (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_2 - (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) \cdot \vec{r}_2 - (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) \cdot \vec{r}_1 + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{r}_2 - (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{r}_1$$

$$= \underbrace{(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_2)}_{0} - \underbrace{(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_1)}_{0} + \underbrace{(\vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_2)}_{0} - (\vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_1) + (\vec{r}_3, \vec{r}_1, \vec{r}_2) - \underbrace{(\vec{r}_3, \vec{r}_1, \vec{r}_1)}_{0}$$

$$= -(\vec{r}_3, \vec{r}_1, \vec{r}_2) + (\vec{r}_3, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0 \implies \vec{R} \perp \overrightarrow{AB}$$

hasonlóan $\vec{R} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\begin{cases} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) \end{cases}$$