Név: .... **Algebra vizsga** A

Csoport: **2023.01.21**

1. (0.7p) Az értelmezés alapján igazold, hogy az $\mathbb{R}^3$ valós vektortér $v_1 = (1,2,3)$ és $v_2 = (3,2,1)$ vektorai lineárisan függetlenek. A $B = (v_1, v_2)$ bázisa-e az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek?

2. (0.6p) Igazold, hogy $A = \{(\alpha, 2\beta, \alpha+\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ lineáris résztere és $B = \{(x,y,z) \mid xy \geq 0\}$ nem lineáris résztere az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérnek!

3. Adott az $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z,w) = (2x - 3y + 4w,\ -x + 3z + w)$ függvény.

(a) (0.5p) Igazold, hogy az f függvény lineáris!

(b) (0.3p) Írd fel az f függvény mátrixát az $\mathbb{R}^4$ valós vektortér $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, illetve az $\mathbb{R}^2$ valós vektortér $E' = (e'_1, e'_2)$ kanonikus bázisaiban!

(c) (0.8p) Add meg a $\ker f$ és $\operatorname{Im} f$ vektorterek egy-egy bázisát és határozd meg a dimenzióikat!

4. Adott az $\mathbb{R}^3$ vektortér $B' = ((1,-1,1),\ (0,1,-1),\ (0,1,0))$ bázisa és az $\mathbb{R}^2$ vektortér $B = ((4,11),\ (3,8))$ bázisa. Egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris függvény mátrixa a B és B' bázisokban $[f]_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) (0.4p) Írd fel a T_{EB} és $T_{E'B'}$ áttérési mátrixokat, ha E az $\mathbb{R}^2$ és E' az $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisa!

(b) (0.4p) Számold ki a $v = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ vektor koordinátáit a B bázisban!

(c) (0.2p) Határozd meg azt a $v' = (v'_1, v'_2, v'_3) \in \mathbb{R}^3$ vektort, amelyre $[v']_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$!

(d) (0.5p) Írd fel az $[f]_{E'E}$ mátrixot!

(e) (0.4p) Írd fel az f függvény képletét (indoklás)!

5. (1.5p) A táblázatos módszerrel számold ki az $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{4} & \hat{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$ mátrix inverzét és determinánsát!

6. (1.5p) A táblázatos módszerrel oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_4 + 5x_5 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -2x_2 + 13x_3 - 5x_4 - 6x_5 = -5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}.$$

7. Adott az $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrix.

(a) (0.4p) Írd fel az A mátrix karakterisztikus egyenletét és számítsd ki az A mátrix sajátértékeit!

(b) (0.8p) Számítsd ki az A mátrix sajátrésztereit!

(c) (0.2p) Határozd meg az A mátrix sajátértékeinek algebrai és geometriai multiplicitását!

(d) (0.8p) Diagonalizálható-e az A mátrix? Ha igen, akkor milyen diagonális mátrix konjugáltjaként áll elő, illetve számítsd ki az A mátrix n-dik hatványát!