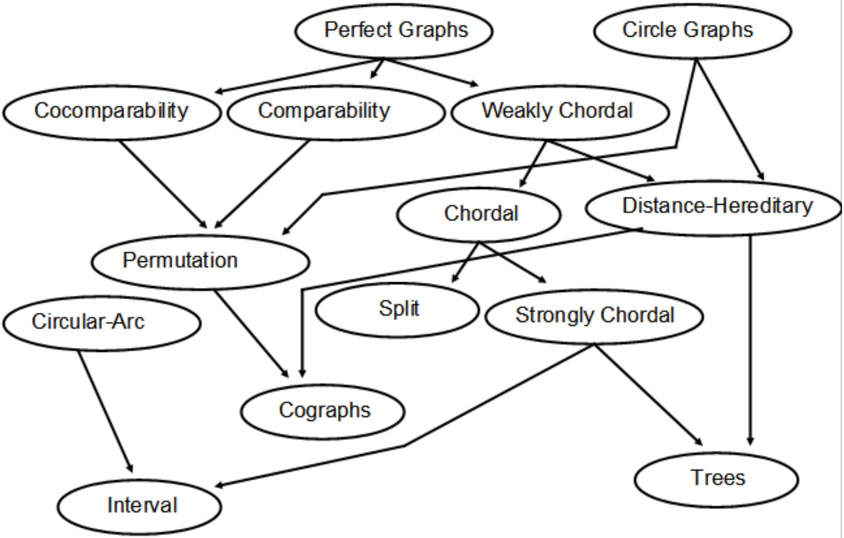
Gráfalgoritmusok

Gaskó Noémi

2023. május 23.

Tartalomjegyzék

Egy osztályozás



Osztályozási szempontok

-nagyon sok szempont szerint (pl. lokális struktúra)

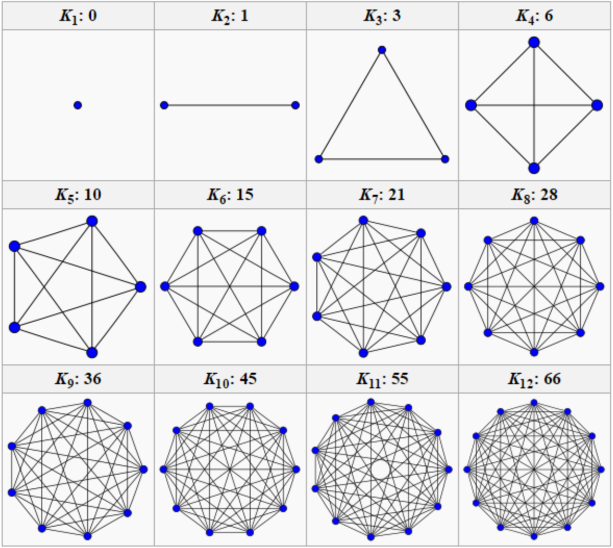
Pszeudográfok

- hipergráf
- kevert gráf
- stb.

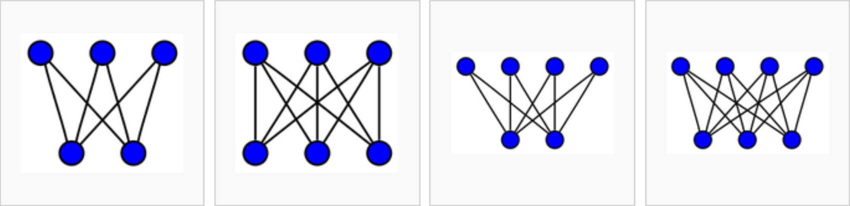
Egyszerű gráfok

lásd a következőket

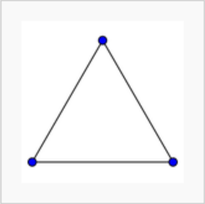
Teljes gráfok



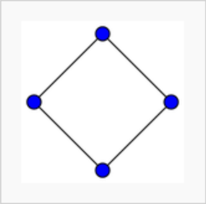
Teljes páros gráfok



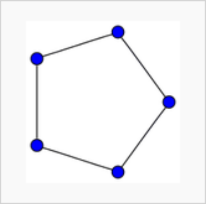
Ciklusgráfok



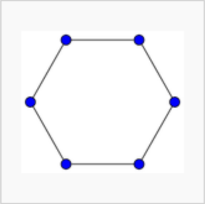
C_3



C_4

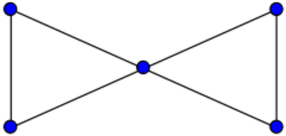


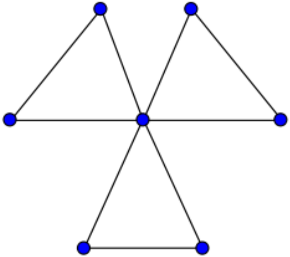
C_5

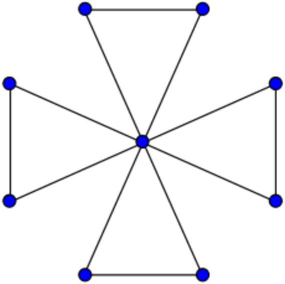


C_6

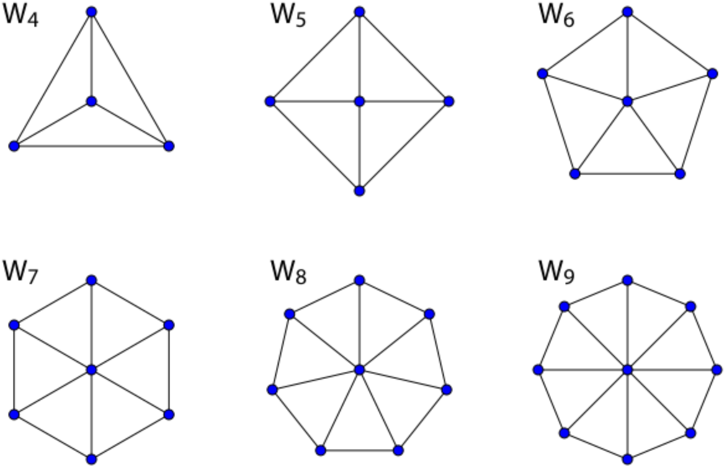
Barátság gráfok



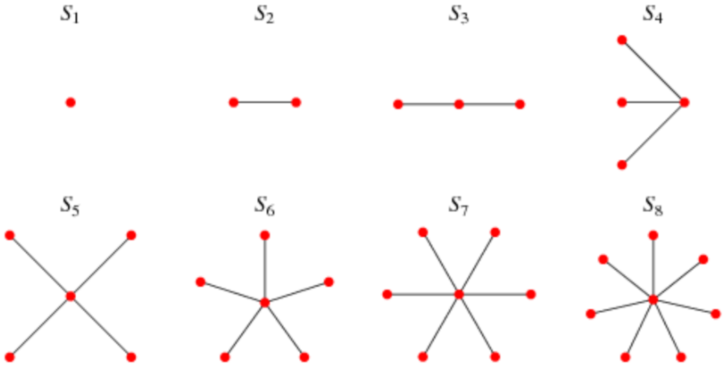




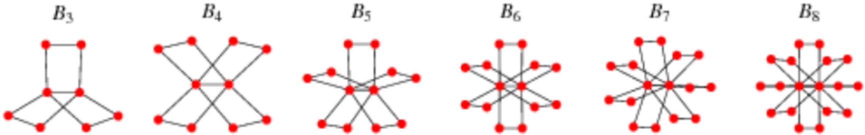
Kerék gráfok



Csillag gráfok



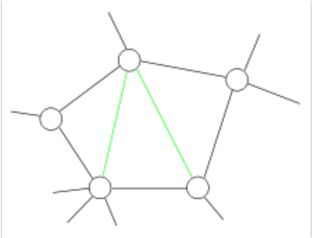
Könyv gráfok



m hosszú csillagok és élek

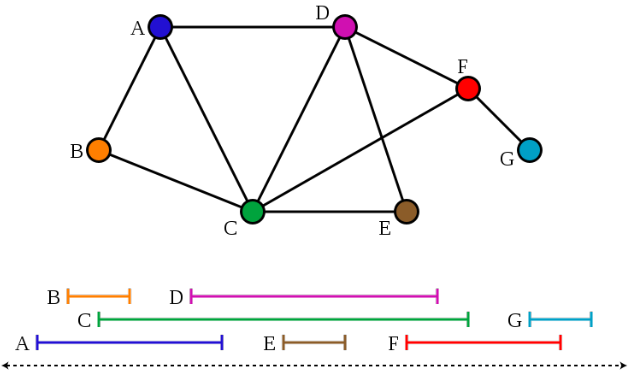
Húrgráfok

A húrgráf egy olyan gráf, amelyben minden legalább 4 hosszúságú körnek van egy húrja.



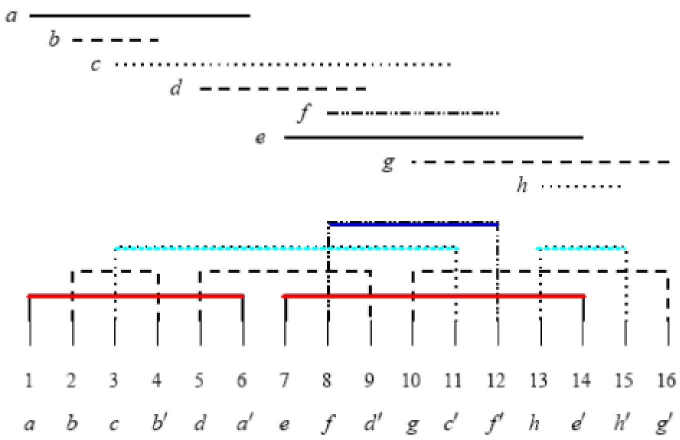
Intervallum gráfok

Minden intervallumnak megfelel egy csomópont.
Ha az intervallumok metszik egymást, akkor összekötjük egy éllel.



Az intervallumgráfok húrgráfok, valamint teljesítik a co-TRO tulajdonságot, azaz a komplementere tranzitiv.

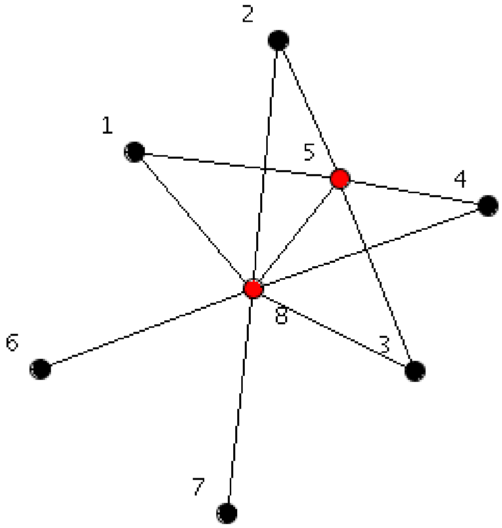
Intervallumgráf színezése



Küszöb gráfok

elõállítható egy csomópontból a következõ két művelet bármelyikének ismétlésével:

- A gráfhoz hozzáadunk egy izolált csúcsot;
- A gráfhoz hozzáadunk egy domináló csúcsot (tehát egy olyan csúcsot, ami minden más csúccsal össze van kötve);


2
1
5
4
8
6
3
7

Perfekt gráfok

Perfekt gráfok

Perfekt gráfnak nevezünk valamely gráfot, ha minden H feszített részgráfjának kromatikus száma és klikkszáma (a legnagyobb teljes részgráf csúcsainak száma) megegyezik.

Lovász tétele

Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.

Perfekt gráfok

Példák:

- teljes gráfok
- páros gráfok
- intervallumgráfok
- stb.

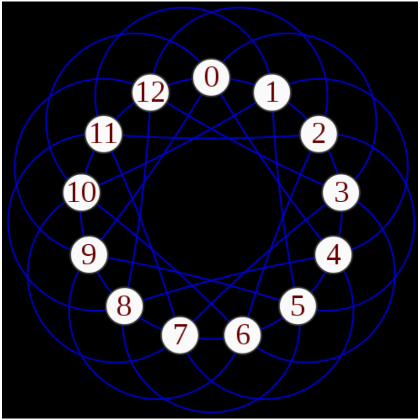
Erősen reguláris gráfok

Erősen reguláris gráf

Minden szomszédos csomópontnak λ közös szomszédja van, minden nem szomszédos csomópontnak μ közös szomszédja van.

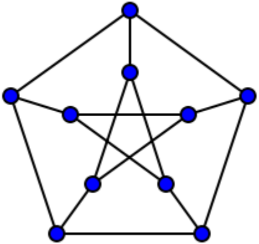
$srg(v, k, \lambda, \mu)$, ahol
v - a csomópontok száma
k - a pontok fokszámai

Paley gráf - srg(13,6,2,3)

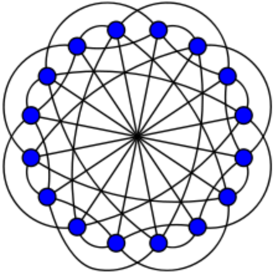


Erősen reguláris gráfok

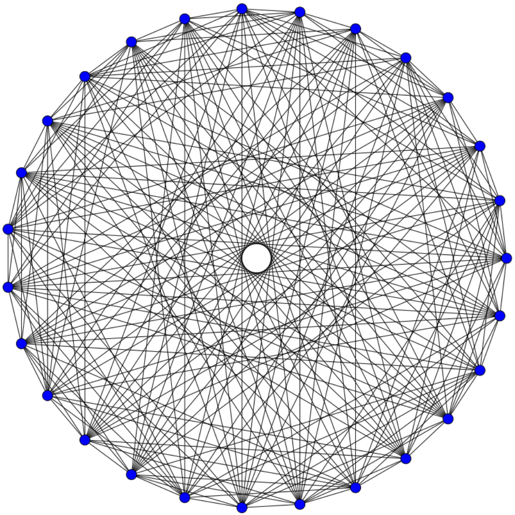
Petersen - srg(10,3,0,1)



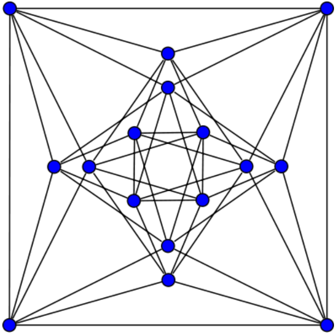
Clebsch - srg(16,5,0,2)



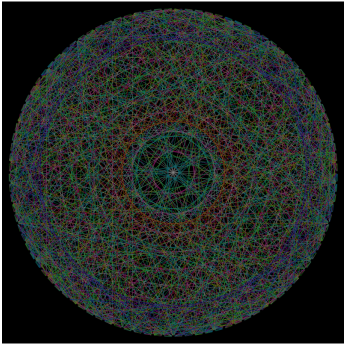
Schlafli - srg(27, 16, 10, 8)



Shrikrande -srg(16,6,2,2)



Higmann -Sims srg(100,22,0,6)

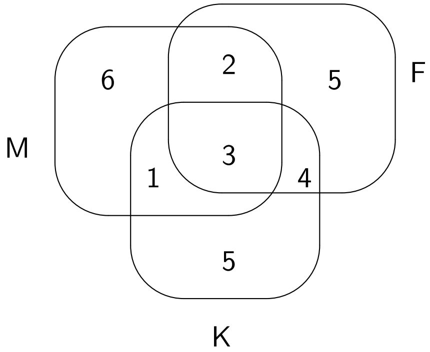


Szélsõérték

Egy osztályban 30 tanuló van. Ebbõl
12 szereti a linuxot,
14 a gráfelméletet,
13 az adatszerkezeteket.
Van 5, aki szereti a linux és a gráfelméletet;
4, aki szereti a linux és az adatszerkezeteket;
7, aki szereti a gráfelméletet és az adatszerkezeteket;
és 3 aki mindhárom tárgyat szereti.

Hány olyan tanuló van, aki egyik tárgyat sem szereti?

A fealdat megoldását szemléltethetjük a következõ ábrán, ahol mindegyik diákcsoportot egy-egy halmaz jelképez, amelyeket egy ellipszis formájú alakzattal ábrázoltunk. A három alakzat mrtszetébe 3-at írtunk, mivel hárman szeretik mindhárom tárgyat. A matematikát és fizikát 5 tanuló szereti, ezért a két alakzat metszete 5-öt kell, hogy tartalmazzon (a rajzon 2+3) és így tovább.



Az ábrán lévõ számokat összeadva, az kapjuk hogy

$$6 + 2 + 5 + 1 + 3 + 4 + 5 = 26$$

A 30-ból kivonva a 26-ot, az eredmény 4. Tehát azon tanulók száma, akik egyetlen tárgyat sem szeretnek, egyenlõ 4-gyel. Ezt így is írhatjuk:

$$30 - (12 + 14 + 13) + (5 + 4 + 7) - 3 = 4$$

Azaz, a 30-ból kivonjuk az egyes tárgyakat kedvelõk számát, de mivel ekkor bizonyos diákokat kétszer is kivontuk, a metszetek hozzáadjuk, majd kivonjuk azok számát, akik mindhárom tárgyat szeretik.

Általánosítva

Adott az A halmaz és az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ részhalmazai. $|A|$ az A számossága.
A azon elemeinek száma, amelyek nincsenek az A_i részhalmazokban $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$|A| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le < i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \tag{1}$$

Jelölés:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n.$$

A következõ képletek indukcióval bizonyíthatók:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n+1} |\bigcap_{i=1}^{n} A_i| \tag{2}$$

$$|\bigcap_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cup A_j| + \ldots + (-1)^{n+1} |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \tag{3}$$

(2) bizonyítása: n szerinti indukcióval. $n = 2$-re igaz:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|. \tag{4}$$

Az indukciós feltétel alapján:

$$|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i| = \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n-1} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n} |\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i|$$

Használjuk a következõ felbontást: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n$ és (4)-t:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right| +$$

$$+|A_n| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cap A_n \right| \tag{5}$$

Figyelembe véve, hogy

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n),$$

következik a bizonyítandó képlet.

Theorem (Zarankiewicz)

Ha az n csúcsú G egyszerû gráf nem tartalmaz teljes k csúcsú részgráfot, akkor a δ minimális fokszámra:

$$\delta \leq \left\lfloor \frac{(k-2)n}{k-1} \right\rfloor$$

Bizonyítás. Legyen $f = \left\lfloor \frac{(k-2)n}{k-1} \right\rfloor$. Ekkor:

$$(k-2)n = f(k-1) + r, \qquad \text{ahol } 0 \leq r < k-1 \tag{6}$$

Feltételezzük, hogy a $G = (V, E)$ gráf kielégíti a tétel feltételeit, de minden csúcsának a foka legalább $f + 1$.

Legyen $x_1 \in V$ és $x_2 \in N(x_1)$, ekkor

$$|N(x_1) \cap N(x_2)| = |N(x_1)| + |N(x_2)| - |N(x_1) \cup N(x_2)| \geq$$

$$\geq (f+1) + (f+1) - n = 2(f+1) - n > 0$$

$2(f+1) - n > 0$ bizonyítására (6)-ból n-re kapjuk, hogy:

$$n < \frac{(f+1)(k-1)}{k-2} = (f+1)\left(1 + \frac{1}{k-2}\right) \tag{7}$$

Ha $k \geq 3$, akkor $n < 2(f+1)$.

Tehát létezik $x_3 \in N(x_1) \cap N(x_2)$ ($k > 3$). Hasonlóképpen:

$$|N(x_1) \cap N(x_2) \cap N(x_3)| \geq 3(f+1) - 2n > 0$$

Ez szintén (7)-bõl következik, ha $k \geq 4$.
Következik, hogy

$$|N(x_1) \cap \ldots N(x_{k-1})| = |N(x_1)| + |\bigcap_{j=2}^{k-1} N(x_j)| -$$

$$-\left|N(x_1) \cup \left(\bigcap_{j=2}^{k-1} N(x_j)\right)\right| \geq (f+1) + (k-2)(f+1) - (k-3)n - n =$$

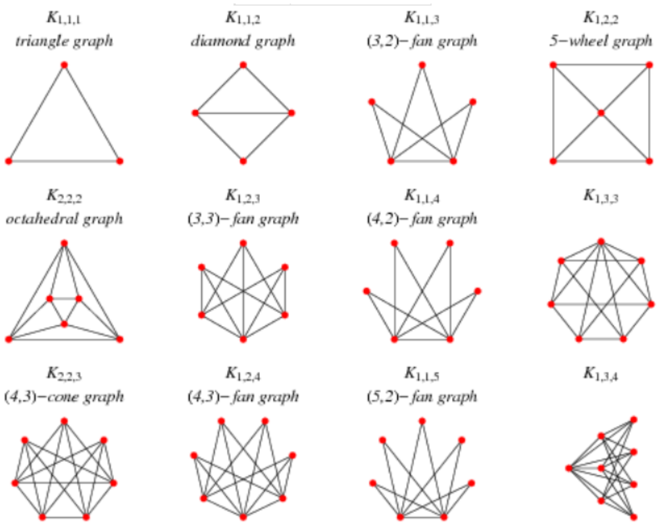
$$= (k-1)(f+1) - (k-2)n = (k-1)(f+1) - f(k-1) - r =$$

$$= k - 1 - r > 0$$

Tehát $x_k \in N(x_1) \cap N(x_2) \cap \ldots \cap N(x_{k-1})$, de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ egy k csúcsú teljes részgráf csúcsai. Ez az ellentmondás bizonyítja a tételt.

A k-részes gráf a páros gráf általánosítása: k darab, független csúcsokból álló halmaz, amelyben élek csak ezen halmazok között vannak.
$K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ teljes k-részes gráf.

Példa:


$K_{1,1,1}$
triangle graph
$K_{1,1,2}$
diamond graph
$K_{1,1,3}$
(3,2)− fan graph
$K_{1,2,2}$
5−wheel graph
$K_{2,2,2}$
octahedral graph
$K_{1,2,3}$
(3,3)− fan graph
$K_{1,1,4}$
(4,2)− fan graph
$K_{1,3,3}$
$K_{2,2,3}$
(4,3)−cone graph
$K_{1,2,4}$
(4,3)− fan graph
$K_{1,1,5}$
(5,2)− fan graph
$K_{1,3,4}$

Extrém gráfok

Theorem (Turán)

Egy n csúcsú egyszerû gráf, amely nem tartalmaz $(k+1)$ csúcsú teljes részgráfot, legfeljebb

$$e \leq \frac{1}{2}\left(n^2 - r^2\right)\frac{k-1}{k} + \frac{r(r-1)}{2}$$

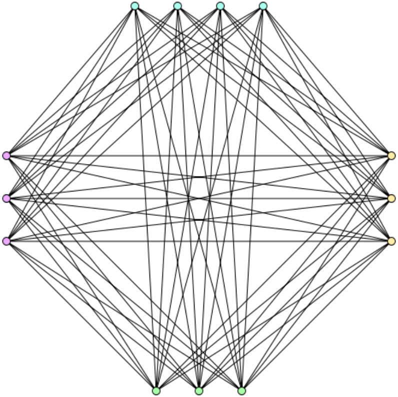
élt tartalmazhat, ahol $n = hk + r$, $0 \leq r < k$.
Extrém gráf (amelyre fennáll az egyenlõség): $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, ahol r független csúcshalmaz $h+1$ csúcsból áll és $k-r$ független csúcshalmaz h csúcsból áll (Tehát, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ közül r egyenlõ $(h+1)$-gyel és $k-r$ egyenlõ h-val).

Példa.

Legyen $n = 7$, $k = 3$, és mivel $7 = 2 \cdot 3 + 1$, akkor $h = 2$ és $r = 1$.
$n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 2$, és az extrém gráf $K_{3,2,2}$

Extrém gráfok (folyt.)

Olyan maximális méretû gráfok, melyek bizonyos tulajdonságot teljesítenek.
Például: $T(n, r)$ Turán gráf, amely a lehetõ legtöbb élt tartalmazza, anélkül, hogy (r+1)-klikket tartalamzzon.



Extrém gráfok

- Ramsey számok

Extrém gráfok

- Ramsey számok
- Turan gráfok $T(n, r)$ - n csomópont, (r+1)-klikk nélkül

Extrém gráfok

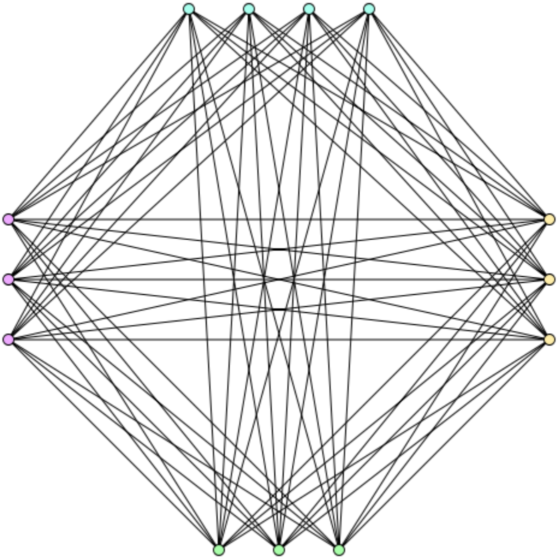
Extremális gráfelmélet (1907): Melyik az a legkisebb gráf amely tartamaz egy háromszöget? (1907)

Extrém gráfok

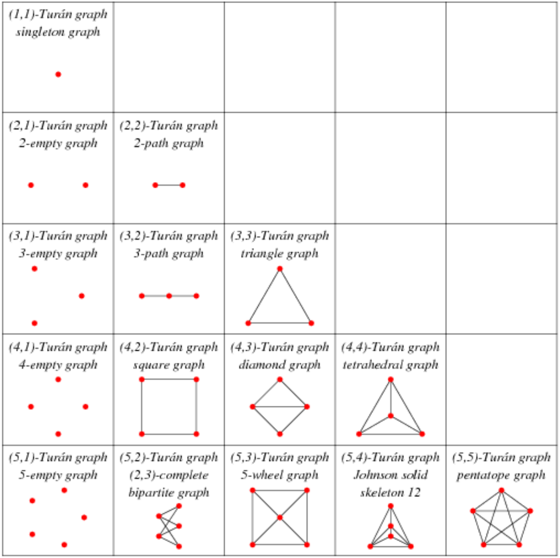
Extremális gráfelmélet (1907): Melyik az a legkisebb gráf amely tartamaz egy háromszöget? (1907)

Ekvivalens kijelentés:
Melyik az a legnagyobb gráf, amely nem tartalmaz háromszöget.

1941: Turán általánosítása: K_r keresése



Turan gráf


(1,1)-Turán graph
singleton graph
(2,1)-Turán graph
2-empty graph
(2,2)-Turán graph
2-path graph
(3,1)-Turán graph
3-empty graph
(3,2)-Turán graph
3-path graph
(3,3)-Turán graph
triangle graph
(4,1)-Turán graph
4-empty graph
(4,2)-Turán graph
square graph
(4,3)-Turán graph
diamond graph
(4,4)-Turán graph
tetrahedral graph
(5,1)-Turán graph
5-empty graph
(5,2)-Turán graph
(2,3)-complete
bipartite graph
(5,3)-Turán graph
5-wheel graph
(5,4)-Turán graph
Johnson solid
skeleton 12
(5,5)-Turán graph
pentatope graph

Moore gráf

(v, g), reguláris v fokú
g-legrövidebb kör
Csomópontok száma:

$$n(v,g) = \begin{cases} 1 + (v-1)^{g/2-1} + v \sum_{r=0}^{(g-4)/2} (v-1)^r & \text{for } g \text{ even} \\ 1 + v \sum_{r=0}^{(g-3)/2} (v-1)^r & \text{for } g \text{ odd} \end{cases}$$

Moore gráf

(v, g), reguláris v fokú
g-legrövidebb kör
Csomópontok száma:

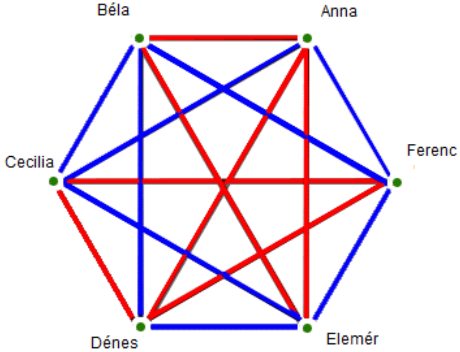
$$n(v,g) = \begin{cases} 1 + (v-1)^{g/2-1} + v \displaystyle\sum_{r=0}^{(g-4)/2} (v-1)^r & \text{for } g \text{ even} \\ 1 + v \displaystyle\sum_{r=0}^{(g-3)/2} (v-1)^r & \text{for } g \text{ odd} \end{cases}$$

Példa: (3,5) - Petersen gráf

Ramsey: Egy elég nagy rendszerben, mégha rendezetlen is kell lenni valamilyen rendnek.

Legalább hány fõs kellene legyen egy társaság,hogy bizotsan legyen közöttük 3 ember aki ismeri egymást vagy három ember aki nem ismeri egymást?

Anna, Béla, Cecília, Dénes, Elemér és Ferenc egy buliban vannak. Mutassuk ki, hogy biztos, hogy van közöttük három aki ismeri egymást, vagy három, aki nem.


Béla
Anna
Cecilia
Ferenc
Dénes
Elemér

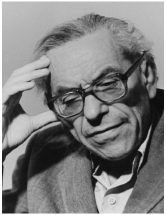
Értelmezés

Legyen $R(m,k)$ a legkisebb olyan természetes szám, amelyre egy $n \geq R(m,k)$ csúcsal rendelkezõ gráfban van K_m részgráf vagy a komplementerében van K_k részgráf.

Értelmezés - extrém gráf

Extrém gráf az olyan n-1 csúcsú gráfok, aemlyekre ez a fenti tulajdonság nem teljesül.

Erdõs Pál: Képzeljük el, hogy az embernél sokkal hatalmasabb idegen faj landol a Földön, és az $R(5,5)$ értékét követelik, vagy elpusztítják a bolygót. Ebben az esetben hadra kéne fognunk minden számítógépet és matematikust, hogy megtaláljuk az értéket. De tegyük fel, hogy ehelyett az $R(6,6)$ értékére kíváncsiak; ebben az esetben minden erõnkkel meg kéne próbálnunk legyõzni õket.



Könnyû belátni, hogy:

- $R(1,k) = R(k,1) = 1$
- $R(2,k) = R(k,2) = k$
- $R(n,k) = R(k,n)$

Tétel

Ha $R(m-1,k)$ és $R(k,m-1)$ is létezik, akkor $R(m,k)$ is létezik, és:

$$R(m,k) \leq R(m-1,k) + R(m,k-1)$$

Erdõs- Szekeres tétel

$$R(m,k) \leq C_{m+k-2}^{m-1}$$

Bizonyítás

indukció segítségével

Egyéb korlátok

Erdõs

$$R(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$$

Egyéb korlátok

Erdős

$$R(k,k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$$

Thomason, 1987

$$R(k,k) \leq \frac{1}{\sqrt{a}} C_{2a-2}^{a-1}$$

$R(3,3) = 6$

Bizonyítás

$R(3,3) > 5$

$R(3,4) = 9$

Ismert értékek

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	[40,43]
4		18	25	[35,41]	[49,61]	[56,84]	[73,115]	[92,149]
5			[43,49]	[58,87]	[80,143]	[101,216]	[125,316]	[143,442]
6				[102,165]	[113,298]	[127,495]	[169,780]	[179,1171]
7					[205,540]	[216,1031]	[233,1713]	[232,2826]
8						[282,1870]	[317,3583]	[377,6090]
9							[565,6588]	[580,12677]
10								[798,23556]

$R(19,19) =?$

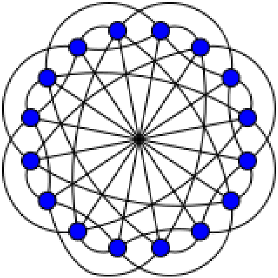
Ismert értékek

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	[40,43]
4		18	25	[35,41]	[49,61]	[56,84]	[73,115]	[92,149]
5			[43,49]	[58,87]	[80,143]	[101,216]	[125,316]	[143,442]
6				[102,165]	[113,298]	[127,495]	[169,780]	[179,1171]
7					[205,540]	[216,1031]	[233,1713]	[232,2826]
8						[282,1870]	[317,3583]	[377,6090]
9							[565,6588]	[580,12677]
10								[798,23556]

$R(19, 19) = ?$
$17885 \leq R(19, 19) \leq 9075135299$
Komputacionális megközelítés?

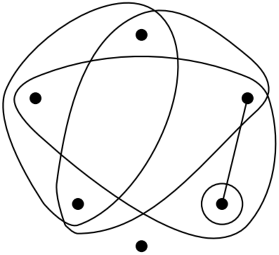
Általános eset

$R(k_1, k_2, ..., k_n)$
Példa: $R(3, 3, 3) = 17$



Hipergráfok

-Általánosított gráfok



Hipergráf értelmezése

Egy $H = (X, D)$ párt, ahol $X = \{x_1, x_2, ...x_n\}$ a csomópontok halmaza, $D = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$ az X részhalmazainak halmaza, a hiperélek halmaza.

Értelmezések

Hipergráf rendje

$|X| = n$ a hipergáf rendje.

Értelmezések

Hipergráf rendje

$|X| = n$ a hipergáf rendje.

Szomszédos csomópontok

Két csomópont szomszédos, ha ugyanazon a hiperélen fekszenek.

Értelmezések

Hipergráf rendje

$|X| = n$ a hipergáf rendje.

Szomszédos csomópontok

Két csomópont szomszédos, ha ugyanazon a hiperélen fekszenek.

Szomszédos hiperélek

Két hiperél szomszédos, ha metszetük nem üreshalmaz.

Értelmezések

Hipergráf rendje

$|X| = n$ a hipergáf rendje.

Szomszédos csomópontok

Két csomópont szomszédos, ha ugyanazon a hiperélen fekszenek.

Szomszédos hiperélek

Két hiperél szomszédos, ha metszetük nem üreshalmaz.

Csomópont fokszáma

$|D(x)|$ az x csomópont fokszáma, ahol $|D(x)|$ az összes hiperélt x-hez tartozó hiperélt tartalmazza.

Értelmezések

k-reguláris

Minden csomópont fokszáma k.

Értelmezések

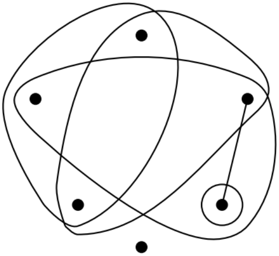
k-reguláris

Minden csomópont fokszáma k.

Egy hipergráf rangja

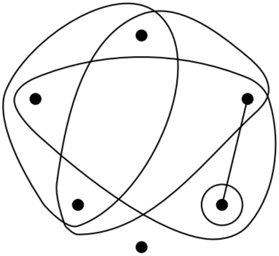
Egy hipergráf rangján a hiperéleinek a számát értjük.

Egy példa



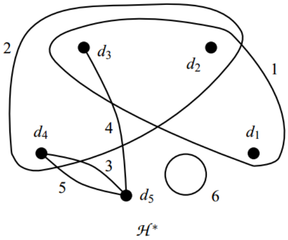
$H = (X, D)$, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $D = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$, $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{1, 2\}$, $D_3 = \{1, 2, 4\}$, $D_4 = \{2, 3, 5\}$, $D_5 = \{3, 4, 5\}$

Egy példa

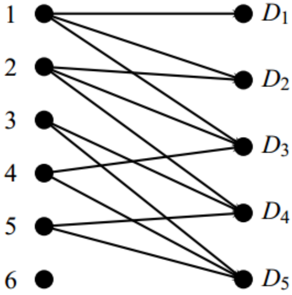


$H = (X, D)$, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $D = \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5\}$, $D_1 = \{1\}$, $D_2 = \{1, 2\}$, $D_3 = \{1, 2, 4\}$, $D_4 = \{2, 3, 5\}$, $D_5 = \{3, 4, 5\}$ Mennyi a hipergráf rendje?

Hipergráf duálisa

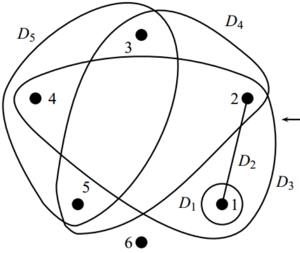


Hipergráf ábrázolása páros gráfként



$B(\mathcal{H})$

Hipergráfok ábrázolása



$\mathcal{H} = (X, \mathcal{D})$

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1	1	1	1	0	0
2	0	1	1	1	0
3	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	1
5	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0

$I(\mathcal{H})$

Más ábrázolásmód: lista, adjacencia mátrix

Egyéb fogalmak

Fokszám egyenlõség

Egy $H = (X, D)$ hipergráf esetén a csomópontok fokszámának az összege egyenlõ az élekhez tartozó csomópontok számának az összegével.

Egyéb fogalmak

Fokszám egyenlõség

Egy $H = (X, D)$ hipergráf esetén a csomópontok fokszámának az összege egyenlõ az élekhez tartozó csomópontok számának az összegével.

Utak

A $H = (X, D)$ hipergráfban az $x_0 D_0 x_1 ... x_{l-1} D_l x_l$

Egyéb fogalmak

Fokszám egyenlõség

Egy $H = (X, D)$ hipergráf esetén a csomópontok fokszámának az összege egyenlõ az élekhez tartozó csomópontok számának az összegével.

Utak

A $H = (X, D)$ hipergráfban az $x_0 D_0 x_1 ... x_{l-1} D_l x_l$

Összefüggõ hipergráf

Egy hipergráf összefüggõ, ha bármely két csomópontja között létezik út.

Egyéb fogalmak

Fokszám egyenlõség

Egy $H = (X, D)$ hipergráf esetén a csomópontok fokszámának az összege egyenlõ az élekhez tartozó csomópontok számának az összegével.

Utak

A $H = (X, D)$ hipergráfban az $x_0 D_0 x_1 ... x_{l-1} D_l x_l$

Összefüggõ hipergráf

Egy hipergráf összefüggõ, ha bármely két csomópontja között létezik út.

Páros hipergráf

A csomópontjai két diszjunkt halmazra oszthatóak, úgy hogy egy hiperél a két halmazból tartalmaz csomópontokat.

Egyéb fogalmak

Hipergráfok izomorfizmusai

Két hipergráf izomorf, ha egy egyértelmû megfeleltetés van közöttük.

Egyéb fogalmak

Hipergráfok izomorfizmusai

Két hipergráf izomorf, ha egy egyértelmû megfeleltetés van közöttük.

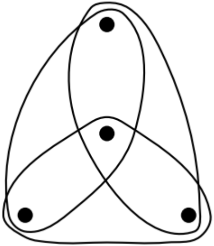
Alhipergráf

A $H' = (X', D')$ a $H = (X, D)$ hipergráf alhipergráfja, ha $X' \subseteq X$ és $D' \subseteq D$.

Egyensúlyozott hipergráf

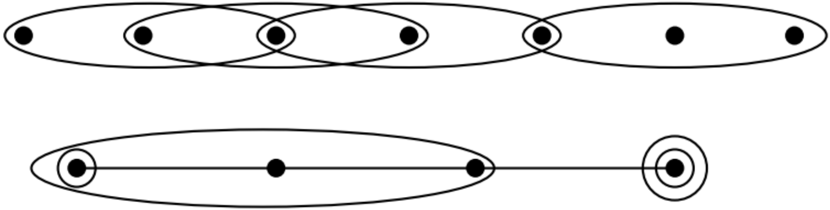
Egyensúlyozott hipergráf

Egy H hipergráf egyensúlyozott, ha minden legalább 3 hosszúságú páratlan körének van olyan hiperéle, amely 3 csomópontot tartalmaz.



Intervallum gráf

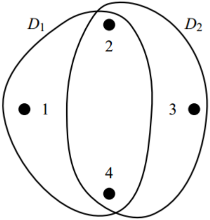
-sorba rendezhetõek

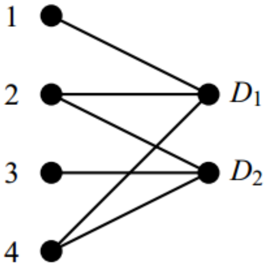


Sikba rajzolható hipergráf

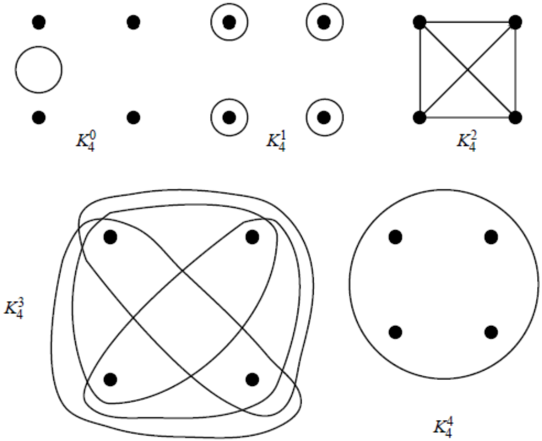
Sikba rajzolható hipergráf

Egy hipergráf síkba rajzolható, akkor és csakis akkor ha a páros gráf, amely a csúcsokat és éleket ábrázolja síkba rajzolható.




1
2
3
4
D_1
D_2

Teljes hipergráf



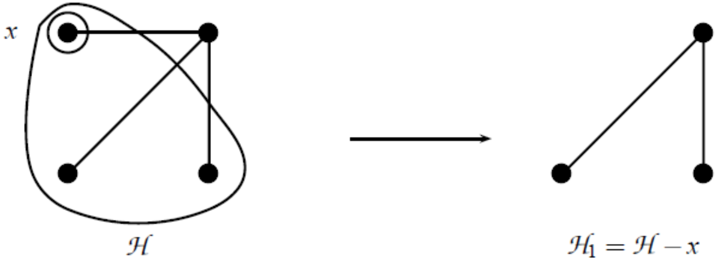
Húr hipergráf

Húr hipergráf

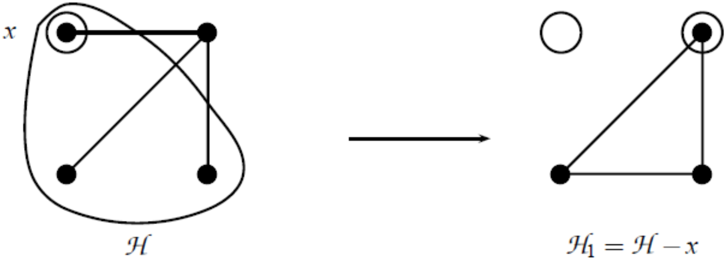
Egy hipergráfot húr hipergráfnak nevezünk, ha minden 4-nél nagyobb hosszúságú körének van két szomszédos éle.

Alapműveletek

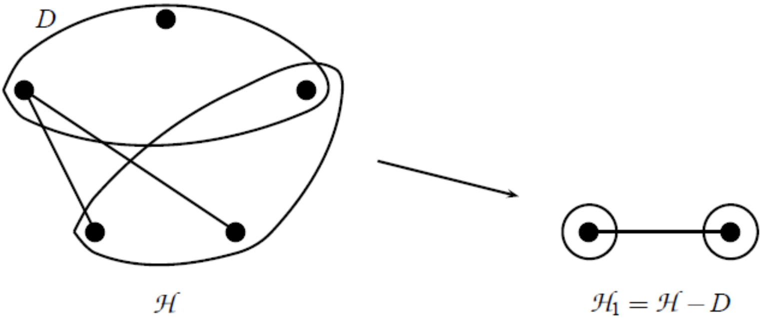
Csomópont erős törlése: A $H = (X, D)$ esetén $x \in X$ törlése azt jelenti, hogy kivesszük x-t a hozzá tartozó élekkel együtt.



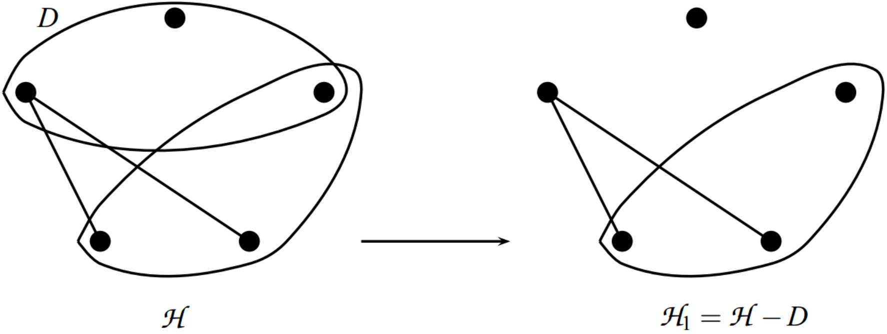
Csomópont gyenge törlése: csak x-t vesszük ki



Él erős törlése



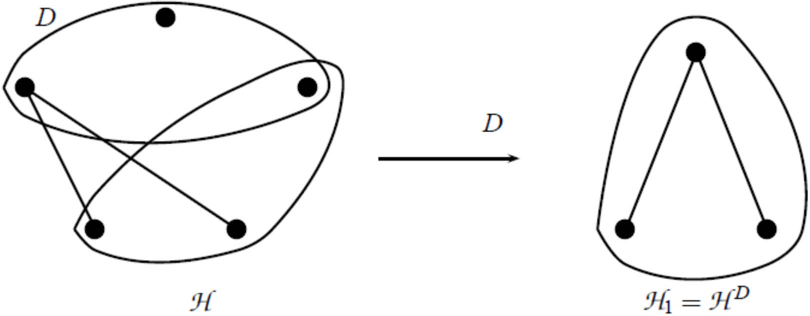
Él gyenge törlése:



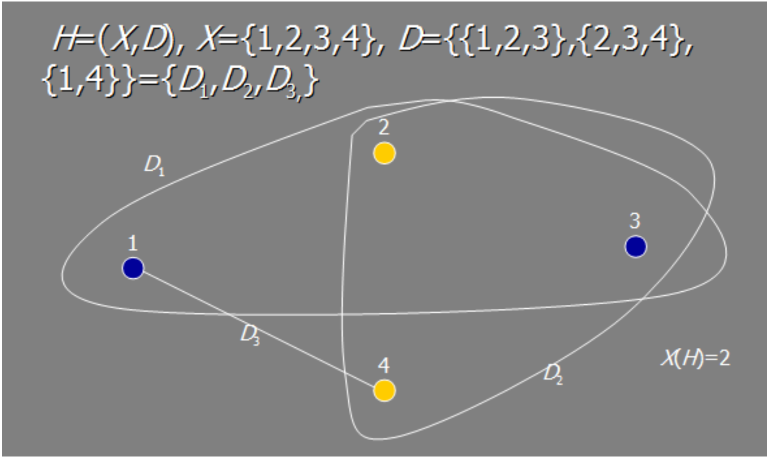
Hipergráf összehúzása

Két lépés:

1. gyengén kitörüljük a D-t
2. a D összes pontját egy ponttal helyettesítjük, úgy hogy $D' \cap D = \emptyset$



Hipergráf színezése



Hipergráfok színezése

- Gyenge színezés - hipergráfban

Hipergráfok színezése

- Gyenge színezés - hipergráfban
- Kevert színezés - hipergráf egy változatában

Gyenge színezés

λ színezésnek nevezünk egy olyan színezést, amely a $H = (X, D)$ esetén kiszinezi a hipergráf csúcsait a $\{1, 2, , .., \lambda\}$ színekkel úgy hogy minden $D' \in D$ esetén, ahol $|D'| \geq 2$ legalább 2 csomópontnak különböző a színe.

Néhány értelmezés:

Monocsillag

Egy olyan csillagot, melynek egy centruma van, monocsillagnak nevezzük. Az x csomópont mono-fokszáma azon élek száma, melyeknek x a központja.

Mono-fokszám

A H hipergráf $m(x, H)$ mono-fokszáma a $D_1(x) \subseteq D(x)$ maximum száma, úgy hogy:

$$D_i, D_j \in D_1(x) \Rightarrow D_i \cap D_j = \{x\}$$

Gyenge színezés

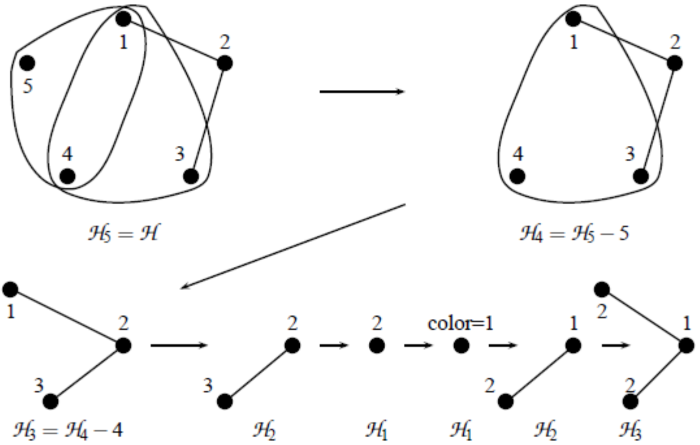
Az algoritmus:

1. keressük meg a legkisebb mono-fokszámú csomópontot.
2. $i = i - 1$, ha $i = 0$ akkor 5. lépés
3. erősen törüljük x_{i+1}-t
4. az új hipergráfban keressük meg a legkisebb mono-fokszámú csomópontot, majd mejünk a 2. lépéshez
5. szinezzük ki x_1-t ay első színnel, $i = 1$.
6. $i = i + 1$, ha $i = n + 1$, akkor menj a 8. lépéshez
7. színezd ki x_i-t a H_i-ből a lehető legkisebb színnel, majd menj a 6. lépéshez

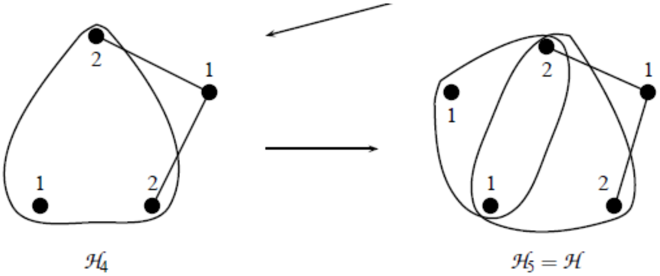
8.vége

Egy példa

1. lépés: $m(1,H)=2$, $m(2,H)=2$, $m(3,H)=2$, $m(4,H)=1$, $m(5,H)=1$.



Egy példa (folyt.)



Kevert hipergráfok színezése

Kevert hipergráf

Kevert hipergráfnak nevezzük a $H = (X, C, D)$, ahol X a csomópontok halmaza, C a C-élek halmaza, D pedig a D-élek halmaza.

Mit jelent a színezés ebben az esetben?

Kevert hipergráfok színezése

Kevert hipergráf

Kevert hipergráfnak nevezzük a $H = (X, C, D)$, ahol X a csomópontok halmaza, C a C-élek halmaza, D pedig a D-élek halmaza.

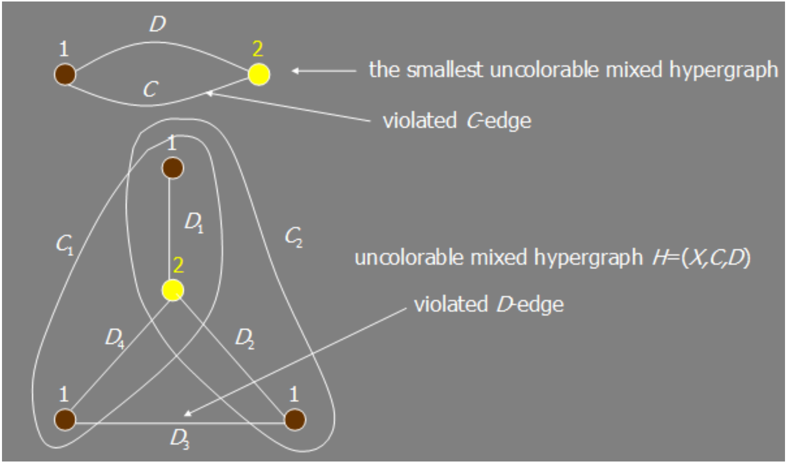
Mit jelent a színezés ebben az esetben?

λ-színezés

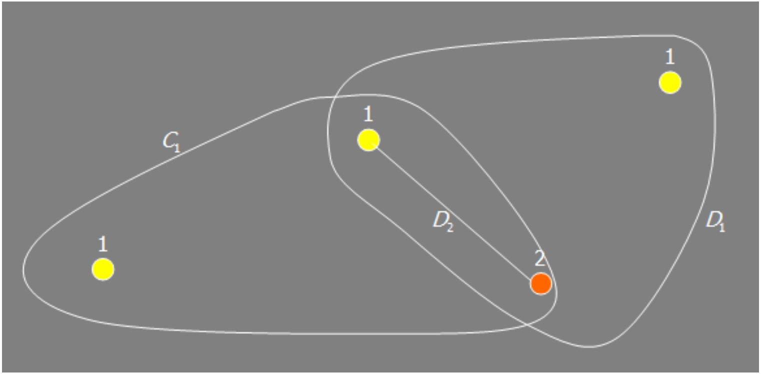
A következő két feltétel kell teljesüljön:
1. minden $C' \in C$ élnek legalább két csomópontja van, amelynek ugyanaz a színe
2. minden $D' \in D$ élnek legalább két csomópontja van, amelynek különböző a színe

Kevert színezés

Nem színezhető gráfok



Példa jó színezésre



Hipergráfok alkalmazásai

Számítástehnikában:

- matematika: a csomópontok számok, a hiperélek a közös osztókat tartalmazzák

Hipergráfok alkalmazásai

Számítástehnikában:

- matematika: a csomópontok számok, a hiperélek a közös osztókat tartalmazzák
- genetika: a csomópontok fajok, a hiperélek az egymással összefüggõ fajok
- a csomópontok fájlok egy adatbázisban, az élek azok a fájlok, melyek egy lekérdezéshez szükségesek

Hipergráfok alkalmazásai

Számítástehnikában:

- matematika: a csomópontok számok, a hiperélek a közös osztókat tartalmazzák
- genetika: a csomópontok fajok, a hiperélek az egymással összefüggõ fajok
- a csomópontok fájlok egy adatbázisban, az élek azok a fájlok, melyek egy lekérdezéshez szükségesek
- a csomópontok elemek egy relációs adatbázisban, az élek pedig azon elemeket köti össze, amelyek egy lekérdezésben visszatérítődnek

Irásbeli vizsga

Mi lesz a vizsgán?
minden fejezetet átölel

Mi nem lesz a vizsgán?

- A* algoritmus, best-first search algoritmus
- színezésnél: Kempe algoritmusa
- folyamfeladatoknál: Bolykov-Kolmogorov algoritmus
- Hamilton gráfok: TSP megoldása természetből inspirált algoritmusokkal (genetikus algoritmus)
- hálózatok tulajdonságai: sajátérték együttható, Katz, Bonacich együttható, hálózat sugara

A gráfelmélet történetébõl

Az első gráfelméleti feladat a 18. századba nyúlik vissza (az ún, königsbergi hidak problémája).

A 19. század közepén *Francis Guthrie* (1831–1899) dél-afrikai matematikus és botanikus vetette fel azt, hogy egy térkép országai négy színnel kifesthetők úgy, hogy a szomszédos országok különböző színűek legyenek. A sejtést sokan próbálták bizonyítani, de ez csak 1976-ban sikerült *Kenneth Appel* (1932–2013) és *Wolfgang Haken* (1928) matematikusoknak. A bizonyítás sok kérdést felvet, mivel számítógép segítségével történt, és ellenőrzésére is több százórás gépidő szükséges.

Az első gráfelméleti könyvet *Kőnig Dénes* (1884–1944) budapesti műegyetemi tanár írta, és 1936-ban jelent meg Lipcsében (*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, 1990-ben lefordították angolra). A második világháború után a gráfelemélet rohamosan fejlődött, és ma már se szeri, se száma a gráfelméleti könyveknek és folyóiratoknak.

Fontos kiemelni két nevet: *Claude Berge* (1926–2002) francia és *Frank Harary* (1921–2005) amerikai matematikus nevét, akik több meghatározó gráfelméleti könyvet írtak.

A magyar matematikusok jelentős mértékben kivették részüket a gráfelmélet fejlesztésében. Kőnig Dénesen kívül meg kell említeni *Erdős Pál* (1913–1996), *Turán Pál* (1910-1976), *Rényi Alfréd* (1921–1970) nevét, akik nélkül ma a gráfelmélet sokkal szegényebb lenne.

A magyar módszer (a maximális párosítás megoldására) *Kőnig Dénes* és *Egerváry Jenő* (1891–1958) munkássága révén kapta ezt a nevet.

Turán Pál 1941-ben közölte magyarul azt a cikkét, amely megalapozta a Turán-féle extrémgráf problematikát. A cikket 1960-ban angolul is megjelentették.

Erdős Pál és *Rényi Alfréd* nevéhez fűződik a véletlen gráfok tanulmányozása, amelyeknek ma nagy szerepük van az internetszerű nagy gráfok vizsgálatában.
Barabási Albert László (1967) erdélyi származású fizikus kezdeményezte a hálózatok gráfelméleti vizsgálatát.
Jelentős eredményeket értek el a következő magyar matematikusok is: *Gallai Tibor* (1912–1992), *Lovász László* (1948), *T. Sós Vera* (1930), *Hajnal András* (1931), *Katona Gyula* (1941), *Szemerédi Endre* (1940), *Bollobás Béla* (1943), *Simonovits Miklós* (1943), *Babai László* (1950) stb.

Nyílt problémák

a következő honlapon: http://www.math.illinois.edu/dwest/openp/

Nyílt problémák

a következő honlapon: http://www.math.illinois.edu/dwest/openp/

Példák:

- Erdős-Gyárfás sejtés: Minden olyan gráfban, melyben a minimális fokszám 3 létezik egy olyan kör, melynek a hossza 2 hatványa.

Nyílt problémák

a következő honlapon: http://www.math.illinois.edu/dwest/openp/

Példák:

- Erdős-Gyárfás sejtés: Minden olyan gráfban, melyben a minimális fokszám 3 létezik egy olyan kör, melynek a hossza 2 hatványa.
- Caccetta-Häggkvist sejtés: Minden egyszerű n csomópontú gráf, legkisebb r kimeneti fokszámmal tartalmaz egy kört, melynek a hossza maximum n/r.

A gráfelmélet himnusza

Bohdan Zelinka verse

Állott hét híd a Pregel folyóján,
akkortájt ez nem csekélység volt ám;
Königsbergben büszke sok tanácsos,
ennyi híddal hogy ékes a város.

Alkonyatkor kavarog a népség,
és fejükben hánytorog a kétség:
hogy' lehetne jó utat találni,
minden hídon egyszer általjárni.

A gráfelmélet himnusza (2)

Mind a hét híd egyszer essen útba,
séta végén otthon lenni újra;
de a jó út valahol hibázik,
egy híd mindig fölös vagy hiányzik.

Refrén:
Euleri gráf: minden foka páros,
és a tétel mindörökre áll most;
gráfokról ez állítás
a világnak õsforrás.

A gráfelmélet himnusza (3)

Él egy ember, gondoljunk csak rája,
itt minálunk, nincs tudásban párja;
úgy érti a számolást és mérést,
hogy elébe kell tárni a kérdést.

Euler mester fejét búsan rázza:
„Oly talány ez, nincsen megoldása;
nincs oly út, mint uraságtok kérik,
amely minden hidat egyszer érint.
Refrén:
Euleri gráf: . . .

A gráfelmélet himnusza (4)

Érckemény a tudományos tétel,
mit sem kezdhet ellene a kétely;
árad a víz, szilárd a híd rajta,
még erõsb a tudomány hatalma."

Háború jött a Pregel folyóra,
minden hídját ízzé-porrá szórta;
nemzedékek hosszú során fénylik
Euler és a folyó neve végig.
Refrén:
Euleri gráf:...

A gráfelmélet himnusza (5)

Euler híre nem ér addig véget,
míg csak élni fog a gráfelmélet;
s egyik évre amint jön a másik,
az elmélet mind jobban virágzik.

Jó kollégák, töltsük meg a kelyhet,
Áldomásra mind emeljük feljebb:
nekünk a gráfelmélet oly drága,
hadd teremjen sok-sok szép virága!

Forrásanyag

- Vitaly Voloshin, Introduction to Graph and Hypergraph Theory, 2013
- Jean Claude Fournier, Graph Theory and Applications, 2009
- Santana Sahu Ray, Graph Theory with Algorithms and its Applications, Springer, 2013