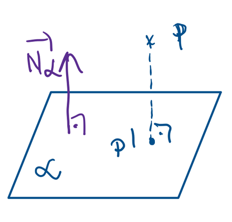
16. Határozzuk meg a $P(5,2,1)$ pontnak az $x+y-2z=-5$ síkra eső vetületét!



$PP' \perp \alpha,\ P' \in \alpha \Rightarrow P' \overset{\text{def}}{=} pr_\alpha(P)$

$P' = ?$

$\left.\begin{array}{l} PP' \parallel \vec{N}_\alpha(1,1,-2) \\ P(5,2,1) \in PP' \end{array}\right| \Rightarrow PP': \frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2}$

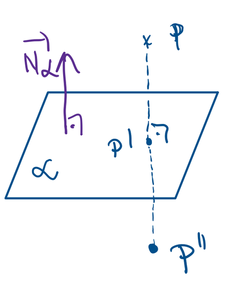
$\Rightarrow \{P'\} = PP' \cap \alpha : \begin{cases} \frac{x-5}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2} \overset{\text{jel}}{=} t \Rightarrow \begin{cases} x = t+5 \\ y = t+2 \\ z = -2t+1 \end{cases} \\ x+y-2z = -5 \end{cases}$

$t+5+t+2-2(-2t+1) = -5$

$6t = -10 \Rightarrow t = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

$\Rightarrow P'\left(-\frac{5}{3}+5,\ -\frac{5}{3}+2,\ \frac{10}{3}+1\right);\ P'\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right)$

Hat. meg a P pont szimmetrikusát is az α síkra nézve!



$P'' = s_\alpha(P) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1)\ P, P', P'' \text{ kollin.} \\ 2)\ [PP'] \equiv [P'P''] \end{cases}$

$\Longleftrightarrow P'$ felezőpontja a $[PP'']$-nak

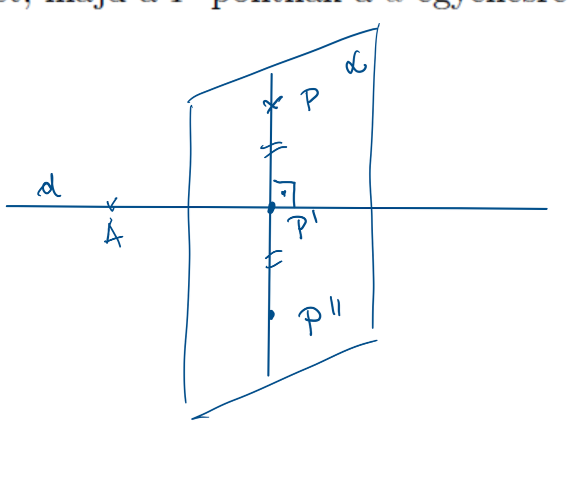
$\Longleftrightarrow P' = \frac{P+P''}{2} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{P'} = \frac{x_P + x_{P''}}{2} \\ y_{P'} = \frac{y_P + y_{P'}}{2} \\ z_{P'} = \frac{z_P + z_{P'}}{2} \end{cases}$

$P'\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right),\ P(5,2,1)$

$\Rightarrow \begin{cases} x'' = 2x' - x_P \\ y'' = 2y' - y_P \\ z'' = 2z' - z_P \end{cases} \Rightarrow P''\left(\frac{20}{3}-5,\ \frac{2}{3}-2,\ \frac{26}{3}-1\right)$

$P''\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{23}{3}\right) = s_\alpha(P)$

15. Határozzuk meg a $P(-5,4,1)$ pontnak az $d: x+3 = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-3}$ egyenesre eső P' vetületét, majd a P pontnak a d egyenesre vonatkozó P'' szimmetrikusát!



$P' = pr_d(P) = ?$

$P'' = s_d(P) = ?$

Legyen α sík u.h. $P \in \alpha$ és $\alpha \perp d$.

$\Rightarrow \alpha \cap d = \{P'\}$

$\alpha = ?$

$\left.\begin{array}{l} d \perp \alpha \Rightarrow \vec{d}(1,5,-3) \perp \alpha \Rightarrow \vec{d} \text{ tekinthető az } \alpha \text{ normálvektorának} \\ P(-5,4,1) \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha: 1\cdot(x+5) + 5\cdot(y-4) - 3(z-1) = 0$

$\alpha: x+5y-3z-12=0$

$\{P'\} = \alpha \cap d : \begin{cases} \alpha: x+5y-3z-12=0 \\ d: x+3 = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-3} \overset{\text{jel}}{=} t \Rightarrow \begin{cases} x = t-3 \\ y = 5t \\ z = -3t+2 \end{cases} \end{cases}$

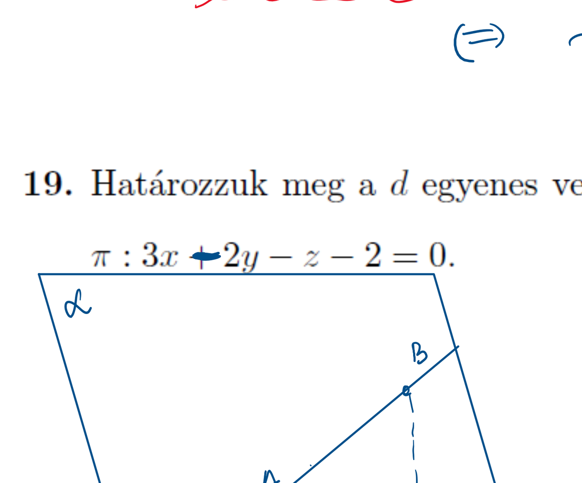
$\ldots\ t = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow P'\left(\frac{3}{5}-3,\ 3,\ \frac{9}{5}+2\right) \ldots$

$P'' = s_d(P) \Longleftrightarrow P'$ fel. pontja a $[PP'']$-nak

$\Longleftrightarrow P' = \frac{P+P''}{2} \Longleftrightarrow P'' = 2P' - P = \ldots$

19. Határozzuk meg a d egyenes vetületét a π síkra, ahol $d: \begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 2x-3y-z=0 \end{cases}$ és $\pi: 3x - 2y - z - 2 = 0$.



K: $d' = pr_\pi(d) = ?$

Biz: I. módszer

Legyen α sík u.h. $d \subset \alpha$ és $\alpha \perp \pi$

$\Rightarrow \pi \cap \alpha = \{d'\} = pr_\pi(d)$

(α a d egyenes vetítési síkja)

II. módszer: Legyen $A, B \in d$ tetsz. pont, A', B' a pontok vetületei π-re $\Bigg| \Rightarrow A'B' = d'$

III. módszer ($d \not\parallel \pi$) • $\left.\begin{array}{l} \{C\} = d \cap \pi \\ A' = pr_\pi(A),\ A \in d \end{array}\right| \Rightarrow A'C = d'$

I. módszer megoldása: α sík = ? u.h. $d \subset \alpha$ és $\alpha \perp \pi$,

? pont d egyenesen?

• $d: \begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 2x-3y-z=0 \end{cases}$

$x=0 \qquad \begin{cases} y+z=-3 \\ -3y-z=0 \end{cases} \Big| \oplus \Rightarrow -2y=-3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

$z = -3 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$

$A\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right) \in d.$

$\vec{d} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$

$\vec{d}(2,3,-5)$

• $\alpha \perp \pi \Rightarrow \alpha \parallel \vec{N}_\pi(3,-2,-1)$

$\Rightarrow$ α síkot megh.: $A\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right),\ \vec{d}(2,3,-5),\ \vec{N}(3,-2,-1)$

$\alpha: \begin{vmatrix} x-0 & y-\frac{3}{2} & z+\frac{9}{2} \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

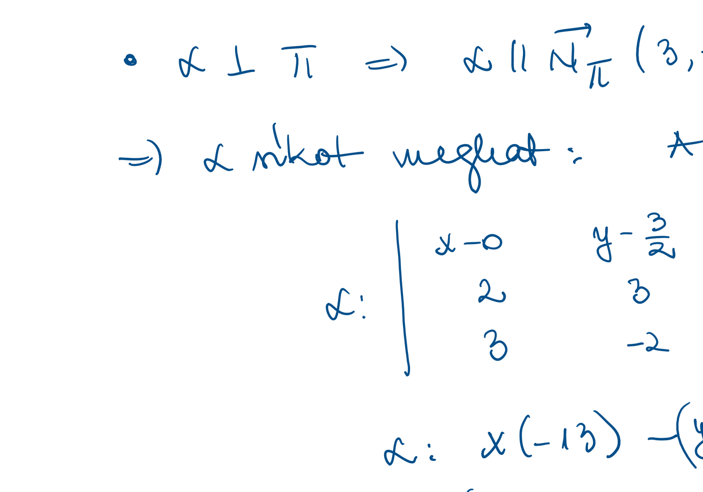
$\alpha: x(-13) - \left(y-\frac{3}{2}\right)13 + \left(z+\frac{9}{2}\right)\cdot(-13) = 0 \quad \Big| : (-13)$

$\alpha: x+y+z+3=0$

Tehát $d' = \alpha \cap \pi: \begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 3x-2y-z-2=0. \end{cases}$

6. Határozzuk meg a $P_0(-1,2,3)$ ponton áthaladó $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$ egyenesre merőleges egyenest.

E: $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-3}{-29}$.



? e egyenes u.h. $\begin{cases} e \perp d,\ P_0 \in e \\ e \cap d \neq \emptyset. \end{cases}$

I. módszer: Legyen $A = pr_d(P_0)$ (lásd 15. feladat)

$\Rightarrow P_0A = e: \frac{x+1}{x_A+1} = \frac{y-2}{y_A-2} = \frac{z-3}{z_A-3}$

II. módszer: • $P_0 \in e \Rightarrow e: \frac{x+1}{p} = \frac{y-2}{q} = \frac{z-3}{r}$

$\vec{e}(p,q,r) = ?$

• $\left.\begin{array}{l} e \perp d \Longleftrightarrow \vec{e} \perp \vec{d} \Longleftrightarrow \vec{e} \cdot \vec{d} = 0 \\ \vec{d}(3,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{3p+q+r=0}$

• $e \cap d \neq \emptyset \Longleftrightarrow e, d$ koplanárisak $\Longleftrightarrow$ $(e \perp d)$

$\Longleftrightarrow \Delta = (\vec{e}, \vec{d}, \overrightarrow{P_0B}) = 0 \Longleftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} P_0(-1,2,3) \\ B(-2,4,0) \in d \end{array}\right| \Rightarrow \overrightarrow{P_0B}(-1,2,-3)$

$B - P_0$

$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} p & q & r \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{-5p+8q+7r=0}$

$\begin{cases} 3p+q+r=0 \\ -5p+8q+7r=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q+r=-3p & |\cdot 7 \\ 8q+7r=5p \end{cases} \Big| \ominus$

Co

$q = 26p \Rightarrow r = -3p - 26p \Rightarrow$

$r = -29p$

$\Rightarrow e: \frac{x+1}{p} = \frac{y-2}{26p} = \frac{z-3}{-29p} \quad \Big| \cdot p$

$e: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{26} = \frac{z-3}{-29}$

III. módszer: • α sík: $P_0 \in \alpha,\ d \perp \alpha$

• β sík: $d \subset \beta,\ P_0 \in \beta$

$\Rightarrow \alpha \cap \beta = \{e\}$

27. Számítsuk ki az $M(3,1,-1)$ pontnak az $\alpha: 22x+4y-20z-45=0$ síktól való távolságát.

E: $\frac{3}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} \alpha: Ax+By+Cz+D=0 \\ M_0(x_0,y_0,z_0) \end{array}\right| \Rightarrow d(M_0,\alpha) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$d(M,\alpha) = \frac{|22\cdot 3 + 4\cdot 1 - 20(-1) - 45|}{\sqrt{22^2+16+20^2}} = \frac{|66+4+20-45|}{\sqrt{484+16+400}} = \frac{45^{(15}}{30} = \frac{3}{2}$

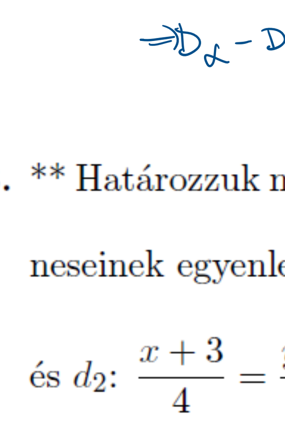
28. Határozzuk meg az $\alpha: x-2y-2z+7=0$ és a $\beta: 2x-4y-4z+17=0$ párhuzamos síkok közti távolságot!

E: $\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} \alpha: x-2y-2z+7=0 \Rightarrow \vec{N}_\alpha(1,-2,-2) \\ \beta: 2x-4y-4z+17=0 \Rightarrow \vec{N}_\beta(2,-4,-4) \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow \vec{N}_\alpha \parallel \vec{N}_\beta$

$\Downarrow$

$\alpha \parallel \beta.$



$\beta: x-2y-2z+\frac{17}{2}=0$

$\alpha: x-2y-2z+7=0$

$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \Rightarrow d(\alpha,\beta) = d(P,\beta),\ \forall P \in \alpha \\ P(-7,0,0) \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow$

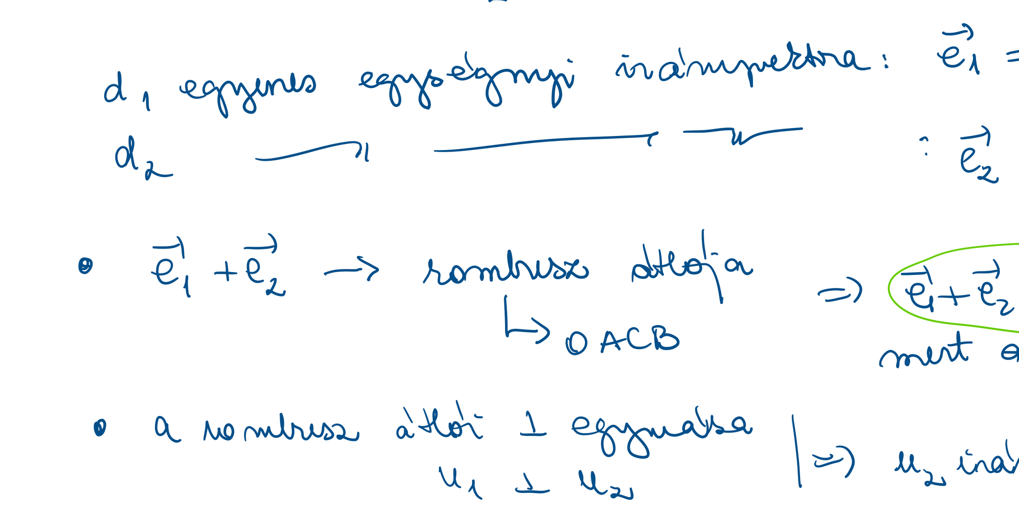
$\Rightarrow d(\alpha,\beta) = d(P,\beta) = \frac{|-7+\frac{17}{2}|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow D_\alpha - D_\beta = 7 - \frac{17}{2} \neq d(\alpha,\beta)$!!

23. ** Határozzuk meg két összefutó egyenes által meghatározott szögek szögfelező egyeneseinek egyenleteit. Alkalmazás: a két adott egyenes $d_1: \begin{cases} 3x-y-z+2=0 \\ 2x-y+2z-6=0 \end{cases}$ és $d_2: \frac{x+3}{4} = \frac{y+5}{7} = \frac{z}{3}$.

$\hookrightarrow \vec{d}_1 = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \ldots$

E: $u_1: x-1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$, $u_2: \frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{15} = \frac{z-3}{4}$.



$\{O\} = d_1 \cap d_2$

$\Downarrow$

$O \in u_1, u_2$ szögfelezők

? $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ irányvektorok?

d_1 egyenes egységnyi irányvektora: $\vec{e}_1 = \frac{\vec{d}_1}{\|\vec{d}_1\|} \Rightarrow \|\vec{e}_1\| = 1$

d_2 — " — — " — — " —: $\vec{e}_2 = \frac{\vec{d}_2}{\|\vec{d}_2\|} \Rightarrow \|\vec{e}_2\| = 1$

• $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \rightarrow$ rombusz átlója $\Rightarrow \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \overrightarrow{OC} = \vec{u}_1$

$\hookrightarrow OACB$

mert ~~az~~ a rombusz átlói felezik a szöget

• a rombusz átlói ⊥ egymásra $\Big| \Rightarrow u_2$ irányvektora $= \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = \vec{u}_2$

$u_1 \perp u_2$