Gráfalgoritmusok

Gaskó Noémi

2023. március 1.

Tartalomjegyzék

Kurzus & szeminárium

Kurzus:

- utolsó héten **írásbeli vizsga 120 pont**

Szeminárium:

- kéthetente

Szerezhetőek plusszpontok

Laborgyakorlat

- 6 laborfeladat
- 5 laborfeladat megoldása kötelező (a megnem oldott feladatra -7 pont jár) laborfeladatonként 10 pont jár
- két tanítási hetente vannak új feladatok
- feladástól számítva ket héten belül lehet feltölteni teljes pontszámra
- újabb két hét türelmi idő van a határidő után, ekkor 5 pontra lehet feltölteni
- az első 5 feladat bemutatása kötelező, be nem mutatott feladat 0 pontot ér
- min. 5 laborjelenlét
- másolt feladat esetén mindkét fél számára -10 pont jár (nem számít, hogy ki kitől másolt)
- Pótszesszióban labortevékenységet NEM lehet pótolni

Laborvizsga

- 11. és 12. heteken, a megfelelő laborórákon
- 20 pont szerezhető

Minimális követelmények

Az írásbeli vizsgán részt lehet venni, ha:

- utolsó héten
- maximum 120 pont
- részvételhez kötelező:
  1. 5 leadott és elfogadott laborfeladat
  2. 5 laborjelenlét (laborvizsgával együtt)
  3. minimum 35 pont laborfeladatokból
  4. minimum 10 pont laborvizsgán
- plusszpontok csak a végső pontszámhoz számolhatóak hozzá
- 10-es jegyhez: legalább 100 pont az írásbelin

Jegy megállapítása:

$$\frac{Laborpont + Laborvizsgapont + irasbeli + pluszpontok}{20}$$

Átmenő jegyhez:

- írásbeli vizsga: minimum 60 pont
- összesen minimum 100 pont

Pótvizsga

- labortevékenység NEM pótolható pótvizsgaidőszakban;
- laborvizsga
- nem számít a laborjelenlét
- írásbeli vizsga 120 pont

Mirõl lesz szó?

- bevezetés, séták, vonalak utak, fák
- legrövidebb utak
- kritikus út
- Euler utak, Hamilton utak
- Síkba rajzolható gráfok
- Folyamfeladatok
- Párosítások
- Ramsey számok
- Gráfok színezése
- hálózatok
- ...

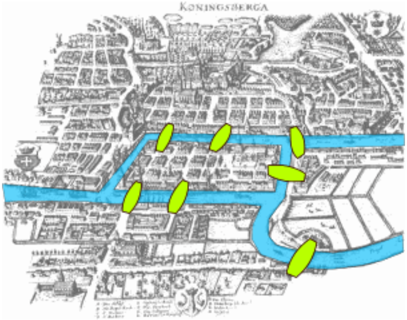
Olvasnivaló

- Gaskó Noémi, Kása Zoltán, **Gráfalgoritmusok**, Kolozsvári Egyetemi Kiadó, 2015.
- Andrásfai Béla, **Ismerkedés a gráfelmélettel**, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.
- Friedl Katalin, Recski András, Simonyi Gábor, **Gráfelméleti feladatok**, Typotex Kiadó, Budapest, 2006.
- Hajnal Péter, **Gráfelmélet**, Polygon Kiadó, Szeged, 2003.

Olvasnivaló (folyt.)

- Clark, J. and Holton, D. A., **A First Look at Graph Theory**, Singapore, London, New Jersey, World Scientific Publishing Co. Ltd. (1991), 330p. Revised reprint published in 1996.
- Bondy, A. and Murty, U.S.R., **Graph Theory**, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244, Springer, 2008.
- Robert Sedgewick, Algorithms in C, part 5, Graph algorithms, 2007.
- Thomas H. Cormen, Introduction to algorithms, 3rd edition, MIT Press

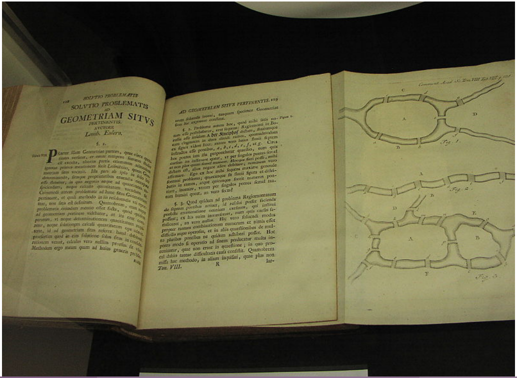
Gráfokról

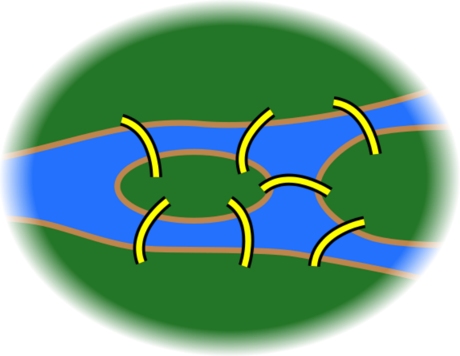


Mind a 7 hidat egyszer érintve visszérhetünk-e a kiindulási pontba?

Megoldás

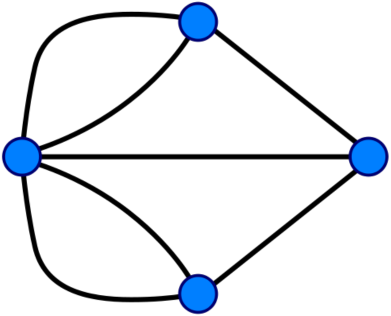
Leonhard Euler (1707-1783)





2. ábra. Königsbergi hidak

3. ábra. Königsbergi hidak

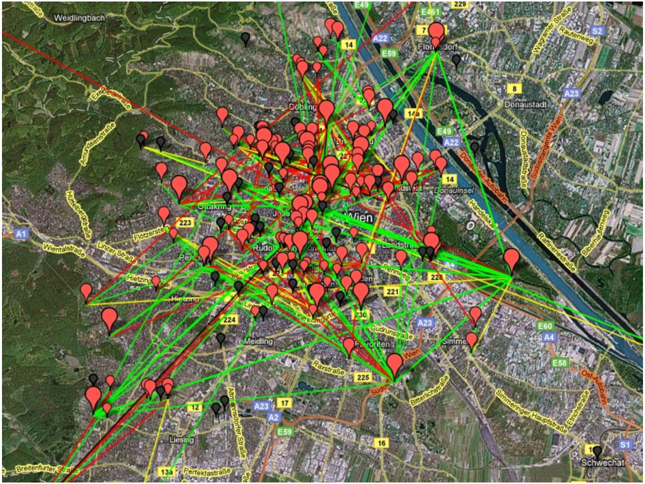


Hol tartunk most?(1)

4. ábra. Egy hálózat

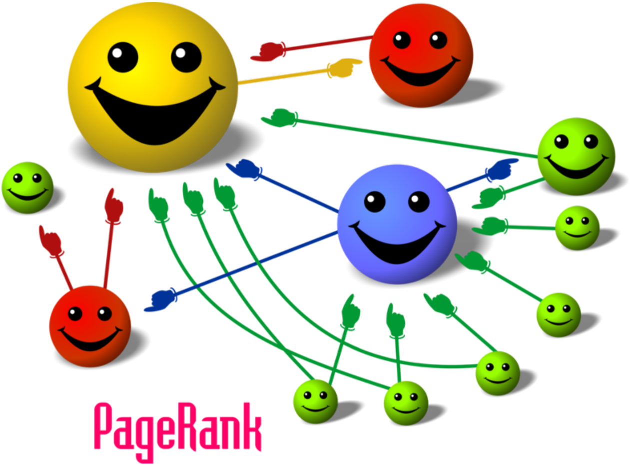
Hol tartunk most?(2)

5. ábra. Egy másik hálózat

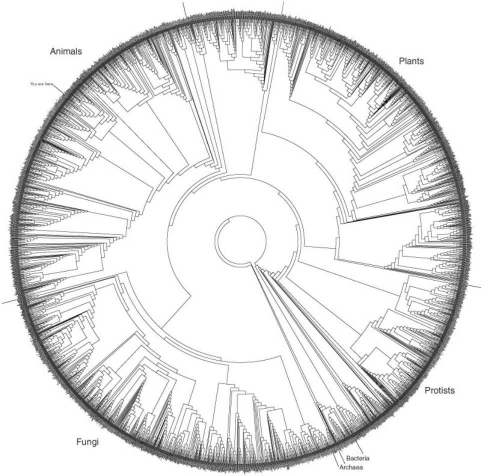


Hol tartunk most?(3)

6. ábra. Egy másik hálózat



Hol tartunk most?(4)



Értelmezések(ek)

Értelmezés

G gráfnak nevezzük a (V, E, F) hármast, ahol
V - a csúcsok halmaza
E - élek halmaza
F - egy leképezés a csúcsok és az élek között, $F : E \to V \otimes V$

$A \otimes B = \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B \text{ vagy } a \in B, b \in A\}$ – rendezetlen párok halmaza

Kezdjük egy egyszerű példával:

7. ábra

Hét törpe: Szende, Szundi, Hapci, Morgó, Kuka, Tudor, Vidor

A törpék dolgoznak: Szende Hapcival, Szundi Tudorral és Hapcival, Vidor Szendével.

Ábrázoljuk grafikusan!

Értelmezés

A G gráf rendjén a csúcsok számát értjük, $n = |V|$.

Értelmezés

A G gráf nagyságán az élek számát értjük, $m = |E|$.

Mennyi a gráf rendje illetve nagysága?

Értelmezés

Ha $F(e_1) = F(e_2)$ akkor e_1 és e_2 párhuzamos élek (többszörös élek).
Ha $F(e) = \{a, a\}$ akkor e hurokél.

Értelmezés

Ha $F(e_1) = F(e_2)$ akkor e_1 és e_2 párhuzamos élek (többszörös élek).
Ha $F(e) = \{a, a\}$ akkor e hurokél.

Értelmezés

Legyen x a G egy pontja. $N(x)$ az x-el szomszédos pontok halmaza:
$N(x) = \{y \in V(G), \exists e \in E(G), F(e) = \{x, y\}\}$.

Értelmezés

Ha $F(e_1) = F(e_2)$ akkor e_1 és e_2 párhuzamos élek (többszörös élek).
Ha $F(e) = \{a, a\}$ akkor e hurokél.

Értelmezés

Legyen x a G egy pontja. $N(x)$ az x-el szomszédos pontok halmaza:
$N(x) = \{y \in V(G), \exists e \in E(G), F(e) = \{x, y\}\}$.

Értelmezés

Az x ponthoz illeszkedõ élek halmaza:
$I(x) = \{e \in E(G), \exists y \in V(G), y \neq x, F(e) = \{x, y\}\}$
Az x ponthoz illeszkedõ hurokélek halmaza:
$L(x) = \{e \in E(G), F(e) = \{x, x\}\}$.

Értelmezések

Értelmezés

Az x pont foka (fokszáma) az x-hez illeszkedõ élek száma:
$\varphi(x) = card(I(x)) + 2 * card(L(x))$.

Ha $\varphi(x) = 0$ izolált pontról beszélünk. Ha $\varphi(x) = 1$ végpont vagy levél.

Értelmezések

Értelmezés

Egy G gráf egyszerű, ha nincs benne többszörös él illetve hurokél.

Értelmezések

Értelmezés

Egy G gráf egyszerű, ha nincs benne többszörös él illetve hurokél.

Értelmezés

Egy G gráf r-reguláris, ha minden csúcsának fokszáma r.

Értelmezések

Értelmezés

Egy G gráf egyszerû, ha nincs benne többszörös él illetve hurokél.

Értelmezés

Egy G gráf r-reguláris, ha minden csúcsának fokszáma r.

Értelmezés

Egy G gráfot teljesnek nevezzük, ha bármely két csúcsát él köti össze. Az n-csúcsú teljes gráfot K_n-el jelöljük.

Egy gráf komplementere

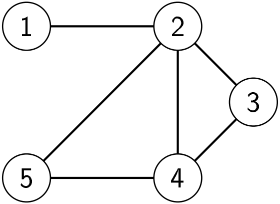
A $G' = (V', E')$ komplementere a $G = (V, E)$ gráfnak ha $V' = V$ és $E' = \{\{a, b\}, \{a, b\} \notin E\}$.

Részgráfok

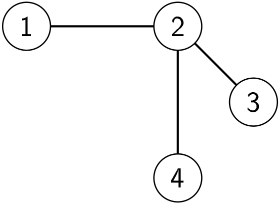
A $H = (V(H), E(H), \mathcal{H})$ gráf **részgráfja** $G = (V(G), E(G), \mathcal{G})$ gráfnak, ha $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, $\mathcal{H} = \mathcal{G}|_{E(H)}$.

Ha $V(H) = V(G)$, akkor H **feszítő részgráf**.

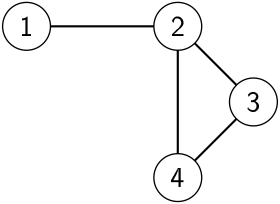
Ha $u, v \in V(H)$ és abból, hogy $\{u, v\} \in E(G)$ következik, hogy $\{u, v\} \in E(H)$, akkor H **feszített részgráf**.



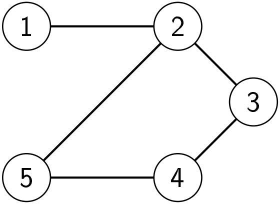
8. ábra. G gráf



9. ábra. H_1 részgráf



10. ábra. H_2 feszített részgráf



11. ábra. H_3 feszítő részgráf

Gráfok izomorfizmusai

Értelmezés

A G_1 gráf izomorf a G_2 gráffal, ha létezik egy bijektív függvény,

$$f : V(G_1) \to V(G_2)$$

úgy, hogy ha $\{a, b\} \in E(G_1)$, akkor $\{f(a), f(b)\} \in E(G_2)$.

Gráfok izomorfizmusai

Értelmezés

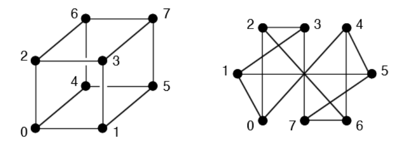
A G_1 gráf izomorf a G_2 gráffal, ha létezik egy bijektív függvény,

$$f : V(G_1) \to V(G_2)$$

úgy, hogy ha $\{a, b\} \in E(G_1)$, akkor $\{f(a), f(b)\} \in E(G_2)$.

Példa izomorf gráfokra

12. ábra



Irányított gráfok

Értelmezés

G irányított gráfnak nevezzük a (V, E, F) hármast, ahol
V - a csúcsok halmaza
E - élek halmaza
F - egy leképezés a csúcsok és az élek között, $F : E \to V \times V$

Irányított gráfok

Értelmezés

G irányított gráfnak nevezzük a (V, E, F) hármast, ahol
V - a csúcsok halmaza
E - élek halmaza
F - egy leképezés a csúcsok és az élek között, $F : E \to V \times V$

Értelmezés

Ha $e \in E(G), f(e) = \{u, v\}$, akkor u az e él kezdőpontja, v a végpontja.

Értelmezés

$N^{be}(u)$ az u-ba bemenő élek kezdőpontjainak halmaza.
$N^{ki}(u)$ az u-ból kimenő élek végpontjainak halmaza.

Értelmezés

Egy irányított gráfban az u csúcs be-foka az u-ba befutó élek száma.
Egy irányított gráfban az u csúcs ki-foka az u-ból kifutó élek száma.

Súlyozott gráfok

Értelmezés - Súlyozott nem - irányított gráf

A $G = (V, E, F, W)$ súlyozott gráf, ahol
V - a csúcsok halmaza
E - élek halmaza
F - egy leképezés a csúcsok és az élek között, $F : E \to V \otimes V$
W - $W : E \to \mathbb{R}$ az élek súlya.

Értelmezés - Súlyozott irányított gráf

A $G = (V, E, F, W)$ súlyozott gráf, ahol
V - a csúcsok halmaza
E - élek halmaza
F - egy leképezés a csúcsok és az élek között, $F : E \to V \times V$
W - $W : E \to \mathbb{R}$ az élek súlya.

Gráfok ábrázolása

A fenti példák esetén a gráfokat grafikusan ábrázoltuk.
Gráfok ábrázolására a következőképpen történhet:

- **szomszédsági (adjacencia) mátrix**
  $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, ..., n$, ahol a_{ij} az i csúcsból a j-be vezető élek száma.

Gráfok ábrázolása

A fenti példák esetén a gráfokat grafikusan ábrázoltuk.
Gráfok ábrázolására a következőképpen történhet:

- **szomszédsági (adjacencia) mátrix**
  $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, ..., n$, ahol a_{ij} az i csúcsból a j-be vezető élek száma.
- **illeszkedési (incidencia) mátrix**
  B illeszkedési mátrix, melynek b_{ij} elemeit a következőképpen határozzuk meg:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & ha \quad v_i \quad \text{illeszkedik} \quad e_j \quad \text{-hez és nem hurokél,} \\ 2, & ha \quad v_i \quad \text{illeszkedik} \quad e_j \quad \text{-hez és hurokél,} \\ 0, & ha \quad v_i \quad \text{nem illeszkedik} \quad e_j \quad \text{-hez} \end{cases}$$

Gráfok ábrázolása (folyt.)

- **élek listája** - két oszlopos mátrixban tároljuk az élek két végponját (súlyokat plussz oszlopban, ha vannak)
- **szomszédsági lista**
  1. minden csúcsnak felsoroljuk a szomszédait, n darab listánk lesz.
  2. a szomszédsági listákat egymás után írhatjuk egy speciális karakterrel elválasztva.
  3. speciális karaktereket nélkül, megjegyezve a listák kezdőindexeit.

Mikor melyik ábrázolásmódot érdemes választani?

- szomszédsági mátrix:
  $\Theta(n^2)$ tárigény, csak akkor érdemes ezt az ábrázolásmódot használni, ha kisebb méretű gráfról van szó.

Mikor melyik ábrázolásmódot érdemes választani?

- szomszédsági mátrix:
  $\Theta(n^2)$ tárigény, csak akkor érdemes ezt az ábrázolásmódot használni, ha kisebb méretű gráfról van szó.
- illeszkedési (incidencia) mátrix
  $\Theta(n \times m)$ tárigény

Mikor melyik ábrázolásmódot érdemes választani?

- szomszédsági mátrix:
  $\Theta(n^2)$ tárigény, csak akkor érdemes ezt az ábrázolásmódot használni, ha kisebb méretű gráfról van szó.
- illeszkedési (incidencia) mátrix
  $\Theta(n \times m)$ tárigény
- listás ábrázolásmód
  $\Theta(n + m)$ tárigény, ahol m az élek száma

Mikor melyik ábrázolásmódot érdemes választani?

- szomszédsági mátrix:
  $\Theta(n^2)$ tárigény, csak akkor érdemes ezt az ábrázolásmódot használni, ha kisebb méretű gráfról van szó.
- illeszkedési (incidencia) mátrix
  $\Theta(n \times m)$ tárigény
- listás ábrázolásmód
  $\Theta(n + m)$ tárigény, ahol m az élek száma

Az egyik leggazdaságosabb ábrázolásmód a listákkal való ábrázolás, amit többféleképpen implementálhatunk (programozási nyelvtől függően):

- láncolt lista
- vektoros ábrázolás
- array-ek használata

Séták, utak, vonalak, körök

A $G = (V, E, F)$ gráfban

Séta

váltakozó szögpontok és élek sorozata:
$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n, n \geq 0.$

az élek és a szögpontok nem feltétlenül különbőzőek!!!!
a séta éleinek a száma a **séta hossza**

Séták, utak, vonalak, körök

A $G = (V, E, F)$ gráfban

Séta

váltakozó szögpontok és élek sorozata:
$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n, n \geq 0.$

az élek és a szögpontok nem feltétlenül különbőzőek!!!!
a séta éleinek a száma a **séta hossza**
Sajátos séták:

- vonal: nincsenek ismétlődő élek

Séták, utak, vonalak, körök

A $G = (V, E, F)$ gráfban

Séta

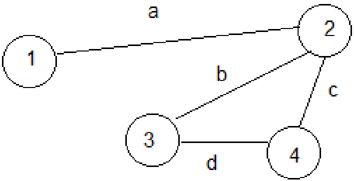
váltakozó szögpontok és élek sorozata:
$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n, n \geq 0.$

az élek és a szögpontok nem feltétlenül különbözőek!!!!
a séta éleinek a száma a **séta hossza**
Sajátos séták:

- vonal: nincsenek ismétlődő élek
- út: nincsenek ismétlődő szögpontok

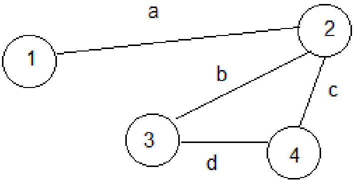
zárt séta: a kezdőpont megegyezik a végponttal $(v_0 = v_n)$
zárt vonal
zárt út: zárt kör

Egy egyszerű példa



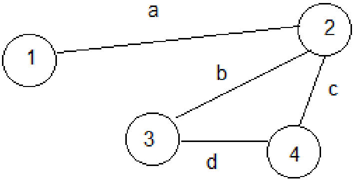
Séta:

Egy egyszerű példa



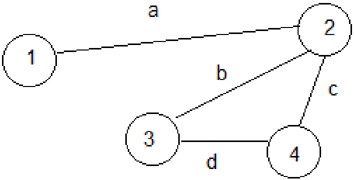
Séta: 1a2c4d3b2c4

Egy egyszerű példa



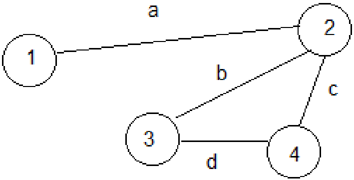
Séta: 1a2c4d3b2c4
Vonal:

Egy egyszerű példa



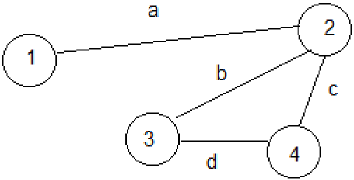
Séta: 1a2c4d3b2c4
Vonal: 2b3d4c2

Egy egyszerű példa



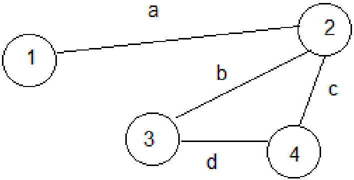
Séta: 1a2c4d3b2c4
Vonal: 2b3d4c2
Út:

Egy egyszerű példa



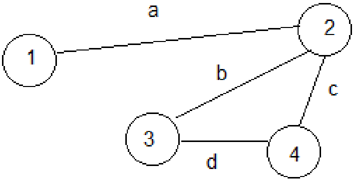
Séta: 1a2c4d3b2c4
Vonal: 2b3d4c2
Út: 1a2b3

Egy egyszerű példa



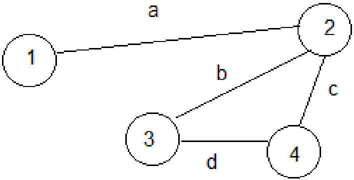
Séta: 1a2c4d3b2c4
Vonal: 2b3d4c2
Út: 1a2b3
Zárt vonal:

Egy egyszerű példa



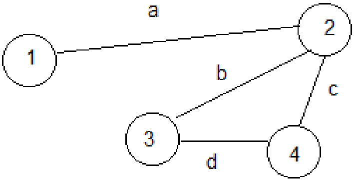
Séta: 1a2c4d3b2c4
Vonal: 2b3d4c2
Út: 1a2b3
Zárt vonal: 2b3d4c2

Egy egyszerű példa



Séta: 1a2c4d3b2c4
Vonal: 2b3d4c2
Út: 1a2b3
Zárt vonal: 2b3d4c2
Zárt út:

Egy egyszerű példa



Séta: 1a2c4d3b2c4
Vonal: 2b3d4c2
Út: 1a2b3
Zárt vonal: 2b3d4c2
Zárt út: 2b3d4c2