矩阵分析与应用

Matrix Analysis and Applications

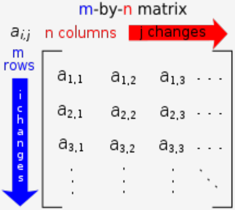
李保滨

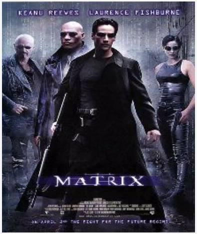
Email: libb@ucas.ac.cn

University of Chinese Academy of Sciences

Matrix

- The Matrix: 黑客帝国
- 矩阵、模型；[生物][地质] 基质；母体、子宫；[地质] 脉石
- In mathematics, a matrix is a rectangular array of numbers, symbols, or expressions, arranged in rows and columns. (WIKI)
- A matrix is a concise and useful way of uniquely representing and working with linear transformations. (WOLFRAM Mathworld)





简史: 一元一次方程

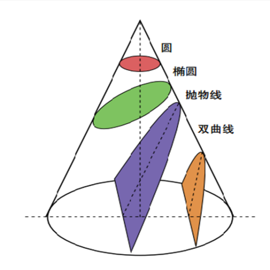
- 一元一次方程: $ax = b$
  - 对于 $a = 0$, $b \neq 0$, 方程无解;
  - 如果 $a = 0, b = 0$, 有无穷多个解: $x = c \in R$;
  - 如果 $a \neq 0$, 方程具有唯一的解: $x = a^{-1}b$;
    - 唯一性: $aa^{-1} = 1$ 和 $a^{-1}a = 1$.
- 三种推广:
  - 增加变量元的个数: 多元一次方程组;
  - 增加变量元的次数: 一元高次方程;
    - $ax^2 + bx + c = 0$
  - 同时增加变量元的个数和次数: 多元高次方程组;
    - $Ax^2 + Bxy + CY^2 + Dx + Ey + F = 0.$

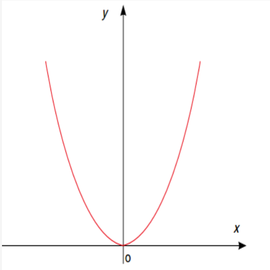
- 一元高次方程：

$$a_n x^n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

- 一元二次方程：$ax^2 + bx + c = 0$
  - 古巴比伦时代，人们就会解一元二次方程；$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- 16 世纪意大利数学家卡尔达诺 (Cardano) 给出三次方程的求根公式；
- 费拉里 (Ferrari，L.) 给出四次方程的公式；
- 五次以上的代数方程没有求根公式；
  - 欧拉、拉格朗日 ⋯
  - 1824 年，挪威数学家阿贝尔发表了《一元五次方程没有一般代数解》；
  - 1828-1832, 伽罗瓦理论证明一般高于四次的代数方程不能用根式求解，而且还建立了具体代数方程可用根式解的判别准则;

- 多元高次方程：
  - 圆锥曲线：$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
  - 欧几里得《几何原本》
  - 勒内 · 笛卡尔与解析几何
    - 《几何学》和平面直角坐标系；
    - 《哲学原理》、《形而上学的沉思》
    - “我思故我在”





线性方程组：$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$

- 多元一次方程组:

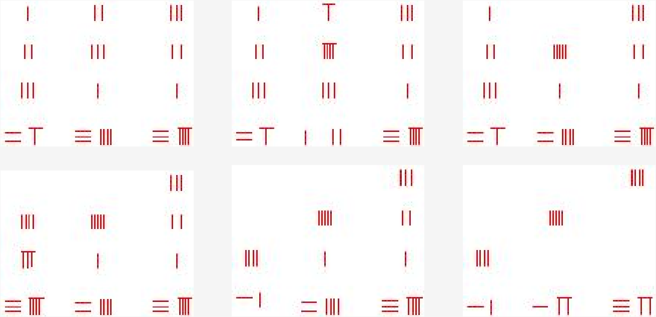
$$\begin{cases} 47x + 28y = 19, \\ 89x + 53y = 36. \end{cases} \qquad \begin{cases} 0.835x + 0.667y = 0.168, \\ 0.333x + 0.266y = 0.067. \end{cases}$$

- 鸡兔同笼：
  - 今有鸡兔同笼上有 35 头下有 94 足问鸡兔各有几只？
- 《九章算术》“方程术”

> 今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗。問上、中、下禾實一秉各幾何？

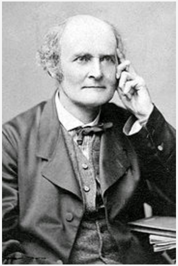
- 设上、中、下禾實一秉各为：x, y, z,

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + z &= 39, \\
2x + 3y + z &= 34, \\
x + 2y + 3z &= 26.
\end{aligned}
$$



简史：矩阵分析

- 方程术：《九章算术》，300 BC—AD 200;
- 行列式：
  - 1683，日本数学家关孝和;
  - 1693，弗里德 · 威廉 · 莱布尼茨;
- 1750 年，加百列 · 克莱姆发现了克莱姆法则;
- 1850 年，詹姆斯 · 约瑟夫 · 西尔维斯特
  - 将数以行和列形式的矩形排列作为研究对象
  - 首次使用“Matrix”一词
- 阿瑟 · 凯莱被公认为矩阵论的奠基人
  - 1858 年，《矩阵论的研究报告》;
  - 研究了矩阵的逆以及转置和特征多项式方程;



- 凯莱-哈密尔顿定理
  - 阿瑟 · 凯莱验证了 3×3 矩阵情况;
  - 哈密尔顿证明了 4×4 矩阵的情况;
  - 一般情况下的证明是弗罗贝尼乌斯于 1898 年给出的;
- 1878 年，弗罗贝尼乌斯给出了正交矩阵、相似矩阵等概念;
- 矩阵理论在 19 世纪沿着两个方向发展:
  - 作为抽象代数结构和作为代数工具描述几何空间的线性变换;
- 无限维矩阵的研究始于 1884 年
  - 1884, 庞加莱在两篇不严谨地使用了无限维矩阵和行列式理论的文章后开始了对这一方面的专门研究;
  - 1906 年，希尔伯特引入无限二次型对积分方程进行研究;
  - 施密茨、赫林格和特普利茨发展出算子理论，而无限维矩阵成为了研究函数空间算子的有力工具.

应用

矩阵在许多领域都应用广泛!

- **微积分:**
  - 雅可比矩阵: $J_f(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$
    - 用于判断局部反函数的存在性;
  - 海森矩阵: $H(f)(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]$
    - 函数在某一点的变化率方面的信息;
- **概率论与统计:**
  - 随机矩阵: 即行向量是概率向量的矩阵, 可用来定义有限概率空间中的马尔可夫链;
  - 协方差矩阵: 在某种程度上表示几个随机变量之间的关联程度;
  - 线性回归中的最小二乘法分析;

- 物理学:
  - 对称性及线性变换在现代物理学中有着重要的角色.
    - 例如，在量子场论中，基本粒子是由狭义相对论的洛伦兹群所表示.
    - 盖尔曼矩阵, 这种矩阵也被用作 SU(3) 规范群, 是量子色动力学的基础.
    - 卡比博-小林-益川矩阵（CKM 矩阵）: 在弱相互作用中重要的基本夸克态，与指定粒子间不同质量的夸克态不一样，但两者却是成线性关系，而 CKM 矩阵所表达的就是这一点
  - 量子态的线性组合.
    - 1925 年海森堡提出第一个量子力学模型时，使用了无限维矩阵来表示理论中作用在量子态上的算子.
    - 密度矩阵就是用来刻画量子系统中“纯”量子态的线性组合表示的“混合”量子态.
    - S 矩阵: 当粒子在加速器中发生碰撞时, 记录所有可能的粒子间相互作用.
  - 几何光学. 例如: 光线传输矩阵, 折射矩阵和平移矩阵等等。

- **化学:**
  - 矩阵应用在使用量子理论讨论分子键和光谱;
  - 例如: 解罗特汉方程时用重叠矩阵和福柯矩阵来得到哈特里 - 福克方法中的分子轨道.
- **博弈论和经济学:**
  - 用收益矩阵来表示两个博弈对象在各种决策方式下的收益.
- **电子学:**
  - 传统的网目分析或节点分析会获得一个线性方程组, 这可以以矩阵来表示与计算.
  - 很多种电子元件的电路行为可以用矩阵来描述.

设定 A 为输入向量，其两个分量为输入电压 v_1 与输入电流 i_1 。设定 B 为输出向量，其两个分量为输出电压 v_2 与输出电流 i_2. 这电子元件的电路行为可以描述为 $B = H \cdot A$; 其中 H 是 2×2 矩阵，内有一个阻抗元素 h_{12} 、一个导纳元素 h_{21} 、两个无量纲元素 h_{11} 与 h_{22}. 这样，电路的计算可以约化为矩阵计算.

- **计算机科学:**
  - 信号处理
    - 信号表示、信号编解码;
    - 信号滤波、分解、压缩、除噪等。
  - 图像处理
    - 图像表示为 $n \times n$ 的矩阵，矩阵中每一个元素代表着一个像素值;
    - 图像分解、重构、压缩编码、提取特征等等;
    - 视频处理分析.
  - 计算机图形学
    - 三维图形借助矩阵表示;
    - 三维图形借助仿射矩阵完成相关坐标的变换;
    - 投影矩阵实现三维对象在特定二维屏幕上的显示.
  - 计算机网络
    - 图论中可以用矩阵描述一个有限图, 这个矩阵叫做相关矩阵的邻接矩阵, 记录了图的每两个顶点之间是否有边连接.
  - ....

课程主要内容

- 1. 线性方程组
  - 高斯消去法和矩阵初等变换
  - 齐次方程与非齐次方程
- 2. 矩阵代数
  - 矩阵加法和减法
  - 矩阵乘法和 LU 分解
  - 矩阵的逆
- 3. 向量空间
  - 空间和子空间
  - 四个子空间
  - 线性无关
  - 维数和 Rank
- 4. 线性变换
  - 相似变换
  - 不变子空间
- 5. 模和内积
  - 向量和矩阵的模
  - 内积空间
  - 正交矩阵和酉矩阵
  - 正交分解和 URV 分解
  - SVD 分解和正交投影
- 6. 行列式
  - 行列式定义
  - 行列式的性质
- 7. 特征值和特征向量

Thanks!