作业七

1. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\1&1&-3\\0&1&1\end{pmatrix}$，向量 $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, 给出矩阵 $\mathbf{A}$ 的 $\mathbf{QR}$ 分解；并给出 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的最小二乘解。

2. 对于向量组 $\left\{\mathbf{x_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\10^{-3}\end{pmatrix},\ \mathbf{x_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \mathbf{x_3}=\begin{pmatrix}1\\10^{-3}\\0\end{pmatrix}\right\}$，在三个有效数字情形下,分别使用传统 Gram-Schmidt 和修改后的 Gram-Schmidt 方法，把上述向量组正交化。

3. 试判断矩阵 $\begin{pmatrix}\frac{1+i}{\sqrt{3}}&\frac{1+i}{\sqrt{6}}\\\frac{i}{\sqrt{3}}&\frac{-2i}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ 是否为酉矩阵。

4. 从向量 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ 出发，使用 elementary reflector 构造 R^3 的一组标准正交基。

5. 设 $\mathbf{R}=\mathbf{I}-2\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathbf{T}}$，这里 $\mathbf{u}$ 为 $n\times 1$ 的向量 $(n>1)$，且 $\|\mathbf{u}\|=1$. 如果 $\mathbf{x}$ 满足：$\mathbf{Rx}=\mathbf{x}$，试说明 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{u}$ 正交。