作业五

1. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^3 的一个线性算子,其定义为 $\mathbf{T}(x,y,z)=(x-y,y-x,x-z)$, $\mathcal{B}=\left\{\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ 为其一组基，$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ 为 R^3 的一个向量。

(1) 分别计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$。

(2) 计算 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}$，并验证 $[\mathbf{T}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}}=[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ 成立。

2. 设 $\mathbf{A}\in\mathcal{R}^{n\times n}$，$\mathbf{T}$ 为 $\mathcal{R}^{n\times 1}$ 的一个线性算子，定义为：$\mathbf{T}(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}$. 记 S 为标准基，试说明 $[\mathbf{T}]_S=\mathbf{A}$.

3.$\mathbf{A}(x,y,z)=(x+2y-z,-y,x+7z)$ 为 R^3 的一个线性算子，记 $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$，$\mathcal{B}'=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

(1) 计算 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}$ 和 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}$.

(2) 求矩阵 $\mathbf{Q}$ 使得 $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'}=\mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}\mathbf{Q}$ 成立。

4. 设 $\mathbf{T}$ 为 R^4 的一个线性算子，其定义为 $\mathbf{T}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2+2x_3-x_4,x_2+x_4,2x_3-x_4,x_3+x_4)$. 令 $\mathcal{X}=span\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$. 试说明 $\mathcal{X}$ 为 $\mathbf{T}$ 的一个不变子空间，并计算 $[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}}$.