

作业六

1. 对于矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

分别计算 Frobenius-norm, 1-norm, 2-norm, ∞ -norm.

2. 对于向量空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$, 定义 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$.

(1) 简要说明 $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ 满足内积定义, 为 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 空间的一个内积。

(2) 证明

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

为向量空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的一组标准正交基, 并计算矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 在该组基下的傅里叶系数的展开 (Fourier expansion).

(3) 试给出 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 中一组新的标准正交基。