作业八

1. 对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$，使用 Given reduction 方法找到一个正交矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\mathbf{PA}=\mathbf{T}$，这里 $\mathbf{T}$ 为上三角矩阵，且对角元素都为正数。

2. 对于对于矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}$，使用 Householder reduction 实现该矩阵的 QR 分解。

3. 设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 分别为 $\mathcal{R}^3$ 的子空间，且

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\},\quad \mathcal{B}_{\mathcal{Y}}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\},$$

分别为其一组基。(1) 试说明 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 为 $\mathcal{R}^3$ 的一对补空间；

(2) 分别给出沿 $\mathcal{Y}$ 空间到 $\mathcal{X}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{P}$，以及沿 $\mathcal{X}$ 空间到 $\mathcal{Y}$ 空间的投影矩阵 $\mathbf{Q}$，并验证矩阵 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 是幂等矩阵。

4. 设 $\mathcal{R}^{n\times n}$ 为所有 $n\times n$ 的矩阵构成的向量空间，试说明 $\mathcal{R}^{n\times n}=\mathcal{S}\bigoplus\mathcal{K}$ 成立，这里 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{K}$ 分别表示所有 $n\times n$ 的对称矩阵和反堆成矩阵构成的集合。