

# 课后作业参考答案

## 作业一

1. 使用 5 个有效数字计算时, 时  $\text{rank}(\mathbf{A}) = 1, \text{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ , 方程组不可解; 使用 6 个有效数字,  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$ , 方程组可解。

$$2. (a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 作业二

1.  $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{A}_{*j}$ ,  $\mathbf{e}_i^T \mathbf{A}\mathbf{e}_j = a_{ij}$ .

2. 先证明对于任意两个  $n \times n$  矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  和  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ , 都有

$\text{trace}(\mathbf{AB}) = \text{trace}(\mathbf{BA})$ . 证明如下:

$$\begin{aligned}\text{trace}(\mathbf{AB}) &= \sum_{i=1}^n [\mathbf{AB}]_{ii} = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{i*} \mathbf{B}_{*i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_{j*} \mathbf{A}_{*j} = \sum_{j=1}^n [\mathbf{BA}]_{jj} = \text{trace}(\mathbf{BA}).\end{aligned}$$

由上面的结果, 记  $\mathbf{BC} = \mathbf{D}$ , 由上面的结果可得:

$$\text{trace}(\mathbf{ABC}) = \text{trace}(\mathbf{AD}) = \text{trace}(\mathbf{DA}) = \text{trace}(\mathbf{BCA}).$$

3. 设  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ,  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  为上三角矩阵, 即: 对于  $i > j$ ,  $a_{ij} = 0$ ,  $b_{ij} = 0$ .

记  $\mathbf{C} = [c_{ij}] = \mathbf{AB}$ , 那么当  $i > j$  时, 我们有

$$c_{ij} = \mathbf{A}_{i*} \mathbf{B}_{*j} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^j a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=j+1}^n a_{ik} b_{kj} = 0 + 0 = 0,$$

从而矩阵  $\mathbf{C}$  也为上三角矩阵。同理可证下三角的情形。

4.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -12 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 作业三

1. 借助向量空间定义可以验证由  $n \times n$  的实数矩阵构成的集合为向量空间。由 (3) 给出的集合不满足子空间定义。

2.(1) 证明：对于任意  $\mathbf{b} \in R(\mathbf{AB})$ ，都存在一个  $\mathbf{x}$ ，使得  $\mathbf{ABx} = \mathbf{b}$  成立。如果记  $\mathbf{Bx} = \mathbf{y}$ ，可得  $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$ ，即： $\mathbf{b} \in R(\mathbf{A})$ ，从而有  $R(\mathbf{AB}) \subseteq R(\mathbf{A})$ 。

(2) 证明：对于任意  $\mathbf{x} \in N(\mathbf{B})$ ，也就是  $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ ，从而有  $\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$ ，即： $N(\mathbf{B}) \subseteq N(\mathbf{AB})$  成立。

3. 由定义直接可以证明，题中给出的矩阵集合线性无关。

## 作业四

1. 由线性变换的定义可以证明 (1)、(2) 和 (3) 为线性变换。

$$2.(1) [\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}, [\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'} \text{ 为 } 3 \times 3 \text{ 的单位矩阵, } [\mathbf{I}]_{\mathcal{BB}'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) [\mathbf{P}]_{\mathcal{BB}'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. [\mathbf{T}]_{\mathcal{BB}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, [\mathbf{L}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, [\mathbf{C}]_{\mathcal{BB}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 作业五

$$1. [\mathbf{T}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. 由定义,  $[\mathbf{T}]_S$  的第  $j$  列为:

$$[\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)]_S = [\mathbf{A}e_j] = \mathbf{A}_{*j},$$

从而所证成立。

$$3. [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, [\mathbf{A}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 对任意  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ , 有  $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, 0, 0)$ , 这里  $\alpha, \beta \in R$ . 由题意可得:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\alpha, \beta, 0, 0) = (\alpha + \beta, \beta, 0, 0) \in \mathcal{X},$$

即:  $\mathcal{X}$  为  $\mathbf{T}$  的一个不变子空间, 直接计算可得  $[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}]_{\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

## 作业六

1.

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{10}, \|\mathbf{A}\|_1 = 4, \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{10}, \|\mathbf{A}\|_{\infty} = 3.$$

$$\|\mathbf{B}\|_F = \sqrt{3}, \|\mathbf{B}\|_1 = 1, \|\mathbf{B}\|_2 = 1, \|\mathbf{B}\|_{\infty} = 1.$$

$$\|\mathbf{C}\|_F = 3, \|\mathbf{C}\|_1 = 10, \|\mathbf{C}\|_2 = 9, \|\mathbf{C}\|_{\infty} = 10.$$

$$2. \text{ 记 } \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 =$$

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ , 有标准正交的定义, 可以验证  $\mathcal{B}$  为标准正交基, 且

$$\mathbf{A} = \sqrt{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4.$$

## 作业七

$$1. \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

2. 使用传统的 Gram-Schmidt 正交化方法, 可以得到:

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.709 \\ -0.709 \end{pmatrix} \right\}$$

使用修改后的 Gram-Schmidt 正交化方法, 可以得到:

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10^{-3} \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3. 由酉矩阵的定义, 可以直接验证  $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = I_{2 \times 2}$  成立, 所以该矩阵是酉矩阵。

4. 由题意, 令  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ , 由此可得

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \frac{2\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}^T\mathbf{u}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. 由题意  $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}$  可得:  $2\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 由于  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , 从而有  $\mathbf{u}^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 所证成立。

## 作业八

1. 由 Givens reduction 方法, 直接计算可得:

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}_{12}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 27 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{13} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}_{13}\mathbf{P}_{12}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 20 & 14 \\ 0 & -15 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{23} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{13}\mathbf{P}_{12}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -4 \\ 0 & 25 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \mathbf{T},$$

$$\text{并且 } \mathbf{P} = \mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{13}\mathbf{P}_{12} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & 15 & 20 \\ -20 & 12 & -9 \\ -15 & -16 & 12 \end{pmatrix}.$$

2. 由 Householder reduction 可得:

$$\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix} = \mathbf{R},$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}.$$

3.(1) 记  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  直接计算可得:

$$\text{rank}[\mathbf{X}|\mathbf{Y}] = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3,$$

这说明  $\mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y$  为  $\mathcal{R}^3$  的一组基, 再由  $\mathcal{B}_X \cap \mathcal{B}_Y = \emptyset$  可知:  $\mathcal{X}$  和  $\mathcal{Y}$  为  $\mathcal{R}^3$  的一对补空间。

(2) 直接计算得:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{X}|\mathbf{0}][\mathbf{X}|\mathbf{Y}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

4. 对于任意  $n \times n$  的矩阵  $\mathbf{A}$ , 我们都有  $\mathbf{A} = \mathbf{S} + \mathbf{K}$  成立, 这里  $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} \in \mathcal{S}$ ,  $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^T}{2} \in \mathcal{K}$ , 即任意矩阵都可以表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和。

下面说明这种表示具有唯一性。使用反证法，假设对任意矩阵  $\mathbf{A}$  存在两个不同的表示，即

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{A} = \mathbf{S}_2 + \mathbf{K}_2,$$

$$\implies \mathbf{S}_1 + \mathbf{K}_1 = \mathbf{S}_2 + \mathbf{K}_2 \implies \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1,$$

由于  $\mathbf{S}_1$  和  $\mathbf{S}_2$  为对称矩阵，而  $\mathbf{K}_1$  和  $\mathbf{K}_2$  为反对称矩阵，从而可以得到  $\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \mathbf{0}$ ，即：  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$ ,  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_2$ ，唯一性得证。

综上可得：  $\mathcal{R}^{n \times n} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{K}$  成立。