1、 对于 $A,B,C\in R^{n\times n}$, $\alpha,\beta\in R$

① $A+B\in R^{n\times n}$

② $(A+B)+C=A+(B+C)$

③ $A+B=B+A$

④ $A+O_{n\times n}=A$

⑤ $A+(-A)=O$

⑥ $\alpha A\in R^{n\times n}$

⑦ $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

⑧ $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

⑨ $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

⑩ $I\cdot A=A$

∴ 所有 $n\times n$ 实数矩阵构成的集合为一个线性空间

(1) $A^T=A$, $B^T=B$, $\alpha\in R$

$(A+B)^T=A+B$ $(\alpha A)^T=\alpha A^T=\alpha A$

∴ 是

(2) $A^T=-A$ $B^T=-B$ $\alpha\in R$

$(A+B)^T=A^T+B^T=-(A+B)$ $(\alpha A)^T=\alpha A^T=-\alpha A$

∴ 是

(3) A,B 可逆 $\alpha\in R$

$A+B$ 不一定可逆

∴ 不是

(4) A,B 为上三角矩阵, $\alpha\in R$

$A+B$, αA 都是上三角矩阵

∴ 是

(5) A, B 为下三角矩阵，$\alpha \in R$

$A+B$, αA 都是下三角矩阵

∴ 是

(6) $trace(A)=0$ $trace(B)=0$ $\alpha \in R$

$trace(A+B) = trace(A) + trace(B) = 0$ $trace(\alpha A) = \alpha\, trace(A) = 0$

∴ 是

2、(1) $R(AB) = \{ABx \mid x \in R^p\} \subseteq R^m$ $R(A) = \{Ax \mid x \in R^n\} \subseteq R^m$

$\forall\, b = ABx \in R(AB)$

$Bx \in R^n$ $A(Bx) \in R(A)$

∴ $R(AB) \subseteq R(A)$

(2) $N(B) = \{x \mid Bx = 0\} \subseteq R^n$ $N(AB) = \{x \mid ABx = 0\} \subseteq R^n$

$\forall\, x \in N(B)$, $Bx = 0$

$\Longrightarrow ABx = 0$, $x \in N(AB)$

∴ $N(B) \subseteq N(AB)$

3. 设 $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

∴ 线性无关