作业四

1. 设 $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n\times n}$, 试说明下面哪些是线性变换。

(1) $\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times n}) = \mathbf{AX} - \mathbf{XA}$, (2)$\mathbf{T}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T$,

(3)$\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times n}) = \frac{\mathbf{X}+\mathbf{X}^T}{2}$ (4)$\mathbf{T}(\mathbf{X}_{n\times 1}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

2. 对于向量空间 R^3,

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

为该空间的两组基。

(1) 对于恒等算子 $\mathbf{I}$，分别计算 $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}'}$, $[\mathbf{I}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

(1) 对于投影算子 $\mathbf{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, 计算 $[\mathbf{P}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

3. 设 $\mathbf{T}: R^3 \longrightarrow R^2$, $\mathbf{L}: R^2 \longrightarrow R^2$ 为两个线性变换，其定义如下：

$$\mathbf{T}(x, y) = (x + y, y - z), \quad \mathbf{L}(u, v) = (2u - v, u).$$

记 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 分别为 R^3 和 R^2 标准的正交基。

(1) 计算 $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$，$[\mathbf{L}]_{\mathcal{B}'}$。

(2) 记 $\mathbf{C} = \mathbf{LT}$，计算 $[\mathbf{C}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$，并验证：$[\mathbf{C}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [\mathbf{L}]_{\mathcal{B}'}[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ 成立。