# 作业二

1.$\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 的矩阵，分别计算 $\mathbf{Ae_j}$、$\mathbf{e_i}^T\mathbf{Ae_j}$，这里 $\mathbf{e_i}$ 和 $\mathbf{e_j}$ 分别为单位矩阵 $\mathbf{I}$ 的第 i 列和第 j 列。

2. 如果 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 都为 $n \times n$ 的矩阵，证明：$trace(\mathbf{ABC}) = trace(\mathbf{BCA})$.

3. 简要说明：两个上（下）三角矩阵相乘仍为上（下）三角矩阵。

4. 已知 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 试求矩阵 $\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 的逆矩阵，其中 $\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 定义如下：

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. 矩阵 $\mathbf{A}$ 和向量 $\mathbf{b}$ 定义如下：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

使用部分主元法 (partial pivoting) 实现 $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$，并求解方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

6. 假设矩阵 $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_4 \end{pmatrix}$ 具有 LU 分解，试说明矩阵 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{U}$ 具有如下形式：

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1}{\pi_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2}{\pi_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_3}{\pi_3} & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_4 \end{pmatrix}$$

这里的 $\pi_i$ 定义如下：

$$\pi_1 = \beta_1, \quad \pi_i = \beta_i - \frac{\alpha_{i-1}\gamma_{i-1}}{\pi_{i-1}},\ i = 2, 3, 4.$$