Intersection de deux segments du plan

Ulysse DURAND

Soient A, B, M des points du plan.
$M = (x, y)$ $A = (x_A, y_A)$ $B = (x_B, y_B)$
M appartient au segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
soit il existe t tel que $(x - x_A, y - y_A) = t \cdot (x_B - x_A, y_B - y_A)$
alors on a

$$[AB] : \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x_A + t(x_B - x_A) \\ y & = & y_A + t(y_B - y_A) \\ t & \in & [0, 1] \end{array} \right.$$

de même, pour C et D des points du plan,

$$[CD] : \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & x_C + t'(x_D - x_C) \\ y & = & y_C + t'(y_D - y_C) \\ t' & \in & [0, 1] \end{array} \right.$$

Ensuite, M appartient au segment $[AB]$ si et seulement si
il existe $t, t' \in [0, 1]$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_A + t(x_B - x_A) & = & x_C + t'(x_D - x_C) \\ y_A + t(y_B - y_A) & = & y_C + t'(y_D - y_C) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} t(x_B - x_A) + t'(x_C - x_D) & = & x_C - x_A \\ t(y_B - y_A) + t'(y_C - y_D) & = & y_C - y_A \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_D \\ y_B - y_A & y_C - y_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} t \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{(x_B - x_A)(y_C - y_D) - (x_C - x_D)(y_B - y_A)} \begin{pmatrix} y_C - y_D & x_D - x_C \\ y_A - y_B & x_B - x_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$

Pour conclure, $[AB]$ et $[CD]$ s'intersectent si et seulement si
$(x_B - x_A)(y_C - y_D) - (x_C - x_D)(y_B - y_A) \neq 0$
et t, t' tels que définis ci-dessus sont dans $[0, 1]$
Alors les coordonées de M sont données par l'equation de $[AB]$ ou $[CD]$