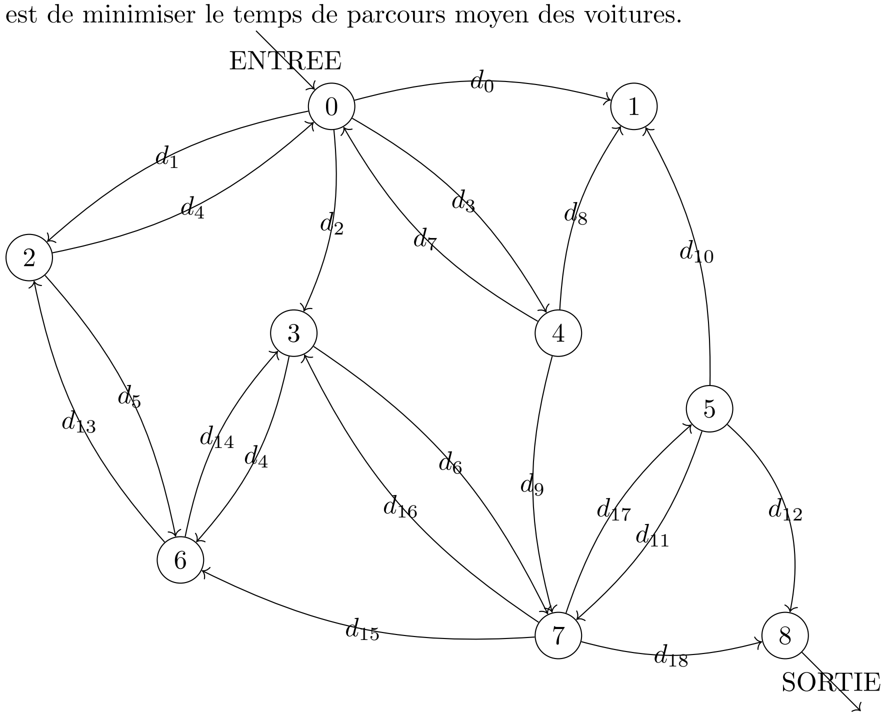
TIPE Sur l'optimisation du trafic routier.

MOULAT Mattéo
NODET Gaëtan
DURAND Ulysse
MARGUET Emeric

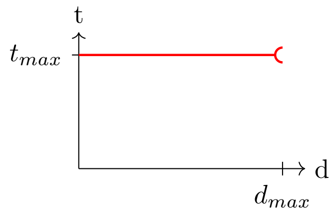
Dans le monde d'aujourd'hui, le transport routier représente une grande part des émissions de gaz à effet de serre et est aussi la cause, en france, de plus de 50 000 accidents par an. C'est pourquoi il est plus qu'important de considérer la limitation du trafic routier.
Nous allons nous placer dans un monde où les véhicules suivent le chemin que notre algorithme leur indique, et nous allons concevoir cet algorithme afin de fluidifier le trafic routier en minimisant le temps de trajet des véhicules.

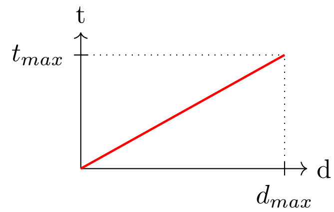
1 Modèle

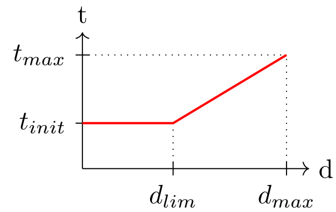
Le réseau routier sera un graphe orienté où les sommets sont des croisements et les arrêtes des portions de route. Une route à double sens est représentée par deux arrêtes distinctes. Les voitures vont toutes d'un sommet A du graphe à un autre sommet B. Pour une voiture, le temps de parcours d'un croisement est nul. Nous considérerons des débits de voiture (voitures/seconde) sur chaque portion de route sans que ces derniers varient en fonction du temps.
Nous supposerons sur tout le réseau routier, la densité de voitures est la même (voitures/m), ainsi nous pourrons modéliser les ralentissements sur une route par une fonction appelée fonction de ralentissement de la route donnant le temps de parcours de la route en fonction du débit entrant dans cette dernière. L'objectif est de minimiser le temps de parcours moyen des voitures.



1.1 Quelques exemples de fonctions de de ralentissement







1.2 Expression du temps de parcours moyen

Du noeud A au noeud B il y a n chemins, $c_1, ..., c_n$

Le flux total, de 1, est répartit en flux sur chaque chemin ($d_1, d_2, ..., d_n$ avec $\sum_{i=1}^{n} d_i = 1$)

Les arètes du graphe sont des portions de route ($r_1, ..., r_m$)

Les arètes disposent d'une fonction de temps de parcours en fonction du débit entrant ($f_1, f_2, ..., f_m$)

Les arètes disposent aussi d'un débit passant ($D_1, ..., D_m$ tels que $D_k = \sum_{i/r_k \in c_i} d_i$)

Alors le temps de parcours moyen du graphe est la moyenne pondérée du temps de parcours de chaque chemin par le débit du chemin.

Le temps de parcours du chemin i est t_i ($t_1, t_2, ..., t_n$)

On peut exprimer $T_{tot} = \sum_{i=0}^{n} = d_i t_i$ et $t_i = \sum_{k/r_k \in c_i} f_k(D_k)$

Intoduisons $\xi_{i,k} = 1$ si l'arrête k appartient au chemin i et 0 sinon.

Alors, $D_k = \sum_{i=0}^{n} \xi_{i,k} d_i$ et $t_i = \sum_{k=0}^{m} \xi_{i,k} f_k(D_k)$

On a finalement l'expression de la fonction T_{tot} qui a n-1 variables $d_1, ..., d_{n-1}$ ($d_n = 1 - \sum_{i=0}^{n} d_i$) dont on tentera d'approcher le minimum.

$$T_{tot} = \sum_{i=0}^{n} d_i \sum_{k=0}^{m} \xi_{i,k} f_k(\sum_{i=0}^{n} \xi_{i,k} d_i)$$

1.3 résolution par descente de gradient

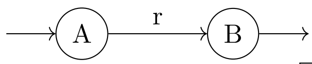
Pour ce qui est de la résolution pour des fonctions de ralentissement compliquées, on se rammène àa minimiser la fonction qui à une repartition du débit sur les différents chemins associe le temps de parcours moyen.

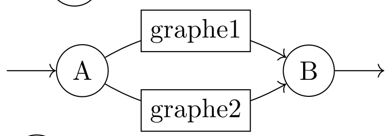
Considérons les chemins $c_1, \cdots, c_n$ dans un certain ordre et considérons en entrée de notre fonction de temps de parcours moyen la répartition du débit $d_1, d_2, \cdots, d_{n-1} \in [0, 1]$, avec $\sum_{i=1}^{n} d_i = 1$. Si $d_i = 0.2$ on dirige 20% des voitures sur le chemin i.

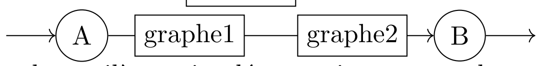
Tout notre problème se rammène alors à trouver le minimum d'une fonction à $n - 1$ variables.

Nous pouvons espérer que notre fonction est différentiable en tout point de $[0, 1]^{n-1}$, pour ainsi avoir la possibilité d'utiliser l'algorithme de descente de gradient, nous permettant de trouver à partir d'un point, un minimum local. Alors une résolution approchée pourrait consister à appliquer la descente de gradient à une multitude de points aléatoires et de comparer les minimums locaux trouvés. Le résultat ne sera alors pas forcément le minimum de la fonction mais on peut espérer qu'il s'en rapproche avec un nombre conséquent de points.

1.4 graphes série/parallèle

Un graphe série-parallèle est construit récursivement, de la manière suivante :
C'est soit
-une simple route 

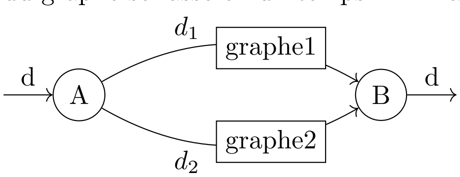
-deux sous graphes en parallèle 

-deux sous graphes en série 

Pour tout aussi bien comprendre, voilà une implémentation en ocaml.

```
type graph_ser_paral =
      Route of arrete
     |Parallel of (graph_ser_paral*graph_ser_paral)
     |Serie of (graph_ser_paral*graph_ser_paral);;
```

Pour résoudre notre problème sur ce genre de graphe, on peut se rammener à résoudre les sous problèmes des sous graphes :
Pour le cas d'une simple route et le cas d'un graphe en série, on ne peut rien changer à la répartition des débit de voitures.
Pour le cas d'un graphe parallèle, on a un débit entrant (1 pour le graphe total) et on souhaite répartir ce débit sur les branches du graphe, on veut donc déterminer d_1 et d_2 (avec $d_1 + d_2 = d$) pour que le parcours du graphe se fasse en un temps minimal.



Les fonctions de ralentissement du temps de parcours en fonction du débit peuvent s'étendre par induction aux graphes parallèles, nous le verrons par la suite. Soit f_1 celle du sous-graphe 1, f_2 celle du sous-graphe 2 et $\widetilde{F}$ le temps de parcours du graphe parrallèle, $\widetilde{F}(d, d_1) = \frac{d_1}{d} f_1(d_1) + \frac{d - d_1}{d} f_2(d - d_1)$.
A d fixé, le but est de trouver une valeur de d_1 pour que $\widetilde{F}(d, d_1)$ soit minimum. Pour minimiser une fonction, on peut utiliser l'algorithme de descente de gradient, pour lequel on a besoin de la dérivée : $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial d_1}(d, d_1) = \frac{1}{d}(f_1(d_1) + d_1 f_1'(d_1) - f_2(d - d_1) + (d - d_1) f_2'(d - d_1)$ (qui suppose la dérivée de f_1 et celle de f_2 calculables).
On trouve alors d_s cette valeur minimisant $\widetilde{F}$. d_s dépend de d. Alors, on obtient une fonction F ne dépendant que de d. $F(d) = f_1(d_s(d)) + f_2(d - d_s(d))$ C'est cette fonction qui sera notre fonction de ralentissement du temps de parcours du graphe série parallèle. $d_s(d)$ n'ayant à priori pas d'expression, on ne pourra utiliser le calcul formel pour avoir la dérivée de F, on devra se limiter à l'approximation de dérivées par $\frac{(x + h) - f(x)}{h}$ pour h assez petit.