1 THEORIE GENERALE

1.1 DETERMINANT DANS UNE BASE

1.1.1 Notion de forme p-lineaire sur E.

L'application $\varphi : E^p \to \mathbb{K}$ est *p-lineaire* si chacune des applications partielles est lineaire.

1.1.2 Forme alternée, antisymétrique.

On suppose que φ est une forme p-linéaire sur E.

- Définitions

  φ est **alternée** si φ s'annule sur tout système de p vecteurs contenant au moins deux vecteurs égaux. On dit qu'elle est **antisymétrique** si, à chaque fois que le système S' est déduit du système S par permutation de deux vecteurs, on a : $\varphi(S') = -\varphi(S)$.

- Propriétés

  1. φ alternée $\implies$ φ antisymétrique. Réciproque vraie si car $\mathbb{K} \neq 2$
  2. φ antisymétrique $\iff$ $\forall \sigma \in S_p, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma).\varphi(x_1, \dots, x_p)$.
  3. φ alternée $\iff$ $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, ((x_1, \dots, x_p)$ lié $\implies$ $\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0)$.

1.1.3 Théorème :

Soit E de dimension n, et B une base de E. Il existe une unique forme n- linéaire alternée φ sur E valant 1 sur la base B. Par définition, $\varphi =$ det B . On a de plus la formule :

$$\forall x \in E, det_B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \epsilon(\sigma).\varphi_{\sigma(1)}(x_1) \dots \varphi_{\sigma(n)}(x_n). \tag{1}$$

où $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est la pase duale de $(e_1, \dots, e_n)$.