Vérification et preuve automatique d'appartenance d'un mot à une grammaire formelle.

Ulysse Durand

Les grammaires formelles

$G = (T, N_t, S, D)$ où :

- T est l'alphabet des terminaux
- N_t est l'alphabet des non terminaux
- $S \in N_t$ est l'axiome
  Notons $\Sigma := N_t \cup T$
- $D \subset (\Sigma^\star)^2$ est l'ensemble des règles de dérivation.

Definitions

- $x \overset{(a,b)}{\rightarrow} x' \iff x = uav$ et $x' = ubv$

Definitions

- $x \overset{(a,b)}{\rightarrow} x' \iff x = uav$ et $x' = ubv$
- $\rightarrow := \bigcup_{(a,b) \in D} \overset{(a,b)}{\rightarrow}$

Definitions

- $x \overset{(a,b)}{\rightarrow} x' \iff x = uav$ et $x' = ubv$
- $\rightarrow := \bigcup_{(a,b)\in D} \overset{(a,b)}{\rightarrow}$
- $\overset{*}{\rightarrow}$ la cloture transitive et réflexive de $\rightarrow$
  $(x \overset{*}{\rightarrow} m \iff x \rightarrow m_1 \rightarrow \cdots \rightarrow m_{n-1} \rightarrow m)$

Definitions

- $x \overset{(a,b)}{\rightarrow} x' \iff x = uav$ et $x' = ubv$
- $\rightarrow := \bigcup_{(a,b)\in D} \overset{(a,b)}{\rightarrow}$
- $\overset{*}{\rightarrow}$ la cloture transitive et réflexive de $\rightarrow$
  $(x \overset{*}{\rightarrow} m \iff x \rightarrow m_1 \rightarrow \cdots \rightarrow m_{n-1} \rightarrow m)$
- $\delta(x)$ successeurs de x par $\rightarrow$ (ou successeurs directs de x par $\overset{*}{\rightarrow}$)

Definitions

- $x \overset{(a,b)}{\rightarrow} x' \iff x = uav$ et $x' = ubv$
- $\rightarrow := \bigcup_{(a,b)\in D} \overset{(a,b)}{\rightarrow}$
- $\overset{*}{\rightarrow}$ la cloture transitive et réflexive de $\rightarrow$ $(x \overset{*}{\rightarrow} m \iff x \rightarrow m_1 \rightarrow \cdots \rightarrow m_{n-1} \rightarrow m)$
- $\delta(x)$ successeurs de x par $\rightarrow$ (ou successeurs directs de x par $\overset{*}{\rightarrow}$)
- $|x|_l$ nombre d'occurences de la lettre l dans x.

Definitions

- $x \overset{(a,b)}{\rightarrow} x' \iff x = uav$ et $x' = ubv$
- $\rightarrow := \bigcup_{(a,b)\in D} \overset{(a,b)}{\rightarrow}$
- $\overset{*}{\rightarrow}$ la cloture transitive et réflexive de $\rightarrow$
  $(x \overset{*}{\rightarrow} m \iff x \rightarrow m_1 \rightarrow \cdots \rightarrow m_{n-1} \rightarrow m)$
- $\delta(x)$ successeurs de x par $\rightarrow$ (ou successeurs directs de x par $\overset{*}{\rightarrow}$)
- $|x|_l$ nombre d'occurences de la lettre l dans x.
- Le langage de la grammaire formelle G est :

$$\mathcal{L}(G) := \delta(S) \cap T^\star$$

Vérification de preuve

$$D = \{d_1, \ldots, d_n\} = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$$

$$S \xrightarrow{d_{i_1}} m_1 \xrightarrow{d_{i_2}} \ldots \xrightarrow{d_{i_p}} m_p$$

$$m_k = u_{k+1} a_{i_{k+1}} v_{k+1} \xrightarrow{(a_{i_{k+1}}, b_{i_{k+1}})} m_{k+1} = u_{k+1} b_{i_{k+1}} v_{k+1}$$
$$j_k := |u_k|$$

```
type 'e preuveformelle =
(('e caractere list)*int*int) list
```

[...;(m_k , i_k , j_k);...]

Vérification de preuve - Exemple

$G = (T, N_t, S, D)$ où :

- $T = \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$
- $N_t = \{\underline{S}, \underline{B}\}$
- $D = \{(\underline{S}, \underline{aBSc})_1, (\underline{S}, \underline{abc})_2, (\underline{Ba}, \underline{aB})_3, (\underline{Bb}, \underline{bb})_4\}$

alors $\underline{\text{ aabbcc }}$ est dans $\mathcal{L}(G)$ car
$\underline{S} \rightarrow_1 \underline{aBSc} \rightarrow_2 \underline{aBabcc} \rightarrow_3 \underline{aaBbcc} \rightarrow_4 \underline{aabbcc}$.

En Ocaml :

```
let unepreuve = [(mot "aBSc",0,0);(mot "aBabcc",1,2);
(mot "aaBbcc",2,1);(mot "aabbcc",3,2)]
```

Preuve automatique d'appartenance d'un mot

Chemin de S à m dans $(\Sigma^\star, \rightarrow)$.

Preuve automatique d'appartenance d'un mot

Chemin de S à m dans $(\Sigma^\star, \rightarrow)$.

Parcours en largeur ! Successeurs directs $\mathcal{S}(x)$ d'un mot x par $\rightarrow$?

Preuve automatique d'appartenance d'un mot

Chemin de S à m dans $(\Sigma^\star, \to)$.

Parcours en largeur ! Successeurs directs $\mathcal{S}(x)$ d'un mot x par $\to$?

Algorithme de Knuth-Morris-Pratt pour le calcul de $\mathcal{S}_{(a,b)}(x)$ successeurs directs de x par $\stackrel{(a,b)}{\to}$.

Preuve automatique d'appartenance d'un mot - Le parcours en largeur

Réduire la complexité d'un tel parcours ?

Eviter les chemins passant par certains mots.

```
interdit : ('e caractere list) -> bool
```

Retourner le chemin pour la preuve d'appartenance du mot.

Amélioration pour les grammaires croissantes

$$\forall (a, b) \in D, |a| \leq |b|$$

$$x \xrightarrow{*} x' \implies |x| \leq |x'|$$

```
let interditcroiss x =
Array.length x > Array.length m
```

Amélioration dans le cas général : déduction sur le nombre d'occurence de chaque lettre

`interdit` plus sophistiquée dans le cas général.

$l \in \Sigma$, $s_x(l) \supset |\delta(x)|_l$ nombres d'occurences de l dans les successeurs de x.

Ainsi, $x \xrightarrow{*} m \implies \forall l \in \Sigma, |m|_l \in s_x(l)$

Amélioration dans le cas général : déduction sur le nombre d'occurence de chaque lettre

`interdit` plus sophistiquée dans le cas général.

$l \in \Sigma$, $s_x(l) \supset |\delta(x)|_l$ nombres d'occurences de l dans les successeurs de x.

Ainsi, $x \xrightarrow{*} m \implies \forall l \in \Sigma, |m|_l \in s_x(l)$

Contraposée : $\boxed{\exists l \in \Sigma / |m|_l \notin s_x(l) \implies \neg(x \xrightarrow{*} m)}$

Amélioration dans le cas général : déduction sur le nombre d'occurence de chaque lettre

`interdit` plus sophistiquée dans le cas général.

$l \in \Sigma$, $s_x(l) \supset |\delta(x)|_l$ nombres d'occurences de l dans les successeurs de x.

Ainsi, $x \xrightarrow{*} m \implies \forall l \in \Sigma, |m|_l \in s_x(l)$

Contraposée : $\boxed{\exists l \in \Sigma / |m|_l \notin s_x(l) \implies \neg(x \xrightarrow{*} m)}$

Pour les grammaires croissantes, $s_x(l) \supset [||x|, \infty|[$

Calcul de s_x - Description des mots

Description d'un mot x (par ses nombres d'occurences des lettres).

Ensemble de ces descriptions Q fini $\subset (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^{\Sigma}$.

Soit $cat(x) \in Q$ la description de x,

$\forall l \in \Sigma, |x|_l \in cat(x)(l)$.

Calcul de s_x - Description des mots

Description d'un mot x (par ses nombres d'occurences des lettres).

Ensemble de ces descriptions Q fini $\subset (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^\Sigma$.

Soit $cat(x) \in Q$ la description de x,

$\forall l \in \Sigma, |x|_l \in cat(x)(l)$.

Exemple : pour $Q = \{\{0\}, \mathbb{N}^*\}^\Sigma$,

$$\begin{aligned} cat(\underline{abcba}) : & a \mapsto \mathbb{N}^*,\ b \mapsto \mathbb{N}^*, \\ & c \mapsto \mathbb{N}^*,\ d \mapsto \{0\}, \\ & S \mapsto \{0\} \end{aligned}$$

Calcul de s_x - Description des mots

Description d'un mot x (par ses nombres d'occurences des lettres).

Ensemble de ces descriptions Q fini $\subset (\mathcal{P}(\mathbb{N}))^{\Sigma}$.

Soit $cat(x) \in Q$ la description de x,

$\forall l \in \Sigma, |x|_l \in cat(x)(l)$.

Exemple : pour $Q = \{\{0\}, \mathbb{N}^*\}^{\Sigma}$,

$$\begin{aligned} cat(\underline{abcba}) : & a \mapsto \mathbb{N}^*,\ b \mapsto \mathbb{N}^*, \\ & c \mapsto \mathbb{N}^*,\ d \mapsto \{0\}, \\ & S \mapsto \{0\} \end{aligned}$$

Partition de $\Sigma^\star$ par $x \sim y \iff cat(x) = cat(y)$.

Calcul de s_x - Le graphe (Q, A_0)

Graphe (Q, A_0) où $A_0 = cat(\rightarrow)$, cat homomorphisme de graphes.

$x \rightarrow x' \implies (cat(x), cat(x')) \in A_0$

Calcul de s_x - Le graphe (Q, A_0)

Graphe (Q, A_0) où $A_0 = cat(\rightarrow)$, cat homomorphisme de graphes.

$x \rightarrow x' \implies (cat(x), cat(x')) \in A_0$

$(q, q') \in A_0$
$\iff \exists x, x' \in \Sigma^\star / x \rightarrow x'$ et $cat(x) = q$ et $cat(x') = q'$

A_0 dérivations possibles d'une description $q \in Q$ à une autre $q' \in Q$.

Calcul de s_x

$x \xrightarrow{*} m \implies cat(m)$ accessible depuis $cat(x)$ dans tout (Q, A) où $A \supset A_0$.

Calcul de s_x

$x \xrightarrow{*} m \implies cat(m)$ accessible depuis $cat(x)$ dans tout (Q, A) où $A \supset A_0$.

La contraposée :

$\boxed{\text{Si } cat(m) \text{ n'est pas accessible depuis } cat(x) \text{ dans un graphe } (Q, A) \text{ majorant } (Q, A_0) \text{, alors } \neg(x \xrightarrow{*} m).}$

Calcul de s_x

$x \xrightarrow{*} m \implies cat(m)$ accessible depuis $cat(x)$ dans tout (Q, A) où $A \supset A_0$.

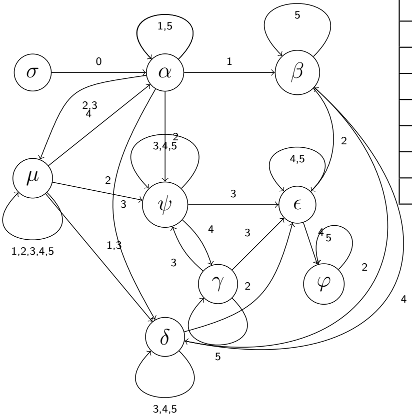
La contraposée :

$\boxed{\text{Si } cat(m) \text{ n'est pas accessible depuis } cat(x) \text{ dans un graphe } (Q, A) \text{ majorant } (Q, A_0), \text{ alors } \neg(x \xrightarrow{*} m).}$

(Ici $s_x(l) = \bigcup_{y / x \xrightarrow{*} y} cat(y)(l) = \bigcup_{q \text{ accessible depuis } cat(x) \text{ dans A}} q(l)$).

Les états q sous la forme $q \in Q = \{\{0\}, \mathbb{N}^*\}^{\Sigma}$

$D =$
$\{(S, \underline{abc})_0, (\underline{abc}, \underline{ab})_1, (\underline{b}, \underline{k})_2, (\underline{c}, \underline{ak})_3, (\underline{kak}, \underline{aa})_4, (\underline{a}, \underline{aaa})_5\}$

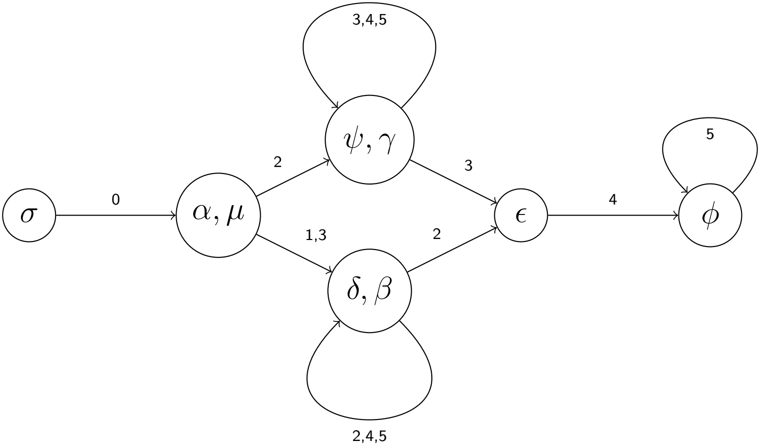


(a) Le graphe A

q	q(a)	q(b)	q(c)	q(k)	q(S)
α	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$	$\{0\}$
β	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
γ	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$	$\{0\}$
δ	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$
ϵ	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$
φ	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$
ψ	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$
μ	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$
σ	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{0\}$	$\mathbb{N}^*$

(b) Ses sommets

Les états q sous la forme $q \in Q = \{\{0\}, \mathbb{N}^*\}^\Sigma$



$\neg\,(\underline{\ \text{aaabakab}\ } \xrightarrow{*} \underline{\ \text{akkcckaaakck}\ })$ (ψ pas accessible depuis δ)

Calcul des arêtes A du graphe, conditions nécessaires

$$\exists x, y / cat(x) = q \text{ et } cat(y) = q' \text{ et } x \overset{(a,b)}{\rightarrow} y$$
$$\Longrightarrow$$

- $cat(a) \preceq cat(x)$ où
  $\forall \alpha, \beta \in Q, (\alpha \preceq \beta) \iff \forall l \in \Sigma, \max \alpha(l) \leq \min \beta(l)$.

Calcul des arêtes A du graphe, conditions nécessaires

$$\exists x, y / cat(x) = q \text{ et } cat(y) = q' \text{ et } x \overset{(a,b)}{\rightarrow} y$$
$$\Longrightarrow$$

- $cat(a) \preceq cat(x)$ où
  $\forall \alpha, \beta \in Q, (\alpha \preceq \beta) \iff \forall l \in \Sigma, \max \alpha(l) \leq \min \beta(l)$.
- $cat(x) - cat(a) \preceq cat(y)$ où
  $\forall \alpha, \beta \in Q, \alpha - \beta : l \mapsto$
  $$\begin{cases} \{0\} & \text{si } \beta(l) = \mathbb{N} \text{ ou } \alpha(l) = \{0\} \\ \mathbb{N} & \text{sinon} \end{cases}$$

Calcul des arêtes A du graphe, conditions nécessaires

$$\exists x, y / cat(x) = q \text{ et } cat(y) = q' \text{ et } x \overset{(a,b)}{\rightarrow} y$$
$$\Longrightarrow$$

- $cat(a) \preceq cat(x)$ où
  $\forall \alpha, \beta \in Q, (\alpha \preceq \beta) \iff \forall l \in \Sigma, \max \alpha(l) \leq \min \beta(l)$.
- $cat(x) - cat(a) \preceq cat(y)$ où
  $\forall \alpha, \beta \in Q, \alpha - \beta : l \mapsto$
  $\begin{cases} \{0\} & \text{si } \beta(l) = \mathbb{N} \text{ ou } \alpha(l) = \{0\} \\ \mathbb{N} & \text{sinon} \end{cases}$
- $\forall l \in \Sigma, cat(b)(l) = \mathbb{N}^* \implies cat(y)(l) = \mathbb{N}^*$.

Calcul des arêtes A du graphe, conditions nécessaires

$$\exists x, y / cat(x) = q \text{ et } cat(y) = q' \text{ et } x \overset{(a,b)}{\rightarrow} y$$
$$\implies$$

- $cat(a) \preceq cat(x)$ où
  $\forall \alpha, \beta \in Q, (\alpha \preceq \beta) \iff \forall l \in \Sigma, \max \alpha(l) \leq \min \beta(l).$
- $cat(x) - cat(a) \preceq cat(y)$ où
  $\forall \alpha, \beta \in Q, \alpha - \beta : l \mapsto$
  $\begin{cases} \{0\} & \text{si } \beta(l) = \mathbb{N} \text{ ou } \alpha(l) = \{0\} \\ \mathbb{N} & \text{sinon} \end{cases}$
- $\forall l \in \Sigma, cat(b)(l) = \mathbb{N}^* \implies cat(y)(l) = \mathbb{N}^*.$
- $\forall l \in \Sigma, cat(x)(l) = \{0\}$ et
  $cat(b)(l) = \{0\} \implies cat(y)(l) = \{0\}.$

Calcul des arêtes A du graphe

Pour $A_{(a,b)} \supset \{(q,q') \in A \mid \exists x, x' \in \Sigma^\star / x \overset{(a,b)}{\rightarrow} x' \text{ et } cat(x) = q \text{ et } cat(x') = q'\}$

$$A = \bigcup_{(a,b)\in D} A_{(a,b)}.$$

Conclusion

En précalculant la matrice d'accessibilité de A (avec Floyd-Warshall), `elimine x` en $\mathcal{O}(|x|)$.

Conclusion

En précalculant la matrice d'accessibilité de A (avec Floyd-Warshall), `elimine x` en $\mathcal{O}(|x|)$.

Mais, seulement 3 appels à `inderdit` réussis pour dériver S en aaakaaak de profondeur 5...

Conclusion

En précalculant la matrice d'accessibilité de A (avec Floyd-Warshall), `elimine x` en $\mathcal{O}(|x|)$.

Mais, seulement 3 appels à `inderdit` réussis pour dériver _S_ en _aaakaaak_ de profondeur 5...

Prétraitement couteux

Conclusion

En précalculant la matrice d'accessibilité de A (avec Floyd-Warshall), `elimine x` en $\mathcal{O}(|x|)$.

Mais, seulement 3 appels à `inderdit` réussis pour dériver S en aaakaaak de profondeur 5...

Prétraitement couteux

Extension probablement possible (mais aussi peu utile ?) pour $Q \subset \{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1\}^{\Sigma}$