# Stage de L3, formalisation de Game Semantics avec Coq

Ulysse Durand

dirigé par

Pierre Clairambault
et
Etienne Miquey

# 1 Introduction

Comme vu en théorie de la programmation, on peut faire une sémantique dénotationnelle d'un langage de programmation.

C'est à dire envoyer les types du langage vers des ensembles.

En réalité on peut faire une telle sémantique dénotationnelle pas que pour les ensembles mais pour toutes les catégories cartésiennes fermées.

La question est alors de savoir si on peut construire une telle sémantique vers une catégorie des jeux et stratégies, que l'on va alors construire.

# 2 Définitions

Tentons de définir cette catégorie des jeux.

***Structure d'événement (S.E.) :***

Il s'agit de $E = (|E|, \leq_E, \#_E)$ où

- $\leq_E$ est un ordre partiel sur E
- $\#_E$ est une relation binaire symétrique irréflexive :
  - à causes finies : $\forall e \in |E|, \{e' \in |E| \mid e' \leq_E e\}$ est fini
  - qui vérifie l'axiome de vendetta : $\forall e_1 \#_E e_2, (e_2 \leq_E e_2' \implies e_1 \# e_2')$

***Configuration :***

$x$ fini $\subset |E|$ est une configuration si

- x est fermé vers le bas $(\forall e \in x, \forall e' \in |E|, e' \leq_E e \implies e' \in x)$
- x est sans conflit $(\forall e, e' \in x, \neg(e \#_E e'))$

On note $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des configurations de $E$.

***Justification :***

$x \in \mathcal{C}(E)$ justifie $e \in |E|$, noté $x \vdash e$ si $x \uplus e \in \mathcal{C}(E)$

***Jeu :***

Un jeu est $A$ une S.E munie de $\mathrm{pol}_A : |A| \to \{-, +\}$

***Partie :***

Une partie sur $A$ est un mot $s = s_1 \dots s_n \in |A|^*$ qui est :

- valide : $\forall 1 \leq i \leq n, \{s_1, \dots s_i\} \in \mathcal{C}(A)$
- non répétitive : $\forall i, j, s_i = s_j \implies i = j$
- alternante : $\forall 1 \leq i \leq n-1, \text{pol}_A(s_i) = -\text{pol}_A(s_{i+1})$
- négative : $s \neq \epsilon \implies \text{pol}_A(s_1) = -$

On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties sur $A$.

## Opérations sur les jeux

***Tenseur ou jeux parallèles :***

On définit le jeu $A_1 \otimes A_2$

- $|A_1 \otimes A_2| = \{1\} \times |A_1| \cup \{2\} \times |A_2|$
- $(i, a) \leq_{A_1 \otimes A_2} (j, a') \iff i = j$ et $a \leq_{A_i} a'$
- $(i, a) \#_{A_1 \otimes A_2} (j, a') \iff i = j$ et $a \#_{A_i} a'$
- $\text{pol}_{A_1 \otimes A_2}(i, a) = pol_{A_i}(a)$

***Jeu dual :***

On définit le jeu ${}^{\perp}A$

- $|{}^{\perp}A| = |A|$
- $\leq_{{}^{\perp}A} = \leq_A$
- $\#_{{}^{\perp}A} = \#_A$
- $\text{pol}_{{}^{\perp}A} = -\text{pol}_A$

***$A \vdash B$ :***

$A \vdash B = {}^{\perp}A \otimes B$

## Stratégies sur les jeux

***Stratégie :***

Une stratégie sur le jeu $A$ est $\sigma \subset \mathcal{P}(A)$ qui est

- non vide : $\epsilon \in \sigma$
- clos par préfixe : $\forall e \in \sigma, \forall e', e' \sqsubseteq e \implies e' \in \sigma$
- déterministe : (Dans une partie quand c'est le tour du joueur $+$, il ne fait qu'un choix de coup)
  $sa_1^+, sa_2^+ \in \sigma \implies a_1 = a_2$
- réceptive : (Maximale dans un certains sens)
  $s \in \sigma$ et $sa^- \in \mathcal{P}(A) \implies sa^- \in \sigma$

***Restriction de stratégie :***

Soit $s$ une stratégie sur $A_1 \otimes A_2$, alors $s \upharpoonright A_1$ est la restriction de $s$ à $A_1$.

$s \upharpoonright A_1 = \{\Pi_{i | \exists b_i : a_i = (1, b_i)} a_i \mid a_1 \dots a_n \in s\}$

De même,

$s \upharpoonright A_2 = \{\Pi_{i | \exists b_i : a_i = (2, b_i)} a_i \mid a_1 \dots a_n \in s\}$

### Catégories :

***Catégorie :***

Une catégorie $\mathcal{C}$ c'est

- Une classe d'objets $|\mathcal{C}|$
- Pour chaque paire d'objets $A, B \in |\mathcal{C}|$, une classe de morphismes $\mathcal{C}(A, B)$
- Pour chaque $A \in |\mathcal{C}|$, un morphisme $\mathrm{id}_A \in \mathcal{C}(A, A)$
- Une loi binaire sur les morphismes $f \in \mathcal{C}(A, B)$, si $g \in \mathcal{C}(B, C)$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}(A, C)$

Tel que

- $\circ$ est associative: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- Pour tout A, $\mathrm{id}_A$ est neutre pour $\circ$ : $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A \circ f = f$

## 3 La catégorie des jeux et des stratégies

Nous allons tenter de construire la catégorie des jeux et stratégies

- Les objets seront les jeux
- Les morphismes $\mathcal{C}(A, B)$ seront les stratégies sur le jeu $A \vdash B$
- Pour A un objet, $\mathrm{id}_A$ sera copycat de $A$ (défini très bientôt)

- La composition de stratégies est définie très bientôt

Après avoir défini $\mathrm{id}_A$ et $\circ$, il nous restera à prouver que avec ces définitions, $\circ$ est associative et $\mathrm{id}_A$ est neutre pour $\circ$.

## Copycat

Copycat de $A$ est une stratégie sur $A \vdash A = {}^{\perp}A \otimes A$

***Definition :***

> Copycat de $A$ c'est
>
> $$cc_A = \{s \in \mathcal{P}(A_1 \vdash A_2) \mid \forall t = t_1 \dots t_n \sqsubseteq s / pol_A(t_n) = + \implies t \upharpoonright A_1 = t \upharpoonright A_2\}$$

## Composition de stratégies

Soit $\sigma$ stratégie sur $A \vdash B$ et $\tau$ stratégie sur $B \vdash C$, construisons $\tau \circ \sigma$ stratégie sur $A \vdash C$

***Définition : interaction***

> Une interaction sur $A, B, C$ est $u \in (A \otimes B \otimes C)^*$ tel que
>
> - $u \upharpoonright (A, B) \in \mathcal{P}(A \vdash B)$
> - $u \upharpoonright (B, C) \in \mathcal{P}(B \vdash C)$
> - $u \upharpoonright (A, C) \in \mathcal{P}(A \vdash C)$

On note $I(A, B, C)$ l'ensemble des intéractions sur $A, B, C$.

***Définition : stratégies parallèles***

> $\sigma || \tau = \{u \in I(A, B, C) \mid u \upharpoonright A, B \in \sigma \text{ et } u \upharpoonright B, C \in \tau\}$

***Définition : Composition de stratégies***

> $\sigma \circ \tau = \{u \upharpoonright A, C \mid u \in \sigma || \tau\}$

***Diagramme de polarité***

On partitionne $\mathcal{P}(A \vdash B)$ par la parité des longueurs de partie. Ainsi on a un ensemble $O$ des parties où c'est au tour de l'opposant de jouer et $P$ celui des parties où c'est au tour du joueur de jouer. On obtient $\mathcal{P}(A \vdash B)/\sim$

Soit un jeu $A$, on peut construire l'automate $\mathcal{A}_A$ où les états sont les parties et les transitions sont les coups munis de leur polarisation qui par justification mênent à une autre partie. On peut aussi partitionner cet automate par $\sim$ pour avoir $\mathcal{A}_A/\sim$

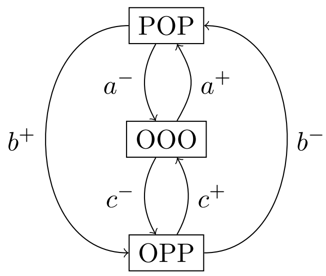
Alors on construit le diagramme des polarités qui est l'automate

$(\mathcal{A}_{A \vdash B}/\sim) \times (\mathcal{A}_{B \vdash C}/\sim) \times (\mathcal{A}_{A \vdash C}/\sim)$

L'état initial étant $OOO$.

Par exemple depuis l'état $OOO$ on ne peut jouer un coup $b^+$ où $b \in |B|$ car ce serait un coup du joueur pour $A \vdash B$ alors que c'est le tour de l'opposant. De même on ne peut jouer un coup $b^-$ à cause de $B \vdash C$.

On aboutit alors au diagramme suivant :




***Proposition :***

$\sigma \circ \tau$ ainsi défini est bien une stratégie sur $A \vdash C$

***Preuve :***

***Lemme d'unicité du témoins :***

Si $s \in \sigma \circ \tau$ est de longueur paire, $\exists! u \in \sigma || \tau$ tel que $s = u \upharpoonright A, C$

on l'appelle le témoins de s.

***Preuve du Lemme :***

***Existence :***

Par définition de $\sigma \circ \tau$

***Unicité :***

Soit $u, v \in \sigma || \tau$ tels que $u \upharpoonright A, C = s$ et $v \upharpoonright A, C = s$.

Soit $\omega$ leur plus long préfixe commun

$$\begin{aligned} u =& \omega l_1 u' \\ v =& \omega l_2 v' \end{aligned}$$

- Si $l_1$ et $l_2 \in B$.

  Comme $u$ et $v$ sont alternants pour $\mathrm{pol}_B$, on a $\mathrm{pol}_B(b_1) = \mathrm{pol}_B(b_2)$

  Supposons que ça vaut $+$.

  Par déterminisme de $\tau$, comme $(w \upharpoonright B, C)b_1^+ \in \tau$ et $(w \upharpoonright B, C)b_2^+ \in \tau$, on a $b_1 = b_2$.

- Sinon

  Nous verrons par la suite que c'est impossible étant donné le diagramme de polarité