RDCSS 2020：Newton 力学小测验解答

詹有丘

2020 年 8 月 6 日

问题 1 $\star\star\star\star$

解. 将 t 写成矩阵的形式

$$t\,(a) = M^{\mathrm{T}} a,$$

其中

$$M := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

随意构造以 M 为法向的超平面 (即 $\operatorname{Ker} t$) 的一组正交基, 例如

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(不唯一).

将它们分别归一化, 并拼成一个矩阵, 得到

$$R := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{13}{\sqrt{182}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{182}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{182}} & 0 \end{bmatrix}.$$

然后双射 $\varphi : a \mapsto Qa$ 即为所求同构, 其中

$$Q := \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}} \\ R^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{13}{\sqrt{182}} & -\frac{2}{\sqrt{182}} & \frac{3}{\sqrt{182}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

注. 此题答案不唯一.

问题 2 ⋆⋆⋆⋆

解. 由题意写出势场

$$U = \frac{1}{2}\left(l - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 + d^2} - l_0\right)^2.$$

求导两次, 得到

$$U' = x\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + d^2}}\right),$$

$$U'' = 1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + d^2}} + \frac{l_0 x^2}{\left(x^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

情形 1: 有 $d > l_0$.

此时 U' 具有唯一零点 $x = 0$.

由于 $U''(0) = 1 - l_0/d > 0$, 故 $x = 0$ 是稳定平衡位置, 会出现微振动. 其周期

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(0)}} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{d - l_0}}.$$

情形 2: 有 $d < l_0$.

此时 U' 具有三个零点 $x = 0, \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}$.

由于 $U''(0) = 1 - l_0/d < 0$, 故 $x = 0$ 不是稳定平衡位置, 不会出现微振动.

由于 $U''\left(\pm\sqrt{l_0^2 - d^2}\right) = 1 - d^2/l_0^2 > 0$, 故 $x = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}$ 是稳定平衡位置, 会出现微振动. 其周期

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{U''\left(\pm\sqrt{l_0^2 - d^2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_0^2}{l_0^2 - d^2}}.$$

■

问题 3.1 $\star$

解.
$$T=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E}=2E.$$
■

问题 3.2 $\star\star\star$

解. 我们有
$$x=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^U\frac{T}{\sqrt{U-E}}\mathrm{d}E.$$
将第 1 问的结论代入上式, 得到
$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^U\frac{E}{\sqrt{U-E}}\mathrm{d}E.$$

利用所提示的积分公式, 可以算得
$$x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}U^{\frac{3}{2}},$$
即
$$U=kx^{\frac{2}{3}},$$
其中 $k:=\sqrt[3]{9\pi^2}/2$.

■

注. 有结论: 势场 $U=A\left|x\right|^n$ 中质点运动的周期为
$$T=\frac{2\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{nA^{\frac{1}{n}}\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}.$$

注. 此题中, 不具体计算就可以得到 $U\propto x^{\frac{2}{3}}$. 方法: 设 $U\propto\left|x\right|^n$, 则根据力学相似性, 当线度变化 α 倍时, 能量变化 α^n 倍, 而时间变化 $\alpha^{1-n/2}$ 倍. 由 $T\propto E$ 可知 $n=1-n/2$, 故有 $n=2/3$.

问题 4.1 $\star\star\star$

证明. 用数学归纳法.

首先, 当 $\omega = 0$ 时原命题显然. 当 $\omega = 1$ 时原命题显然.

假设当 $\omega = k - 1$ 时和当 $\omega = k$ 时原命题都成立.

考虑到

$$\cos\left(\left(k+1\right)x\right) = \cos\left(kx\right)\cos x - \sin\left(kx\right)\sin x$$

且

$$\cos\left(\left(k-1\right)x\right) = \cos\left(kx\right)\cos x + \sin\left(kx\right)\sin x,$$

将两式相加, 得

$$\cos\left(\left(k+1\right)x\right) + \cos\left(\left(k-1\right)x\right) = 2\cos\left(kx\right).$$

由此结合归纳假设, 容易得到当 $\omega = k + 1$ 时, 原命题成立.

$\square$

证明. 由 De Moivre 公式, 有

$$\cos\omega x + \mathrm{i}\sin\omega x = \left(\cos x + \mathrm{i}\sin x\right)^{\omega}.$$

将上式右边用 Newton 二项式定理展开, 得

$$\cos\omega x + \mathrm{i}\sin\omega x = \sum_{k=0}^{\omega}\binom{\omega}{k}\left(\cos x\right)^{\omega-k}\left(\mathrm{i}\sin x\right)^{2k}.$$

将上式两边同时取实部. 当 k 为偶数时, 被求和式为实数. 故有

$$\cos\omega x = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{\omega}{2}\right\rfloor}\binom{\omega}{2k}\left(\cos x\right)^{\omega-2k}\left(-1\right)^{k}\left(\sin x\right)^{2k}.$$

由 $\left(\sin x\right)^2 = 1 - \left(\cos x\right)^2$ 得

$$\cos\omega x = \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{\omega}{2}\right\rfloor}\binom{\omega}{2k}\left(\cos x\right)^{\omega-2k}\left(\left(\cos x\right)^2 - 1\right)^{k}.$$

于是 $\cos\omega x$ 被表示为 $\lfloor\omega/2\rfloor$ 个关于 $\cos x$ 的 ω 次多项式之和. 由此得知原命题成立.

$\square$

问题 4.2 $\star\star$

解. 考虑到递推关系

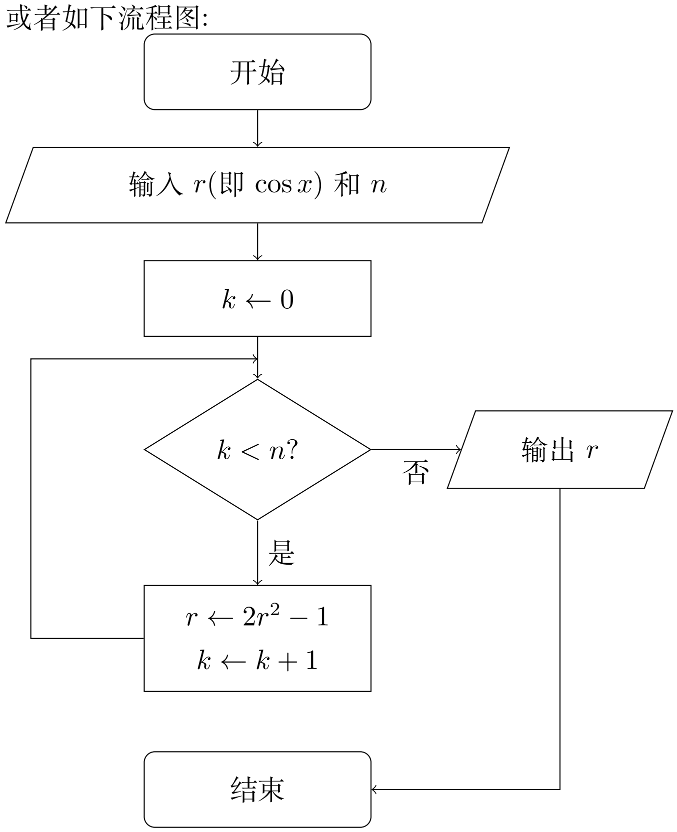
$$f\left(2^{k+1}, x\right) = 2f\left(2^k, x\right)^2 - 1$$

后发现, 只需 n 次循环即可计算出 $f\left(2^n, x\right)$.

使用如下 Python 代码:

```
r = float(input())
for k in range(int(input())):
    r = 2*r*r - 1
print(r)
```

或者如下流程图:

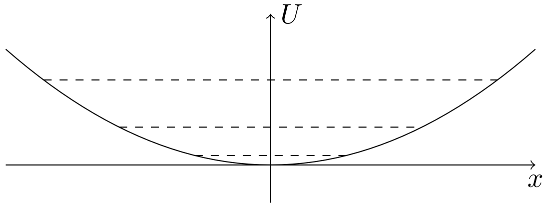


■

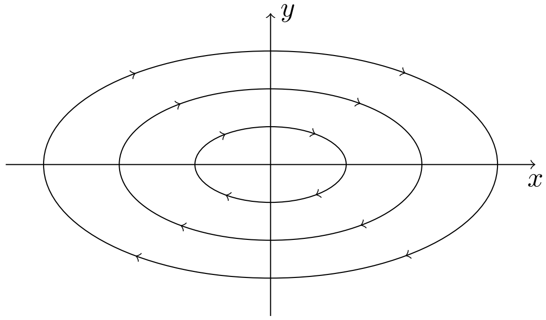
注. 此算法在实际使用中存在很大的精度问题.

问题 5.1 $\star$

解. 先作出 U-x 图, 然后在 U-x 图上画一些能级. 如下图所示.



在相图中画出能级对应的等能集, 再标上箭头即得相曲线.



所求的相曲线如上图所示.

■

证明. 能量 E 对应的相曲线为曲线 $y^2/2+kx^2=E$, 为半轴长分别为 $\sqrt{E/k}$ 和 $\sqrt{2E}$ 的椭圆.

□

问题 5.2 $\star\star$

证明. 运动方程为

$$\ddot{x}_1=-2kx_1,\quad \ddot{x}_2=-2kx_2.$$

容易解得

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}\cos 2kt\\ \sin 2kt\end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{x}:=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$, 且 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$. 两边左乘 $\mathbf{A}^{-1}$, 得

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\cos 2kt\\ \sin 2kt\end{bmatrix}.$$

两边左乘自身的转置, 利用正余弦平方和为 1, 得

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}=1.$$

因此轨迹是系数为 $\mathbf{M}:=\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}$ 的二次曲线.

显然 $\mathbf{M}$ 对角线上的系数为正, 故轨迹是椭圆.

特殊地, 若 $\mathbf{A}^{-1}$ 不存在, 则轨迹退化为线段或点.

□

问题 5.3 $\star$

证明. 在有心力场中角动量守恒. 由于角动量与位置和速度都垂直, 故位置和速度只能在以角动量为法向量的平面内变化. 运动退化为二维的.

由第 2 问可知, 二维情形中轨迹为椭圆. 故三维情形中轨迹也为椭圆.

特殊地, 若角动量为零, 则轨迹退化为线段或点.

□

问题 5.4 $\star\star\star$

证明. 设初速度与初位置张成的二维平面为 V, 且 V 在 $\mathbb{R}^4$ 中的正交补为 $V^{\perp}$.

设 $\mathbf{A}$ 为以 V 中的一组标准正交基为列向量的 4×2 矩阵, 而 $\mathbf{B}$ 为以 $V^{\perp}$ 中的一组标准正交基为列向量的 4×2 矩阵, 再令 4×4 矩阵 $\mathbf{Q}:=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$, 则

$$\mathbf{R}:=\mathbf{Q}\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$$

为正交矩阵, 且 $\mathbf{v}=\mathbf{R}\mathbf{v}$ 当且仅当 $\mathbf{v}\in V$.

由于势场和初条件在 $\mathbf{R}$ 对应的正交变换下不变, 故该系统的运动也在该正交变换下不变, 即运动始终停留在平面 V 上, 运动退化为二维的.

由第 2 问可知, 二维情形中轨迹为椭圆. 故四维情形中轨迹也为椭圆.

特殊地, 若初速度和初位置线性相关 (即无法张成二维平面 V), 则轨迹退化为线段或点.

□

问题 6 ⋆⋆⋆⋆⋆

证明. 在二体问题中, 质心为

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

故当 $m_1 \to \infty$ 时, 有 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_1$, 故 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1$.

另一方面, 由于动量守恒, 有 $\mathbf{v}_0 = \text{const}$. 故在 $m_1 \to \infty$ 时有 $\mathbf{v}_1 = \text{const}$. 因此在 m_1 初始静止的参考系中 m_1 将始终静止.

在二体问题中, 相对位置 $\mathbf{r} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ 的变化, 如同具有质量

$$m := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

的质点在场 $U(r)$ 中的运动. 即, 如同单位质量的质点在场 $W = U/m$ 中的运动.

注意到当 $m_1 \to \infty$ 时, 有 $m = m_2$, 即有 $W = V$. 因此 m_2 相对于 m_1 的运动相当于具有单位质量的质点在场 V 中的运动.

$\square$