

# RDCSS 2020: Newton 力学小测验

詹有丘

2020 年 7 月 20 日

全开卷; 时间 120 分钟; 满分 150 分.

**问题 1** 令

$$t: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}: (a_0, a_1, a_2, a_3) \mapsto a_1 + 2a_2 - 3a_3,$$

给出 Galileo 构造  $(\mathbb{R}^4, t)$  与 Galileo 坐标系的同构.

**问题 2** 具有单位质量的光滑小环套在水平放置的直长硬轨道上, 一根弹簧一端固定在距离轨道  $d$  的某处, 另一端固定在小环上. 当弹簧的长度为  $l$  时, 具有势能  $U = \frac{1}{2}(l - l_0)^2$ . 求小环的微振动周期.

**问题 3** 有一维势场  $U$ , 满足在相平面内, 对应于任意的能量  $E > U_{\min}$  的等能集为简单封闭曲线, 且该曲线围成的图形的面积  $S(E) = E^2$ .

1. 求能量为  $E$  的质点在该势场中运动的周期  $T(E)$ .
2.  $U$  是在  $[0, +\infty)$  上单调增的偶函数, 且  $U(0) = 0$ . 求  $U$ .

提示.

$$\int \frac{x}{\sqrt{a-x}} dx = -\frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{a-x} + C.$$

**问题 4** 令  $f(\omega, x) := \cos \omega x$ .

1. 证明对于任意的  $\omega \in \mathbb{N}$ , 存在  $\omega$  次多项式  $P$ , 使得  $f(\omega, x) = P(\cos x)$ .
2. 输入  $\cos x$  和自然数  $n$ , 给出一种能在  $O(n)$  时间内使用四则运算计算出  $f(2^n, x)$  的算法.(请使用主流的计算机语言或流程图.)

**问题 5** 有有心势场  $U = kr^2$ , 其中  $k > 0$ .

1. 对于一维的情形, 画出相曲线, 并证明相曲线为椭圆.
2. 对于二维的情形, 证明轨迹为椭圆.
3. 对于三维的情形, 证明轨迹为椭圆.
4. 对于四维的情形, 证明轨迹为椭圆.

注. 我们认为线段或点也算椭圆的一种 (即退化了的椭圆).

**问题 6** 系统由质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  的两质点组成, 且具有的势能

$$U = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|).$$

证明当  $m_1 \rightarrow \infty$  时, 在  $m_1$  初始静止的参考系中  $m_1$  将始终静止, 且  $m_2$  相对于  $m_1$  的运动等同于具有单位质量的质点在有心力场  $V = U(r)/m_2$  中的运动.