LIÇÃO 4 - Para o professor

Reconhecer quando duas frações são iguais, saber gerar frações iguais a uma dada fração e obter duas frações de mesmo denominador que são iguais a duas frações quaisquer dadas são habilidades fundamentais que permitem resolver vários problemas no estudo de frações. Por exemplo, com essas habilidades, é possível criar procedimentos que permitem comparar duas frações com denominadores diferentes e obter uma fração que está entre duas frações diferentes (propriedade de densidade das frações). São esses tópicos que compõem a presente lição.

O processo de comparação de frações com denominadores distintos é apresentado como motivação, em uma situação problema, em formato de história em quadrinho, logo no início da lição. Contudo sua solução é retomada na seção *Organizando as ideias* , após a apresentação das oito primeiras atividades que compõem a seção *Explorando o Assunto* . Estas atividades iniciais abordam basicamente a igualdade de frações. Todas elas encontram-se organizadas em ordem crescente de dificuldade. O conceito de igualdade é abordado utilizando-se representações equivalentes em modelos de área retangulares (atividades 2 , 3 e 6), ou em modelos de área circulares (atividade 5) ou na reta numérica (atividade 8). A inclusão de modelos diferentes é proposital pois, com isso, o aluno tem a oportunidade de perceber as mesmas propriedades em contextos diferentes aumentando assim o seu arsenal de modelos que ele pode lançar mão ao justificar uma resposta ou estudar uma situação.

Cabe destacar aqui um detalhe sutil, mas que permeia toda a lição: trata-se do uso das expressões "frações equivalentes" e "frações iguais" . Nesta lição, a expressão "frações equivalentes" é usada se as frações em questão estiverem associadas a divisões de algum objeto físico (bolo, torta, pizza, chocolate, etc.), de forma a poder exprimir o fato de que processos de partições diferentes podem gerar quantidades iguais. Por exemplo, o processo de dividir um bolo ao meio e pegar uma das partes é diferente daquele em que o bolo é dividido quatro partes iguais e se toma duas dessas partes. No entanto, em termos de quantidades, tem-se, em ambos os casos a metade do bolo. Já a expressão "frações iguais" será usada se as frações se referem a números, sem um contexto específico. Por exemplo, $\frac{2}{4}$ é a única fração de denominador 4 que é igual a $\frac{1}{2}$. No entanto, cabe ressaltar que não se espera que os alunos sejam capazes de registrar este tipo de diferença. Assim, recomenda-se que os usos, por parte dos alunos, das expressões frações equivalentes e frações iguais nos contextos destacados sejam considerados igualmente válidos e indistinguíveis.

As sistematizações dos procedimentos de **comparação** (atividades 12 , 13 , 14 , 15 e 18) e do conceito de **igualdade** de frações (atividades 9 , 10 , 11 , 16 , 17 , 19 e 20) são então realizadas na seção *Mão na Massa* . O processo de determinação da fração irredutível igual à fração dada é, por exemplo, trabalhado nas atividades 16 e 17 . Uma condição suficiente para verificação da igualdade de frações é apresentada na atividade 19 . O jogo **Trilha dos doze avos** (*atividade 20*) é uma boa estratégia para que se possa consolidar de forma prazerosa a igualdade de frações.

Na parte final da lição, na seção *Quebrando a Cuca* , apresentam-se atividades que sugerem uma avaliação crítica pelos alunos de afirmações que generalizam situações de igualdade e de comparação entre frações. Cabe destacar que todas as atividades desta última seção, em especial, deverão ser conduzidas sem pressa, por meio de debates intensos entre os alunos para que os argumentos equivocados apareçam e possam ser descontruídos por eles próprios.

Tanto a comparação de frações arbitrárias como o estudo da propriedade de densidade apresenta como procedimento base a procura por representações equivalentes de frações dadas. Nesse sentido, destaca-se a técnica utilizada nas atividades 23 e 24 para determinar uma fração intermediária entre duas frações arbitrárias dadas. A técnica, que consiste simplesmente em procurar frações intermediárias por meio de representações equivalentes das frações dadas com denominadores iguais e suficientemente grandes, além de original, supera o procedimento usual (que utiliza a adição de frações e a divisão de uma fração por um número natural), por sua simplicidade e naturalidade. Este resultado, conhecido no âmbito pedagógico como "propriedade de densidade dos números racionais" , não se verifica para os conjuntos de números naturais e de números inteiros, e é, sem dúvida, um dos fatos mais notáveis na extensão que se faz do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais. É a responsável, por exemplo, pelo fato de um número racional não ter elemento sucessor.

Cabe lembrar que as habilidades desenvolvidas nessa lição são fundamentais para as lições seguintes que tratam das operações com frações.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA LIÇÃO 4:

O aluno deve ser capaz de:

- ⋆ Reconhecer a igualdade de frações, seja por representações geométricas ou por representações numéricas equivalentes;
- ⋆ Determinar frações equivalentes por subdivisões de uma fração dada;
- ⋆ Identificar a representação de frações iguais (equivalentes) na reta numérica;
- ⋆ Reconhecer a igualdade de duas frações por processo matemático suficiente (se $a \times d = b \times c$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$);
- ⋆ Simplificar frações;
- ⋆ Comparar duas ou mais frações com denominadores diferentes;
- ⋆ Reconhecer a fração (o número racional não negativo) como uma classe de equivalência;
- ⋆ Determinar, dada uma fração arbitrária, sua fração irredutível;
- ⋆ Reconhecer a propriedade de densidade do conjunto de frações (números racionais não negativos);
- ⋆ Determinar uma fração, entre duas frações dadas, com base em representações equivalentes dessas frações com denominadores suficientemente grandes.

Atividade 1

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Reconhecer que as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área retangulares.
- ⋆ Reconhecer que, em uma equipartição de uma região retangular, só é possível escolher uma quantidade de partes que corresponda à metade desta região se a quantidade total de partes for um número par.
- ⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (metade do retângulo) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, estas frações são iguais. Assim, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$, etc. são respostas válidas para o item b) desta atividade.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

- Reforce para seus alunos que o item b) deve ser respondido com a partição apresentada, isto é, sem gerar novas partições.

- Observe que o item c) pode ser respondido apenas pela fração $\frac{1}{2}$. No entanto, é importante estimular os alunos a pereceberem que a metade do sanduíche pode ser obtida por $\frac{2}{4}$ do sanduíche.

Classificações:

- Heid et al.: Conceito: identificar e descrever
- Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- UERJ: Observar: identificar e reconhecer

Resposta da Atividade 1

a) Em a): $\frac{1}{2}$. Em b): $\frac{1}{3}$. Em c): $\frac{1}{4}$. Em d): $\frac{1}{4}$.

b) É possível comer metade do sanduíche apenas nas repartições a), c) e d) pois, para elas, a quantidade de partes iguais em que o sanduíche foi dividido é um número par.

c) Em a): $\frac{1}{2}$. Em c): $\frac{2}{4}$. Em d): $\frac{2}{4}$.

Atividade 2

Objetivo específico: Levar o aluno a

- Reconhecer que as frações $\frac{3}{10}, \frac{6}{20}, \ldots, \frac{3\times m}{10\times m}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área retangulares e dobraduras.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- Recomenda-se que a atividade seja desenvolvida em grupos de 3 a 5 alunos e que, neste caso, cada grupo receba uma quantidade suficiente de cópias das folhas para reprodução . Podem ser necessárias mais do que uma dessas folhas por aluno. Uma vez que a folha já tenha sido dobrada para a realização de um dos itens, a marca deixada pode atrapalhar a realização do item seguinte.

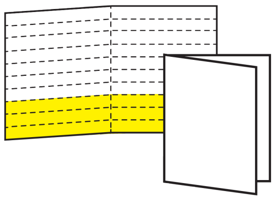
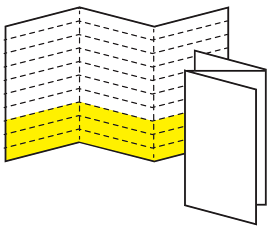
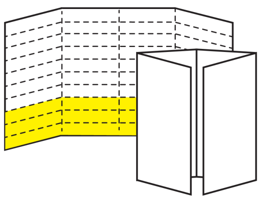
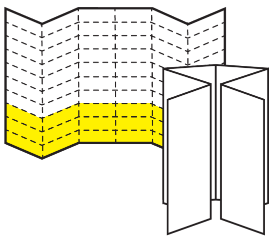
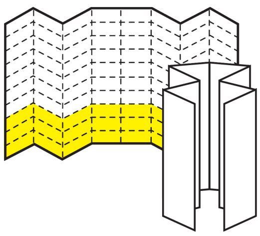
- É importante deixar claro para os alunos que, para decidir sobre a quantidade de retângulos pintados e a quantidade total de retângulos, se devem considerar as divisões feitas pelos vincos das dobras. Neste sentido, você pode, junto com a turma, a título de exemplo e de orientação, preencher a segunda linha da tabela, deixando as demais para sejam preenchidas pelos grupos.

- É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (a área da região pintada de amarelo) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes), mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, estas frações são iguais.

Classificações:

- Heid et al.: Conceito: identificar e descrever
- Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- UERJ: Observar: identificar e reconhecer

Resposta da Atividade 2

Como dobrar	quantidade de retângulos pintados	Quantidade total de retângulos	Fração do retângulo do encarte que está pintada
	3	10	$\frac{3}{10}$
	6	20	$\frac{6}{20}$
	9	30	$\frac{9}{30}$
	12	40	$\frac{12}{40}$
	18	60	$\frac{18}{60}$
	24	80	$\frac{24}{80}$

Notas de Aula

Atividade 3

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Reconhecer que as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{12\times3}{12\times4}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área sem a contagem um a um das partes que compõem as subdivisões destas representações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- ⋆ O propósito de encobrir as divisões do retângulo é para evitar que os alunos façam a contagem das partes uma a uma e que, assim, sejam estimulados a perceber a estrutura multiplicativa 12×3 e 12×4 na divisão do retângulo.
- ⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (a área da região pintada de azul) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes), mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, estas frações são iguais.

Classificações:

- ⋆ Heid et al.: Produto: prever
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer
- ⋆ UERJ: Interpretar: compor e decompor

Resposta da Atividade 3

a) $\frac{3}{4}$.

b) Com a nova divisão, o retângulo fica dividido em $12 \times 4 = 48$ partes, das quais $12 \times 3 = 36$ está pintada de azul. Assim, a fração do retângulo que está pintada de azul é igual a $\frac{12\times3}{12\times4} = \frac{36}{48}$.

Atividade 4

Objetivos específicos: Levar o aluno a

- ⋆ Comparar frações, em que os denominadores são múltiplos, a partir de modelos contínuos.
- ⋆ Introduzir a discusão sobre frações equivalentes

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

a) Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

b) Para amparar a reflexão dos alunos, recomenda-se que sejam feitas cópias das folhas para reprodução disponíveis no final do livro .

c) Não se recomenda que a nomenclatura "frações equivalentes" seja introduzida em sala de aula. Por exemplo, pode-se falar apenas que as frações 1/2 e 2/4 representam a mesma quantidade, e por isso têm a mesma representação na reta numérica.

d) Esta atividade pode desencadear uma discussão com os alunos que os leve a perceberem que se multiplicamos (dividimos) numerador e denominador de uma fração pelo mesmo número então é gerada uma fração equivalente à fração original.

Resposta da Atividade 4

Na hora do lanche, João comeu $\frac{2}{12}$ e Mário $\frac{4}{12}$ do bolo. Se os amigos atrasados não tivessem aparecido antes do lanche, João e Mário teriam comido, cada um, $\frac{1}{3}$ do bolo. Como $\frac{1}{3}$ do bolo corresponde a 4 fatias do bolo cortado em 12 partes iguais, vê-se que João teria comido mais bolo e Mário teria comido a mesma quantidade de bolo se seus amigos não tivessem aparecido antes do lanche.

Notas de Aula

Atividade 5

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{8}{12}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área circulares.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 2 ou 3 alunos para que eles possam discutir as soluções apresentadas, dentro do grupo, durante a condução da atividade.

⋆ Os setores circulares empregados na condução da atividade podem ser aproveitados da *Atividade 10* da Lição 1.

⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do círculo (a área da região pintada de cinza) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes), mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, estas frações são iguais, não apenas porque por sobreposição parecem ser a mesma quantidade, mas porque, como na atividade anterior, se cada terço do círculo for subdividido em 2 e 4 partes iguais, respectivamente, então, de fato, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ e $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

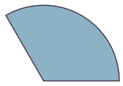
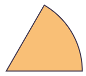
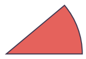
⋆ Além disso, observaçào análoga cabe para as frações que completam a terceira coluna da tabela: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ e $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Conceito: identificar e descrever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer

⋆ UERJ: Observar: identificar e reconhecer

Tipo da peça	Quantas cabem na região cinza?	Juntas, são que fração do círculo?	Fração do círculo não colorida de cinza?
$\frac{1}{3}$ 	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$ 	4	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{9}$ 	6	$\frac{6}{9}$	$\frac{3}{9}$

Resposta da Atividade 5

Notas de Aula

Notas de Aula

Notas de Aula

Atividade 6

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Reconhecer que as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$ e $\frac{8}{16}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações em modelos de área retangulares.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 2 ou 3 alunos para que eles possam discutir as soluções apresentadas, dentro do grupo, durante a condução da atividade.

- ⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte do retângulo (a região colorida de cinza) está sendo descrita por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, por expressarem uma mesma quantidade, são frações iguais.

Esta atividade possui folhas para reprodução disponíveis no final do livro.

Classificações:

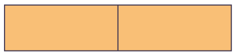
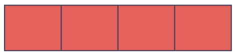
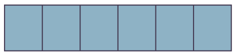
- ⋆ Heid et al.: Conceito: identificar e descrever

- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer

- ⋆ UERJ: Observar: identificar e reconhecer

Resposta da Atividade 6

PARTE 1

Retângulo	Número de partes em se encontra dividido	Cada parte é que fração do retângulo?
	2	$\frac{1}{2}$
	3	$\frac{1}{3}$
	4	$\frac{1}{4}$
	5	$\frac{1}{5}$
	6	$\frac{1}{6}$
	7	$\frac{1}{7}$
	8	$\frac{1}{8}$
	9	$\frac{1}{9}$
	10	$\frac{1}{10}$
	16	$\frac{1}{16}$

PARTE 2

Tipo da peça	Quantas cabem na região cinza?	Juntas, são que fração do retângulo do encarte?	Fração do encarte não colorida de cinza?
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
	3	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}$
	4	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$
	5	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{10}$
	8	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{16}$

Notas de Aula

Atividade 7

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que, para cada $0 \leq i \leq 3$, as frações $\frac{i}{3}$, $\frac{2\times i}{2\times 3}$, $\frac{3\times i}{3\times 3}$ e $\frac{4\times i}{4\times 3}$ são iguais a partir da observação das representações destas frações na reta numérica.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Nas retas numéricas apresentadas, as origens estão alinhadas e as unidades correspondem a segmentos unitários congruentes, o que garante que uma fração associada a um determinado ponto em uma reta seja a mesma fração nos pontos correspondentes nas demais retas.

⋆ Caso seus alunos não percebam, aponte para o fato de que as segunda, terceira e quarta retas numéricas são obtidas por meio de subdivisões dos terços da primeira reta numérica em duas, três e quatro partes iguais, respectivamente. Para resolver o item c) desta atividade, se faz necessário dividir cada terço em cinco partes iguais.

⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que, nesta atividade, cada ponto marcado na reta numérica está sendo descrito por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, por corresponderem ao mesmo ponto da reta numérica, estas frações são iguais.

Classificações:

⋆ Heid et al.: Conceito: identificar e descrever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 1: reconhecer

⋆ UERJ: Observar: identificar e reconhecer

Para o item c):

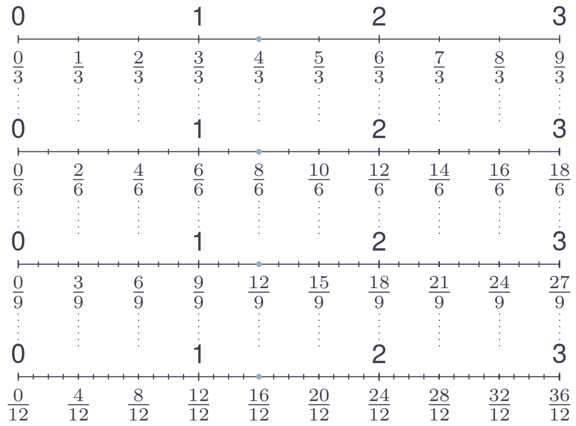
⋆ Heid et al.: Produto: gerar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

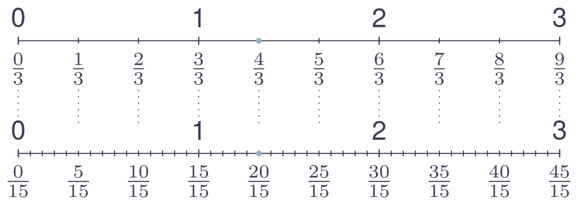
Resposta da Atividade 7

a)



b) $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12}$.

c) No item b) foi estabelecido que o ponto azul corresponde a fração $\frac{4}{3}$ pois, ao se justapor 4 segmentos que são $\frac{1}{3}$ do segmento unitário (que está, aqui, servindo como unidade) a partir da origem 0, este ponto é a outra extremidade desta justaposição. Agora, ao se subdividir estes 4 segmentos que são $\frac{1}{3}$ do segmento unitário em 5 partes iguais, obtêm-se 20 segmentos justapostos que são $\frac{1}{15}$ do segmento unitário. Sendo o ponto azul extremo desta justaposição, segue-se que ele corresponde a fração $\frac{20}{15}$.



Notas de Aula

Notas de Aula

Notas de Aula

Atividade 8

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Determinar uma fração igual a uma dada fração com denominador especificado a partir da observação das representações destas frações em diversos modelos de frações, incluindo a reta numérica.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que esta atividade seja desenvolvida em grupos de 3 alunos (cada aluno do grupo poderá usar um modelo diferente para obter a fração solicitada).

- ⋆ É importante, ao final da atividade, observar para os alunos que uma mesma parte em cada modelo de área e um mesmo ponto na reta numérica estão sendo descritos por frações com numeradores e denominadores diferentes (isto é, por frações equivalentes) mas que, não obstante, estas frações são iguais por expressarem uma mesma quantidade ou por serem representadas por um mesmo ponto na reta numérica.

Classificações

- ⋆ Heid et al.: Produto: gerar

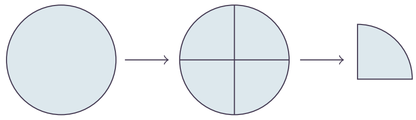
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 5: aplicar

- ⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

Resposta da Atividade 8

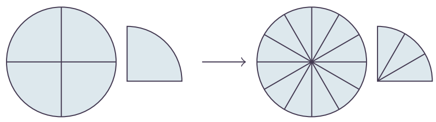
a) Tomando um círculo como unidade, o dividimos em 4 partes iguais e tomamos 5 cópias de uma parte para obter $\frac{5}{4}$ da unidade. Dividindo cada uma das 5 cópias em 3 partes iguais, obtemos então 15 cópias de $\frac{1}{12}$ da unidade. Portanto, $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$.

Unidade



Divide-se a unidade em 4 partes iguais.

Uma parte corresponde a um quarto.

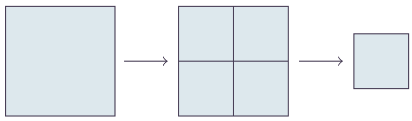


Junta-se 5 cópias de uma parte para obter cinco quartos.

Divide-se cada cópia em 3 partes iguais obtendo 15 cópias de um doze avos.

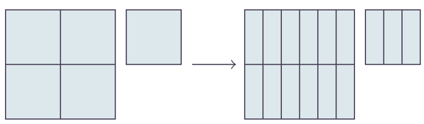
b) Tomando um quadrado como unidade, o dividimos em 4 partes iguais e tomamos 5 cópias de uma parte para obter $\frac{5}{4}$ da unidade. Dividindo cada uma das 5 cópias em 3 partes iguais, obtemos então 15 cópias de $\frac{1}{12}$ da unidade. Portanto, $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$.

Unidade



Divide-se a unidade em 4 partes iguais.

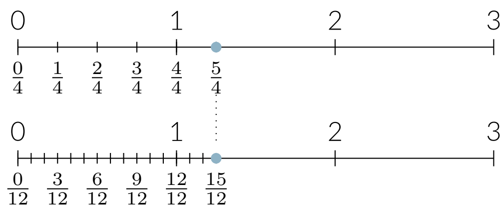
Uma parte corresponde a um quarto.



Junta-se 5 cópias de uma parte para obter cinco quartos.

Divide-se cada cópia em 3 partes iguais obtendo 15 cópias de um doze avos.

c) Após marcar os números 0 e 1 na reta numérica, dividimos o segmento unitário (aquele de extremidades em 0 e 1) em 4 partes iguais. Cada parte é um segmento que corresponde a $\frac{1}{4}$ da unidade. Ao se justapor 5 segmentos que são $\frac{1}{4}$ da unidade a partir da origem 0, a fração $\frac{5}{4}$ corresponde ao ponto que é a outra extremidade desta justaposição. Agora, ao se subdividir estes 5 segmentos que são $\frac{1}{4}$ da unidade em 5 partes iguais, obtêm-se 15 segmentos justapostos que são $\frac{1}{12}$ da unidade. O ponto que corresponde a $\frac{5}{4}$ é ainda extremo desta justaposição e, portanto, que ele corresponde também a fração $\frac{15}{12}$.



Atividade 9

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Determinar uma fração igual a uma dada fração irredutível com denominador especificado.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

- ⋆ Espera-se, principalmente nos Itens c e d, que os alunos consigam obter a fração solicitada usando a propriedade que $\frac{m\times a}{m\times b}$ é equivalente a $\frac{a}{b}$ e sem recorrer a desenhos de modelos de área de frações.

Classificações

- ⋆ Heid et al.: Produto: gerar

- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

- ⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

Resposta da Atividade 9

a) Como $6 = 2 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{2\times7}{2\times3} = \frac{14}{6}$.

b) Como $21 = 7 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{7\times7}{7\times3} = \frac{49}{21}$.

c) Como $123 = 41 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{41\times7}{41\times3} = \frac{287}{123}$.

d) Como $210 = 70 \times 3$, segue-se que $\frac{7}{3} = \frac{70\times7}{70\times3} = \frac{490}{210}$.

Atividade 10

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Determinar uma fração igual a uma dada fração com numerador ou denominador especificados.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

- ⋆ Espera-se que, neste estágio, os alunos consigam obter as respostas usando a propriedade que $\frac{m\times a}{m\times b}$ é equivalente a $\frac{a}{b}$ e sem recorrer a desenhos de modelos de área de frações.

- ⋆ Observe que, no item (e), não existe um número natural n tal que $6 \times n = 9$. Para resolver o item, o aluno pode usar o resultado do item (d) e substituir $\frac{9}{12}$ por $\frac{3}{4}$ e proceder com o exercício. A mesma observação aplica-se ao item (f).

- ⋆ Observe para seus alunos que os Itens (e) e (f) são exemplos de frações iguais para os quais não é possível obter uma fração multiplicando-se o numerador e o denominador da outra por um mesmo número natural.

Classificações

- ⋆ Heid et al.: Produto: gerar

- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

- ⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

Resposta da Atividade 10

a) Uma vez que $6 = 2\times3$, então $\frac{5}{3} = \frac{2\times5}{2\times3} = \frac{10}{6}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 10.

b) Uma vez que $6 = 3\times2$, então $\frac{2}{3} = \frac{3\times2}{3\times3} = \frac{6}{9}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 9.

c) Uma vez que $12 = 4 \times 3$ e $8 = 4 \times 2$, então $\frac{8}{12} = \frac{4\times2}{4\times3} = \frac{2}{3}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 2.

d) Uma vez que $9 = 3 \times 3$ e $12 = 3 \times 4$, então $\frac{9}{12} = \frac{3\times3}{3\times4} = \frac{3}{4}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 4.

e) Pelo item d, $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Uma vez que $6 = 2\times3$, então $\frac{3}{4} = \frac{2\times3}{2\times4} = \frac{6}{8}$. Logo, $\square$ deve ser preenchido com 8.

f) Pela solução do item e, $\square$ deve ser preenchido com 9.

Atividade 11

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Usar igualdade de frações para calcular o numerador de uma das frações em uma situação contextualizada.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

Classificações

⋆ Heid et al.: Produto: prever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: analisar

⋆ UERJ: Interpretar: explicar

Resposta da Atividade 11

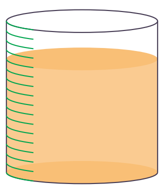
As 17 marcações no copo do seu colega divide a capacidade do copo em 16 partes iguais. Quantas destas partes correspondem a $\frac{3}{4}$ da capacidade do copo (que é fração da capacidade do copo que está preenchida com suco)? Para responder a esta pergunta, devemos calcular o numerador de uma fração de denominador 16 que seja igual a $\frac{3}{4}$, isto é, devemos preencher $\square$ com um número tal que

$\frac{3}{4} = \frac{\square}{16}$.

Como $16 = 4 \times 4$, segue-se que

$\frac{3}{4} = \frac{4 \times 3}{4 \times 4} = \frac{12}{16}$.

Assim, não necessárias 12 partes de $\frac{1}{16}$ da capacidade do copo. Consequentemente, 13 níveis do copo do seu colega devem ser preenchidos com suco de laranja para que ele fique com a mesma quantidade suco de laranja que você.



Atividade 12

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer que, dada uma fração $p = \frac{n}{d}$, existe um quantidade finita de frações da forma $\frac{k}{d}$ que são menores do que p e uma quantidade infinita de frações da forma $\frac{k}{d}$ que são maiores do que p.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Alguns alunos podem ainda necessitar de apoio de material concreto para responder à questão.

⋆ Recomenda-se que, na discussão da atividade, uma reta numérica com quintos marcados seja usada como uma contrapartida visual para as respostas das perguntas.

Classificações

⋆ Heid et al.: Conceito: elaborar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 4: categorizar

⋆ UERJ: Interpretar: classificar

Resposta da Atividade 12

a) Três frações: $\frac{0}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$. Justificativa: $\frac{3}{5}$ são três ``cópias" de $\frac{1}{5}$. Qualquer outra fração de denominador $5$ também é composta por uma quantidade inteira de ``cópias" de $\frac{1}{5}$, quantidade esta determinada pelo numerador de fração. Para se ter então uma fração de denominador 5 menor do que $\frac{3}{5}$, devemos ter menos do que 3 ``cópias" de $\frac{1}{5}$ : $2$ ``cópias" , 1 ``cópia" ou $0$ ``cópia" . Assim, as frações de denominador 5 menor do que $\frac{3}{5}$ são $\frac{0}{5}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{5}$.

b) Infinitas frações $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, etc. Justificativa: $\frac{3}{5}$ são três ``cópias" de $\frac{1}{5}$. Qualquer outra fração de denominador $5$ também é composta por uma quantidade inteira de ``cópias" de $\frac{1}{5}$, quantidade esta determinada pelo numerador de fração. Para se ter então uma fração de denominador 5 maior do que $\frac{3}{5}$, devemos ter mais do que 3 ``cópias" de $\frac{1}{5}$ : $4$ ``cópias" , 5 ``cópias" , $6$ ``cópias" , 7 ``cópias" , etc. Assim, as frações de denominador 5 maiores do que $\frac{3}{5}$ são $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, etc.

item	Fração	``$>$", ``$<$" ou ``$=$"	Fração
a)	$\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$	$>$	$\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$
b)	$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$	$>$	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
c)	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	$=$	$\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$
d)	$\frac{6}{25} = \frac{24}{100}$	$<$	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
e)	$\frac{22}{7} = \frac{220}{70}$	$>$	$\frac{217}{70} = \frac{31}{10}$
f)	$\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$	$=$	$\frac{2}{3} = \frac{24}{36}$
g)	$\frac{5}{10} = \frac{50}{100}$	$=$	$\frac{50}{100} = \frac{50}{100}$
h)	$\frac{7}{5} = \frac{84}{60}$	$<$	$\frac{85}{60} = \frac{17}{12}$
i)	$\frac{12}{6} = \frac{2}{1}$	$<$	$\frac{3}{1} = \frac{9}{3}$

Atividade 13

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Comparar frações por meio de igualdade de frações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ A discussão da atividade pode incluir o uso de outras estratégias, que não a igualdade de frações, para se estabelecer a comparação das frações apresentadas.

Classificações

⋆ Heid et al.: Conceito: elaborar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

⋆ UERJ: Interpretar: comparar

Resposta da Atividade 13

Atividade 14

Objetivo específico: Levar o aluno a

- Comparar frações.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- Existem outros tipos de ferramentas cujas peças componentes também são identificadas por frações: brocas de furadeiras, chaves de boca e aperto, chaves biela, . . .
- Recomenda-se que, caso seja viável, algumas destas ferramentas sejam levadas para sala de aula para conhecimento dos alunos.

Classificações

- Heid et al.: Conceito: elaborar
- Nicely, Jr.: Nível 3: comparar
- UERJ: Interpretar: comparar

Resposta da Atividade 14

Uma vez que $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$, $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$, $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ e $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$, os tamanhos dos soquetes são os seguintes:

(A): $\frac{7}{8}$, (B): $\frac{13}{16}$, (C): $\frac{3}{4}$, (D): $\frac{11}{16}$, (E): $\frac{5}{8}$, (F): $\frac{9}{16}$, (G): $\frac{1}{2}$, (H): $\frac{7}{16}$, (I): $\frac{3}{8}$.

Atividade 15

Objetivo específico: Levar o aluno a

- Comparar uma fração com uma outra fração determinada a partir da alteração dos termos (numerador ou denominador) da primeira fração a partir de somas e multiplicações por números naturais.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- Enquanto que esta atividade usa a fração $\frac{4}{7}$ como referência, a discussão da atividade com os alunos pode incluir a questão se as conclusões obtidas para $\frac{4}{7}$ mudam se a fração de referência mudar. Neste contexto, o item (D) é especialmente interessante pois, neste caso, a conclusão (se a fração ficará menor, maior ou igual a fração original) de fato dependerá se a fração original é maior, menor ou igual a 1.

Classificações

- Heid et al.: Produto: prever
- Nicely, Jr.: Nível 6: analisar
- UERJ: Analisar: levantar hipóteses

Resposta da Atividade 15

a) A fração determinada pela adição de 1 ao numerador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{5}{7}$ que é maior do que $\frac{4}{7}$, pois em cinco sétimos temos um sétimo a mais do que em quatro sétimos.

b) A fração determinada pela adição de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{4}{8}$ que é menor do que $\frac{4}{7}$, pois como um oitavo é menor do um sétimo, quatro oitavos também será menor do que quatro sétimos.

c) A fração determinada pela subtração de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{3}{7}$ que é menor do que $\frac{4}{7}$, pois em três sétimos temos um sétimo a menos do que em quatro sétimos.

d) A fração determinada pela adição de 2 ao numerador e ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{6}{9}$ que é maior do que $\frac{4}{7}$, pois $\frac{6}{9} = \frac{2}{3} = \frac{7\times 2}{7\times 3} = \frac{14}{21}$, $\frac{4}{7} = \frac{3\times 4}{3\times 7} = \frac{12}{21}$ e $14 > 12$.

e) A fração determinada pela multiplicação por 2 do numerador e do denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{8}{14}$ que é igual a $\frac{4}{7}$.

f) A fração determinada pela adição de 1 ao numerador e subtração de 1 ao denominador da fração $\frac{4}{7}$ é a fração $\frac{5}{6}$ que é maior do que $\frac{4}{7}$, pois $\frac{5}{6} > \frac{4}{6} > \frac{4}{7}$.

Atividade 16

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Obter uma fração irredutível equivalente a uma fração dada e relacionar esta equivalência no contexto de minimização de cortes em uma equipartição.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ A discussão da atividade, além da equipartição dada e aquela associada ao número mínimo de cortes, pode incluir as equipartições associadas a outras frações equivalentes a $\frac{8}{24}$: $\frac{4}{12}$ (divisão de cada panqueca em 12 partes iguais) e $\frac{2}{6}$ (divisão da panqueca em 6 partes iguais).

Classificações

⋆ Heid et al.: Produto: prever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: analisar

⋆ UERJ: Analisar: levantar hipóteses

Resposta da Atividade 16

a) Cada amigo vai receber $\frac{8}{24}$ de panqueca.

b) $8 \times 24 = 192$ cortes.

c) Sim! Por exemplo, como $\frac{8}{24} = \frac{8\times 1}{8\times 3} = \frac{1}{3}$, basta dividir cada panqueca 3 partes iguais e dar uma parte ($\frac{1}{3}$ de panqueca para cada amigo. Para esta equipartição, são necessários $8 \times 3 = 24$ cortes apenas.

Atividade 17

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Simplificar frações de modo a obter uma fração igual irredutível.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Um pré-requisito desta atividade é o conceito de máximo divisor comum. Assim, avalie a necessidade de uma revisão deste conceito com seus alunos. Os alunos devem perceber que se dois números são divididos pelo maior divior comum entre eles, os dois novos números obtidos são agora primos entre si, isto é, o máximo divisor comum entre eles é 1. Este fato vai apoiar o "assim" das respostas.

⋆ A discussão desta atividade pode incluir o uso de materiais concretos na linha da proposta da *Atividade 16* , isto é, relacionar frações equivalentes com a minimização de cortes em uma equipartição.

Classificações

⋆ Heid et al.: Produto: gerar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

⋆ UERJ: Interpretar: discriminar

Resposta da Atividade 17

1. Note que o máximo divisor comum de 2 e 4 é 2. Assim, $\frac{2}{4} = \frac{2\times 1}{2\times 2} = \frac{1}{2}$. Resposta: $\frac{1}{2}$.

2. Note que o máximo divisor comum de 6 e 3 é 3. Assim, $\frac{6}{9} = \frac{3\times 2}{3\times 3} = \frac{2}{3}$. Resposta: $\frac{2}{3}$.

3. Note que o máximo divisor comum de 2 e 4 é 2. Assim, $\frac{4}{2} = \frac{2\times 2}{2\times 1} = \frac{2}{1}$. Resposta: $\frac{2}{1}$.

4. Note que o máximo divisor comum de 5 e 35 é 5. Assim, $\frac{5}{35} = \frac{5\times 1}{5\times 7} = \frac{1}{7}$. Resposta: $\frac{1}{7}$.

5. Note que o máximo divisor comum de 50 e 100 é 50. Assim, $\frac{50}{100} = \frac{50\times 1}{50\times 2} = \frac{1}{2}$. Resposta: $\frac{1}{2}$.

Atividade 18

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Comparar mais do que duas frações (no caso, três) usando frações equivalentes.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Sugere-se que seja observado para os alunos que o procedimento descrito nesta atividade para ordenar três frações pode ser aplicado para um número arbitrário de frações.

⋆ Esta atividade foi concebida para ser resolvida usando a notação de fração, sem o uso do recurso de modelos de frações uma vez que, neste estágio, espera-se que o aluno já tenha o domínio desta técnica de manipulação aritmética.

⋆ Observe que a ordenação poderia ser feita comparando-se duas frações por vez. A solução indicada reduz a ordenação à ordenação de números naturais (os numeradores das frações iguais às frações dadas e todas de mesmo denominador).

Classificações

⋆ Heid et al.: Produto: gerar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 3: comparar

⋆ UERJ: Interpretar: ordenar

Resposta da Atividade 18

a) 60 é um múltiplo comum de 6, 20 e 15 : $60 = 10 \times 6$, $60 = 4 \times 15$ e $60 = 3 \times 20$. Portanto,

$$\frac{11}{6} = \frac{10 \times 11}{10 \times 6} = \frac{110}{60},$$

$$\frac{28}{15} = \frac{4 \times 28}{4 \times 15} = \frac{112}{60} \quad \text{e}$$

$$\frac{37}{20} = \frac{3 \times 37}{3 \times 20} = \frac{111}{60}.$$

b) Tem-se que $\frac{110}{60} < \frac{111}{60} < \frac{112}{60}$. Logo,

$$\frac{11}{6} < \frac{37}{20} < \frac{28}{15}.$$

Atividade 19

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Verificar que se $a \cdot d = b \cdot c$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, então as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais (equivalentes).

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Note que para as frações usadas no exemplo e no item a), os numeradores e denominadores de uma fração não são múltiplos inteiros dos numeradores e denominadores da outra fração.

Classificações

⋆ Heid et al.: Produto: descrever procedimento

⋆ Nicely, Jr.: Nível 5: aplicar

⋆ UERJ: Interpretar: compor e decompor

Resposta da Atividade 19

a) Para as frações $\frac{2}{8}$ e $\frac{5}{20}$, tem-se que $2\times 20 = 40 = 8 \times 5$. Agora,

$$\frac{2}{8} = \frac{20 \times 2}{20 \times 8} = \frac{2 \times 20}{20 \times 8} = \frac{8 \times 5}{20 \times 8} = \frac{8 \times 5}{8 \times 20} = \frac{5}{20}.$$

b) A afirmação é verdadeira.

Ao se multiplicar o numerador e o denominador da primeira fração pelo denominador da segunda fração obtém-se uma fração de igual valor cujo numerador é o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração e cujo denominador é o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração.

Do mesmo modo, ao se multiplicar o numerador e o denominador da segunda fração pelo denominador da primeira fração obtém-se uma fração de igual valor cujo numerador é igual ao denominador da primeira fração multiplicado pelo numerador da segunda fração e cujo denominador é o produto do denominadora da primeira fração pelo denominador da segunda fração.

Como as frações iniciais são iguais, estas novas frações também são iguais e têm o mesmo denominador. Portanto, seus numeradores devem ser iguais, isto é, o produto do numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração é igual ao produto do denominador da primeira fração pelo numerador da segunda fração.

Atividade 20

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Reconhecer frações iguais por meio de um jogo de trilha.

Esta atividade possui folhas para reprodução disponíveis no final do livro.

Classificações

⋆ Heid et al.: Produto: gerar; prever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 5: relacionar

⋆ UERJ: Interpretar: ordenar

Atividade 21

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Perceber que mesmo se $n < p$ e $m < q$, pode ocorrer que $\frac{n}{m} \geq \frac{p}{q}$.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

- ⋆ O tipo de situação descrita na atividade é um equívoco comum entre os alunos, isto é, eles equivocamente acham que se $n < p$ e $m < q$, então necessariamente $\frac{n}{m} < \frac{p}{q}$.

Classificações

- ⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: justificar

- ⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 21

Tem-se que $\frac{2}{3} = \frac{10\times2}{10\times3} = \frac{20}{30}$ e $\frac{6}{10} = \frac{3\times6}{3\times10} = \frac{18}{30}$. Como $\frac{20}{30} > \frac{18}{30}$, segue-se que $\frac{2}{3} > \frac{6}{10}$.

Atividade 22

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Analisar quando uma fração é igual a uma fração unitária.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Esta é uma atividade que pode ser desenvolvida individualmente. Contudo, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

- ⋆ O item c) relaciona-se com a Atividade 1: como não é possível, em uma equipartição de uma região retangular, escolher uma quantidade de partes que corresponda à metade desta região se a quantidade total de partes for um número ímpar, não existe uma fração de denominador ímpar que seja igual à fração $\frac{1}{2}$.

- ⋆ Observe para seus alunos que as frações estudadas na Lição 1 são justamente as frações unitárias e que, pela Lição 2, toda fração é a justaposição de frações unitárias. Em outras palavras, as frações unitárias constituem a estrutura básica a partir da qual as demais frações são obtidas.

Classificações

- ⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: justificar

- ⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 22

a) Pelo item b) da Atividade 19 , se uma dada fração é igual a alguma fração unitária, então o produto do numerador da fração dada pelo denominador da fração unitária tem que ser igual ao denominador da fração dada, isto é, o denominador da fração dada tem que ser um múltiplo inteiro do seu numerador. Isto só acontece para as frações $\frac{4}{20}$ e $\frac{6}{18}$.

b) Não, pois frações unitárias são sempre menores ou iguais a 1, enquanto que uma fração com numerador maior do que o denominador é sempre maior do que 1.

c) Não, pois pelo item b) da Atividade 19 , se existisse uma fração com denominador ímpar que fosse igual à fração $\frac{1}{2}$, então o numerador da fração dada multiplicado por 2, um número par, teria que ser igual ao denominador da fração dada multiplicado por 1, o que dá um número ímpar. Portanto, um número par teria que ser igual a um número ímpar, o que não é possível.

Atividade 23

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Estabelecer criticamente uma avaliação sobre a comparação entre frações a partir da observação dos termos dessas fraçoes, incluindo a questão da recíproca da seguinte propriedade: "se existe número natural n tal que $\frac{a}{b} = \frac{n \times c}{n \times d}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$"
.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.
- ⋆ Note que o item d) é falso porque estamos dando a liberdade de a escolha envolver frações que não são irredutíveis nem unitárias, por isso existem contraexemplos. Avalie a discussão sobre a veracidade da afirmação do item d) quando acrescentamos a informação "uma das frações é irredutível" ou "uma das frações é unitária". Neste caso, as novas afirmações são verdadeiras, e as justificativas para elas são generalizações de questões já propostas.

  Classificações
- ⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar
- ⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: justificar
- ⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 23

a) A sentença é falsa. Por exemplo, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ têm numeradores e denominadores diferentes, mas elas são iguais, uma vez que $\frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2} = \frac{3}{6}$.

b) A sentença é verdadeira: se duas frações têm denominadores iguais, é maior a fração que tem o maior numerador e, em particular, elas são diferentes. De fato: lembrando que o denominador de fração especifica o número de partes em que a unidade foi dividida e o numerador especifica quantas cópias desta parte foram tomadas, para um mesmo denominador, quanto maior o numerador, mais cópias são tomadas e, portanto, maior é a quantidade representada pela fração.

c) A sentença é verdadeira: se duas frações têm numeradores iguais, é maior a fração que tem o menor denominador e, em particular, elas são diferentes. De fato: considerando que o numerador especifica o número de cópias da unidade que está sendo dividida por um número de pessoas, número este especificado pelo denominador da fração, para um mesmo numerador, quanto menor o denominador, maior a porção que cada pessoa vai receber, quantidade esta representada pela fração, pois o mesmo número de cópias da unidade está sendo divido por um número menor de pessoas.

d) A sentença é falsa. Por exemplo, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$ são frações iguais, pois $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ também é igual a $\frac{1}{2}$, mas não existe um número natural que multiplicado por 2 dê igual a 3, bem como não existe número natural que multiplicado por 3 dê 2.

Atividade 24

Objetivo específico: Levar o aluno a

- ⋆ Perceber a propriedade de densidade das frações ao obter frações arbitrariamente próximas de 0 e arbitrariamente próximas de 1.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

- ⋆ Recomenda-se que, para facilitar a logística de condução desta atividade, que ela seja feita com as perguntas sendo propostas uma a uma por você para a turma, de modo que a resposta de uma pergunta dada por um aluno seja então usada como referência para a pergunta subsequente. Outra possibilidade é dividir a turma em grupos de 3 a 5 alunos. Cada grupo responde a primeira pergunta e então passa sua resposta para um outro grupo que deve então responder a próxima questão tendo como referência a resposta recebida e assim sucessivamente.

⋆ Caso seja viável, recomenda-se, na discussão da atividade, o uso de um software (o GeoGebra, por exemplo) para marcar na reta numérica as sucessivas frações dadas pelos alunos. O recurso de ampliação e redução pode ser usado visualizar as frações quando estas se acumulam em 0 e em 1.

Classificações

⋆ Heid et al.: Produto: prever

⋆ Nicely, Jr.: Nível 7: levantar hipóteses

⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 24

a) $\frac{1}{2}$, por exemplo.

b) Sim, $\frac{1}{3}$.

c) Sim, $\frac{1}{4}$.

d) Sim: $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, $\frac{1}{7} < \frac{1}{6}$, etc. Mais geralmente, dada uma fração, basta considerar a fração de mesmo numerador e denominador maior do que o denominador da fração dada. Esta segunda fração será sempre menor do que a fração dada.

e) Sim, $\frac{2}{3}$. Enquanto que para $\frac{1}{2}$, é necessário $\frac{1}{2}$ para completar a unidade, para $\frac{2}{3}$ é necessário $\frac{1}{3}$ que é menor que $\frac{1}{2}$, logo $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.

f) Sim, $\frac{3}{4}$. Enquanto que para $\frac{2}{3}$, é necessário $\frac{1}{3}$ para completar a unidade, para $\frac{3}{4}$ é necessário $\frac{1}{4}$ que é menor que $\frac{1}{3}$, logo $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

g) Sim, $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$, $\frac{6}{7} > \frac{5}{6}$, etc.

Mais geralmente, as frações cujo numerador é um número natural e o denominador é o sucessor do numerador formam uma sucessão crescente de frações menores do que 1.

Atividade 25

Objetivo específico: Levar o aluno a

⋆ Perceber a propriedade de densidade das frações ao obter frações que estão entre duas frações diferentes quaisquer, mesmo no caso de numeradores consecutivos e denominadores iguais. Isto é, que dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ diferentes (suponha $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$), sempre é possível determinar uma terceira fração $\frac{p}{q}$ tal que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{c}{d}$.

Recomendações e sugestões para o desenvolvimento da atividade:

⋆ Recomenda-se que, nesta atividade, os alunos trabalhem individualmente ou em duplas. No entanto, é fundamental que os alunos sejam estimulados a explicar o raciocínio realizado.

⋆ Caso seja viável, recomenda-se, na discussão da atividade, o uso de um software (o GeoGebra, por exemplo) para marcar na reta numérica as sucessivas frações dadas pelos alunos.

Classificações

⋆ Heid et al.: Raciocínio: corroborar

⋆ Nicely, Jr.: Nível 6: justificar

⋆ UERJ: Avaliar: julgar

Resposta da Atividade 25

a) Note que $\frac{3}{5} = \frac{2\times 3}{2\times 5} = \frac{6}{10}$ e $\frac{4}{5} = \frac{2\times 4}{2\times 5} = \frac{8}{10}$. Portanto, $\frac{7}{10}$ é tal que $\frac{3}{5} < \frac{7}{10} < \frac{4}{5}$.

b) Note que $\frac{11}{10} = \frac{3\times 11}{3\times 10} = \frac{33}{30}$ e $\frac{12}{10} = \frac{3\times 12}{3\times 10} = \frac{36}{30}$. Portanto, $\frac{34}{30}$ e $\frac{35}{30}$ são tais que $\frac{11}{10} < \frac{34}{30} < \frac{35}{30} < \frac{36}{30}$.

c) Note que $\frac{19}{20} = \frac{4\times 19}{4\times 20} = \frac{76}{80}$ e $\frac{20}{20} = \frac{4\times 20}{4\times 20} = \frac{80}{80}$. Portanto, $\frac{77}{80}$, $\frac{78}{80}$ e $\frac{79}{80}$ são tais que $\frac{19}{20} < \frac{77}{80} < \frac{78}{80} < \frac{79}{80} < \frac{80}{80}$.

Notas de Aula

Notas de Aula