

Projeto: LIVRO ABERTO DE MATEMÁTICA



umlivroaberto.com

- Título: Frações no Ensino Fundamental - Volume 1
- Ano: 2016
- Editora: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS)
- Realização: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)
- Produção: Livro Aberto
- Coordenação: Fabio Simas e Augusto Teixeira
- Autores: Cydara Cavedon Ripoll, Fabio Luiz Borges Simas, Humberto José Bortolossi, Victor Augusto Giraldo, Wanderley Moura Rezende, Wellerson da Silva Quintaneiro
- Colaboradores: Ana Paula Pereira (CAp UFF), Andreza Gonçalves (estudante da UFF), Bruna Luiza Oliveira (estudante da UFF), Francisco Mattos (Colégio Pedro II), Helano Andrade (estudante da UNIRIO), João Carlos Cataldo (CAp UERJ e Colégio Santo Ignácio), Luiz Felipe Lins (Secretaria de Educação da Cidade do Rio de Janeiro), Michel Cambrainha (UNIRIO), Rodrigo Ferreira (estudante da UNIRIO), Tahyz Pinto (estudante da UFF)
- Ilustradores: Luiz Fernando Alves Macedo, Vitoria da Mota Souza, Eduardo Filipe de Miranda Souto, Caio Felipe da Silva Evangelista, Gisela Alves de Souza, Mauricio de Azevedo Neto, Briza Aiki Matsumura, Vinícius Marcondes de Paula Silva, Wanessa Souza de Oliveira, Maurício Menegatti Andrade, Eduardo Filipe de Miranda Souto, Livia Machado da Silveira Verly, Caio Felipe da Silva Evangelista, Lucas Hideo Maekawa, Lucas Oliveira Machado de Sousa, Kayky Zigart Carlos e Israel Fialho Magalhães
- Capa: Fabio Simas



Após o dia 1º de setembro de 2026 esta obra passa a estar licenciada por CC-by-sa. Algumas figuras podem possuir licença com mais direitos do que a vigente para todo o material.



Introdução

Frações é certamente um dos tópicos que mais desafia o ensino e a aprendizagem na matemática da educação básica. Justamente por isso, tanto se publicou sobre o assunto nas últimas décadas (para citar apenas algumas das referências mais utilizadas: *Rational Number Project, Institute of Education Science*, 2010 [7], Van de Walle, 2009 [29] e Wu, 2011 [31]). Este texto, organizado como uma proposta didática, reúne as reflexões e as discussões dos autores sobre o tema, amparadas por essas publicações e pela análise de livros didáticos de diversos países. A proposta aqui apresentada foi planejada para:

- (i) ser aplicada diretamente em sala de aula, como material didático destinado aos anos intermediários do ensino fundamental (do 4º ao 7º ano) e
- (ii) amparar a formação e o desenvolvimento profissional do professor que ensina matemática na educação básica.

O texto concentra-se na abordagem inicial de frações como objeto matemático, buscando explorar o assunto a partir de atividades que visam à construção conceitual do tema e a conduzir os alunos a desenvolverem o raciocínio matemático amparados por reflexão e por discussão. Assim, as atividades visam a desafiar os alunos e a levá-los a estabelecer suas próprias conclusões sobre os assuntos tratados. Busca-se valorizar a capacidade cognitiva dos alunos, respeitando uma organização crescente e articulada de dificuldade na organização das atividades. Espera-se com isso mudar a perspectiva do binômio quantidade/qualidade. No lugar de uma quantidade enorme de exercícios, são propostas poucas atividades que exigem maior reflexão e aprofundamento dos conceitos. Assim, são evitadas atividades de simples observação e repetição de modelos e os tradicionais “exercícios de fixação”, que, pontuais, são apenas com o objetivo de desenvolver a fluência em procedimentos específicos (por exemplo, os que envolvem a equivalência entre frações).

Uma característica particular deste material é o diálogo com o professor. No início de cada lição, há uma introdução dirigida especificamente ao professor, que apresenta os objetivos da lição, uma discussão dos aspectos matemáticos que serão tratados, as dificuldades esperadas e algumas observações sobre os passos cognitivos envolvidos. Diferente dos livros didáticos tradicionais, em que, para o professor, há pequenas observações pontuais junto ao texto do aluno e um longo texto teórico anexo ao final do livro, nesta proposta a “conversa” com o professor é permanente. Em cada atividade são realizadas discussões sobre os objetivos a serem alcançados, recomendações e sugestões metodológicas para sua execução e, quando pertinente, uma discussão sobre algum desdobramento do assunto tratado.

Entende-se que, nesta etapa da escolaridade, considerando o cotidiano próprio do aluno, o conceito de fração aparece ligado a noções informais traduzidas por expressões como metade, terço, quartos, décimos e centésimos, por exemplo. Assim, nas primeiras duas lições, buscou-se utilizar a linguagem verbal e os conhecimentos anteriores dos estudantes sobre situações em que aquelas expressões são utilizadas para conduzir as primeiras abordagens, visando à introdução de um conhecimento mais organizado e formal sobre o assunto. Apenas posteriormente, são introduzidas a linguagem e a simbologia próprias da matemática.

As lições 1 e 2 introduzem os conceitos elementares e a linguagem de frações a partir de situações concretas e de modelos contínuos. Na lição 1, as frações emergem de situações concretas amparadas pela linguagem verbal. Uma vez estabelecida a unidade, a expressão “fração unitária” nomeia cada uma das partes da divisão da unidade em partes iguais. Nas atividades dessas lições a unidade está fortemente vinculada a um objeto concreto. Assim, por exemplo, a fração de uma torta, não é ainda tratada com a abstração própria do conceito de número, mas como uma fatia da torta em uma equipartição. Toma-se bastante cuidado com o papel da determinação da unidade e com a necessidade de uma “equipartição” para a identificação de uma fração. A notação simbólica de frações e as frações não unitárias, inclusive as maiores do que a unidade, surgem apenas na Lição 2. As frações com numerador diferente de 1 são apresentadas a partir da justaposição de frações unitárias com mesmo denominador ou simplesmente contando-se essas frações. Para isso, tem-se a representação pictórica como um apoio importante. Nessas lições, as atividades são quase majoritariamente para identificar, reconhecer, analisar e justificar.

Na Lição 3 é exigida maior abstração dos alunos. Retoma-se a representação de números na reta numérica, enfatizando, no contexto das frações, a associação do segmento unitário à unidade. Os modelos visuais contínuos e a justaposição de partes correspondentes às frações unitárias são a base da proposta desenvolvida. A representação das frações na reta numérica é usada para amparar a abordagem da comparação de frações com um mesmo numerador e com um mesmo denominador. Além disso, são propostas atividades que tratam a comparação de frações a partir de uma referência.

A Lição 4 trata da equivalência de frações tendo como objetivo a sua função na comparação de duas frações quaisquer. O assunto é abordado utilizando-se representações equivalentes em modelos de área retangulares, em modelos de área circulares e na reta numérica. A inclusão de modelos diferentes é proposital pois, com isso, o aluno tem a oportunidade de perceber as mesmas propriedades em contextos diferentes. Finalizando a lição, são propostas atividades que conduzem à exploração da propriedade das frações que garante que, dadas duas frações diferentes, é sempre possível determinar uma terceira fração que está entre elas (propriedade de densidade).

Adição e subtração de frações são o tema da Lição 5. A abordagem dessas operações será a partir de problemas e fundamentada na equivalência de frações, que permite determinar subdivisões comuns da unidade para expressar as frações envolvidas nos cálculos. Os significados e os contextos que caracterizam as operações de adição e de subtração envolvendo frações são semelhantes àqueles que compõem a abordagem dessas operações com números naturais, o que promove uma continuidade conceitual no desenvolvimento desse assunto.

Este volume marca o início de um trabalho em desenvolvimento, que será ampliado e complementado por novos volumes e novas edições. Para o volume 2, de mesmo tema, está prevista a complementação da abordagem das operações com frações, trazendo a multiplicação e a divisão envolvendo frações, a abordagem de frações em situações e modelos discretos e o uso de frações em contextos de razão e de proporção, além das porcentagens.

Teremos prazer em considerar suas sugestões para este livro. Corrija diretamente em https://github.com/livro-aberto/fracoes_livro_piloto/tree/master/tex. Para comentários gerais use o site ou a wiki da versão digital (umlivroaberto.com). Para contactar a organização do projeto escreva para livroaberto@impa.br.



Sumário

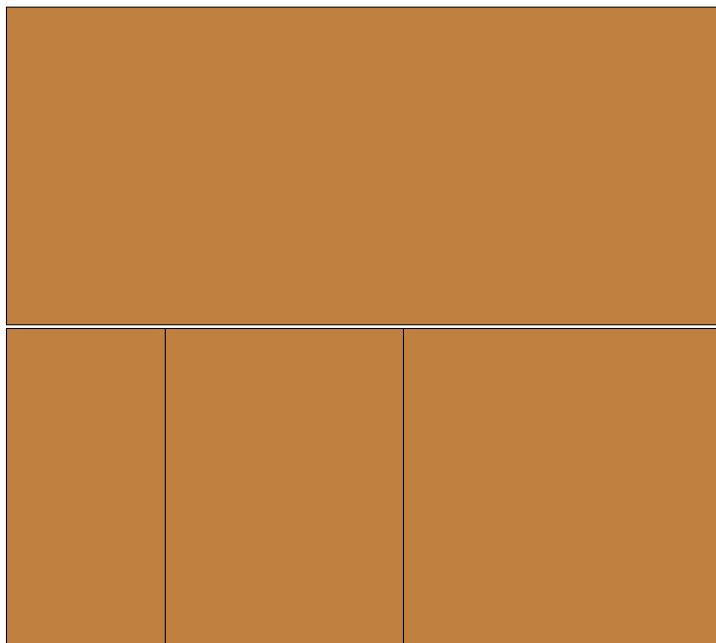
1	Introdução	iii
6	Folhas para reprodução	5



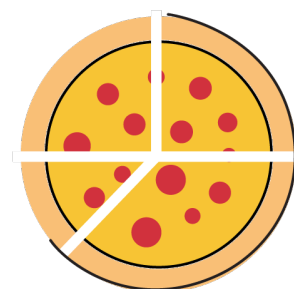
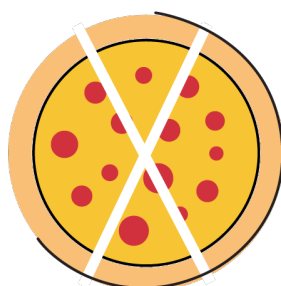
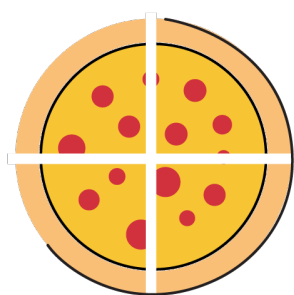
Folhas para reprodução

LIÇÃO 1

Atividade 1



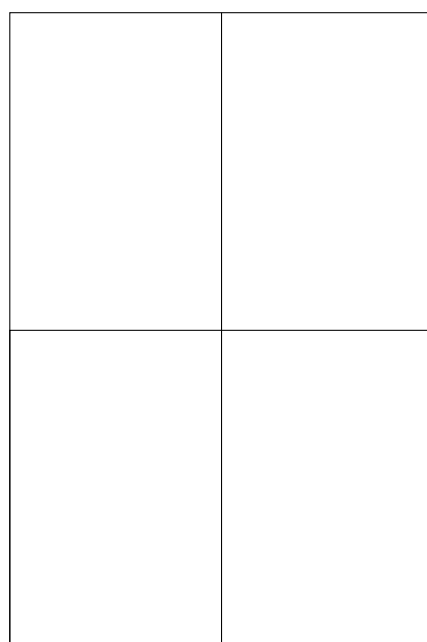
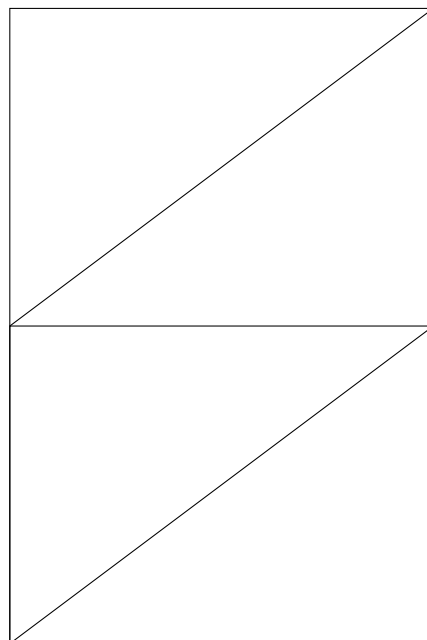
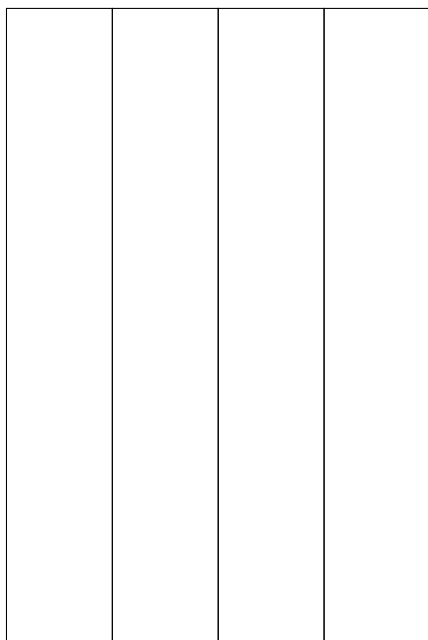
Atividade 2

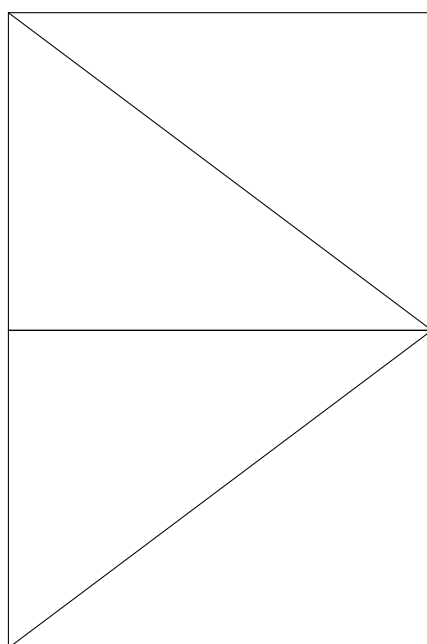
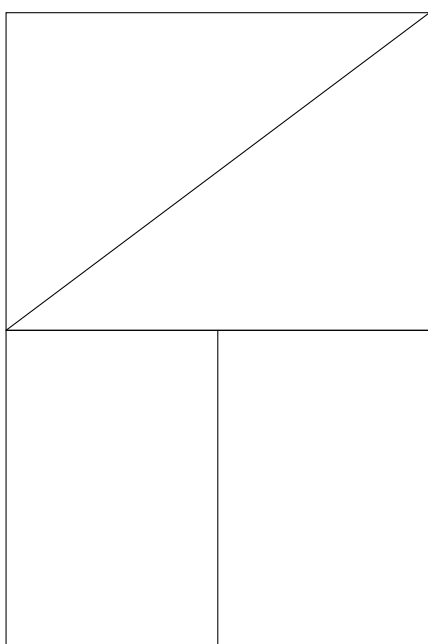
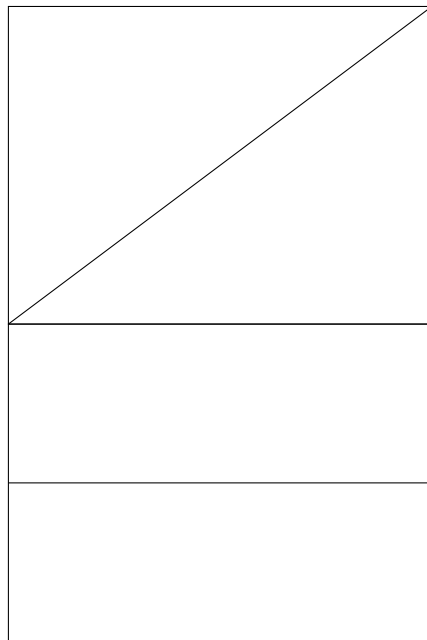
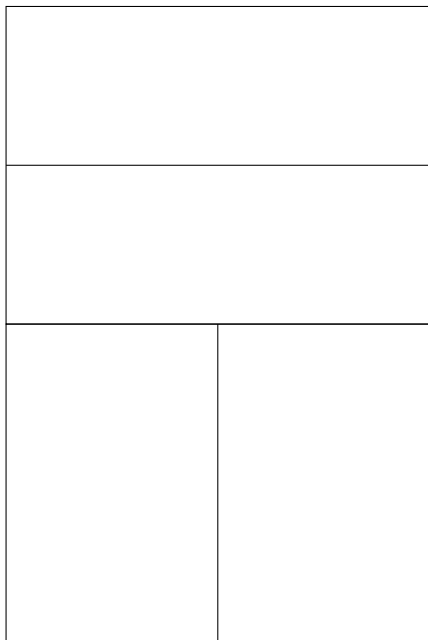


Atividade 3



Atividade 4





Atividade 9



Figura 1



Figura 2

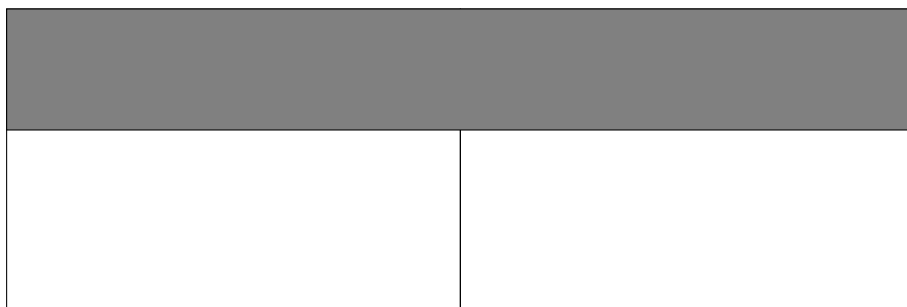


Figura 3

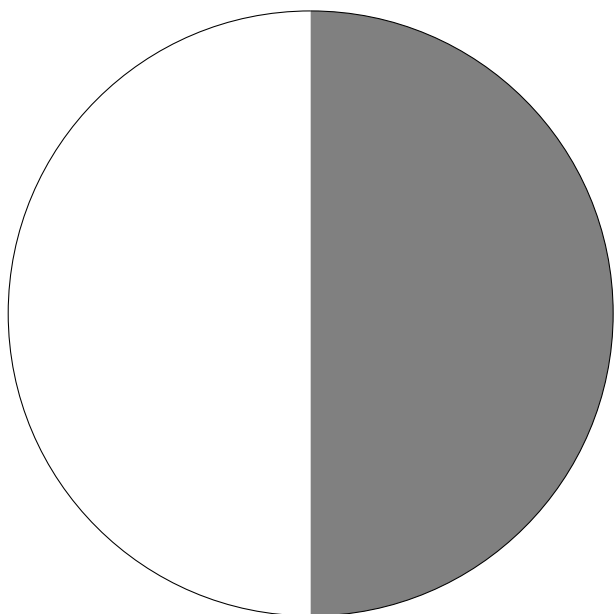


Figura 4

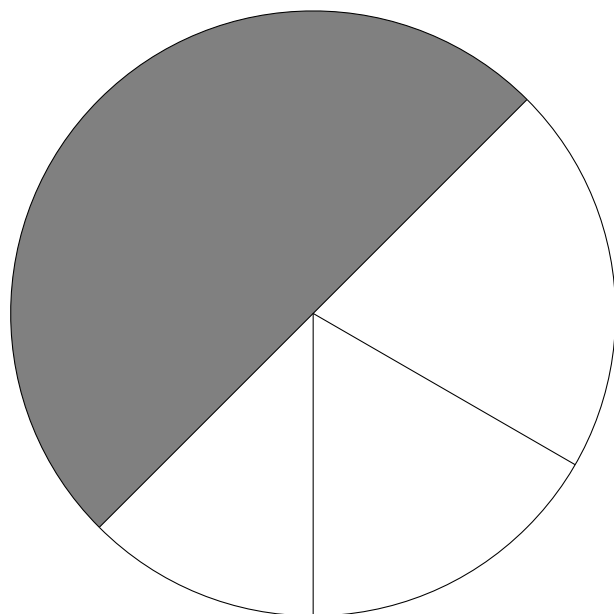


Figura 5

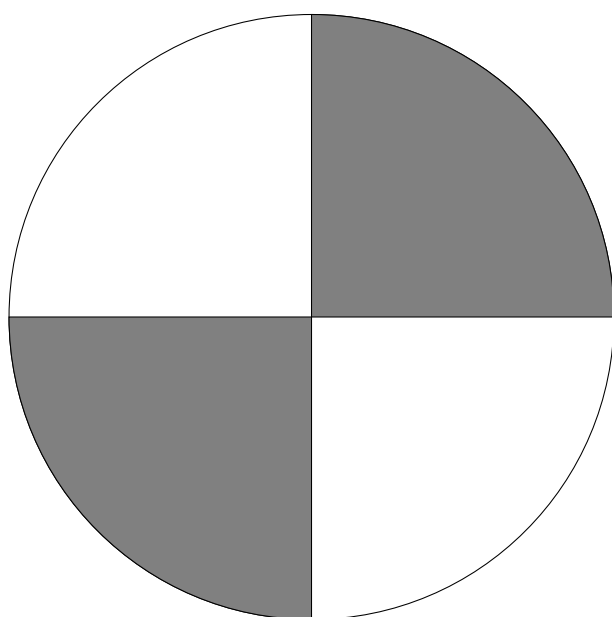


Figura 6

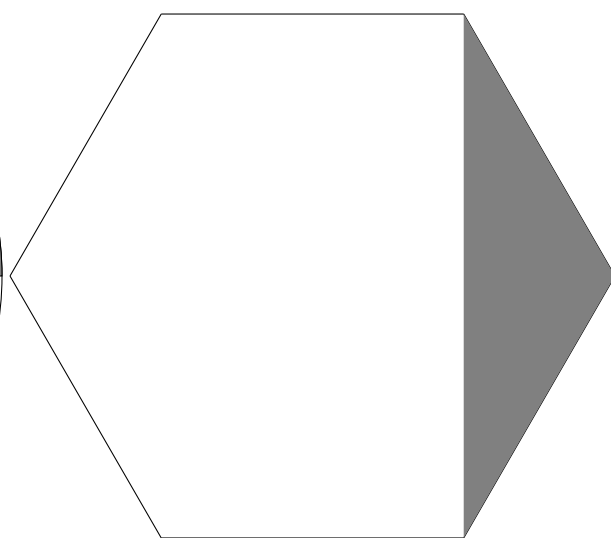


Figura 7

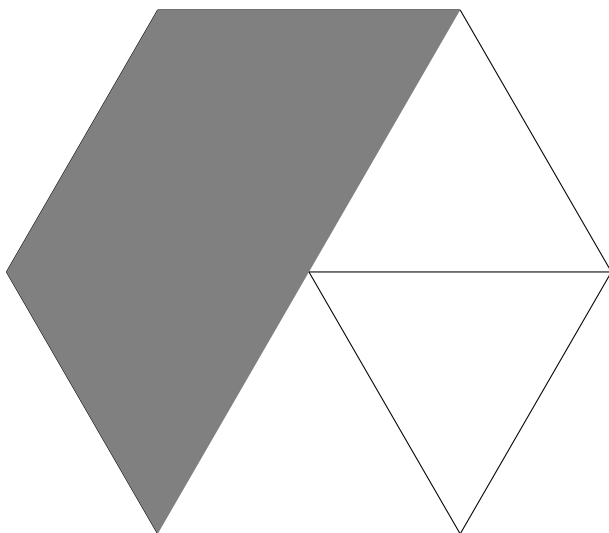


Figura 8

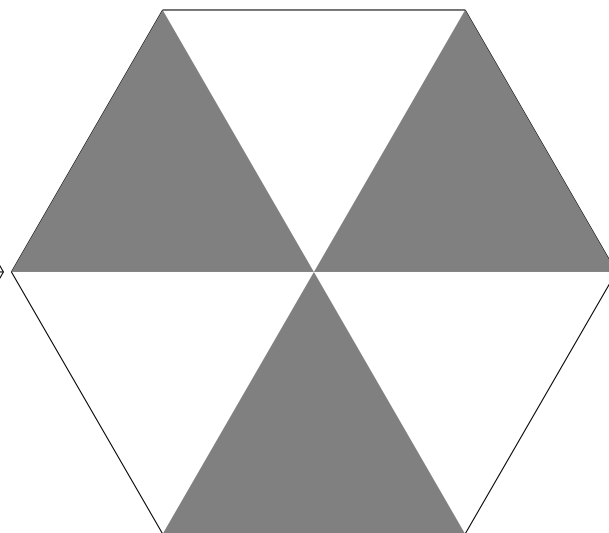


Figura 9

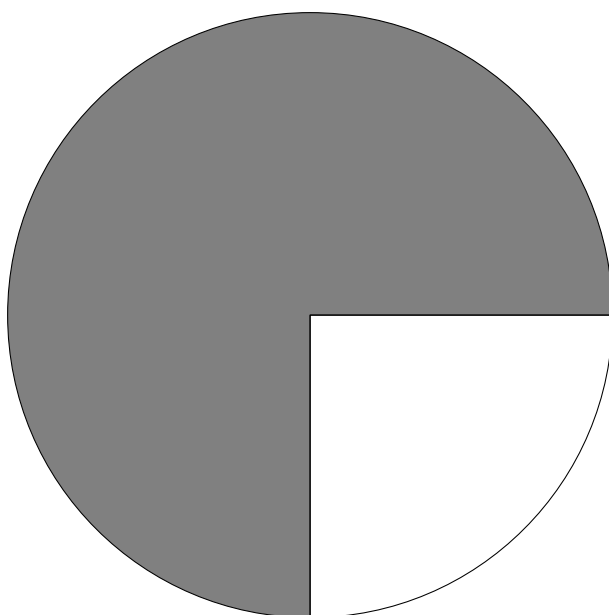


Figura 10

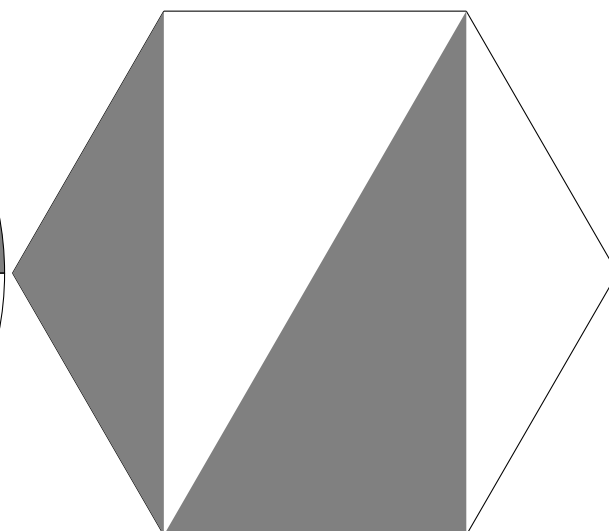
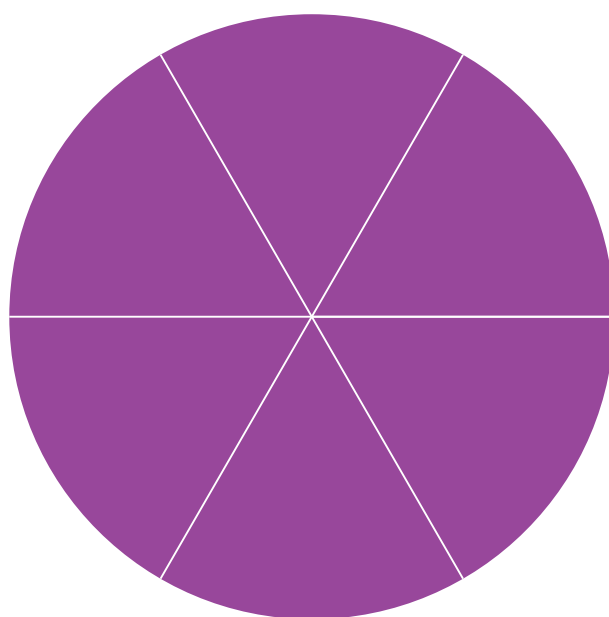
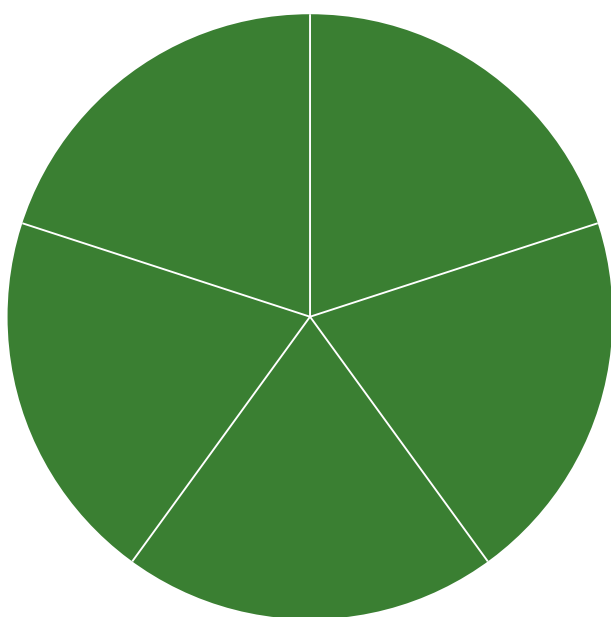
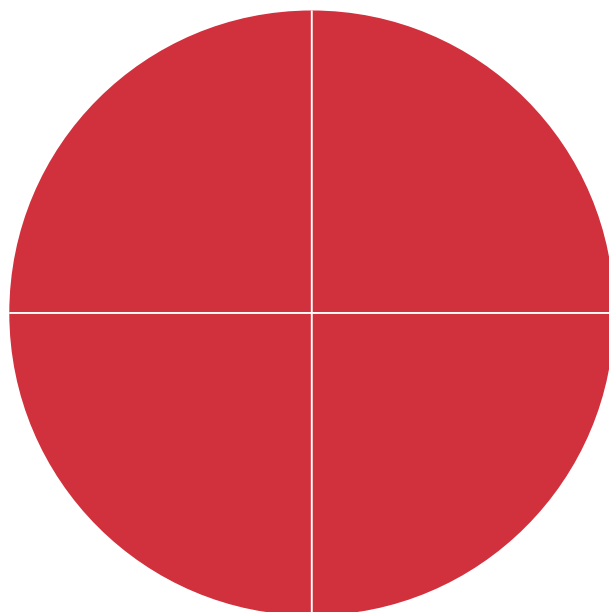
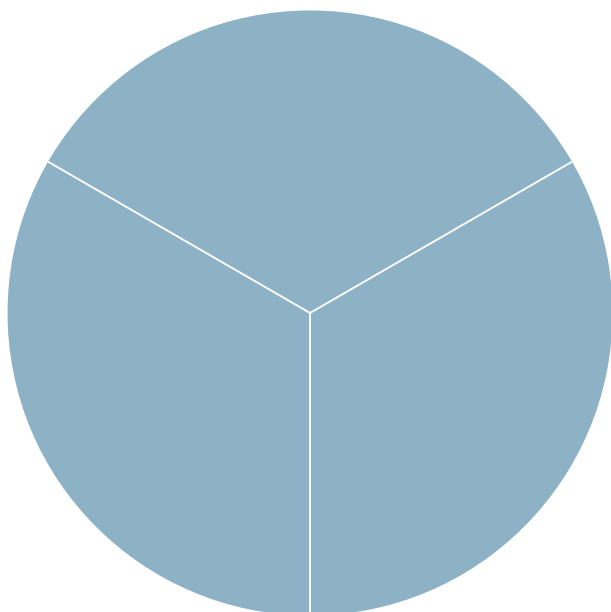
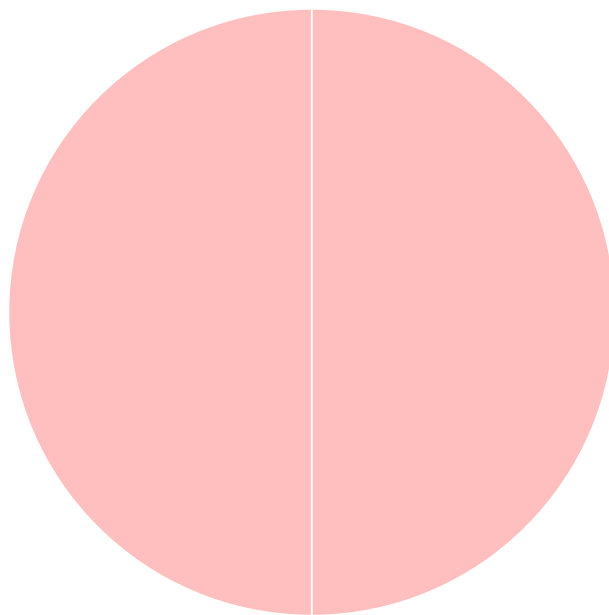
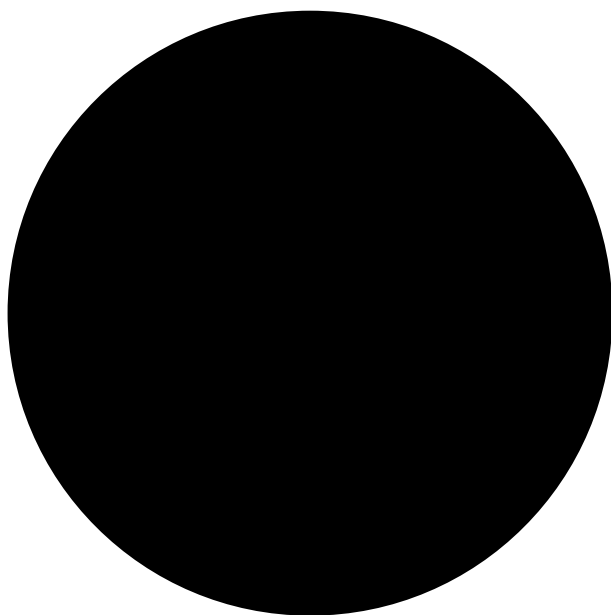


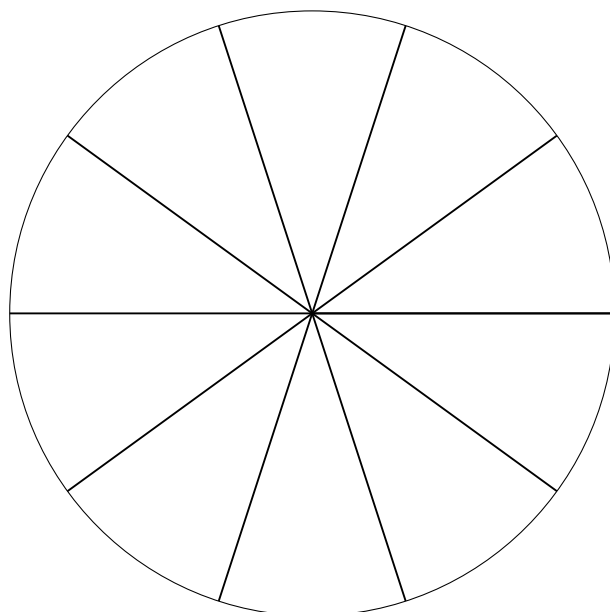
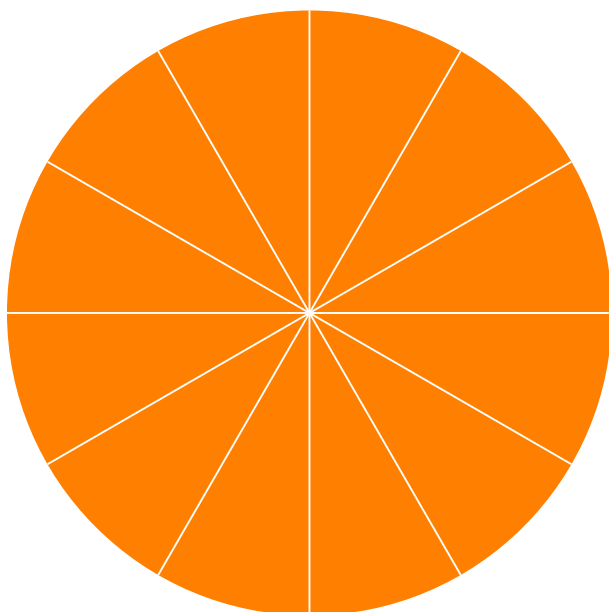
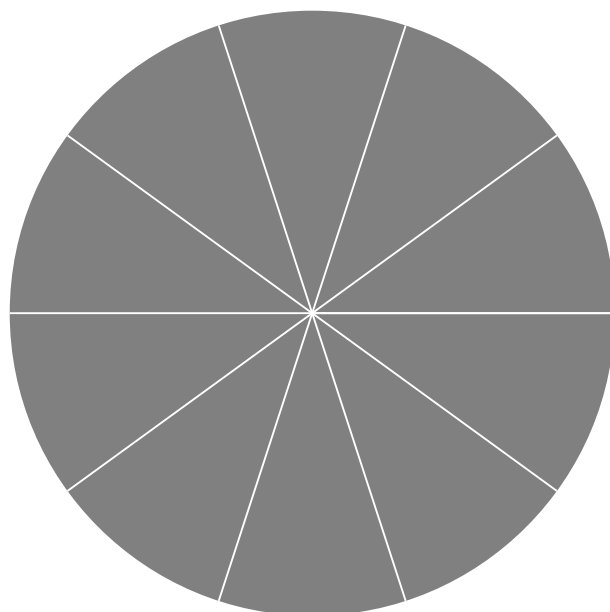
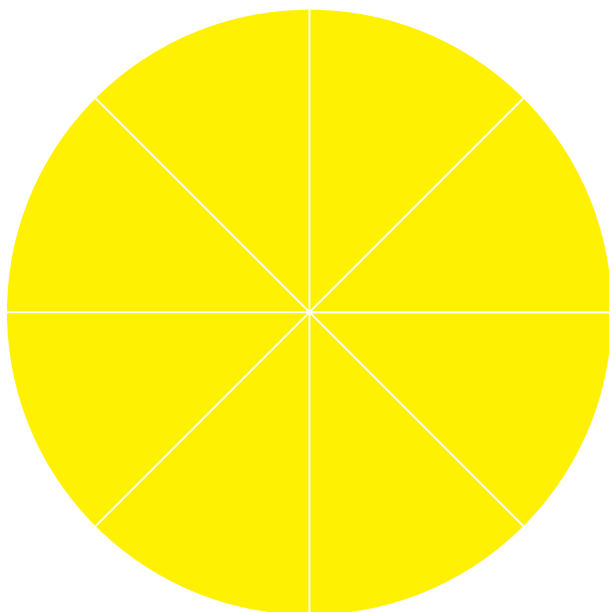
Figura 11



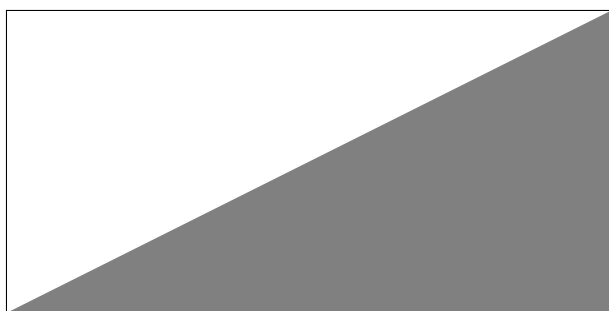
Figura 12

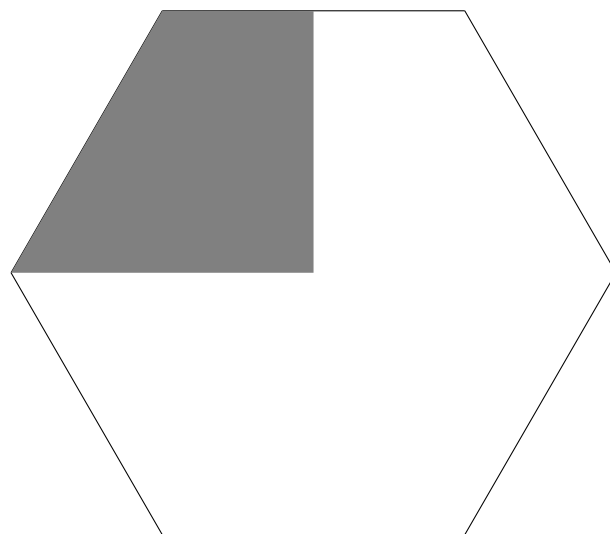
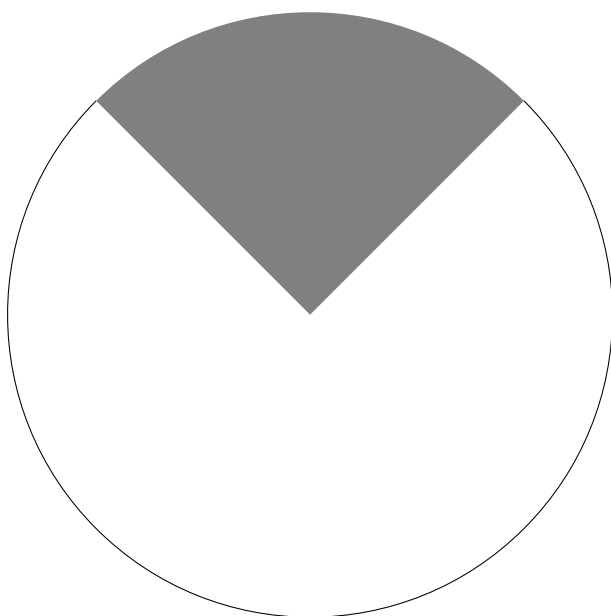
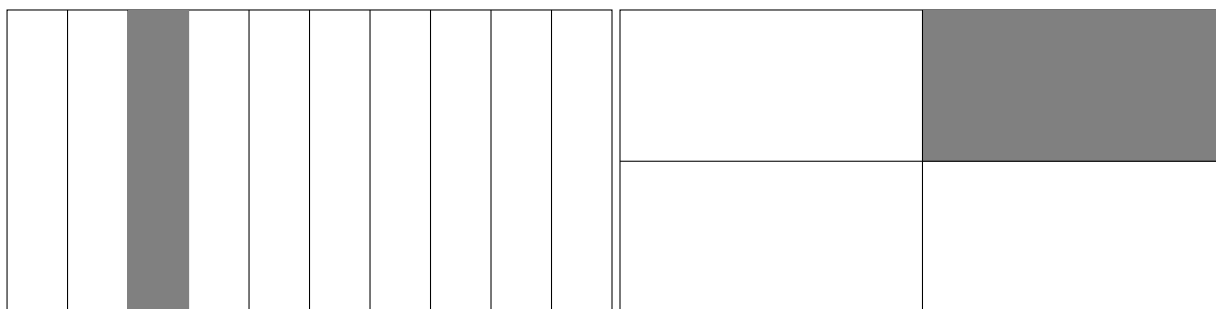
Atividade 10

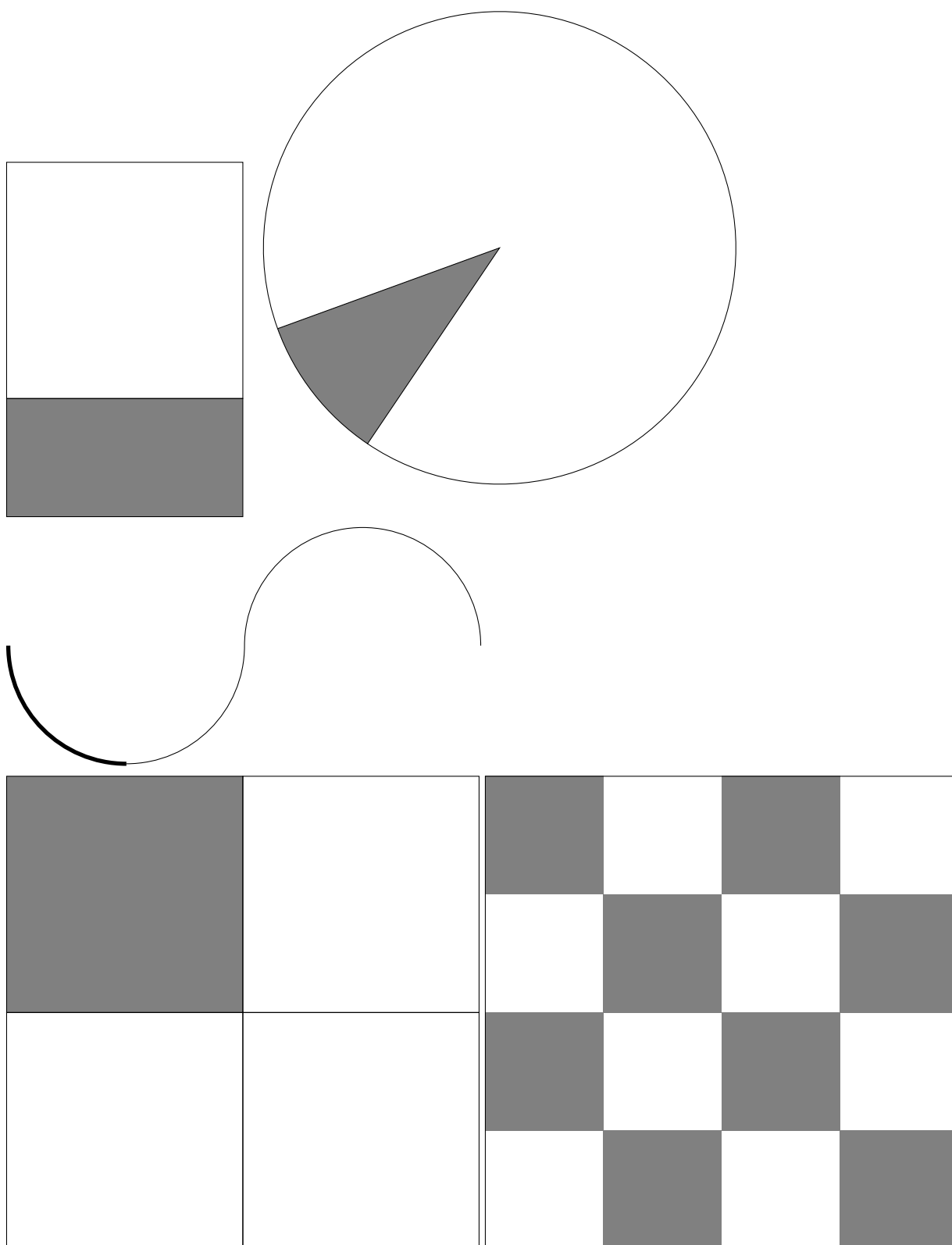




Atividade 12





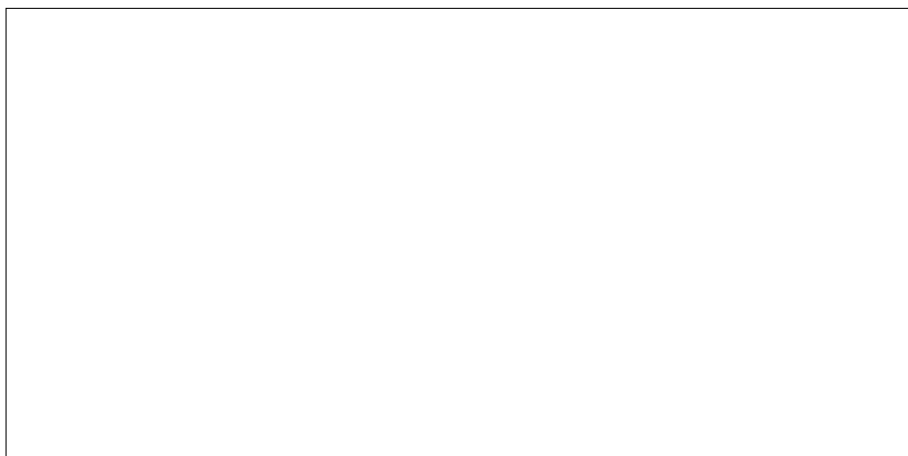


LICAO 2

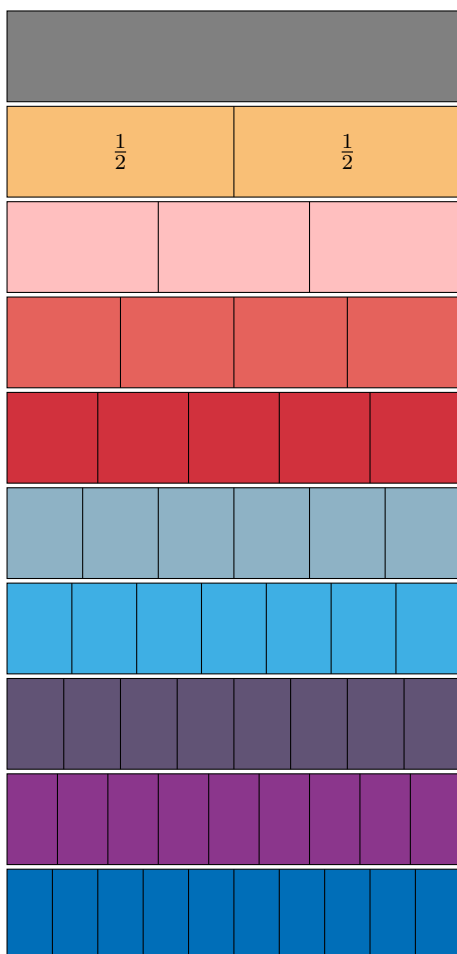
Atividade 1

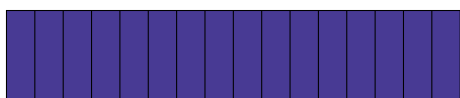


Atividade 2



Atividade 17





LICAO 3

Atividade 6



Atividade 7

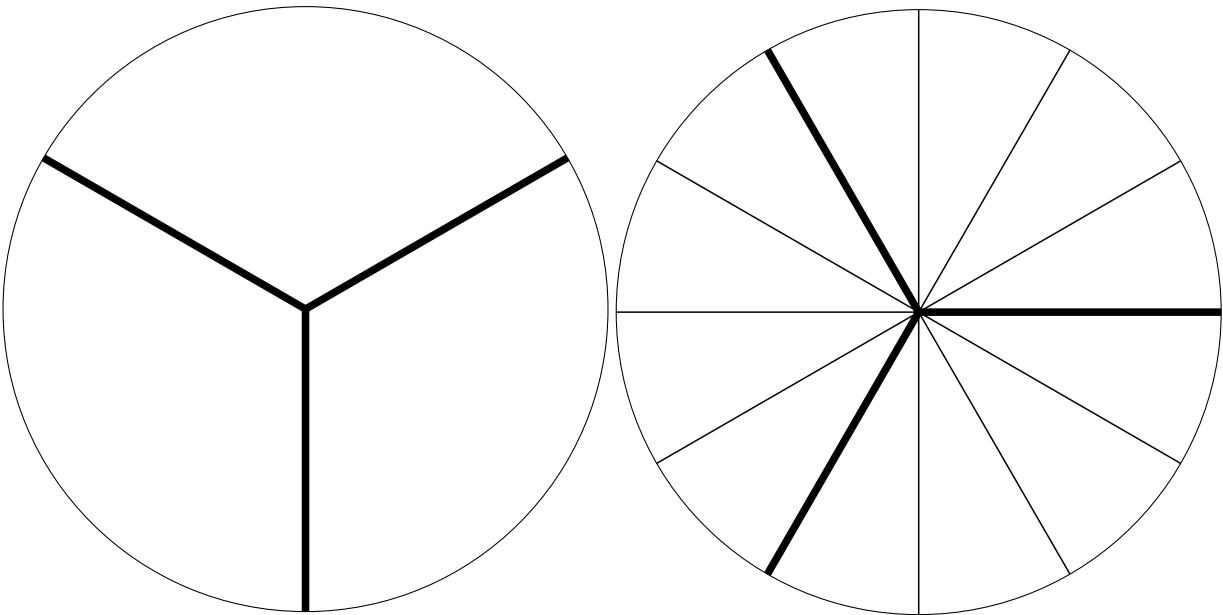


LICAO 4

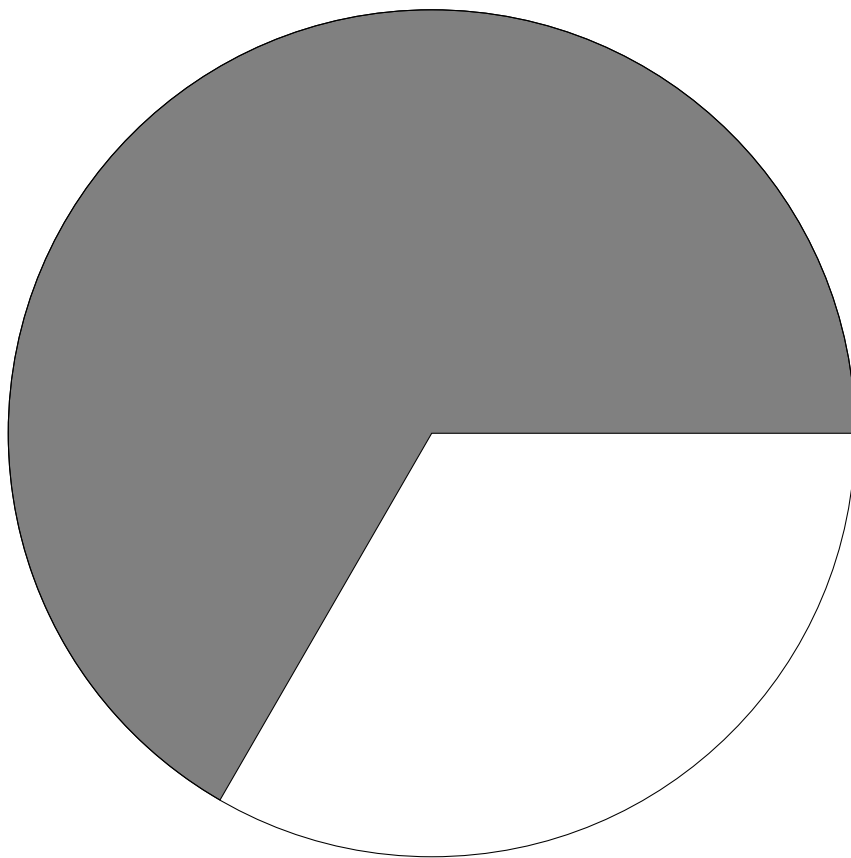
Atividade 2

[illegible]

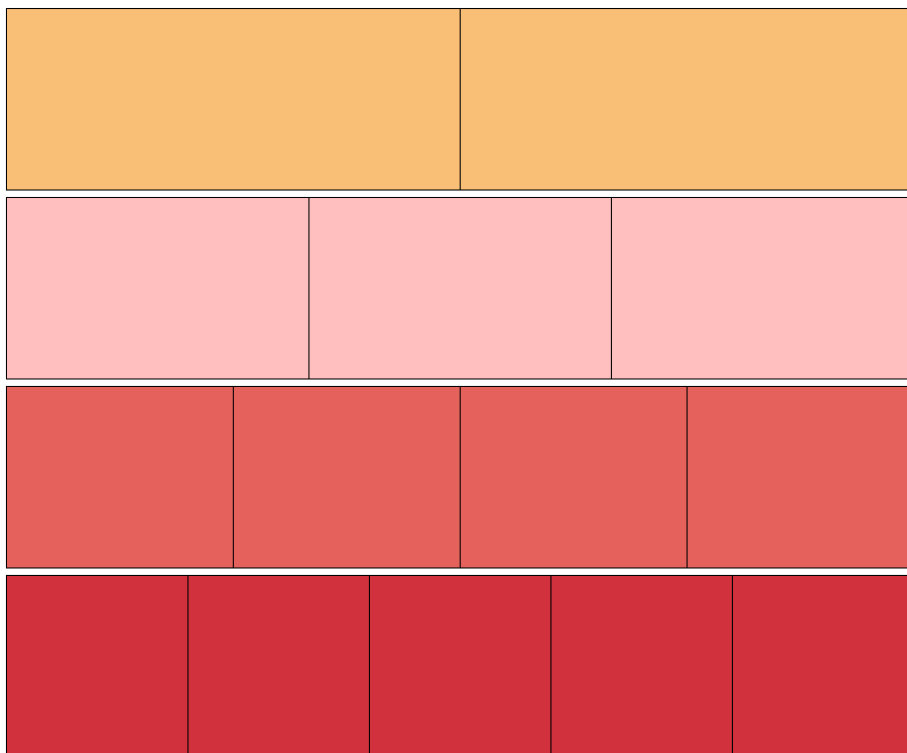
Atividade 4

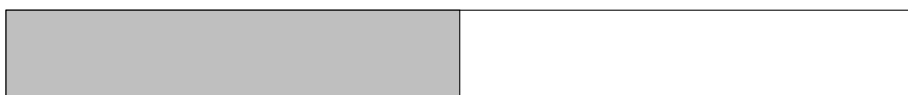
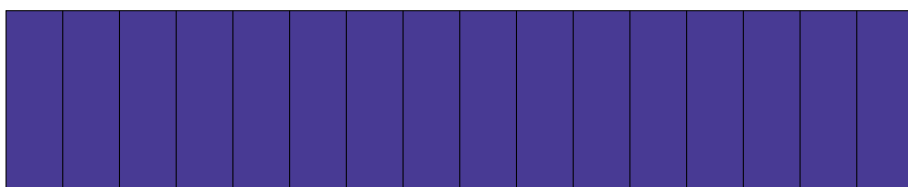
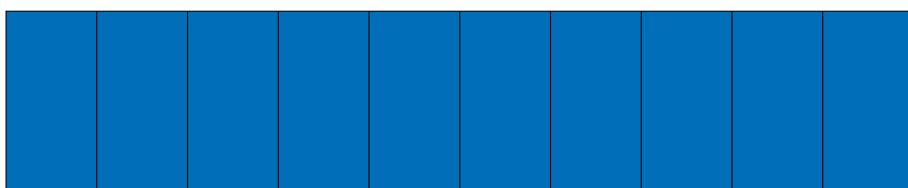
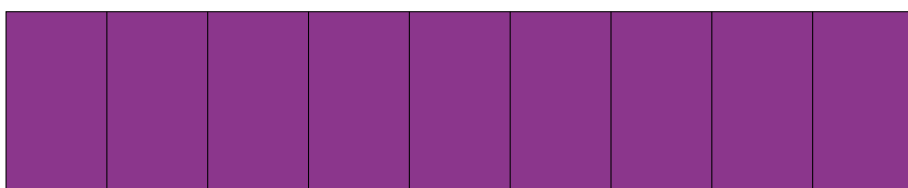
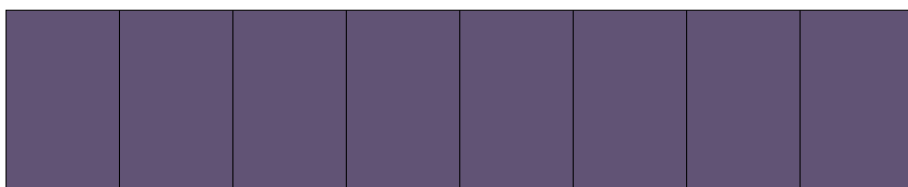
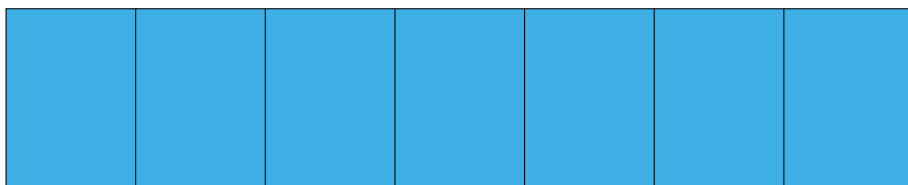
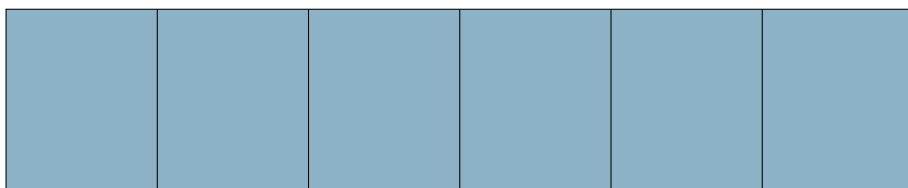


Atividade 5

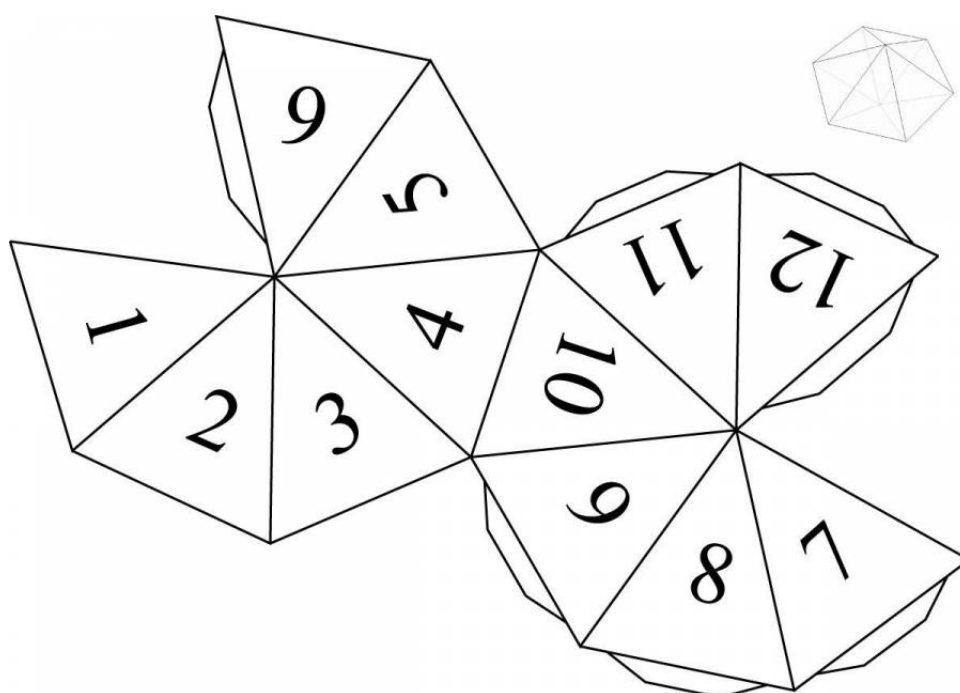
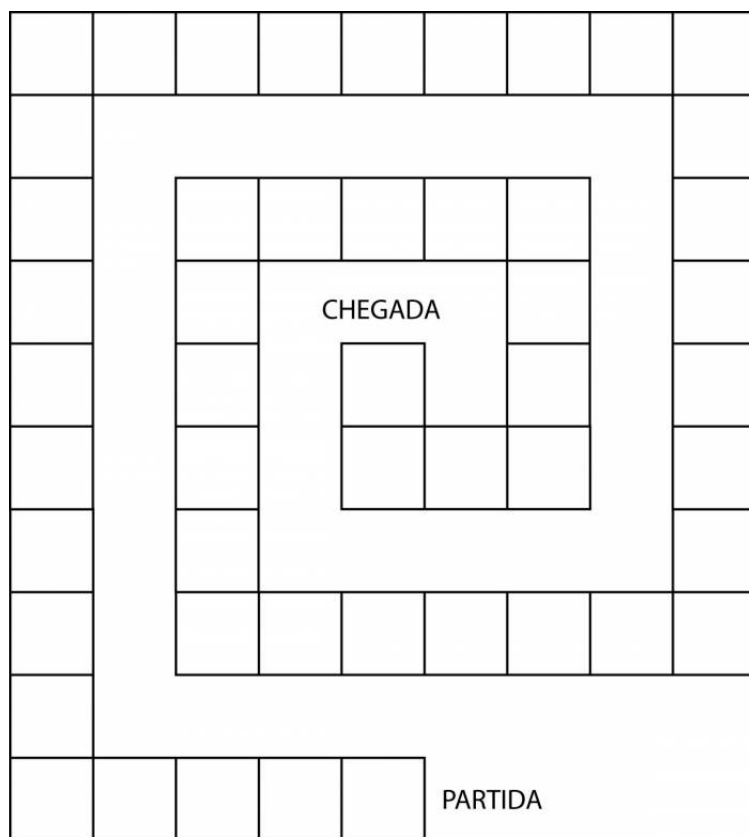


Atividade 6



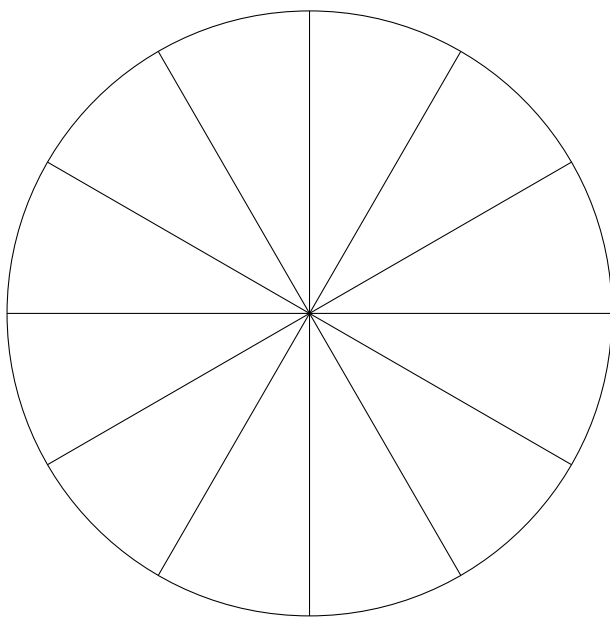


Atividade 20



LIÇÃO 5

Atividade 4





Referências Bibliográficas

- [1] Behr, Merlyn J.; Wachsmuth, Ipke; Post, Thomas R.; Lesh, Richard. Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 15, n. 15, p. 323-341, 198 4.
- [2] Confrey, J.; Maloney, A.; Nguyen, K.; Mojica, G.; Myers, M. Equipartitioning/Splitting as A Foundation of Rational Number Reasoning using Learning Trajectories. *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 345–353). Thessaloniki, Greece, 2009.
- [3] Cramer, Kathleen; Behr, Merlyn; Post, Thomas; Lesh, Richard. *Rational Number Project: Initial Fraction Ideas*. University of Minnesota, 2009.
- [4] Empson, Susan B. Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Fraction Concepts in A First-Grade Classroom. *Cognition and Instruction*, v. 17, n. 3, p. 283-342, 1999.
- [5] Freitag, Mark A. *Mathematics for Elementary School Teachers: A Process Approach*. Cengage Learning, 2014.
- [6] Garcez, Wagner Rohr. Tópicos sobre O Ensino de Frações: Equivalência. *Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT, Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, 2013.
- [7] IES PRACTICE GUIDE WHAT WORKS CLEARINGHOUSE. *Developing Effective Fractions Instruction for Kindergarten Through 8th Grade*. Institute of Educa-

tion Sciences, 2010. - Este relatório oferece um conjunto de diretrizes, procedimentos e cuidados no ensino de frações nas séries iniciais que foram compilados a partir de relatos de experiência e estudos científicos.

- [8] Lewin, Renaio; López, Alejandro; Martínez, Salomé; Rojas, Daniela; Zanocco, Pierina. Números para Futuros Profesores de Educación Básica. ReFIP Matemática: Recursos para La Formación Inicial de Profesores Educación Básica. Ediciones SM Chile S.A., 2013.
- [9] Litwiler, Bonnie H. Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. 2002.
- [10] Mathematics Navigator. Misconceptions and Errors. America’s Choice. Pearson, 2016.
- [11] McNamara, Julie; Shaughnessy, Meghan M. Beyond Pizzas and Pies, Grades 3-5, Second Edition: 10 Essential Strategies for Supporting Fraction Sense. Math Solutions Publications, 2015.
- [12] MEC, Brasil. Números Racionais: Conceito e Representação (TP6). Programa Gestão da Aprendizagem Escolar GESTAR I. 2007.
- [13] Monteiro, Cecília; Pinto, Hélio. Desenvolvendo O Sentido de Número Racional. Associação de Professores de Matemática, 2009.
- [14] Musser, Gary L.; Peterson, Blacke E.; Burger, William F. Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach. John Wiley & Sons, Inc., 2014.
- [15] Ni, Yujing. How Valid is It To Use Number Lines to Measure Children’s Conceptual Knowledge about Rational Number? Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology, v. 20, n. 2, p. 139-152, 2000.
- [16] Pearn, Catherine; Stephens, Max. Why You Have To Probe To Discover What Year 8 Students Really Think about Fractions. MERGA 27, v. 2, p. 430-437, 2004.
- [17] Pereira, Ana Paula Cabral Couto. O Ensino de Frações na Escola Básica: O Currículo Common Core nos EUA, Hung-Hsi Wu e Uma Análise Comparativa em Dois Livros Didáticos do PNLD. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional PROFMAT), Universidade Federal Fluminense, 2015.
- [18] Petit, Marjorie M.; Laird, Robert E.; Marsden, Edwin L. A focus On Fractions: Bringing Research To The Classroom. Studies in Mathematical Thinking and Learning. Taylor & Francis, 2010.

- [19] Post, Thomas R.; Wachsmuth, Ipke; Lesh, Richard; Behr, Merlyn J. Order and Equivalence of Rational Number: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education* v. 16, v. 1, p. 18-36, 1985.
- [20] Pothier, Yvone; Sawada, Daiyo. Partitioning: The Emergence of Rational Number Ideas in Young Children. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 14, n. 4, p. 307-317, 1983.
- [21] Schliemann, Analúcia; Carraher, David W.; Caddle, Mary C. From Seeing Points To Seeing Intervals in Number Lines in Graphs. Em: Brizuela, Bárbara M.; Gravel, Brian E. (Ed.). *Show Me What You Know*, Teachers College, Columbia University, 2013.
- [22] Small, Marian. *Uncomplicating FRACTIONS To Meet Common Core Standards in Math, K-7*. Teachers College Press, 2013.
- [23] Spangler, David B. *Strategies for Teaching Fractions: Using Error Analysis for Intervention and Assessment*. Corwin, 2011.
- [24] Tierney, Cornelia; Berle-Carman, Mary. *Fractions: Fair Shares*. Investigations in Number, Data, and Space. Dale Seymour Publications, 1998.
- [25] Tierney, Cornelia. *Different Shapes, Equal Pieces: Fractions and Area*. Investigations in Number, Data, and Space. Scott Foresman, 2004.
- [26] Thomaidis, Yannis; Tzanakis, Constantinos. The Notion of Historical “parallelism” Revisited: Historical Evolution and Students’ Conception of The Order Relation On The Number Line. *Educational Studies in Mathematics*, v. 66, p. 165-183, 2007.
- [27] Vamvakoussi, Xenia; Vosniadou, Stella. Bridging the Gap Between the Dense and the Discrete: The Number Line and the “Rubber Line” Bridging Analogy. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 14, n. 4, p. 265-284, 2012. DOI: 10.1080/10986065.2012.717378. - Este artigo faz um resumo histórico de como a noção de densidade surgiu.
- [28] Vance, James H. Understanding Equivalence: A Number by Any Other Name. *School Science and Mathematics*, v. 92, n. 5, p. 263-266, 1992.
- [29] Van de Walle, John A. *Matemática no Ensino Fundamental*. Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. Sexta edição. Artmed, 2009.
- [30] Ventura, Hélia Margarida Gaspar Lopes. *A Aprendizagem de Números Racionais através das Conexões entre As Suas Representações: Uma Experiência de Ensino no 2.o Ciclo do Ensino Básico*. Tese de doutorado, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, 2013.

- [31] Wu, Hung-Hsi. Understanding Numbers in Elementary School Mathematics. American Mathematical Society, 2011.

