問題 1 計算の誤差

問 1.1 桁落ちについて簡単に説明せよ．

非常に近い数値の引き算を含む計算において，有効数字が大幅に減少してしまうことであ

問 1.2 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式は，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

であるが，$b > 0, b^2 \gg 4ac$ のときには $-b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ は近い値の引き算になる．（$\gg$ は非常に大きいの意味）

また，$b < 0, b^2 \gg 4ac$ のときは，$-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$ は近い値の引き算になる．したがって $b^2 \gg 4ac$ のときは，解のひとつで桁落ちが生じる可能性がある．

<u>桁落ちを防止する計算式を求めよ（$b > 0, b < 0$ の場合に分けて示すこと）．</u>

ヒント：桁落ちを生じない一つの解を求めたのち，解と係数の関係を用いてもう一つの解を求める．

解と係数の関係にはいくつかあるが，ここで用いるのは，2 つの解を x_1, x_2 とするとき，$x_1 x_2 = c/a$ となる関係である．

$$x_1 = \begin{cases} \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & (b \geq 0) \\ \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & (b < 0) \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{c}{a x_1}$$

問題 2 次の式に関して，x がどのような条件のときに桁落ちするか．また，桁落ちを防止する計算式を求めよ．

問 2.1

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} \quad (\text{ただし}, -1<x<1)$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{1+x-1+x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

問 2.2

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} \quad (\text{ただし}, x>1)$$

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x+1}}$$

問題 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

となる．この左辺を計算する．$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ を数値計算でもとめることはできないので，大きい N（$N = 100000$ など）に対して $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ を計算する．

この和を計算するとき，

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2}$$

を左から順番に計算する場合と，

$$\frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N-1)^2} + \frac{1}{(N-2)^2} + \cdots + \frac{1}{2^2} + 1$$

を左から順番に計算する場合と，どちらが正しい値に近い値を求められるか．またその理由を述べよ．

$1 + \frac{1}{2^2}$ … $\frac{1}{N^2}$ を左から計算

すると $N = 2000000$ のとき $N^2 = 2000000^2$

∴ $\frac{1}{N^2}$ は非常に小さい

∴ $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(N-1)^2} + \underline{\frac{1}{N^2}}$ ⇒ 無視される。

が大きくなる

$1 +$ $\frac{1}{N^2}$ を左から足したものは変化しなく見える。(1)

だから順番を逆に足す

$\frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N-1)^2} + \cdots + \frac{1}{2^2} + 1$ を左から足していく

$\frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N-1)^2}$ は小さい数字の足し合いなので

$\frac{1}{N^2}$ は無視されない

積み残しが減る (2)

(1) & (2) ⇒ $\frac{1}{N^2} + \frac{1}{(N-1)^2} + \frac{1}{(N-2)^2} + \cdots + \frac{1}{2^2} + 1$ は正しい値に近い値

問題 4 非線形方程式 $f(x)=0$ の解を求める2分法のアルゴリズムを書け.（プログラムではない）
a, b, c 等の記号は図1にを見て用いること.

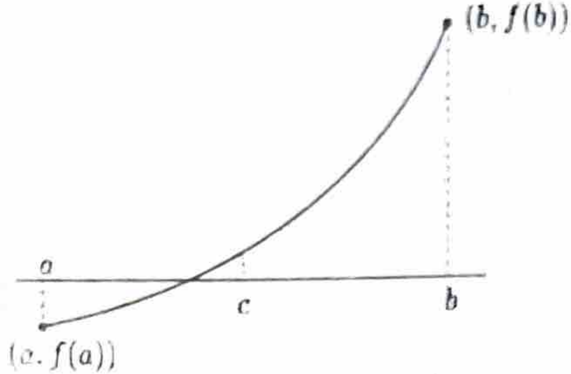

図 1: 2分法（c は a, b の中点）

（以下に2分法のアルゴリズムを記述）

[illegible]

問題 5 非線形方程式 $f(x)=0$ の解を求めるニュートン法のアルゴリズムを書け.（プログラムではない）

図 2 の x_1 は，$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ として求めることができる．$f'(x)$ は $\dfrac{df(x)}{dx}$ のことである．

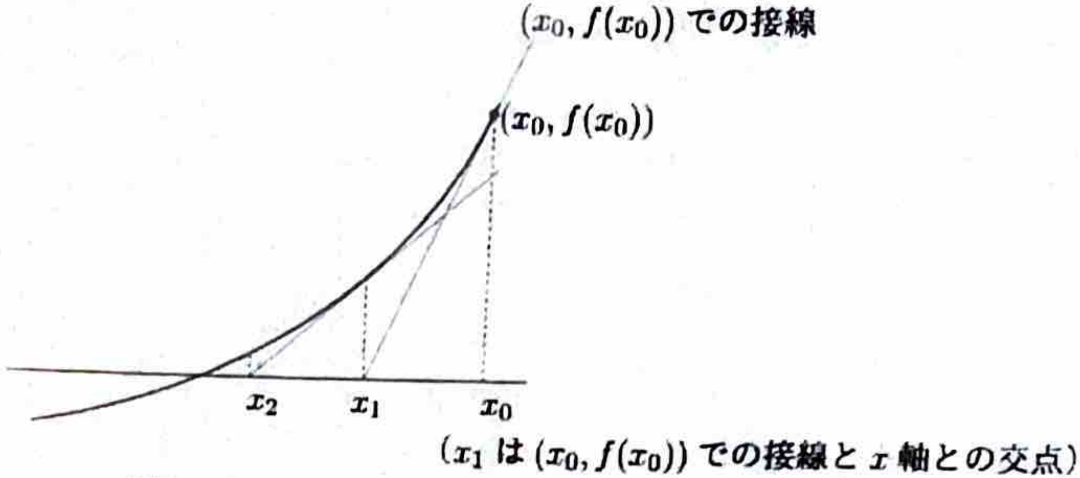

図 2: ニュートン法

（以下にニュートン法のアルゴリズムを記述）

① 初期値 x_0 を

② $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

③ $|x_1 - x_0| < \varepsilon$ であれば終わる

, $|f(x_1)| < \delta$ であれば終わる

, 繰り返し回数がある回数を超えたら終了

else $x_0 = x_1$ として ② 戻る.

問題 6 合成台形公式により $\int_a^b f(x)dx$ を計算することを考える．

区間 $[a, b]$ を n 個に分割し，$h = \dfrac{b-a}{n}$ とし，$x_i = a + i \cdot h$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ とする．$x_0 = a$，$x_n = b$ である．

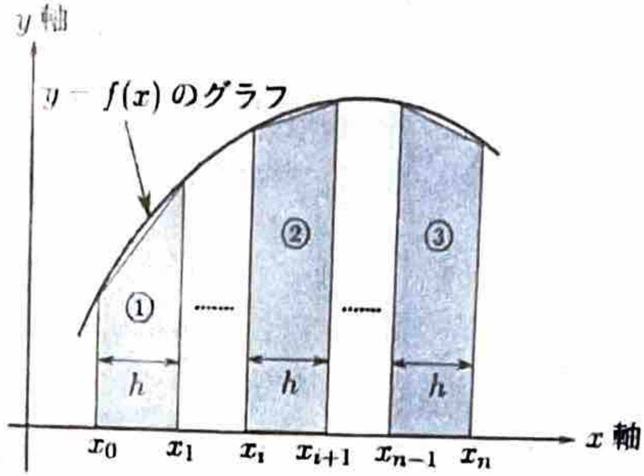

図 3: 合成台形公式

問 6.1 図 3 の灰色部分①の面積は，台形の面積の公式より，$\dfrac{h}{2}\Big(f(x_0) + f(x_1)\Big)$ となる．

灰色部分②の面積，灰色部分③の面積がどうなるかを考え，それらから，$\int_a^b f(x)dx$ の近似値を求める合成台形公式を求めよ．

$h = \dfrac{b-a}{n}$ として $x_0 = a, x_1 = a+h, \ldots, x_i = a+ih, \ldots, x_n = a+nh = b$ とする．

$$\int_a^b f(x)\,dx \fallingdotseq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

ただし $x_i = a + ih$

問 6.2 問題 6.1 で求めた式を用いて，合成台形公式により $\int_a^b f(x)dx$ の近似値を求めるアルゴリズムを書け．

1. f を関数 [illegible] する。

2. $h = \frac{[illegible]}{n}$ とする

3. $s = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$ とする（for 部分を用い）

4. h と s [illegible] 公式を用いて計算する。

問題 7 次のような微分方程式を考える．

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

式 (1) の解 $x(t)$ が微分可能な関数である場合には，テーラー展開により次式が成り立つ．

$$x(t+h) = x(t) + h\frac{dx(t)}{dt} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \ldots$$

h が小さいと仮定して，この式の右辺の第 3 項以下を無視すると，$x(t+h) \fallingdotseq x(t) + h\frac{dx(t)}{dt}$ となり，式 (1) を代入すると，以下の近似式が得られる．

$$x(t+h) \fallingdotseq x(t) + h \cdot f(t, x(t))$$

この式を用いて，式 (1) の近似解を求めるオイラー法のアルゴリズムを書け．

1. fを関数としてプログラムする。

2. 解を求める時刻の上限T，初期値，刻み幅hを定め，$N=T/h$とする

3. $t_0=0$とする。

4. t_0に刻み幅hを加える。

5. x $x_0+hf(x_0)$を代入する

6. N回繰り返したら終了。そうでなければ$t_0=t$として4にもどる。