$$\frac{d^2q}{dt^2} = -q_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

otrzymujemy:

$$-Lq_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C}q_m\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

a stąd:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \qquad (155)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób częstość drgań własnych obwodu LC. (Jest ona odpowiednikiem częstości drgań własnych oscylatora mechanicznego: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$).

Jak wspomnieliśmy, w obwodzie LC energia elektryczna zamienia się na magnetyczną i na odwrót. Odbywa się to z okresem: $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$. Możemy powiedzieć, że pole elektryczne **E** (w kondensatorze) i magnetyczne **B** (w cewce indukcyjnej) generują się nawzajem.

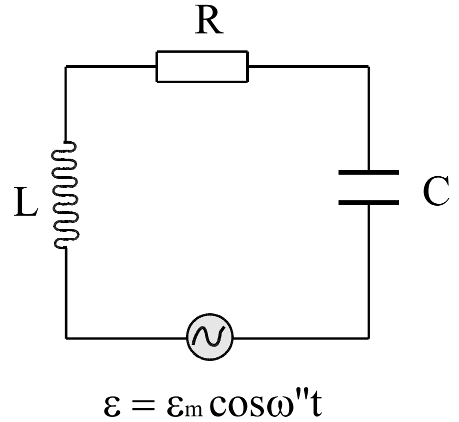
Obwód RLC z wymuszeniem

W praktyce nie możemy uzyskać idealnego obwodu LC, gdyż zawsze wystąpi jakiś opór R. Jest to pełna analogia do mechanicznego oscylatora harmonicznego z tłumieniem. Pamiętamy, że aby podtrzymać jego drgania, trzeba było zastosować siłę wymuszającą $(F = F_m\cos\omega t)$. Podobnie jest w obwodzie elektrycznym RLC. Chcąc zapewnić w nim drgania niegasnące musimy przyłożyć do niego siłę elektromotoryczną sinusoidalnie zmienną:

$$\boxed{\varepsilon(t) = \varepsilon_m\cos\omega'' t} \qquad (156)$$

gdzie ω'' jest częstością pulsacji podłączonego źródła napięcia.
Napiszmy równanie tego obwodu:

$$U_L + U_C + U_R = \varepsilon \qquad (157)$$



Rys. 39. Obwód RLC z wymuszeniem

lub bardziej szczegółowo:

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}q+Ri=\varepsilon \qquad (158)$$

Wyrażając prąd przez ładunek ($i=\frac{dq}{dt}$) :

$$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=\varepsilon \qquad (159)}$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe na ładunek zgromadzony na kondensatorze. Równanie to ma identyczną postać matematyczną jak równanie mechanicznego oscylatora harmonicznego z tłumieniem i z siłą wymuszającą. Jego rozwiązanie ma, zatem analogiczną postać:

$$\boxed{q=q_m\sin(\omega''t-\varphi) \qquad (160)}$$

Na ogół bardziej interesuje nas prąd ($i=\frac{dq}{dt}$):

$$\boxed{i=i_m\cos(\omega''t-\varphi) \qquad (161)}$$

Po podstawieniu proponowanego rozwiązania (Równ. 160) do Rów. 159, otrzymuje się, że:

$$\boxed{i_m=\frac{\varepsilon_m}{Z} \qquad (162)}$$

gdzie:

$$Z=\sqrt{(\omega''L-\frac{1}{\omega''C})^2+R^2} \qquad (163)$$

A zatem:

$$\boxed{i_m=\frac{\varepsilon_m}{\sqrt{(\omega''L-1/\omega''C)^2+R^2}} \qquad (164)}$$

Wielkość Z zwana jest **impedancją** i odgrywa ona rolę analogiczną jak oporność elektryczna (por. Równ. 162). Impedancja jest wielkością, która zastępuje „całkowity opór" w obwodzie prądu sinusoidalnie zmiennego.

Można łatwo się przekonać, że napięcia na cewce indukcyjnej (L), kondensatorze (C) i na oporniku (R) nie są w tej samej fazie. Rozważmy najpierw napięcie na oporniku:

$$U_R=Ri=Ri_m\cos(\omega''-\varphi)=U_{Rm}\cos(\omega''t-\varphi) \qquad (165)$$

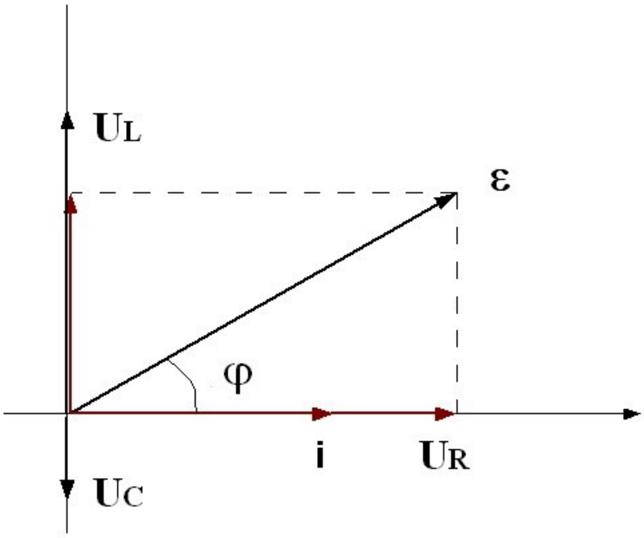
A zatem, napięcie na oporniku (a także prąd) jest opóźnione w fazie (o kąt φ) za napięciem siły elektromotorycznej ε (Równ. 156). Wyliczmy teraz napięcie na cewce indukcyjnej (U_L):

$$U_L=L\frac{di}{dt}=-L\omega''i_m\sin(\omega''t-\varphi)$$

Biorąc pod uwagę tożsamość: $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\sin\alpha$, napięcie na cewce możemy zapisać:

$$U_L=L\omega''i_m\cos(\omega''t-\varphi+\frac{\pi}{2})=U_{Lm}\cos(\omega''t-\varphi+\frac{\pi}{2}) \qquad (166)$$

Widzimy, że napięcie na cewce (U_L) jest przesunięte w fazie o $\frac{\pi}{2}$ do przodu względem napięcia na oporniku (U_R). Podobnie można wykazać, że napięcie na kondensatorze (U_C) jest przesunięte o $\frac{\pi}{2}$ do tyłu względem U_R . I co najważniejsze, prąd i (mający tą samą fazę co U_R) jest opóźniony w fazie w stosunku do napięcia siły elektromotorycznej ε o kąt φ.
Wyniki te przedstawiamy schematycznie:



Rys. 40. Przesunięcia fazowe między prądem i napięciami w obwodzie RLC

Z Równań 162, 165 i 166 wynika, że napięcia maksymalne wynoszą:

$$\varepsilon_m = U_m = Z\, i_m$$
$$U_{R(m)} = R\, i_m$$
$$U_{L(m)} = \omega'' L\, i_m$$

gdzie U_m jest amplitudą całkowitego napięcia w obwodzie (na wszystkich elementach biernych), a zatem równe sile elektromotorycznej ε_m. Podobnie, wykazuje się, że:

$$U_{C(m)} = (1/\omega C)\, i_m$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, na podstawie powyższego rysunku możemy napisać:

$$(Zi_m)^2 = (Ri_m)^2 + (\omega'' L - \frac{1}{\omega'' C})^2 i_m^2$$

lub też:

$$Z^2 = R^2 + (\omega'' L - \frac{1}{\omega'' C})^2$$

co odtwarza nam definicję całkowitej impedancji Z. Możemy ją rozdzielić na składowe związane z elementami L, C i R:

$$Z^2 = R^2 + (Z_L - Z_C)^2 \qquad (167)$$

gdzie:

$$Z_C = \frac{1}{\omega'' C} \qquad \text{i} \qquad Z_L = L\omega''$$

są impedancjami kondensatora i cewki oraz oczywiście: L_R=R.
Przesunięcie fazowe φ między napięciem na źródle siły elektromotorycznej a prądem, odgrywa ważną rolę w obwodach prądu sinusoidalnie zmiennego. Możemy je wyznaczyć na

podstawie powyższego rysunku:

$$\cos\varphi = \frac{U_{R(m)}}{U_m} = \frac{Ri_m}{Zi_m} = \frac{R}{Z} = R\Big/\sqrt{R^2 + (\omega''L - 1/\omega''C)^2}$$

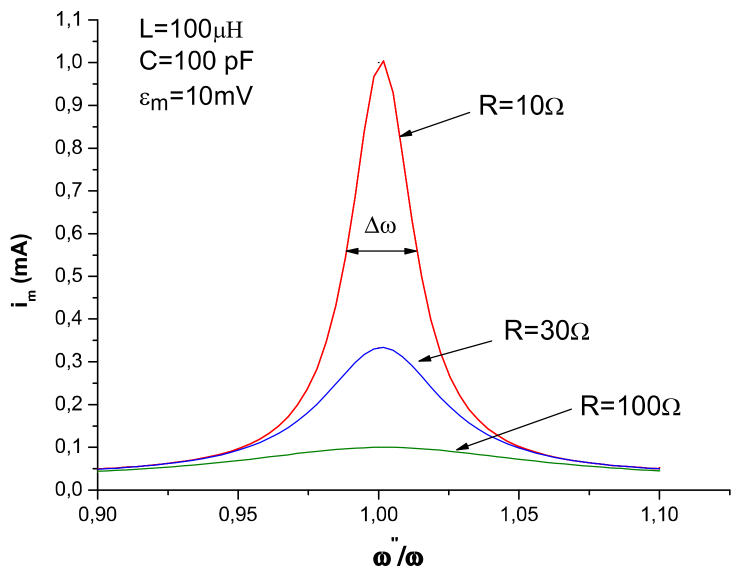
Ostatecznie:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega''L - 1/\omega''C)^2}} \quad \text{lub też:} \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z}} \qquad (168)$$

Wróćmy teraz do rozwiązania w układzie RLC z wymuszeniem. Wymuszeniem jest siła elektromotoryczna $\varepsilon = \varepsilon_m \cos\omega''t$, zaś odpowiedzią układu jest prąd elektryczny $i = i_m \cos(\omega''t - \varphi)$. Prąd (odpowiedź) ma taką samą częstotliwość jak wymuszenie, ale jest przesunięty w fazie o φ. Jak pamiętamy, częstością własną układu LC była $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Z Równ. 168 wynika, że jeśli częstość wymuszenia równa jest częstości własnej, czyli

$$\omega'' = \omega$$

to wtedy impedancja osiąga wartość minimalną Z=R. Jest to warunek REZONANSU. Prąd płynący w obwodzie osiąga wtedy wartość maksymalną (Równ. 162). Zauważmy, że gdyby w układzie nie było w ogóle oporności, to impedancja wręcz wyniosłaby zero ($Z = 0$), co spowodowałoby przepływ nieskończenie wielkiego prądu.
W ogólnym przypadku amplituda prądu w obwodzie zależy od relacji częstości przyłożonego napięcia (ω'') do częstości własnej układu LC (ω). Zależność tą przedstawiono poniżej.



Rys. 41. Zależność amplitudy prądu w obwodzie RLC od częstości pulsacji przyłożonego napięcia. Przy ω''=ω=10^7 rad/s występuje rezonans.
Jak pamiętamy, rezonans pojawia się także w oscylatorze mechanicznym z siłą wymuszającą.

<u>Obwody prądu sinusoidalnie zmiennego</u>

Zdecydowana większość urządzeń, z którymi mamy do czynienia w życiu codziennym, zasilana jest napięciem sinusoidalnie zmiennym, a zatem także płyną w nich prądy sinusoidalnie zmienne. Dla prądów tych definiuje się praktyczne w zastosowaniach pojęcia