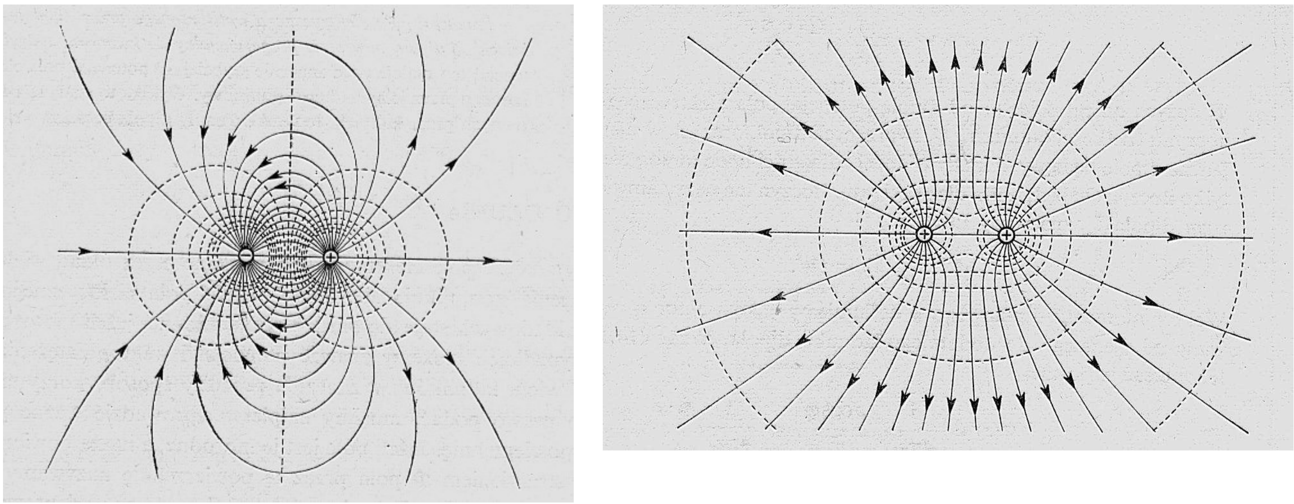
ogólnym przypadku potencjał jest funkcją trzech współrzędnych: V=V(x,y,z). Równanie powyższe możemy zapisać prościej jako:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\ V \tag{43}$$

gdzie operator gradientu (znany z matematyki), który funkcji skalarnej przyporządkowuje wektor, definiujemy jako:

$$\mathbf{grad}\ f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{z} \tag{44}$$

Wykazuje się, że gradient **grad**V (a zatem i wektor natężenia pola elektrycznego **E**) jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej (powierzchnia stałego potencjału). Widać to na poniższym rysunku, na którym pokazano jednocześnie linie sił oraz linie stałego potencjału.



Rys.14. Pole pochodzące od dwóch ładunków punktowych

V. Kondensatory i dielektryki

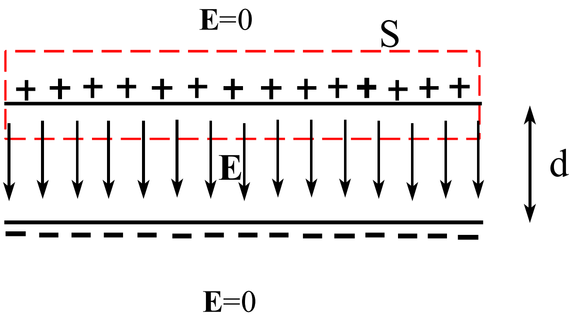
Pojemność elektryczna

Pojemność elektryczną kondensatora definiujemy jako iloraz ładunku na jednej z okładek do różnicy potencjałów U=ΔV między okładkami:

$$C = \frac{q}{U} \tag{45}$$

Przykład 1: Pojemność elektryczna kondensatora płaskiego

Kondensator posiada dwie okładki, o polu powierzchni S, naładowane przeciwnym ładunkiem ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ.



Rys. 15. Obliczenie pojemności elektrycznej kondensatora płaskiego przy użyciu prawa Gaussa.

Stosując prawo Gaussa wyliczymy pojemność takiego kondensatora. Jako powierzchnię Gaussa weźmy prostopadłościan, o powierzchni poziomej podstawy równej S. Strumień wektora **E** przechodzący przez ściany pionowe prostopadłościanu wynosi zero, gdyż wektor **E** jest do nich równoległy (czyli ich nie przecina). Także przez górną podstawę poziomą nie przechodzi strumień pola elektrycznego, gdyż na zewnątrz kondensatora **E**=0. Strumień elektryczny przechodzi natomiast przez dolną poziomą podstawę powierzchni Gaussa i wynosi:

$$\Phi_E = ES \tag{46}$$

Jako napięcie elektryczne U, weźmiemy w przypadku kondensatora płaskiego różnicę potencjałów między jego okładkami. Zgodnie z Równ.25, jeśli przemieścimy się o *d* zgodnie z kierunkiem stałego pola **E**, to napięcie elektryczne wyniesie:

$$U = V_A - V_B = Ed \tag{47}$$

Podstawiając Równ.48 do prawa Gaussa ($\varepsilon_0 \Phi_E = q$), otrzymamy:

$$\varepsilon_0 \Phi_E = \varepsilon_0 ES = q \tag{48}$$

Podstawiając obie powyższe relacje do definicji pojemności elektrycznej (C=q/U), otrzymujemy wzór na pojemność kondensatora płaskiego:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad (49)}$$

Widzimy, że pojemność elektryczna kondensatora płaskiego jest proporcjonalna do powierzchni jego okładek, a odwrotnie proporcjonalna do odległości między okładkami.

Przykład 2: Pojemność elektryczna odosobnionej kuli metalowej

Jak widzieliśmy poprzednio, pole elektryczne od ładunku punktowego jest takie samo, jak od jednorodnie naładowanej kuli. Jest to słuszne dla odległości r≥R, gdzie r jest liczone od środka kuli, zaś R jest jej promieniem. A zatem potencjał na powierzchni naładowanej kuli, na której znajduje się ładunek q, wynosi:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} \tag{50}$$

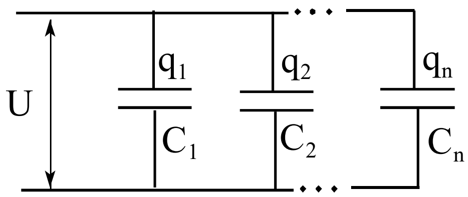
Jako „drugą okładkę” przyjmiemy tutaj nieskończoność (bo ładując kulę, np., dodatnio, przenosimy ładunki ujemne od niej do nieskończoności). A zatem: $U = V - V_\infty = V$. Zgodnie z definicją pojemności elektrycznej (Równ. 45), dla naładowanej kuli znajdujemy:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{51}$$

Łączenie kondensatorów

W praktyce elektrotechnicznej czy elektronicznej często zdarza się, że nie dysponujemy akurat kondensatorem o takiej pojemności, jaka jest nam potrzebna, posiadamy natomiast kondensatory o innych pojemnościach. Sposobem na uzyskanie żądanej pojemności jest łącznie kondensatorów. Wyróżniamy dwa podstawowe sposoby łączenia kondensatorów: równoległe i szeregowe.

a) Łączenie równoległe



Rys.16. Równoległe połączenie kondensatorów

Na kolejnych kondensatorach o pojemnościach C_1, C_2, …., C_n, zgromadzone są ładunki q_1, q_2, …, q_n, natomiast napięcie na każdym z nich jest takie samo i wynosi U.
Zgodnie z definicją pojemności:

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \quad q_n = C_n U$$

Zauważmy, że na zespole połączonych w ten sposób kondensatorów jest zgromadzony sumaryczny ładunek:

$$q = q_1 + q_2 + ...q_n$$

gdyż w istocie wszystkie górne okładki tworzą jedną okładkę „wypadkowego” kondensatora i podobnie dolne. A zatem pojemność zespołu kondensatorów:

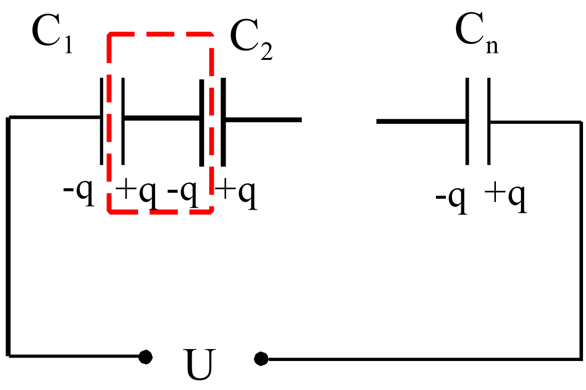
$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2 + ... + q_n}{U} = \frac{C_1 U + C_2 U + ... + C_n U}{U}$$

czyli:

$$\boxed{C = C_1 + C_2 + ... + C_n \qquad (52)}$$

Wypadkowa pojemność dla połączenia równoległego kondensatorów jest zawsze **większa** od każdej z pojemności w układzie.

b) Łączenie szeregowe



Rys.17. Szeregowe połączenie kondensatorów

Przy tym połączeniu wartość bezwzględna ładunku q na każdej okładce musi być taka sama, gdyż ładunki +q i –q na sąsiadujących okładkach (znajdujących się w zaznaczonym konturze) powstały przez ich rozdzielenie. Dlatego wypadkowy ładunek na części obwodu objętej przerywanym konturem musi być równy zero. Odnosi się to do wszystkich kolejnych kondensatorów, a zatem wypadkowy ładunek układu wynosi:

$$q_{wyp} = q$$

Natomiast różnice potencjałów (napięcia) na poszczególnych kondensatorach:

$$U_1 = \frac{q}{C_1}; U_2 = \frac{q}{C_2}; ...U_n = \frac{q}{C_n}$$

sumują się dając napięcie elektryczne przyłożone do całego układu:

$$U = U_1 + U_2 + ...U_n$$

W efekcie wypadkowa pojemność układu wynosi:

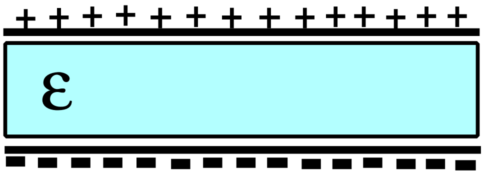
$$C = \frac{q_{wyp}}{U} = \frac{q}{U_1 + U_2 + ... + U_n} = \frac{q}{\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + ... \frac{q}{C_n}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... \frac{1}{C_n}}$$

czyli:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... \frac{1}{C_n} \qquad (53)}$$

Zauważmy, że równoważna pojemność dla szeregowego połączenia kondensatorów jest zawsze **mniejsza** od najmniejszej pojemności w układzie.

Kondensator z dielektrykiem



Rys.18. Kondensator płaski z dielektrykiem

Doświadczalnie stwierdza się, że pojemność elektryczna kondensatorów zwiększa się, gdy pomiędzy ich okładki wprowadzimy płytkę tzw. dielektryka. Są to izolatory, których cząsteczki stają się w polu elektrycznym dipolami elektrycznymi. Stwierdza się, że różnica potencjałów, U, pomiędzy okładkami odizolowanego kondensatora maleje ε razy, jeśli wprowadzi się dielektryk:

$$U_d = \frac{U_0}{\varepsilon} \tag{54}$$

ε jest względną przenikalnością elektryczną danego materiału.

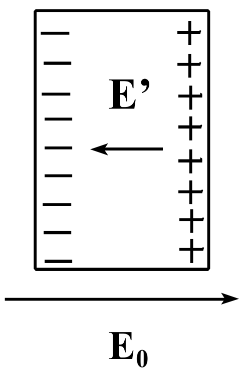
Przy niezmienionym ładunku na okładkach, pojemność elektryczna:

$$C = \frac{q}{U_d} = \frac{\varepsilon q}{U_0} = \varepsilon C_0 \tag{55}$$

wzrośnie ε razy.
W rezultacie, pojemność elektryczna kondensatora płaskiego z dielektrykiem wynosi:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}} \tag{56}$$

Co się dzieje w dielektryku ?



Rys.19. Polaryzacja dielektryka wytwarza dodatkowe pole elektryczne ***E'***

Jeśli umieścimy płytkę dielektryczną w jednorodnym polu elektrycznym(np. między okładkami kondensatora płaskiego) to w wyniku powstania i uporządkowania dipoli elektrycznych następuje w efekcie niewielkie rozsunięcie dodatniego i ujemnego ładunku płytki dielektryka. Chociaż płytka jako całość jest obojętna, staje się ona częściowo spolaryzowana i wewnątrz niej wytwarza się pole elektryczne **E'** przeciwnie skierowane do pola $\mathbf{E_0}$, jakie wytwarza kondensator bez dielektryka. W efekcie wypadkowe pole w kondensatorze z dielektrykiem wynosi:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} + \mathbf{E'} \tag{57}$$

przy czym wartość bezwzględna pola wypadkowego:

$$E = E_0 - E' \tag{58}$$

oraz oczywiście $E < E_0$ (pole wypadkowe zmalało wskutek wprowadzenia dielektryka).
Dla płaskiego kondensatora: U = Ed, mamy następującą zależność:

$$\frac{E_0}{E} = \frac{U_0}{U_d} = \varepsilon \tag{59}$$

a zatem $U_d < U_0$. Zredukowanie napięcia między okładkami powoduje wzrost pojemności (Równ.55):

$$C = \frac{q}{U_d} = \frac{\varepsilon q}{U_0} = \varepsilon C_0$$

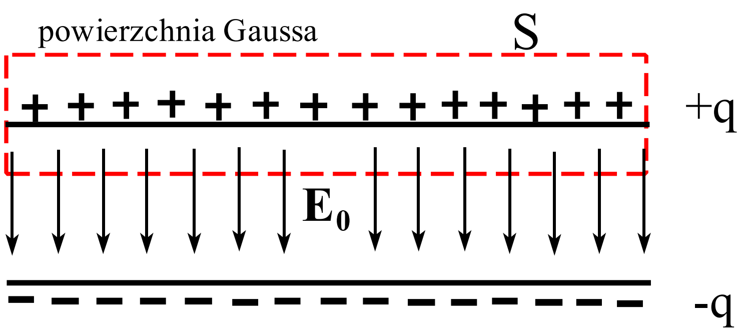
W tabeli podano przykładowe stałe dielektryczne.

Przykładowe względne przenikalności elektryczne	
	ε
Próżnia	1,00000
Powietrze	1,00054
Woda	78
Szkło pyreksowe	4,5
Porcelana	6.5
Dwutlenek tytanu	100
Ceramika tytanowa	130
Tytanian strontu	310

Prawo Gaussa w obecności dielektryka

Rozważmy najpierw kondensator bez dielektryka. Wprowadzamy powierzchnię Gaussa obejmującą okładkę z ładunkiem dodatnim. Zgodnie z prawem Gaussa:

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E_0} \bullet d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E_0 S = q \tag{60}$$

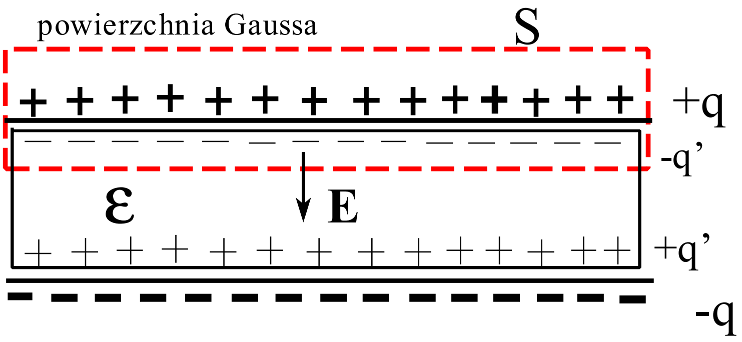


Rys. 20. Kondensator bez dielektryka

Natężenie pola elektrycznego bez dielektryka wynosi zatem:

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \tag{61}$$

A teraz rozważmy ten sam kondensator, ale z dielektrykiem. Wypadkowe pole elektryczne wynosi **E**, zaś na dolnej i górnej powierzchni dielektryka wyidukowały się ładunki –q' i +q'.



Rys. 21. Kondensator z dielektrykiem

Napiszmy prawo Gaussa dla tej samej powierzchni zamkniętej:

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = \varepsilon_0 ES = q - q' \tag{62}$$

Czyli wartość natężenia pola elektrycznego wynosi:

$$E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 S} \tag{63}$$

Wiemy z drugiej strony, że natężenie pola maleje o czynnik ε w obecności dielektryka:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0 S} \tag{64}$$

Porównując dwa ostatnie równania, otrzymujemy:

$$q - q' = \frac{q}{\varepsilon} \tag{65}$$

Podstawiając ten wynik do Równ.62 otrzymujemy:

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon} \qquad \text{czyli} \qquad \oint \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \bullet d\mathbf{S} = q \tag{66}$$

Definiując wektor indukcji elektrycznej:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \tag{67}$$

otrzymujemy prawo Gaussa słuszne w ogólnym przypadku, gdy pole elektryczne wytwarzane jest w konkretnym ośrodku (a nie tylko w próżni):

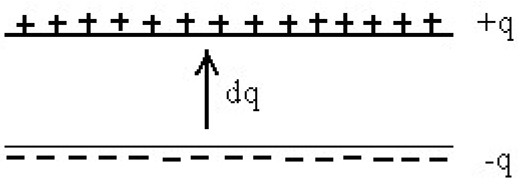
$$\oint \mathbf{D} \bullet d\mathbf{S} = q \tag{68}$$

Wektor indukcji elektrycznej **D** ma taką własność, że nie zmienia się przy przejściu od próżni do dielektryka. Jego wartość zależy tylko od ładunków swobodnych (q), np. zgromadzonych na okładkach kondensatora, a nie zależy od ładunków indukowanych w dielektryku (q'). Tej zalety nie ma wektor natężenia pola elektrycznego **E**, gdyż jak widzieliśmy, gdy wchodzi ono do dielektryka jego wartość maleje ($E=E_0/\varepsilon$). Natomiast $D=\varepsilon_0\varepsilon E= \varepsilon_0 E_0$ reprezentuje wyłącznie wartość pola elektrycznego w próżni (w dobrym przybliżeniu również w powietrzu) i pochodzącego tylko od ładunków swobodnych q.

Energia pola elektrycznego

Rozważmy pracę ładowania kondensatora. Elementarna praca, jaką trzeba wykonać, aby przenieść ładunek dq z jednej okładki na drugą wynosi (w danej chwili na okładkach jest już ładunek q, a między okładkami różnica potencjałów $\Delta V=U$):

$$dW = Udq = \frac{q}{C}dq$$



Całkowita praca naładowania kondensatora do ładunku Q wyniesie:

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2C}Q^2$$

Praca ta jest równa energii, E_{pe}, powstałego w kondensatorze pola elektrycznego (inaczej mówiąc też jest to praca rozdzielenia ładunków):

$$E_{pe} = W = \frac{Q^2}{2C} \qquad (69)$$

lub też równoważnie:

$$E_{pe} = \frac{U^2C^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2 \qquad (70)$$

Wygodną charakterystyką pola elektrycznego jest jego gęstość energii, *u*, czyli energia przypadająca na jednostkową objętość. W przypadku kondensatora płaskiego, objętość między okładkami v=Sd i gęstość energii pola elektrycznego wyniesie:

$$u = \frac{E_{pe}}{v} = \frac{E_{pe}}{Sd} = \frac{\frac{1}{2}CU^2}{Sd}$$

Podstawiając do powyższego równania pojemność kondensatora płaskiego :

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

otrzymamy :

$$u = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{Sdd} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}E^2$$

gdzie podstawiliśmy: U = d E (gdzie E oznacza natężenie pola elektrycznego). Ostatecznie :

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 \tag{71}$$

Używając wektora indukcji elektrycznej (**D**=$\varepsilon_0\varepsilon$**E**), gęstość energii możemy też zapisać jako:

$$u = \frac{1}{2}ED \tag{72}$$

lub jeszcze ogólniej:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\mathbf{E} \bullet \mathbf{D}} \tag{74}$$

Podsumujmy: jeżeli w jakimś punkcie przestrzeni istnieje pole elektryczne, to zmagazynowana jest w nim energia o gęstości podanej w powyższym równaniu.