

Rys. 5. Dipol w jednorodnym polu elektrycznym

Wypadkowa siła działająca na dipol jest równa zero. Natomiast istnieje niezerowy moment obracający dipol wokół osi prostopadłej zarówno do wektora  $\mathbf{E}$  jak i  $\mathbf{p}$ , czyli do płaszczyzny powyższego rysunku. Wspomniany moment sił wynosi:  $\tau = 2Fa \sin \theta$  czyli

$$\tau = 2aqE \sin \theta = pE \sin \theta$$

Wynik ten możemy zapisać ogólniej:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (5)$$

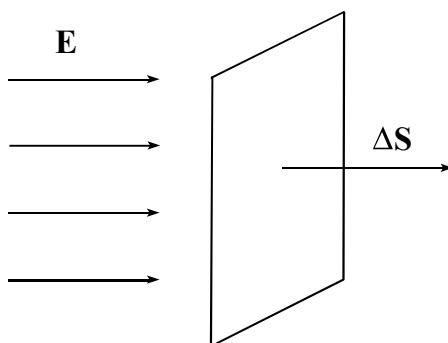
pamiętając, że wektor momentu dipolowego wynosi:  $\mathbf{p} = 2qa$ .

### III. Prawo Gaussa

Zdefiniujmy strumień pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ , przechodzącego przez pomyślaną płaską powierzchnię  $\Delta \mathbf{S}$  (wektor  $\Delta \mathbf{S}$  jest prostopadły do powierzchni, zaś jego długość równa jest polu tej powierzchni), jako:

$$\Delta \Phi = \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S} \quad (6)$$

Jest on równy iloczynowi skalarnemu natężenia pola i wektora  $\Delta \mathbf{S}$ .



Rys. 6. Strumień pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ , przechodzący przez powierzchnię  $\Delta \mathbf{S}$ .

Jeśli rozpatrywana powierzchnia nie jest płaska, to musimy ją rozbić na bardzo małe elementy, z których każdy już jest w przybliżeniu płaski. Elementarny strumień  $\Delta\Phi_i$  przechodzący przez kawałek powierzchni  $\Delta S_i$  wynosi:

$$\Delta\Phi_i = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}_i \quad (7)$$

Całkowity strumień, przechodzący przez powierzchnię S otrzymamy przez zsumowanie strumieni elementarnych:

$$\Phi = \sum_i \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{S}_i \quad (8)$$

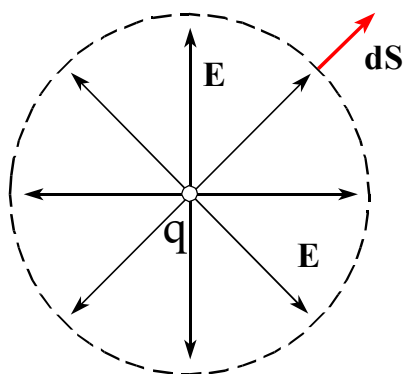
W granicznym przypadku, gdy rozbijemy powierzchnię na nieskończenie wiele elementów (każdy nieskończenie mały), całkowity strumień wyliczamy jako całkę z pola  $\mathbf{E}$ , przechodzącego przez powierzchnię S:

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (9)$$

*Przykład: Strumień pola od ładunku punkowego przechodzący przez kulę (ładunek znajduje się w środku kuli).*

Obliczmy strumień pola elektrycznego, który przepływa przez sferyczną powierzchnię otaczającą ładunek elektryczny  $q$ . Ponieważ pole od ładunku punkowego jest centralne, więc w każdym punkcie sfery wektor  $\mathbf{E}$  jest do niej prostopadły i Rów. 9 przyjmie postać:

$$\Phi = \int E(r) dS = E(r) \int dS = E(r) \cdot 4\pi r^2 \quad (10)$$



*Rys. 7. Strumień pola elektrycznego od ładunku punkowego przechodzący przez powierzchnię sferyczną*

Wartość natężenia pola elektrycznego na powierzchni sfery o promieniu  $r$  wynosi:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Podstawiając to natężenie do Równ. 10 otrzymujemy:

$$\Phi = 4\pi E(r) r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

lub:

$\epsilon_0 \Phi = q$	(11)
-----------------------	------

Wykazuje się, że powyższy rezultat jest prawdziwy w każdym przypadku, tzn. dla zamkniętej powierzchni o dowolnym kształcie i dla dowolnego rozkładu ładunku wewnątrz niej. Wyraża je prawo Gaussa.

### ***Prawo Gaussa:***

Określa ono związek między strumieniem pola elektrycznego  $\Phi_E$  przechodzącym przez dowolną powierzchnię zamkniętą (powierzchnię Gaussa), a ładunkiem  $q$  zamkniętym wewnątrz niej:

$$\epsilon_0 \Phi_E = q \quad \text{lub} \quad \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (12)$$

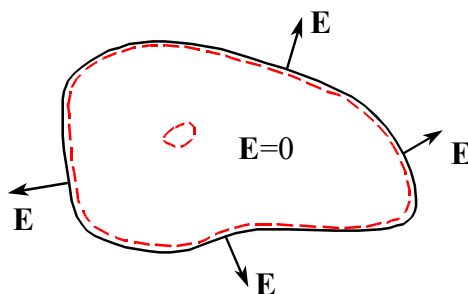
Symbol  $\oint d\mathbf{S}$  w powyższym równaniu oznacza całkę po powierzchni zamkniętej.

### Zastosowania prawa Gaussa

#### *Przykład 1: Rozkład ładunku nadmiarowego w przewodniku izolowanym*

Nadmiarowy ładunek umieszczony na izolowanym przewodniku rozmieszcza się w całości na jego zewnętrznej powierzchni. Poniższy rysunek przedstawia przekrój przez izolowany metaliczny i lity przewodnik o dowolnym kształcie. Znajduje się na nim całkowity ładunek nadmiarowy  $q$ . Zauważmy, iż swobodne ładunki nadmiarowe (tego samego znaku), odpychając się wzajemnie rozmieszczają się maksymalnie daleko od siebie, czyli na powierzchni metali. Ponadto zauważmy, że wewnątrz przewodnika w każdym punkcie musi być  $\mathbf{E}=0$ , gdyż w przeciwnym wypadku wystąpiłby ruch elektronów swobodnych, które zawsze są obecne w przewodniku, a rozpatrujemy przecież sytuację równowagi statycznej. Ponieważ wszędzie wewnątrz przewodnika  $\mathbf{E}=0$ , więc strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą wynosi zero, a zatem zgodnie z prawem Gaussa wewnątrz niej nie ma ładunków.

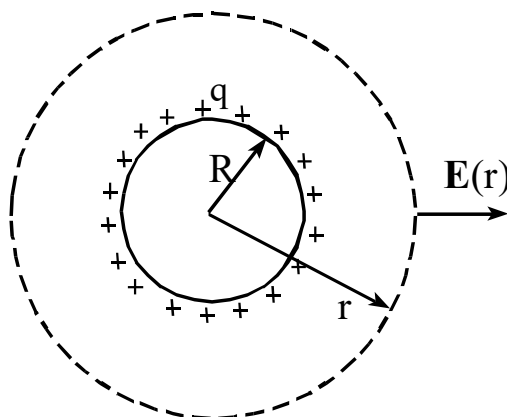
W stanie równowagi statycznej ładunek może być tylko na powierzchni przewodnika, zaś pole  $\mathbf{E} \neq 0$  na powierzchni może być tylko prostopadłe do powierzchni (w ten sposób ładunek nie przemieszcza się wzdłuż powierzchni).



Rys. 8. Ładunek i niezerowe pole elektryczne  $\mathbf{E}$  występują tylko na powierzchni przewodnika. Wewnątrz przewodnika nie ma ładunków swobodnych i pole  $\mathbf{E}=0$ . Linia przerywana zaznaczono powierzchnie Gaussa.

*Przykład 2: Pole na zewnątrz naładowanej kuli*

Rozważmy metalową kulę o promieniu  $R$ , na której znajduje się dodatni ładunek  $q$ . Wiemy już, że ładunek zgromadzi się tylko na jej powierzchni.



Rys.9. Obliczenie natężenia pola  $E$  w odległości od środka naładowanej kuli.

Szukamy natężenia pola  $E(r)$  w odległości  $r$  od środka naładowanej kuli. Przez sferyczną powierzchnię Gaussa o promieniu  $r$  przechodzi strumień:  $4\pi r^2 E(r)$ , a zatem zgodnie z prawem Gaussa:

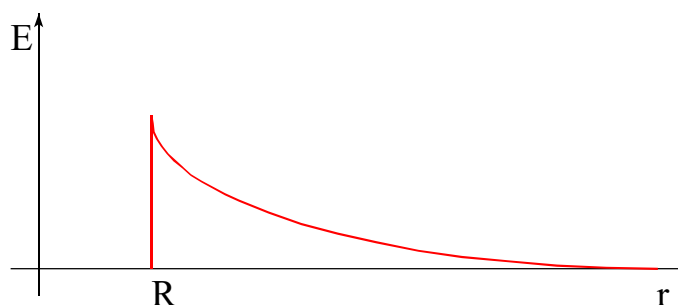
$$\epsilon_0 4\pi r^2 E(r) = q \quad (13)$$

skąd znajdujemy:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (14)$$

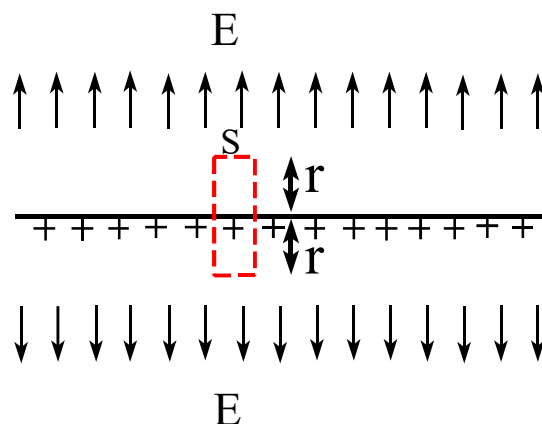
Czyli pole na zewnątrz naładowanej kuli jest takie samo jak pole wytworzone przez ładunek punktowy  $q$ , umieszczony w geometrycznym środku kuli.

Z kolei kreśląc powierzchnię Gaussa wewnątrz naładowanej metalowej kuli, znajdziemy wszędzie  $E=0$  (gdyż wewnątrz każdej takiej sfery zamknięty ładunek niej ładunek wynosi zero). Przebieg znalezionego pola elektrycznego pokazano na Rys. 10.



Rys.10. Wykres zależność natężenia pola od odległości od środka naładowanej kuli metalowej.

*Przykład 3. Pole elektryczne utworzone przez nieskończoną, naładowaną jednorodnie płaszczyznę*



*Rys. 11. Obliczenie pola elektrycznego od nieskończonej, jednorodnie naładowanej płaszczyzny*

Jako powierzchnię Gaussa stosujemy teraz walec o polu powierzchni podstawy  $S$  i wysokości  $2r$ , umieszczony prostopadłe do płaszczyzny (Rys.11). Wewnątrz walca znajduje się powierzchnia  $S$  naładowanej płaszczyzny, na której jest ładunek:  $q = \sigma S$  ( $\sigma$  jest gęstością powierzchniową ładunku). Pole  $E$  wytwarzane przez naładowaną płaszczyznę musi być do niej prostopadłe (ze względu na symetrię rozkładu ładunku). W efekcie strumień pola przechodzi tylko przez obie podstawy walca. Zgodnie z prawem Gaussa:

$$\epsilon_0 [E(r)S + E(r)S] = \sigma S \quad \text{lub} \quad 2\epsilon_0 E(r) = \sigma$$

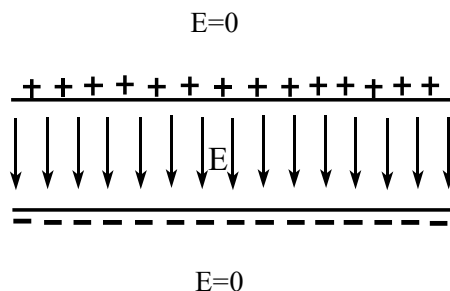
Ostatecznie znajdujemy:

$$E(r) = E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (15)$$

Pole elektryczne wytwarzane przez nieskończoną, naładowaną płaszczyznę jest do niej prostopadłe i ma stałą wartość w każdym punkcie przestrzeni.

*Przykład 4. Pole elektryczne wewnątrz kondensatora płaskiego*

Płaski kondensator składa się z dwóch metalicznych okładek, umieszczonych blisko siebie. Okładki te naładowane są przeciwnym ładunkiem, o stałej gęstości. Z dobrym przybliżeniem, pole elektryczne wytwarzane przez kondensator możemy obliczyć, jako pochodzące od dwóch jednorodnie naładowanych, nieskończonych płaszczyzn. Wynik taki będzie słuszny z dala od brzegów kondensatora.



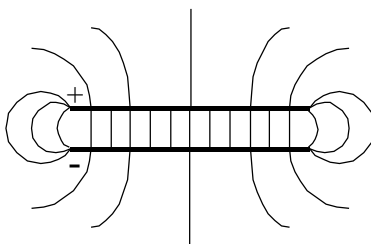
Rys. 12. Pole elektryczne w idealnym (nieskończonym) kondensatorze

Zauważmy, że pole wytwarzane przez dwie naładowane okładki jest sumą pól wytwarzanych przez każdą z nich oddzielnie (zasad superpozycji). A zatem natężenie pola elektrycznego pomiędzy okładkami będzie dwa razy większe niż natężenie wytwarzane przez jedną naładowaną płaszczyznę. Natomiast poza okładkami – natężenia wytwarzane przez obie okładki zniosą się. Tak więc, natężenie pola między okładkami jest prostopadłe do powierzchni okładek i skierowane od ładunków dodatnich do ujemnych i wynosi:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (16)$$

zaś poza okładkami:  $E=0$ .

Dla porównania poniżej pokazano przebieg linii pola w rzeczywistym (a zatem skończonym) kondensatorze:



Rys. 12a. Linie pola elektrycznego w kondensatorze rzeczywistym (o skończonych rozmiarach).

#### **IV. Potencjał elektryczny**

Pole elektryczne można opisywać nie tylko za pomocą wektora natężenia pola elektrycznego  $E$ , lecz także za pomocą potencjału  $V$ . Jak zobaczymy, wielkości te są ściśle ze sobą powiązane.

Potencjał  $V_A$  pola elektrycznego punkcie  $A$  definiujemy identycznie jak w przypadku pola grawitacyjnego:

$$V_A = \frac{-W_{\infty A}}{q_0} \quad (17)$$

gdzie  $W_{\infty A}$  jest pracą, którą wykonują siły pola elektrycznego przesuując ładunek jednostkowy od nieskończoności do tego punktu.

Zauważmy, iż w definicji tej zawarliśmy konwencję, że potencjał w nieskończoności wynosi zero: