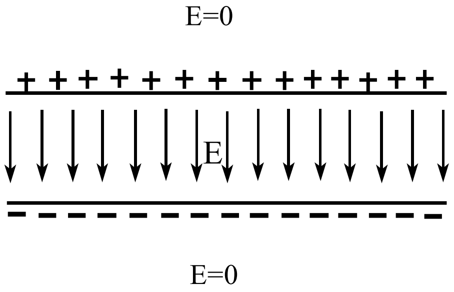


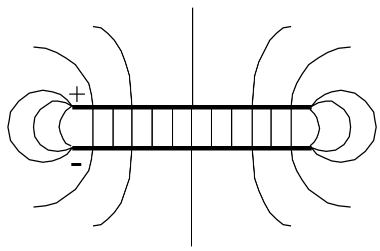
Rys. 12. Pole elektryczne w idealnym (nieskończonym) kondensatorze

Zauważmy, że pole wytwarzane przez dwie naładowane okładki jest sumą pól wytwarzanych prze każdą a nich oddzielnie (zasad superpozycji). A zatem natężenie pola elektrycznego pomiędzy okładkami będzie dwa razy większe niż natężenie wytwarzane przez jedną naładowaną płaszczyznę. Natomiast poza okładkami – natężenia wytwarzane prze obie okładki zniosą się. Tak więc, natężenie pola między okładkami jest prostopadłe do powierzchni okładek i skierowane od ładunków dodatnich do ujemnych i wynosi:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (16)$$

zaś poza okładkami: E=0.

Dla porównania poniżej pokazano przebieg linii pola w rzeczywistym (a zatem skończonym) kondensatorze:



Rys. 12a. Linie pola elektrycznego w kondensatorze rzeczywistym (o skończonych rozmiarach).

IV. Potencjał elektryczny

Pole elektryczne można opisywać nie tylko za pomocą wektora natężenia pola elektrycznego **E**, lecz także za pomocą potencjału V. Jak zobaczymy, wielkości te są ściśle ze sobą powiązane.
Potencjał V_A pola elektrycznego punkcie A definiujemy identycznie jak w przypadku pola grawitacyjnego:

$$V_A = \frac{-W_{\infty A}}{q_0} \qquad (17)$$

gdzie $W_{\infty A}$ jest pracą, którą wykonują siły pola elektrycznego przesuwając ładunek jednostkowy od nieskończoności do tego punktu.

Zauważmy, iż w definicji tej zawarliśmy konwencję, że potencjał w nieskończoności wynosi zero:

$$V(\infty) = 0 \qquad (18)$$

Zapiszmy ponownie definicję potencjału prościej, opuszczając indeksy *A i* ∞:

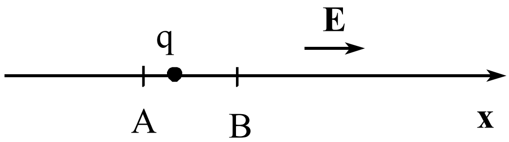
$$V = \frac{-W}{q_0} \qquad (19)$$

czyli:

Potencjał elektryczny w danym punkcie jest pracą (ze znakiem minus), jaką wykonuje pole przenosząc ładunek jednostkowy z nieskończoności do danego punktu.

Rozważmy teraz stałe pole elektryczne **E** (skierowane wzdłuż osi **x**), które przemieszcza dowolny ładunek q od punktu A do B, wzdłuż osi **x**. Wykonuje ono pracę:

$$W_{AB} = F\, x_{AB} = Eq\, x_{AB} \qquad (20)$$



Wykonana przez pole elektryczne praca W_{AB} wiąże się różnicą potencjałów $\Delta V = V_B - V_A$, zgodnie z relacją:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{W_{AB}}{q} \qquad (21)$$

Czyli: różnica potencjałów między dwoma punktami równa jest wziętej z przeciwnym znakiem pracy wykonanej przez siłę elektrostatyczną przy przemieszczeniu jednostkowego ładunku od pierwszego punktu do drugiego.

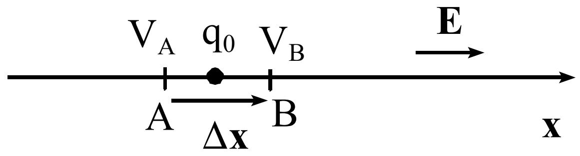
Wyliczenie potencjału V znając rozkład natężenia pola elektrycznego **E**

Rozważmy ponownie przemieszczenie jednostkowego dodatniego ładunku próbnego q_0 od punktu A do B (przemieszczenie Δ**x**) przez stałe pole **E** *skierowane wzdłuż osi x*. Praca wykonana przez pole elektryczne:

$$W_{AB} = F\, \Delta x = q_0\, E\, \Delta x \qquad (22)$$

W ogólniejszym przypadku, gdy pole **E** nie jest równoległe do przemieszczenia, pracę tą wyrazimy:

$$W_{AB} = \mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{x} = q_0 \mathbf{E} \bullet \Delta\mathbf{x} \qquad (23)$$



Zgodnie z Równ. 21:

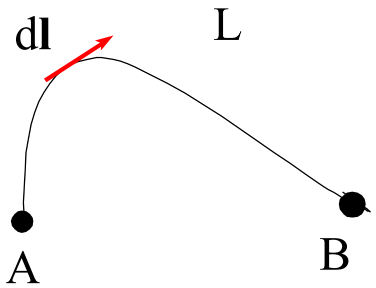
$$V_B - V_A = -\frac{W_{AB}}{q_o} \tag{24}$$

Podstawiając do powyższego związku pracę W_{AB} z Równ.23, otrzymamy:

$$\boxed{V_B - V_A = -\mathbf{E} \bullet \Delta \mathbf{x}} \tag{25}$$

czyli różnica potencjału (pomiędzy punktem końcowym i początkowym) równa się wziętemu z przeciwnym znakiem iloczynowi skalarnemu wektorów przemieszczenia i natężenia pola elektrycznego.

Rozważmy teraz przypadek bardziej ogólny, mianowicie, gdy pole jest niejednorodne i ładunek porusza się po zakrzywionym torze L:



Zgodnie z Równ.23, elementarna praca dW wykonana przez pole przy przesunięciu ładunku na drodze **dl** wynosi:

$$dW = q_0 \mathbf{E} \bullet \mathbf{dl} \tag{26}$$

Natomiast całkowita praca pola przy przesunięciu ładunku po torze L między punktami A i B wynosi:

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \bullet \mathbf{dl} \tag{27}$$

(całka $\int_A^B \mathbf{dl}$ oznacza całkę po trajektorii od punktu A do punktu B). Zauważmy, że w polu zachowawczym (pole elektryczne, grawitacyjne) praca wykonana przez pole zależy tylko od położenia punktu początkowego i końcowego, nie zależy natomiast od drogi, po której nastąpiło przemieszczenie. Podstawiając Równ. 24, znajdujemy różnicę potencjałów między punktami A i B

$$V_B - V_A = -\frac{W_{AB}}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E} \bullet \mathbf{dl} \tag{28}$$

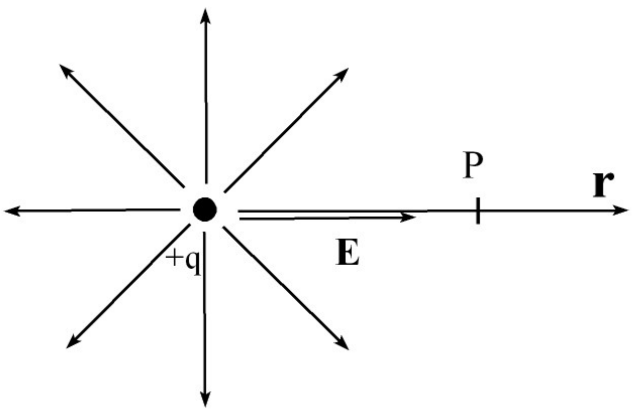
Jeśli założymy teraz, że ładunek q_0 został przemieszczony z punktu początkowego A o potencjale zerowym, który zgodnie z konwencją jest w nieskończoności (A=∞ oraz $V_\infty=0$), to otrzymamy:

$$V_B = -\int_{\infty}^{B} \mathbf{E} \bullet \mathbf{dl} \qquad (29)$$

Podsumujmy ten wynik: potencjał pola elektrycznego w danym punkcie jest równy (minus) całce krzywoliniowej (wzdłuż toru cząstki) z **E**· **dl** od nieskończoności do tego punktu. Albo inaczej: potencjał w danym punkcie równy jest pracy (ze znakiem przeciwnym) wykonanej przez pole przy przesunięciu dodatniego ładunku jednostkowego z nieskończoności do tego punktu.

<u>Przykład:</u> potencjał od ładunku punktowego

Pole elektryczne wytwarzane przez ładunek punktowy ma charakter centralny.



Rys.13. Pole pochodzące od ładunku punktowego

Wyliczmy potencjał tego pola w dowolnym punkcie P (por. Równ. 29). Dla uproszczenia załóżmy, że ładunek przemieszczany jest od nieskończoności do punktu P (o współrzędnej r_P) równolegle do osi **r** :

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dr} = \int_{P}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dr} = \int_{P}^{\infty} E(r)dr \qquad (30)$$

przy czym mogliśmy opuścić iloczyn skalarny, gdyż **E** || **r**. Podstawiając do tego równania, natężenie pola elektrycznego:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

otrzymujemy:

$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[-\frac{1}{r}]_{r_P}^{\infty} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_P} \qquad (31)$$

Opuszczając wskaźnik P, uzyskujemy ogólny wynik na wartość potencjału pola elektrycznego w odległości r od ładunku punktowego q:

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \tag{32}$$

Zauważmy, że q posiada znak; dla ładunku ujemnego V(r) < 0.
W sytuacji, jeśli pole elektryczne wytwarzane jest przez układ ładunków punktowych to, zgodnie z zasadą superpozycji:

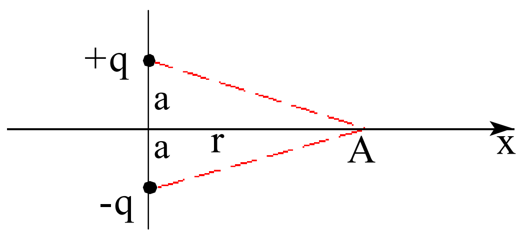
$$V = \sum_n V_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_n \frac{q_n}{r_n} \tag{33}$$

gdzie r_n jest odległością od do ładunku q_n do punktu, w którym wyliczamy potencjał.
Jeśli natomiast ładunki wytwarzające pole rozłożone są w sposób ciągły, to potencjał wyliczamy jako:

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \tag{34}$$

gdzie *r* jest odległością od ładunku elementarnego *dq* do rozważanego punktu, w którym wyliczamy potencjał.

Przykład : potencjał od dipola



Wyliczymy potencjał wytwarzany przez dipol elektryczny. Szukamy V(r), gdzie r jest odległością od dipola, mierzoną na jego osi symetrii (**x**). Zgodnie z zasadą superpozycji, potencjał V(r) w punkcie A, jest sumą potencjałów V_1 i V_2 wytwarzanych przez ładunki +q i –q:

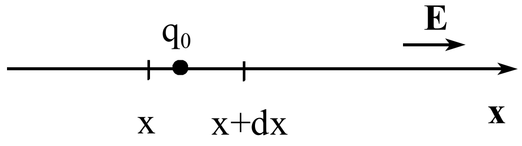
$$V(r) = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2}} - \frac{q}{\sqrt{r^2+a^2}}\right) = 0 \tag{35}$$

Wynik ten zgadza się z wcześniejszym przykładem dla dipola. Uzyskaliśmy wtedy wynik, że **E** liczone na osi x jest w każdym punkcie do niej prostopadłe, a zatem zgodnie z Równ.29:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E} \bullet d\mathbf{l} = 0 .$$

Wyliczenie pola **E** znając potencjał V

Załóżmy ponownie, że natężenie pola elektrycznego **E** jest skierowane wzdłuż osi x



Jednostkowy ładunek dodatni próbny q_0 przemieszczany jest przez pole **E** od punktu x do x+dx, wskutek różnicy potencjałówe ($V_x > V_{x+dx}$):

$$V_{x+dx} - V_x = -\frac{W_{x,x+dx}}{q_0} = -\frac{q_0 E dx}{q_0} = -Edx \tag{36}$$

Przyrost potencjału na odcinku dx wynosi:

$$dV = V_{x+dx} - V_x$$

Równ.36 możemy zatem zapisać:

$$dV = -Edx \tag{37}$$

Czyli wartość natężenia pola elektrycznego E wzdłuż osi x wynosi:

$$E = -\frac{dV}{dx} \tag{38}$$

Zauważmy, iż powyższy wynik obowiązuje w szczególnym przypadku, gdy: **E** || **x** lub też w przypadku ogólnym, gdy wyliczamy składową E_x pola elektrycznego:

$$\boxed{E_x = -\frac{dV}{dx}} \tag{39}$$

Jeśli mamy dowolny rozkład pola **E** (np. w przestrzeni), to analogicznie do wyniku na E_x otrzymujemy wyniki na E_y i E_z:

$$E_y = -\frac{dV}{dy} \qquad E_z = -\frac{dV}{dz} \tag{40}$$

Dowolne pole **E** odtwarzamy z jego składowych:

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}E_x + \mathbf{y}E_y + \mathbf{z}E_z \tag{41}$$

A zatem znając potencjał pola elektrycznego V(x,y,z), jego natężenie wyliczymy następująco:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{z}\right)} \tag{42}$$

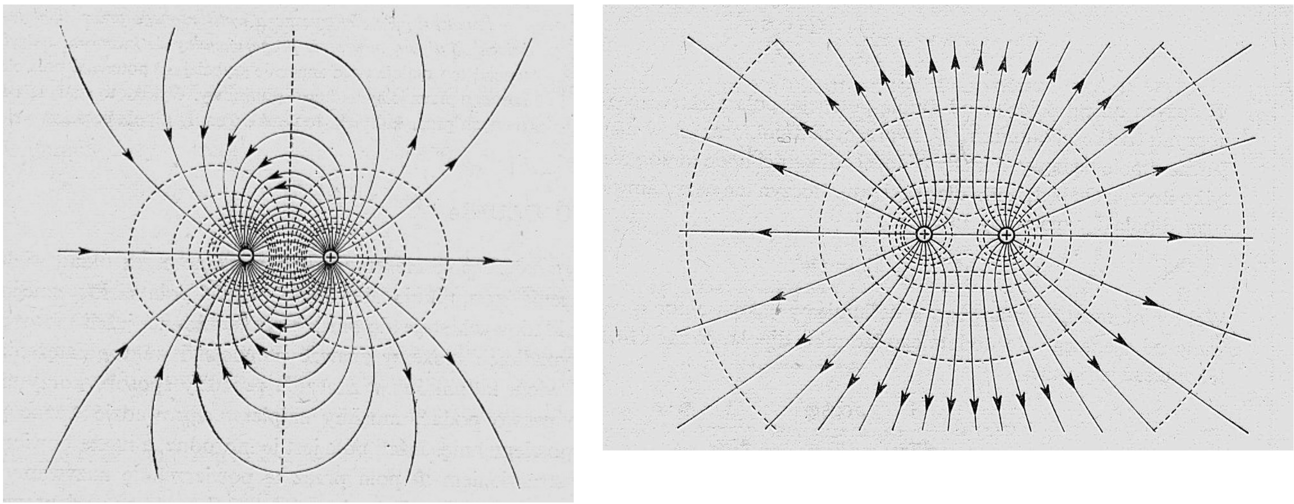
W powyższym równaniu użyliśmy pochodnych cząstkowych zamiast zwykłych, gdyż w ogólnym przypadku potencjał jest funkcją trzech współrzędnych: V=V(x,y,z). Równanie powyższe możemy zapisać prościej jako:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\,V \qquad (43)$$

gdzie operator gradientu (znany z matematyki), który funkcji skalarnej przyporządkowuje wektor, definiujemy jako:

$$\mathbf{grad}\ f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{z} \qquad (44)$$

Wykazuje się, że gradient **grad**V (a zatem i wektor natężenia pola elektrycznego **E**) jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej (powierzchnia stałego potencjału). Widać to na poniższym rysunku, na którym pokazano jednocześnie linie sił oraz linie stałego potencjału.



Rys.14. Pole pochodzące od dwóch ładunków punktowych

V. Kondensatory i dielektryki

Pojemność elektryczna

Pojemność elektryczną kondensatora definiujemy jako iloraz ładunku na jednej z okładek do różnicy potencjałów U=ΔV między okładkami:

$$C = \frac{q}{U} \qquad (45)$$

Przykład 1: Pojemność elektryczna kondensatora płaskiego

Kondensator posiada dwie okładki, o polu powierzchni S, naładowane przeciwnym ładunkiem ze stałą gęstością powierzchniową ładunku σ.