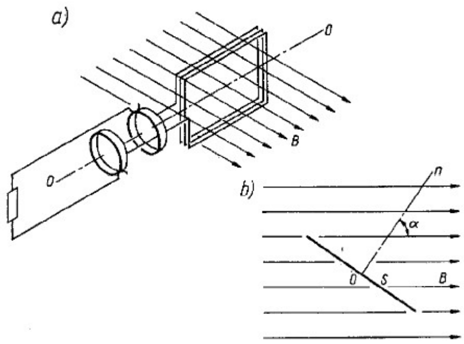


Rys. 36. Działanie prądnicy prądu zmiennego

Na prawie indukcji elektromagnetycznej Faraday'a oparte jest także działanie transformatora (Rys. 37). Służy on do zmiany amplitudy napięcia sinusoidalnie zmiennego. Pierwotne napięcie podpięte jest do cewki indukcyjnej posiadającej n_1 zwojów (uzwojenie *a*), zaś na wyjściu cewki wtórnej o n_2 zwojach odbierane jest napięcie wyjściowe (uzwojenie *b*). W celu bezstratnego prowadzenia strumienia magnetycznego, obie cewki nawinięte są wokół rdzenia żelaznego (prawa część rysunku), tworzącego zamknięty tor. Oczywiście:

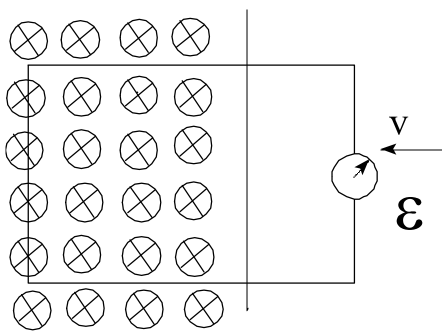
$$\frac{U_{2(m)}}{U_{1(m)}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Rys. 37. Zasada działania transformatora

Przykład 1: SEM indukowana w ramce poruszającej się prostopadle do pola magnetycznego z prędkością v.

Ten przykład rozważyliśmy już przed chwilą, wyprowadzając prawo Faraday'a. Otrzymaliśmy, że:

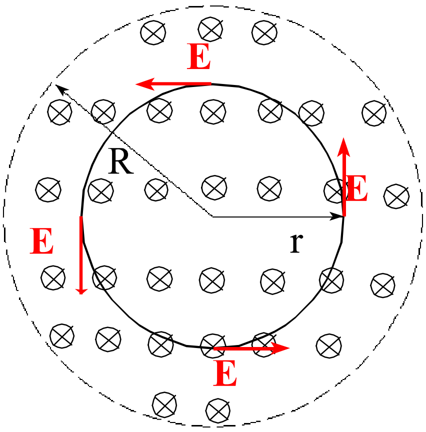
$$\varepsilon = Blv$$



Przykład 2 : Pole elektryczne indukowane w zmiennym polu magnetycznym

Tym razem rozważmy nieruchomy kołowy przewodnik (o promieniu r), umieszczony w płaszczyźnie prostopadłej do zmiennego pola **B**. Zmieniające się pole magnetyczne powoduje powstanie na całej długości kołowego przewodnika siły elektromotorycznej ε, która wytwarza wewnątrz przewodnika pole elektryczne **E**. Pamiętając, że siła elektromotoryczna (ε) jest różnicą potencjałów, zgodnie z Równ. 28, możemy napisać:

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \bullet \mathbf{dl} = E \cdot 2\pi r \tag{132}$$



*Rys. 38. Wirowe pole elektryczne powstające w zmiennym polu indukcji magnetycznej **B**.*

Z kolei, zgodnie z prawem Faraday'a:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Z dwóch powyższych równań otrzymujemy:

$$\varepsilon = \oint \mathbf{E} \bullet \mathbf{dl} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{133}$$

Zauważmy, że w przykładzie tym obecność kołowego przewodnika nie jest konieczna (użyliśmy go tylko dla łatwiejszego wyprowadzenia powyższej zależności). Wirowe pole elektryczne powstanie w zmiennym polu magnetycznym również w próżni.
W przykładzie niniejszym otrzymaliśmy przy okazji **ogólny zapis prawa Faraday'a**:

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \bullet \mathbf{dl} = -\frac{d\Phi_B}{dt}} \tag{134}$$

Indukcyjność

Jeśli przez cewkę przechodzi zmienny strumień pola magnetycznego, to według prawa Faraday'a w cewce tej powstaje indukowana SEM. Podobna sytuacja powstaje, gdy w cewce płynie prąd o zmiennym natężeniu; wytwarza on, bowiem zmienne pole magnetyczne, które z kolei generuje w cewce siłę elektromotoryczną:

$$\varepsilon = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} \tag{135}$$

wielkość $N\Phi_B$ jest wypadkowym strumieniem magnetycznym (przechodzi on przez wszystkie N zwojów cewki). Jest on oczywiście proporcjonalny do prądu płynącego przez cewkę:

$$N\Phi_B = Li \tag{136}$$

gdzie współczynnik proporcjonalności, L, jest *indukcyjnością* cewki. Jest to ważny parametr, występujący w opisie obwodów elektrycznych. Indukcyjność definiujemy, zatem jako:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \tag{137}$$

Podstawiając Równ. 136 do Równ. 135, otrzymujemy:

$$\varepsilon = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} = -L\frac{di}{dt} \tag{138}$$

Otrzymaliśmy ważną zależność, wiążącą prąd i napięcie (czyli indukowaną SEM) na cewce:

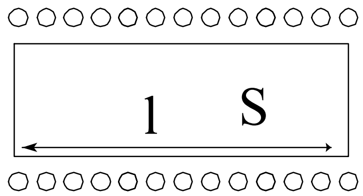
$$\boxed{\varepsilon = -L\frac{di}{dt}} \tag{139}$$

Znak minus w powyższym równaniu oznacza, że przy rosnącej wartości natężenia prądu, SEM jest skierowana przeciwnie do zwrotu prądu. Jednostką indukcyjności jest henr (H):

$$1\text{H} = \frac{\text{V}}{\text{A}/\text{s}} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

<u>Obliczanie indukcyjności</u>

Rozważmy ściśle nawiniętą cewkę indukcyjną:



Ma ona długość *l* oraz pole przekroju poprzecznego *S*. Jej wypadkowy strumień magnetyczny wynosi:

$$N\Phi_B = nlBS$$

gdzie podstawiliśmy: N=nl (*n* jest gęstością nawinięcia zwojów). Indukcja magnetyczna wewnątrz cewki, przez którą płynie prąd o natężeniu i_0 wynosi (por. Równ. 124):

$$B = \mu_0 i_0 n$$

Z dwóch ostatnich równań otrzymujemy:

$$N\Phi_B = \mu_0 n^2 l i_0 S$$

Zatem zgodnie z Równ. 137, indukcyjność cewki wynosi :

$$L = \frac{N\Phi_B}{i_0} = \mu_0 n^2 lS = \mu_0 n^2 v$$

gdzie v = lS jest objętością cewki. Ostatecznie:

$$L = \mu_0 n^2 v \tag{140}$$

Indukcyjność cewki jest proporcjonalna do jej objętości oraz kwadratu gęstości nawinięcia zwojów.
Podobnie jak wprowadzenie dielektryka między okładki kondensatora zwiększało jego pojemność elektryczną, tak też wprowadzenie rdzenia (np. z materiału ferromagnetycznego) powiększa indukcyjność cewki:

$$L' = \mu L \tag{141}$$

gdzie μ jest tzw. magnetyczną przenikalnością względną danego materiału. Dzieje się tak, ponieważ w rdzeniu wypadkowa indukcja magnetyczna (B) jest powiększona μ razy w porównaniu z jej wartością w próżni (B_0):

$$B = \mu B_0 \tag{142}$$

Gęstość energii pola magnetycznego

Widzieliśmy, że pole elektryczne posiada energię o gęstości: $u_E \sim E^2$, a dokładniej:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon E^2$$

W polu magnetycznym także zgromadzona jest energia. Wykażemy za chwilę, że jej gęstość jest proporcjonalna do B^2 i wynosi ona:

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \tag{143}$$

Wyprowadzenie wyrażenia na gęstość energii pola magnetycznego

Rozważmy energię elektryczną (E_B), związaną ze wzbudzeniem w cewce prądu i w konsekwencji – z wytworzeniem pola magnetycznego **B**. W tym celu scałkujmy po czasie moc prądu elektrycznego (P):

$$E_B = \int P dt = \int \varepsilon i dt = L\int i \frac{di}{dt} dt = L\int_0^{i'} i di = \frac{1}{2} L i^2$$

gdzie ε jest napięciem indukowanym na cewce i (zgodnie z Równ. 139 jego wartość wynosi: $\varepsilon = L\frac{di}{dt}$). A zatem na energię zgromadzoną w cewce otrzymaliśmy:

$$E_B = \frac{1}{2} L i^2 \tag{144}$$

Prąd płynący prze cewkę możemy wyrazić (Równ. 136):

$$i = \frac{N\Phi_B}{L} = \frac{NSB}{L} = \frac{nlSB}{L} = \frac{nBV}{L}$$

gdzie v = lS jest objętością cewki. Podstawiając ten rezultat do Równ. 144 i wyliczając gęstość energii pola magnetycznego ($u_B = E_B/V$), otrzymujemy:

$$u_B = \frac{E}{V} = \frac{Li^2}{2V} = \frac{Ln^2B^2V^2}{2L^2V} = \frac{n^2B^2v}{2L}$$

Lecz: $L = \mu_0 n^2 v$ (Równ. 140), więc:

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{n^2B^2v}{\mu_0 n^2 v} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Przepiszmy ten wynik:

$$\boxed{u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}} \qquad (145)$$

Czyli udowodniliśmy relację wyrażoną Równ. 143.

Przy okazji nadmieńmy, iż oprócz wektora indukcji magnetycznej (**B**), używa się także wektora natężenia pola magnetycznego:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \qquad (146)$$

Nasz wynik na gęstość energii pola magnetycznego można, zatem zapisać:

$$\boxed{u_B = \frac{1}{2}\mathbf{B} \bullet \mathbf{H}} \qquad (147)$$

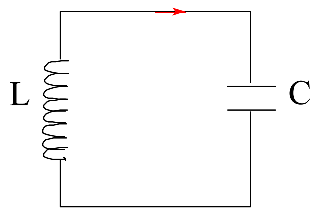
W ten sposób uzyskaliśmy zapis w formie analogicznej, jak w przypadku pola elektrycznego ($u_E = \frac{1}{2}\mathbf{E} \bullet \mathbf{D}$).

VI. Drgania elektromagnetyczne

Widzieliśmy poprzednio, że w kondensatorze zgromadzona jest energia pola elektrycznego, zaś w cewce indukcyjnej – energia pola magnetycznego. Energie te wynoszą:

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \qquad \text{oraz} \qquad U_B = \frac{1}{2}Li^2 \qquad (148)$$

Rozważmy obwód zawierający tylko kondensator i cewkę (obwód LC), w którym kondensator był początkowo naładowany (obwód nasz nie zawiera źródła siły elektromotorycznej). Oczywiście kondensator będzie się rozładowywał, wywołując przepływ prądu. Z kolei, płynący prąd będzie wytwarzał pole magnetyczne w cewce i związaną z nim energię.



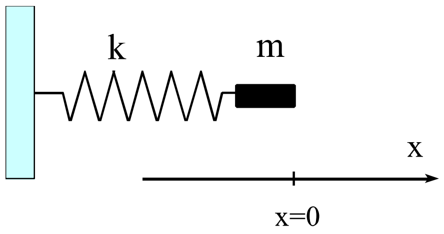
W obwodzie LC będzie następowało będzie, zatem cykliczne „przelewanie” energii pola elektrycznego w energię pola magnetycznego, i na odwrót. Napiszmy równanie tego obwodu:

$$L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}q=0 \qquad (149)$$

lub pamiętając, że: $i=\frac{dq}{dt}$, otrzymamy:

$$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}q=0 \qquad (150)}$$

Jest to równanie obwodu LC. Ma ono dokładnie taką samą postać matematyczną jak równanie drgającej masy na sprężynie:



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \qquad \text{lub} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \qquad (151)$$

gdzie: $\omega^2=k/m$. Jak pamiętamy, rozwiązaniem tego równania jest:

$$x=x_m\cos(\omega t+\varphi) \qquad (152)$$

Z podobieństwa matematycznego równań dla oscylatora mechanicznego i dla obwodu LC (Równ. 150 i 151), wynika, że rozwiązanie Równ. 150 ma postać:

$$\boxed{q=q_m\cos(\omega t+\varphi) \qquad (153)}$$

Jest to zależność na ładunek elektryczny zgromadzony na kondensatorze. Natomiast zależność od czasu prądu elektrycznego jest następująca:

$$i=\frac{dq}{dt}=-q_m\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

czyli:

$$\boxed{i=i_m\sin(\omega t+\Phi) \qquad (154)}$$

gdzie $\Phi=\pi+\varphi$.
Widzimy, zatem, że zarówno ładunek na kondensatorze jak i prąd w obwodzie zmieniają się okresowo, zgodnie z funkcją sinus lub cosinus.
Podstawmy rozwiązanie na ładunek (Równ. 153) do Równ. 150. Po wyliczeniu drugiej pochodnej ładunku po czasie:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -q_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

otrzymujemy:

$$-Lq_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C}q_m\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

a stąd:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \qquad (155)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób częstość drgań własnych obwodu LC. (Jest ona odpowiednikiem częstości drgań własnych oscylatora mechanicznego: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$).

Jak wspomnieliśmy, w obwodzie LC energia elektryczna zamienia się na magnetyczną i na odwrót. Odbywa się to z okresem: $T = 2\pi / \omega = 2\pi\sqrt{LC}$. Możemy powiedzieć, że pole elektryczne **E** (w kondensatorze) i magnetyczne **B** (w cewce indukcyjnej) generują się nawzajem.

Obwód RLC z wymuszeniem

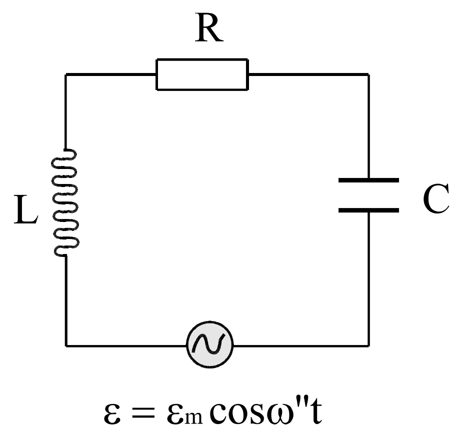
W praktyce nie możemy uzyskać idealnego obwodu LC, gdyż zawsze wystąpi jakiś opór R. Jest to pełna analogia do mechanicznego oscylatora harmonicznego z tłumieniem. Pamiętamy, że aby podtrzymać jego drgania, trzeba było zastosować siłę wymuszającą $(F = F_m \cos\omega t)$. Podobnie jest w obwodzie elektrycznym RLC. Chcąc zapewnić w nim drgania niegasnące musimy przyłożyć do niego siłę elektromotoryczną sinusoidalnie zmienną:

$$\boxed{\varepsilon(t) = \varepsilon_m \cos\omega'' t} \qquad (156)$$

gdzie ω'' jest częstością pulsacji podłączonego źródła napięcia.

Napiszmy równanie tego obwodu:

$$U_L + U_C + U_R = \varepsilon \qquad (157)$$



Rys. 39. Obwód RLC z wymuszeniem

lub bardziej szczegółowo: