Obliczanie obwodów elektrycznych

Obwody elektryczne mają strukturę zamkniętych konturów - zwanych *oczkami*. Natomiast miejsce, gdzie spotykają się co najmniej trzy przewody nazywamy *węzłem*.
Przy obliczaniu obwodów elektrycznych stosowane są dwa prawa Kirchoffa:

a) I prawo Kirchoffa:

W dowolnym węźle obwodu algebraiczna suma prądów musi być równa zero:

$$\sum_k i_k = 0 \tag{102}$$

b) II Prawo Kirchoffa:

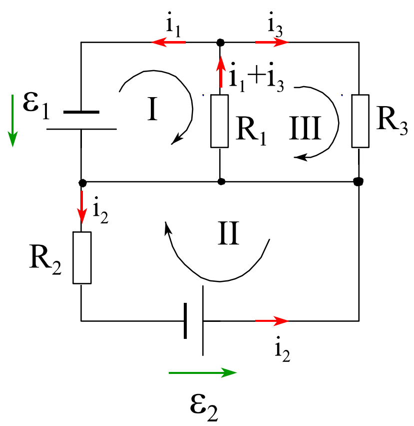
Suma napięć (zmian potencjału) napotykanych przy okrążeniu dowolnego zamkniętego konturu (oczka) jest równa zero:

$$\sum_k U_k + \sum_j \varepsilon_j = 0 \tag{103}$$

Bilans ten robimy dla każdego oczka; U_k oznaczają spadki potencjału na odbiornikach, zaś ε_j – siły elektromotoryczne występujące w obwodzie.

Przykład: obliczenie obwodu zawierającego trzy oczka

Oczka ponumerowaliśmy liczbami rzymskimi i zaznaczyliśmy umowne kierunki obiegu oczek. Pamiętajmy, że spadek napięcia na odbiorniku ma przeciwny zwrot niż prąd przez niego przepływający. Każdy spadek napięcia bierzemy ze znakiem plus, gdy jest zgodny z kierunkiem obiegu oczka, w przeciwnym razie bierzemy go ze znakiem minus.



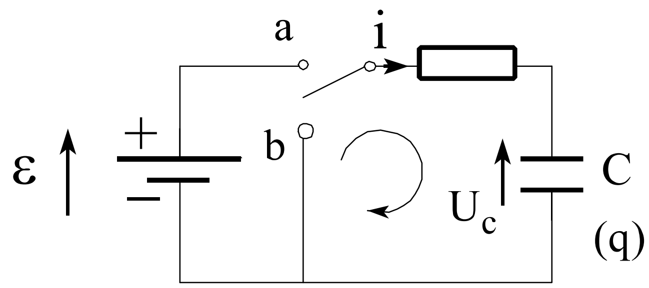
Zastosujmy prawa Kirchoffa do trzech oczek naszego obwodu :

$$\begin{cases} (i_3 + i_1)R_1 - \varepsilon_1 = 0 & \text{oczko I} \\ i_2 R_2 - \varepsilon_2 = 0 & \text{oczko II} \\ -i_3 R_3 - (i_1 + i_3)R_1 = 0 & \text{oczko III} \end{cases}$$

Mamy tu trzy równania oraz trzy niewiadome (i_1, i_2, i_3). Zakładamy, że wartości sił elektromotorycznych (ε_1, ε_2) oraz oporności (R_1, R_2, R_3) są dane. Rozwiązując powyższy układ równań znajdziemy poszukiwane wartości natężenia prądu.

Przykład przebiegu innego niż stałoprądowy - obwód RC

Do tej pory rozważaliśmy obwody elektryczne, w których elementami biernymi były tylko oporniki, a siły elektromotoryczne były stałe. W efekcie natężenia prądów były stałe, tzn., nie zmieniały się w czasie.
Jeśli do obwodu dołączymy kondensator, C, będziemy mieli do czynienia z prądem zmieniającymi się w czasie. Rozważmy poniższy obwód:



Rys.26. Obwód RC.

Załóżmy, że przełącznik znajduje się w położeniu *a*; na podstawie drugiego prawa Kirchoffa napiszemy:

$$\varepsilon - iR - U_C = 0$$

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0$$

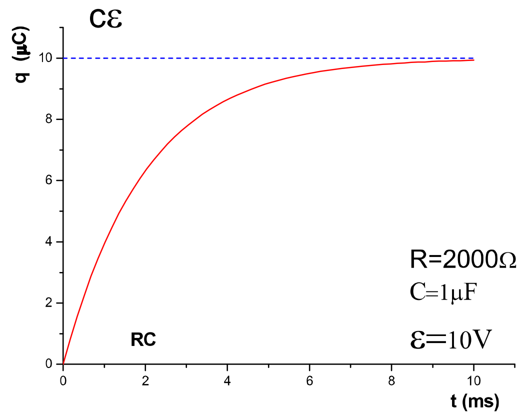
lecz: $i = \frac{dq}{dt}$, więc powyższe równanie przepiszemy następująco:

$$\varepsilon = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} \tag{104}$$

Powyższe równanie jest równaniem różniczkowym ze względu na q (zgromadzony na kondensatorze). Jego rozwiązaniem jest:

$$q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) \tag{105}$$

Zależność tę obrazuje poniższy wykres:

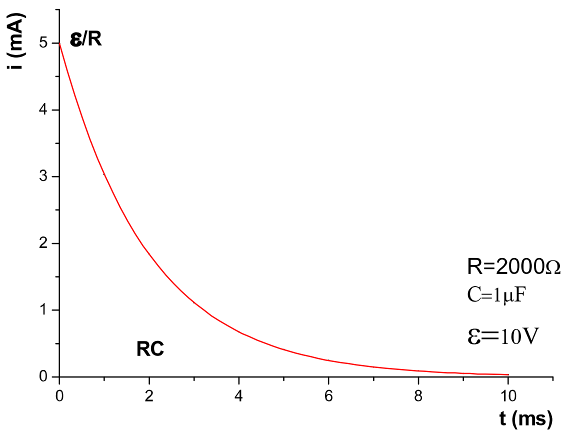


Rys. 27. *Wykres zmiany q w zależności od czasu t w procesie ładowania*

Widzimy, że ładunek na kondensatorze rośnie osiągając w końcu wartość q=Cε. Wiedząc, że natężenie prądu wyraża się wzorem: $i = \frac{dq}{dt}$, otrzymujemy zależność prądu płynącego w obwodzie od czasu:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \qquad (106)$$

Występujący w wykładniku czynnik *RC* nazywamy stałą czasową. W istocie, jest to czas, po którym ładunek na kondensatorze osiąga $(1 - e^{-1}) \cong 63\%$ wartości końcowej (q_0=Cε). Wykres natężenia prądu w funkcji czasu przedstawiono poniżej:



Rys. 28. Wykres natężenia prądu i w funkcji czasu t.

A zatem po włączeniu obwodu (przełącznik w położeniu „a”) i odczekaniu dostatecznie długiego czasu uzyskujemy stan równowagi: prąd ustaje, a kondensator jest całkowicie naładowany.
W powyższym stanie obwodu przesuńmy przełącznik do położenia b. Równanie obwodu przyjmuje teraz postać:

$$iR + \frac{q}{C} = 0 \qquad (107)$$

lub równoważnie:

$$\boxed{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad (108)}$$

Znów otrzymaliśmy równanie różniczkowe. Jego rozwiązanie ma postać:

$$q = q_0 e^{-t/RC} \qquad (109)$$

gdzie $q_0=C\varepsilon$ jest ładunkiem na kondensatorze w stanie pełnego naładowania (czyli w stanie ustalonym, gdy przełącznik był w pozycji *a*).

Wyliczając z powyższego natężenie prądu ($i = \frac{dq}{dt}$), otrzymujemy:

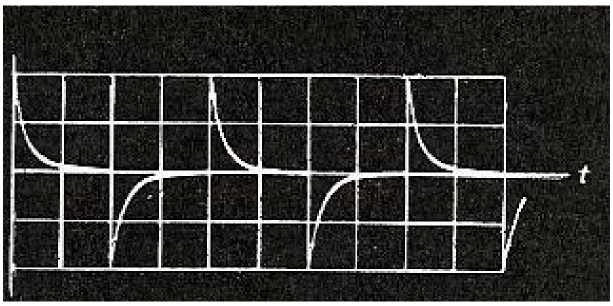
$$i = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} \qquad (110)$$

Zauważy, że teraz prąd ma przeciwny znak niż w poprzedniej sytuacji; jest to zrozumiałe, gdyż teraz odbywa się rozładowanie kondensatora. Uwzględniając, że $q_0=\varepsilon C$, wynik powyższy możemy przepisać:

$$\boxed{i = -\frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} \qquad (111)}$$

Wykres powyższej zależności jest lustrzanym odbiciem (względem osi czasu) krzywej z Rys. 25.

Poprawność uzyskanych rozwiązań możemy zaobserwować doświadczalnie na ekranie oscyloskopu, jeśli podamy na niego sygnał reprezentujący natężenie prądu i jeśli będziemy w omawianym obwodzie RC cyklicznie przestawiać przełącznik z położenia *a* na *b*. Wynik takiej obserwacji pokazano na poniższym rysunku. Zgadza się on z kształtem uzyskanych rozwiązań na natężenie prądu.



Rys. 29. Zmiany prądu przy cyklicznym przestawianiu przełącznika z położenia a do b (wynik zaczerpnięty z podręcznika D. Holliday, R.Resnick „Fizyka", PWN, tom 2, 1972)