

Podsumowanie równań opisujących pola elektryczne i magnetyczne

VII. RÓWNANIA MAXWELLA

Zbierzemy teraz i uogólnimy poznane już prawa dla próżni (lub w bardzo dobrym przybliżeniu dla powietrza):

1) **Prawo Gaussa dla elektryczności :**

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q \quad (173)$$

2) **Prawo Gaussa dla magnetyzmu :**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (174)$$

Prawo to wyraża fakt, że linie pola magnetycznego tworzą zawsze zamknięte kontury. Nie ma „ładunków” magnetyzmu, w takim sensie jak ładunki elektryczne. Pole magnetyczne jest wytwarzane przez obwody z prądem (makroskopowe lub mikroskopowe) oraz przez spinowe momenty magnetyczne cząstek elementarnych.

3) **Prawo indukcji elektromagnetycznej Faraday’a:**

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (175)$$

Jeśli na konturze całkowania w powyższym równaniu występują siły elektromotoryczne (ϵ_k), to trzeba je włączyć do bilansu zmiany potencjału:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt} + \sum_k \epsilon_k \quad (176)$$

4) **Prawo Ampère’a :**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k i_k \quad (177)$$

gdzie i_k są prądami przecinającymi zamknięty kontur całkowania. Porównując powyższe równanie z prawem Faraday’a, zauważymy pewne ich podobieństwo, a także brak jednego członu po prawej stronie. Kierując się wyjściowo tą intuicją, Maxwell rozszerzył prawo Ampère’a dodając człon z pochodną po strumieniu pola elektrycznego (Φ_E):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k i_k + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (178)$$

Ten dodatkowy człon opisuje doświadczalnie obserwowany efekt, że zmienne pole elektryczne wytwarza wirowe pole magnetyczne (uzasadnienie rozszerzenia powyższego równania podane jest w Dodatku, poniżej). Mamy tu pełną analogię z prawem Faraday’a

(zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne). Zauważmy, że prawa Ampère’a i Faraday’a (Równ. 177 i 178) wykazują formalne podobieństwo matematyczne lub inaczej – symetrię (z wyjątkiem znaku minus w Równ. 176).

Fale elektromagnetyczne

Zmienne pola elektryczne i magnetyczne generują się nawzajem. Jeśli zatem wytworzymy, np. zmienne pole magnetyczne, to w wyniku tego powstanie fala elektromagnetyczna. Równanie jej wyprowadza się oczywiście z równań Maxwella (czego tu nie będziemy robić). W fali elektromagnetycznej drganiom podlegają wektory **B** i **E**; fala ta nie wymaga ośrodka materialnego do swojej propagacji. Równanie różniczkowe fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w kierunku osi x opisuje zależność na amplitudy pola magnetycznego i elektrycznego::

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \quad (179)$$

oraz

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (180)$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni ($c=3 \cdot 10^8$ m/s).

Pola E i B są prostopadłe do siebie oraz do kierunku rozchodzenia się fali. Zauważmy, że powyższe równania mają analogiczną postać do poznanego przez nas wcześniej równania fali mechanicznej:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Rozwiązaniem Równ. 179 i 189 ma także postać analogiczną jak w przypadku fali mechanicznej:

$$\begin{aligned} B_z(x, t) &= B_{z(m)} \sin(kx - \omega t) \\ E_y(x, t) &= E_{y(m)} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (181)$$

Pomiędzy stałymi μ_0 i ϵ_0 zachodzi fundamentalny związek, który otrzymuje się przy wprowadzeniu równania na falę elektromagnetyczną; jest on następujący:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (182)$$

Ponadto otrzymuje się następująca zależność:

$$\frac{E_m}{B_m} = c \quad (182)$$

Interesującą wielkością charakteryzującą falę elektromagnetyczną jest wektor Poyntinga:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (183)$$

Wyraża on szybkość przepływu energii przez jednostkową powierzchnię dla płaskiej fali elektromagnetycznej.

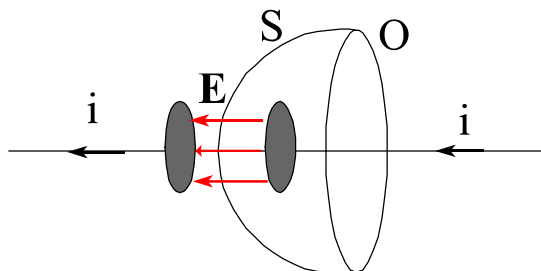
Częstotliwości ($f=\omega/2\pi$) poznanych fal elektromagnetycznych rozciąga się w bardzo szerokim zakresie: od 10^3 Hz (fale radiowe długie) do 10^{20} Hz (promieniowanie jądrowe gamma). Dodamy, że częstotliwości radiowe UKF oraz telewizyjne to 10^8 Hz, światło widzialne mieści się pomiędzy 10^{14} i 10^{15} Hz, zaś częstotliwości promieniowania rentgenowskiego są w zakresie 10^{17} - 10^{19} Hz.

DODATEK: Uzasadnienie rozszerzenia prawa Ampère'a

Rozważmy kondensator, na którego okładki wpływa prąd elektryczny i (czyli kondensator jest ładowany). Wokół przewodnika z prądem narysujmy okrąg O , przez który przechodzi przewodnik z prądem o natężeniu i . Prawo Ampère'a stwierdza, że:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad (180)$$

A teraz na tym samym okręgu O rozepnijmy wygiętą powierzchnię S , w ten sposób, że przechodzi na między okładkami kondensatora. Zauważmy, że powierzchnia ta nie przecina przewodnika z prądem, niemniej wartość całki po okręgu O jest niezmienną. Natomiast przez powierzchnię S przechodzi pole elektryczne.



Natężenie pola elektrycznego między okładkami kondensatora: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$, zaś jego strumień:

$$\Phi_E = ES = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Wyliczmy wielkość $\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi}{dt}$:

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \frac{dQ}{dt} = \mu_0 i$$

Wyrażenie to jest dokładnie równe prawej stronie Równ. 180. A zatem, gdy w prawie Ampère'a dodamy ten człon:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (181)$$

to rozszerzone równanie jest zawsze spełnione, niezależnie od tego jaki kształt ma powierzchnia rozpięta na konturze całkowania O . Oczywiście poszerzona postać prawa Ampère'a jest prawdziwa w dowolnej ogólnej sytuacji, a nie tylko w modelowym rozważaniu przedstawiony powyżej. Sens fizyczny tego rozszerzenia jest następujący:

Przewodniki z prądem oraz zmienne pola elektryczne wytwarzają wirowe pole magnetyczne.