赋范空间 (作业: 20230317) 与线性算子 (作业 20230425)

1. 加法: 集合 X, 数域 k, 加法 $+: X \times X \to X$, 满足:
   (a) 交换律: $x+y=y+x$;
   (b) 结合律: $(x+y)+z=x+(y+z)$;
   (c) 零元: $\exists \theta \in X, s.t.: \forall x \in X, x+\theta=x$, 则称 θ 为零元;
   (d) 逆元: $\forall x \in X, \exists x' \in X, s.t.: x+x'=\theta$, 则称 x' 为 x 的逆元, 记作 $-x$;
2. 数乘: 集合 X, 数域 K, 数乘 $\cdot : k \times X \to X, k \in K$, 满足:
   (a) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in X$;
   (b) $1x=x$;
   (c) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;
   (d) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
3. 线性空间: 定义了加法和数乘的空间 $(X, K, +, \cdot)$, $x \in X$ 称为向量 (矢量), $k \in K$ 称为标量. 线性空间以后默认装配数域, 加法, 数乘;
   (a) 线性空间的零元唯一;
   (b) 线性空间的逆元唯一;
   (c) $\forall x \in X, 0x=\theta$;
   (d) $-1 \cdot x=-x$;
   (e) $\alpha\theta=\theta$;
4. 常见线性空间:$(C[a,b], \mathbb{R}, +, \cdot)$, $(l^p, \mathbb{R}, +, \cdot)$;
5. 线性组合: 设 X 是线性空间, $x_1, x_2, ...x_n \in X$, 称 $a_1x_1+...+a_nx_n, a_n \in K$ 为 $x_1, x_2, ...x_n$ 的线性组合;
6. 子空间: 设 X 是线性空间, $M \subset X$, 称 M 中向量的所有线性组合构成的集合为 M 所张成的子空间, 记为 $\mathrm{span}M$;
   (a) $\mathrm{span}M$ 对加法和数乘封闭;

(b) 线性空间的子空间: 设 X 是线性空间, 子集 $Y \subset X$, 若 $\forall y_1, y_2 \in Y$, $\forall a_1, a_2 \in K$, 都有 $a_1y_1 + a_2y_2 \in Y$, 则 Y 本身也是线性空间, 称 Y 为 X 的一个子空间;

7. 线性无关: 设 X 是线性空间, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$, 若 $a_1x_1 + ... + a_nx_n = \theta$, 则一定有 $a_1 = ... = a_n = 0$, 称 $\{x_1, ..., x_n\}$ 线性无关;

   (a) 线性相关: 若存在不全为零的标量 $a_1, ..., a_n$, 使得 $a_1x_1 + ... + a_nx_n = \theta$, 则称 $\{x_1, ..., x_n\}$ 线性相关;

8. 维数: 设 X 是线性空间, 若 $\exists n > 0, n \in \mathbb{Z}^*$, 使得 X 中包含 n 个线性无关的向量, 并且任意 $n+1$ 个向量都线性相关, 则称线性空间 X 是有限维, $n = \dim X$ 为 X 的维数;

   (a) 无穷维: 若 X 不是有限维, 则称 X 是无穷维的;

9. 基: 若 $\dim X = n$, 则 X 中任意 n 个线性无关的向量称为空间的一个基;

   (a) 若 $\dim X = n$, $\{e_1, ..., e_n\}$ 是其中一个基, 则对任意 $x \in X$, 有 $x = a_1e_1 + ... + a_ne_n$, 且表达方式唯一;

10. 范数: 设 X 是线性空间, 映射 $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$, 同时满足下面条件时, 则称 $||\cdot||$ 为 X 上的范数;

   (a) 非负性: $||x|| \geq 0, ||\theta|| = 0$;

   (b) 正齐次性: $\forall a \in K, x \in X, ||ax|| = |a| \cdot ||x||$;

   (c) 三角不等式: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;

11. 赋范空间: 称定义了范数的线性空间 $(X, ||\cdot||)$ 为赋范空间, 赋范空间是以范数为度量的度量空间;

   (a) 巴拿赫空间 (完备赋范空间): 若赋范空间 $(X, ||\cdot||)$ 是完备的, 则称 X 其为巴拿赫空间;

      i. 常见巴拿赫空间: $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, $(l^p, ||\cdot||_p)$, $(C[a,b], ||\cdot||_{\max})$;

   (b) 设 X 是赋范空间, 子空间 $Y \subset X$, 则 $(Y, ||\cdot||)$ 也是赋范空间;

   (c) 闭子空间: 若 Y 是赋范空间 X 的子空间, 且 Y 是 X 中的闭集, 则称 Y 是 X 中的闭子空间;

i. 巴拿赫空间 $(X, ||\cdot||)$, 子空间 $Y \subset X$, 当且仅当 Y 是 X 中的闭集, $(Y, ||\cdot||)$ 是完备的;

(d) 极限收敛: 设 X 是赋范空间, 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 前 n 项和 $S_n = x_1 + ... + x_n \in X$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. 若存在 $S \in X$, 使得 $S_n \to S, n \to +\infty$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 记 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$;

(e) Schauder 基: 若赋范空间 X 中存在 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得对任意 $x \in X$, 存在唯一 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} ||\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i - x|| = 0$, 则称序列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的一个 Schauder 基, 记作 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i e_i = x$;

12. 赋范空间的完备化: 设 X 是赋范空间, 则存在一个巴拿赫空间 (完备的赋范空间)$\hat{X}$ 和稠密子空间 $W \subset \hat{X}$, 使得 X 与 W 是等距同构;

(a) $\mathbb{R}^1$ 上的一个定理: 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ 有界, 则其存在一个子列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x_{n_i} \to x \in \mathbb{R}(i \to +\infty)$;

i. 在 $\mathbb{R}^m$ 上定义范数 $||x||_1 = |x_1| + ... + |x_n|$, 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$ 有界, 则存在 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\exists n}$, 使得 $x_{n_i} \to x \in \mathbb{R}^m, (i \to +\infty)$;

(b) 设 X 是赋范空间, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ 线性无关, 则存在常数 $C > 0$, 使得对任何 n 个标量 $\beta_1, ..., \beta_n \in K$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$, 由 $||\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n|| \geq C > 0$;

i. 设 X 是赋范空间, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ 线性无关, 则存在常数 $C > 0$, 使得对任何 n 个标量 $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$, $||\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n|| \geq C(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|)$;

(c) 赋范空间子空间的完备性: 赋范空间 X 的任一有限维子空间 Y 是完备的;

i. 有限维的赋范空间, 一定是巴拿赫空间;

(d) 设 X 是赋范空间, $Y \subset X$, Y 是有限维子空间, 则 Y 一定是 X 中的闭集;

13. 等价范数: 设 X 是一个线性空间, $||\cdot||$ 和 $||\cdot||_0$: $X \to \mathbb{R}$ 都是范数. 若 $\exists a, b > 0$ 使得 $\forall x \in X, a||x||_0 \leq ||x|| \leq b||x||_0$, 则称 $||\cdot||$ 和 $||\cdot||_0$ 等价;

(a) 等价范数不改变收敛性: 若 $||\cdot||$ 和 $||\cdot||_0$ 等价, 则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X, x_0 \in X, x_n \to x_0$ 在 $||\cdot||$ 下, 当且仅当 $x_n \to x_0$ 在 $||\cdot||_0$ 下;

(b) 设 X 是有限维线性空间, 任意两种范数 $||\cdot||$ 和 $||\cdot||_0$ 一定是等价的;

  i. 有限维上的任意范数都与 $||\cdot||_2$ 等价;

14. 紧空间: 设度量空间 X 的每一个序列都有收敛的子序列, 则称空间 X 是一个紧的;

(a) 紧子集: 设 $M \subset X$, (M, d) 是 (X, d) 的子空间, 若 (M, d) 是紧的, 则称 M 是紧子集;

  i. M 是紧集, 当且仅当 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M, \exists \{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, s.t.: x_{n_i} \to x \in M (i \to \infty)$;

(b) 度量空间 X 中紧子集 M 一定是有界闭集;

  i. 若 M 是一个紧集, 则 M 是一个有界闭集;

(c) 若 X 是有限维赋范空间, 则有界闭集 $M \subset X$ 是一个紧子集;

15. 黎斯引理: 设 Z 是赋范空间, 真子空间 $Y \subset Z$, 若 Y 是闭集, 则对 $\forall \theta \in (0,1)$, 都 $\exists z, ||z|| = 1, s.t.: d(z, Y) = \inf\limits_{y \in Y} ||z - y|| \geq \theta$;

(a) 有限维赋范空间条件: 设 X 是一个赋范空间, 若闭单位球 $M = \{x \in X | ||x|| \leq 1\}$ 是紧集, 则 X 是有限维赋范空间;

  i. 有限维赋范空间 $\Leftrightarrow$ 赋范空间中的闭单位球是紧集;

  ii. 无穷维赋范空间 $\Leftrightarrow$ 赋范空间中的闭单位球不是紧集;

(b) 令 (X, d) 和 (Y, d) 是度量空间, 映射 $T: (X, d) \to (Y, d)$ 连续, 则 X 中紧子集 M 在 T 下的象是紧的;

(c) 设 X 是度量空间, $M \subset X$ 是紧子集, $T: (X, d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 连续, 则 T 在某点达到最大值 (最小值);

16. 线性算子: X, Y 是数域 K 上的线性空间, $D(T)$ 是 X 的子空间, 算子 $T: D(T) \subset X \to Y$ 满足 $\forall x, y \in X, \forall a \in K$,$T(x + y) = Tx + Ty$ 和 $T(ax) = aTx$, 则称 T 为线性算子. 其中: $D(T)$ 表示 T 的定义域, $R(T)$ 表示 T 的值域, $N(T) = \{x \in D(T), Tx = \theta\}$ 表示 T 的零空间;

(a) 线性算子的性质: 如果 $T: D(T) \subset X \to Y$ 是线性算子,

i. 则 $R(T)$ 是 Y 中的线性子空间;

ii. 则零空间 $N(T)$ 是 X 的线性子空间;

iii. 若 $\dim D(T) = n < +\infty$, 则 $\dim R(T) \leq n$;

A. 若 T 存在逆映射 T^{-1}, 则 $\dim D(T) = \dim R(T)$;

iv. 则 T 是单射当且仅当 $Tx = \theta \Leftrightarrow x = \theta$;

(b) 线性算子的逆算子: 线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$, 若 T 存在 $T^{-1} : R(T) \to D(T)$, 则 T^{-1} 也是线性算子;

(c) 有界算子: 设 X, Y 是赋范空间, 线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$, 若存在一个常数 $C \geq 0$, 使得 $\forall x \in D(T)$ 都有 $||Tx|| \leq C||x||$, 则称算子 T 是有界算子;

i. 有界算子的范数: 有界线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$, 称 $||T|| = \sup\limits_{x \in X, x \neq \theta} \frac{||Tx||}{||x||} < +\infty$ 是映射 T 的范数;

17. 有界线性算子: 设 X, Y 是赋范空间, K 是数域, 所有有界线性算子集合 $B(X, Y) := \{T : X \to Y \text{是有界线性算子}\}$. 定义加法 $+ : B(X, Y) \times B(X, Y) \to B(X, Y)$ 为 $(T_1 + T_2)(x) = T_1 x + T_2 x$, 定义数乘 $\cdot : K \times B(X, Y) \to B(X, Y)$ 为 $\alpha \cdot T(x) = \alpha T x$, 定义范数 $|| \cdot || : B(X, Y) \to \mathbb{R}$ 为 $||T|| = \sup\limits_{x \in X, x \neq \theta} \frac{||Tx||}{||x||} < +\infty$. 则集合 $(B(X, Y), K, +, \cdot, || \cdot ||)$ 是赋范空间;

18. 有界线性算子性质:

(a) 若 $T \in B(X, Y)$,

i. 则 $\forall x \in X, ||Tx|| \leq ||T|| \cdot ||x||$;

A. 则 $||T|| = \sup\limits_{x \in X, ||x|| = 1} ||Tx||$;

(b) 若 X 是有限维的赋范空间, 则线性算子 $T : X \to Y$ 有界;

i. 若 X,Y 是赋范空间, 线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$ 连续, 当且仅当 T 是有界算子;

ii. 若 X, Y 是赋范空间, 线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$, 则 T 在 x_0 连续, 当且仅当 T 处处连续;

A. 有界线性算子 $T : X \to Y$, 则零空间 $N(T) = \{x \in X, Tx = 0\}$ 是闭集;

19. 求算子范数的方法:

    (a) $\forall x \in X, ||Tx|| \le C||x||$, 从而 $||T|| = \sup\limits_{x \in X} \frac{||Tx||}{||x||} \le C$;

    (b) 取特殊 $x_0 \in X$, 使得 $||T|| = \sup\limits_{x \in X} \frac{||Tx||}{||x||} \ge \frac{||Tx||}{||x||} \ge C$ 或 $C - \varepsilon$;

    (c) 综上 $||T|| = C$;

20. 算子相等: 对于算子 $T_1, T_2 : X \to Y$, 若 $D(T_1) = D(T_2)$, 且 $\forall x \in D(T_1), T_1 x = T_2 x$, 则称算子 T_1 与 T_2 相等, 记作 $T_1 = T_2$;

21. 限制算子: 对于算子 $T : D(T) \to Y$, 子集 $B \subset D(T)$, 令 $T|_B : B \to Y$ 满足 $\forall x \in B, T_B(x) = Tx$, 则称 T_B 为 T 在 B 上的限制算子;

22. 延拓算子: 对于算子 $T : D(T) \to Y$, 若集合 M 满足 $D(T) \subset M$, 算子 $\tilde{T} : M \to Y$ 满足 $\tilde{T}|_{D(T)} = T$, 则称 $\tilde{T}$ 为 T 的延拓算子;

    (a) 若 X 是赋范空间, Y 是巴拿赫空间, 若线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$ 有界, 则 T 有延拓算子 $\tilde{T} : \overline{D(T)} \to Y$ 也是有界线性算子, 且 $||\tilde{T}|| = ||T||$;

23. 泛函: 若算子 T 的值域 $R(T)$ 落在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 内, 则称 T 是一个泛函;

    (a) 若 $f : D(f) \subset X \to K(\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C})$ 线性, 则称 f 为线性泛函;

24. 映射关于基的表示: 设 X, Y 是有限维线性空间, $\dim X = n, \{e_1, ..., e_n\}$ 为 X 的一个基, $\dim Y = m, \{b_1, ..., b_m\}$ 为 Y 的一个基, $T : X \to Y$ 是一个线性算子, $\forall x \in X, x = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i e_i$(即 $x = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$), 设 $y = Tx = (b_1, ..., b_m) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}, Te_i = (b_1, ..., b_m) \begin{pmatrix} \tau_1^i \\ \vdots \\ \tau_m^i \end{pmatrix}, 1 \le i \le n$,
$$Tx = T(e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = (Te_1, ..., Te_n) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = (b_1, ..., b_m) \begin{pmatrix} \tau_1^1 & ... & \tau_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_m^1 & ... & \tau_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix},$$
故 $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & ... & \tau_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_m^1 & ... & \tau_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$. 令 $\tau = (\tau_{ij})_{m \times n}$, 称 τ 是 T 关于两个基的一个表示;

(a) 考虑泛函 $f: X \to \mathbb{R}, \dim X = n$, 基为 $\{e_1, ..., e_n\}, \forall x \in X, x = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i e_i$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i f(e_i)$, 即 $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ 决定了一个泛函 f;

(b) 对偶基: 线性泛函 $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$, $f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$, 称 $\{f_1, ..., f_n\}$ 为 $\{e_1, ..., e_n\}$ 的对偶基;

(c) 设 X 是 n 维线性空间, $\{e_1, ..., e_n\}$ 是一个基, 令线性空间 $X^* = \{f : X \to K\text{是线性泛函}\}$, $\{f_1, ..., f_n\}$ 为 $\{e_1, ..., e_n\}$ 的对偶基, 则 $\dim X^* = n$, 且 $\{f_1, ..., f_n\}$ 是 X^* 中的一个基;

    i. 设 X 是有限维线性空间, $x_0 \in X$, 若 $\forall f \in X^*$ 都有 $f(x) = 0 \in K$, 则 $x_0 = \theta$;

    ii. 设 X, Y 是赋范空间, 若 Y 完备, 则 $B(X, Y)$(有界线性算子集合) 是巴拿赫空间;

25. 对偶空间: 设 X 是赋范空间, $X' = \{f : X \to K\text{有界线性泛函}\}$, $||f|| = \sup\limits_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||}$, $(X', ||\cdot||)$ 称为 X 的对偶空间;

    (a) 对偶空间 X' 是巴拿赫空间;

26. 空间同构: 设 $X, \tilde{X}$ 是赋范空间, 若 $\exists T : (X, ||\cdot||) \to (\tilde{X}, ||\cdot||)$ 是线性双射, 且映射保持范数不变 ($||Tx|| = ||x||$), 则称 X 与 $\tilde{X}$ 同构, 记作 $X = \tilde{X}$;

27. 作业: 20230317

    (a) 证明同一个域上的两个矢量空间 X_1 和 X_2 的笛卡尔积 $X = X_1 \times X_2$, 按 $\begin{cases} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \end{cases}$ 定义代数运算使 X 成为一个矢量空间;

28. 作业: 20230425

    (a) 线性算子 $T_1 : Y \to Z, T_2 : X \to Y$ 有界, 则 $T_1 \circ T_2 : X \to Z$ 也是有界线性算子, 且 $||T_1 \circ T_2|| \leq ||T_1|| \cdot ||T_2||$;

    (b) $(C[a, b], ||\cdot||), ||\cdot|| = \sup\limits_{a \leq x \leq b} |x(t)|$, 证明算子 $f : (C[a, b], ||\cdot||) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)(f(x) = x(t_0))$ 是有界线性泛函, 且 $||f|| = 1$;