1 绪论

1. 教材: 泛函分析导论及应用 (前五章), 欧文克雷斯齐格;
2. 参考书:
   (a) 泛函分析讲义, 张恭庆;
   (b) 时变函数论, 周民强;
3. 作业: 每月一次, 形式不限;

2 度量空间与集合 (作业: 20230220)

1. 度量空间: 设 X 是集合, 有映射 $d:(x,y)\to d(x,y)$.d 满足:
   (a) $\forall x,y\in X, d(x,y)\geq 0$;
   (b) $\forall x,y\in X$,$d(x,y)=d(y,x)$;
   (c) $\forall x,y,z\in X, d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$;

   则称 d 为一个度量 (距离), (X,d) 为度量空间;
2. 常见度量:
   (a) $p-$ 度量: $d_p(x,y)=\left(\sum\limits_{x=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
   (b) $\infty-$ 度量: $d_\infty(x,y)=\max|x_i-y_i|$;
3. 球: 在度量空间 (X,d) 中, 称
   (a) 开球: $B(x_0,r)=\{x\in X|d(x,x_0)<r\}$;
   (b) 闭球: $\overline{B(x_0,r)}=\{x\in X|d(x,x_0)\leq r\}$;
   (c) 球面: $S(x_0,r)=\{x\in X|d(x,x_0)=r\}$;
4. $\varepsilon-$ 邻域: 开球 $B(x_0,\varepsilon)$ 称为 x_0 的一个 $\varepsilon-$ 邻域;
   (a) 开集: 度量空间 $(X,d), M\subset X$, 若对任意元素 $x_0\in M$, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(x_0,\varepsilon)\subset M$, 则称 M 是 X 中的开集;
   (b) 闭集: 度量空间 $(X,d), K\subset X$, 若 $K^c=X|K$ 是开集, 则称 K 是 X 中的闭集;

(c) 内点: 度量空间 (X,d), $M \subset X, x_0 \in M$, 若存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x_0,\varepsilon) \subset M$, 则称 x_o 是 M 的一个内点;

(d) 内部: M 中全体内点构成的集合称为 M 的内部, 记为: M^o;

5. 集类: Ξ 是 X 中某些子集构成的集合, 称 Ξ 为集类;

6. 拓扑空间: 满足开集条件的集类组成的空间 (X,Ξ), 定义见另一笔记文件;

7. 聚点 (极限点): 度量空间 $(X,d), M \subset X, x_0 \in X$, 若, x_0 的任一 $\varepsilon-$ 邻域都至少函有一个不同于 x_0 的点 $y_o \in M$, 则称 x_0 是 M 的聚点;

   (a) 导集: M 的聚点全体构成的集合称为 M 的导集, 记为 M';

   (b) 闭包: $\bar{M} := M \cup M'$;

      i. 度量空间 $(X,d), M \subset X$, 则 $\overline{M}$ 是闭集;

      ii. 度量空间 $(X,d), M \subset X : M$ 是闭集 $\Leftrightarrow M = \bar{M}$;

   (c) 边缘: $\partial M = \bar{M} - M^o$;

8. 有限集: 如果集合中元素个数有限, 则称其为有限集;

   (a) 可列集: 若集合中元素的个数无限多, 但可与自然数集 $\mathbb{N}$ 中的元素一一对应, 则集合为可列集;

   (b) 可数集: 有限集和可列集统称为可数集;

   (c) $A_n(n \in \mathbb{N})$ 为可列集, 则 $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ 为可列集;

      i. 推论: 可列个可列集的并集为可列集. 如: 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集;

   (d) 常见的不可列集: 无理数集, 实数集 $\mathbb{R}$;

9. 稠密子集: 度量空间 $(X,d), M \subset X$, 若 $\overline{M} = X$, 则称 M 在 X 中稠密, M 是 X 中的稠密子集;

10. 可分性: 若 X 有一个可数的稠密子集 M, 则称 X 是可分的, (X,d) 是一个可分空间;

   (a) 常见可分空间: $(\mathbb{R}^n, d_p)(1 \leq p \leq \infty)$, $(l^p, d_p)(1 \leq p \leq \infty)$, 其中 $l^p = \{\{x_i\}, i \in \mathbb{N}, \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$;

i. 函数空间可分: $(\mathbb{C}[a,b], d_{max})$
$d_{max}(f,g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|$
$C[a,b] = \{f : [a,b] \to R | \exists f'(t)\}$

(b) 常见不可分空间: (l^{∞}, d_{∞});
$l^{\infty} = \{(x_i) | i \in \mathbb{N}, \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$

11. 作业: 20230220

(a) 设 (X,d) 是任一度量空间, 证明由 $\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ 在 X 上定义了另一个度量, 且在 $\tilde{d}$ 度量下, X 是有界的;

3 映射 (作业: 20230227) 与巴拿赫不动点定理 (作业: 20230309)

1. 连续: 有度量空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y), 映射 $T : X \to Y$, $x_0 \in X$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, d_X(x_0, x) < \delta$, 有 $d_Y(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$, 则称 T 在 x_0 处连续.

   可简记为: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : T(B(x_0, \delta)) < B(T(x_0), \varepsilon)$;

   (a) 映射连续: 映射若映射 T 在 X 中每一点连续, 则称 T 为连续映射;

   (b) 连续性等价描述 (与空间结构相融): U 是开集, $T : (X,d) \to (Y,d)$ 连续 $\Leftrightarrow \forall U \subset Y : T^{-1}U = \{x \in X | T(x) \subset U\}$ 是 X 中的开集;

   i. 若开集 $V, \forall V \subset C : TV = \{y \in Y | \exists x \in V, Tx = y\}$, 其像 TV 不一定是 Y 中的开集;

2. 极限 (在点处的收敛性): 在度量空间 (X,d), 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\exists x \in X : \lim\limits_{i \to \infty} d(x_0, x) = 0$, 则称 x 是序列 x_n 的极限. 记 $x_n \to x$ 或 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$;

   (a) 直径: 在度量空间 (X,d), $M \subset X$, 直径 $d(M) = \sup\limits_{x \in M, y \in M} d(d, y)$;

   (b) 有界集: 在度量空间 (X,d), $d(M) < \infty$, 则称 M 是有界集. M 是有界集 $\Leftrightarrow \forall x_0 \in X, \exists r = r(x_0) > 0 : M \subset B(x_0, r)$;

   (c) 极限的唯一性: 在度量空间 (X,d) 中的收敛序列是有界集, 且极限唯一;

i. 若 $x_n \to x, y_n \to y$, 则 $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$;

3. 柯西列: 在度量空间 (X, d) 中, 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0 : n, m > N, d(x_n, y_n) < \varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为柯西列;

   (a) 在度量空间中, 收敛序列一定是柯西列 (柯西列未必收敛);

   (b) 完备空间: 在度量空间 (X, d) 中, 如果 X 中任何柯西列都是收敛列, 则称 X 完备;

      i. 常见完备空间: $(\mathbb{R}^n, d_p), (l^p, d_p)$;

4. 闭集: 在度量空间 (X, d) 中, $M \subset X, M$ 是闭集 $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset M : x_n \to x \in X, x \in M$;

5. 闭包: 在度量空间 (X, d) 中, $M \subset X, x \in X, x \in \bar{M} = M \cup M' \Leftrightarrow \exists \{x_n\} \subset M : x_n \to x$;

6. 子空间: 在度量空间 (X, d) 中, $M \subset X$. 则度量空间 (M, d) 被称为子空间;

   (a) 子空间完备性: 在完备的度量空间 (X, d) 中, $M \subset X$, 则: 当且仅当 M 是 X 中的闭集时, M 完备;

7. 连续函数: 度量空间 (X, d) 和 (Y, d) 有 $T : (X, d) \to (Y, d)$ 在 x_0 连续, 当且仅当若 $x_n \to x$ 在 (X, d), 则 $Tx_n \to Tx_0$ 在 (Y, d) 中;

8. 等距映射: 度量空间 (X, d) 和 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 有 $T : (X, d) \to (\tilde{X}, \tilde{d})$, 若 $\forall x.y \in X, \exists \tilde{d}(Tx, Ty) = d(x, y)$, 则称 T 是等距映射;

   (a) 等距空间: 若有双射 (单射且满射)$T : (X, d) \to (\tilde{X}, \tilde{d})$, 且 T 为等距映射, 则称度量空间 (X, d) 和 $(\tilde{X}, \tilde{d})$ 是等距空间;

9. 完备化空间: 度量空间 (X, d) 一定存在一个完备的度量空间 $(\hat{X}, \hat{d})$, 且 $W \subset \hat{X}$ 满足 W 在 $\hat{X}$ 中稠密 $(\bar{M} = \hat{X})$ 且 W 与 X 是等距空间, 则称 $\hat{X}$ 是 X 的完备化空间;

10. 不动点: 集合 X, 映射 $T : X \to X$, 若 $\exists x \in X : T(x) = x$, 则称 x_0 是映射 T 的一个不动点;

   (a) 压缩映射: 在度量空间 (X, d) 中, 有映射 $T : X \to X$, 若 $\exists 0 < a < 1 : \forall x, y \in X, d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$, 则称 T 为压缩映射;

(b) 巴拿赫不动点定理: 在完备度量空间 (X,d) 中, 有压缩映射 $T: X \to X$, 则存在唯一不动点 x, 且 $\forall x_0 \in X, x_n = Tx_{n-1}, n \in N^*$, 则 $x_n|_{n\to\infty} = x$;

11. 李氏条件: $\forall (t,x),(t,y) \in R, \exists k > 0, s.t.: |f(t,x) - f(t,y)| \le k|x-y|$;

12. 常微分方程局部解的存在唯一性定理: 设 $R = \{(t,x)||t-t_0| \le a, |x-x_0| \le b\}$, f 在 R 上连续, $\forall (t,x) \in R, |f(t,x)| \le c$, f 对 x 满足李氏条件, 则常微分方程 $\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ 在区间 $[t_0-\beta, t_0+\beta]$ 上存在唯一的解 $x(t), \beta < \min\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\}$;

13. 作业: 20230227

(a) 证明映射 $T: X \to Y$ 当且仅当任一闭集 $M \subset Y$ 的逆象是 X 中的闭集时才是连续的;

14. 作业: 20230309

(a) 若度量空间 X 中的序列 (x_n) 是收敛的且有极限 x, 证明 (x_n) 的每一个子序列 (x_{n_k}) 都是收敛的, 并且有同一个极限 x;

4 赋范空间 (作业: 20230317) 与线性算子 (作业 20230425)

1. 加法: 集合 X, 数域 k, 加法 $+: X \times X \to X$, 满足:

(a) 交换律: $x + y = y + x$;

(b) 结合律: $(x+y)+z = x+(y+z)$;

(c) 零元: $\exists \theta \in X, s.t.: \forall x \in X, x + \theta = x$, 则称 θ 为零元;

(d) 逆元: $\forall x \in X, \exists x' \in X, s.t.: x + x' = \theta$, 则称 x' 为 x 的逆元, 记作 $-x$;

2. 数乘: 集合 X, 数域 K, 数乘 $\cdot: k \times X \to X, k \in K$, 满足:

(a) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in X$;

(b) $1x = x$;

   (c) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$;
   (d) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;

3. 线性空间: 定义了加法和数乘的空间 $(X, K, +, \cdot)$, $x \in X$ 称为向量 (矢量), $k \in K$ 称为标量. 线性空间以后默认装配数域, 加法, 数乘;
   (a) 线性空间的零元唯一;
   (b) 线性空间的逆元唯一;
   (c) $\forall x \in X, 0x = \theta$;
   (d) $-1 \cdot x = -x$;
   (e) $\alpha\theta = \theta$;
4. 常见线性空间:$(C[a,b], \mathbb{R}, +, \cdot)$, $(l^p, \mathbb{R}, +, \cdot)$;
5. 线性组合: 设 X 是线性空间, $x_1, x_2, ...x_n \in X$, 称 $a_1x_1 + ... + a_nx_n, a_n \in K$ 为 $x_1, x_2, ...x_n$ 的线性组合;
6. 子空间: 设 X 是线性空间, $M \subset X$, 称 M 中向量的所有线性组合构成的集合为 M 所张成的子空间, 记为 span$M$;
   (a) span$M$ 对加法和数乘封闭;
   (b) 线性空间的子空间: 设 X 是线性空间, 子集 $Y \subset X$, 若 $\forall y_1, y_2 \in Y$, $\forall a_1, a_2 \in K$, 都有 $a_1y_1 + a_2y_2 \in Y$, 则 Y 本身也是线性空间, 称 Y 为 X 的一个子空间;
7. 线性无关: 设 X 是线性空间, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$, 若 $a_1x_1 + ... + a_nx_n = \theta$, 则一定有 $a_1 = ... = a_n = 0$, 称 $\{x_1, ..., x_n\}$ 线性无关;
   (a) 线性相关: 若存在不全为零的标量 $a_1, ..., a_n$, 使得 $a_1x_1 + ... + a_nx_n = \theta$, 则称 $\{x_1, ..., x_n\}$ 线性相关;
8. 维数: 设 X 是线性空间, 若 $\exists n > 0, n \in \mathbb{Z}^*$, 使得 X 中包含 n 个线性无关的向量, 并且任意 $n+1$ 个向量都线性相关, 则称线性空间 X 是有限维, $n = \dim X$ 为 X 的维数;
   (a) 无穷维: 若 X 不是有限维, 则称 X 是无穷维的;
9. 基: 若 $\dim X = n$, 则 X 中任意 n 个线性无关的向量称为空间的一个基;

(a) 若 $\dim X = n$, $\{e_1, ..., e_n\}$ 是其中一个基, 则对任意 $x \in X$, 有 $x = a_1e_1 + ... + a_ne_n$, 且表达方式唯一;

10. 范数: 设 X 是线性空间, 映射 $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$, 同时满足下面条件时, 则称 $||\cdot||$ 为 X 上的范数;

    (a) 非负性: $||x|| \geq 0, ||\theta|| = 0$;

    (b) 正齐次性: $\forall a \in K, x \in X, ||ax|| = |a| \cdot ||x||$;

    (c) 三角不等式: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$;

11. 赋范空间: 称定义了范数的线性空间 $(X, ||\cdot||)$ 为赋范空间, 赋范空间是以范数为度量的度量空间;

    (a) 巴拿赫空间 (完备赋范空间): 若赋范空间 $(X, ||\cdot||)$ 是完备的, 则称 X 其为巴拿赫空间;

        i. 常见巴拿赫空间: $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p), (l^p, ||\cdot||_p), (C[a, b], ||\cdot||_{\max})$;

    (b) 设 X 是赋范空间, 子空间 $Y \subset X$, 则 $(Y, ||\cdot||)$ 也是赋范空间;

    (c) 闭子空间: 若 Y 是赋范空间 X 的子空间, 且 Y 是 X 中的闭集, 则称 Y 是 X 中的闭子空间;

        i. 巴拿赫空间 $(X, ||\cdot||)$, 子空间 $Y \subset X$, 当且仅当 Y 是 X 中的闭集, $(Y, ||\cdot||)$ 是完备的;

    (d) 极限收敛: 设 X 是赋范空间, 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 前 n 项和 $S_n = x_1 + ... + x_n \in X$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. 若存在 $S \in X$, 使得 $S_n \to S, n \to +\infty$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 记 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$;

    (e) Schauder 基: 若赋范空间 X 中存在 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得对任意 $x \in X$, 存在唯一 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} ||\sum\limits_{i=1}^{n} a_ie_i - x|| = 0$, 则称序列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的一个 Schauder 基, 记作 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_ie_i = x$;

12. 赋范空间的完备化: 设 X 是赋范空间, 则存在一个巴拿赫空间 (完备的赋范空间)$\hat{X}$ 和稠密子空间 $W \subset \hat{X}$, 使得 X 与 W 是等距同构;

    (a) $\mathbb{R}^1$ 上的一个定理: 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ 有界, 则其存在一个子列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x_{n_i} \to x \in \mathbb{R}(i \to +\infty)$;

   i. 在 $\mathbb{R}^m$ 上定义范数 $||x||_1 = |x_1| + ... + |x_n|$, 若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^m$ 有界, 则存在 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{a_n\}_{n=1}^{\exists n}$, 使得 $x_{n_i} \to x \in \mathbb{R}^m, (i \to +\infty)$;

(b) 设 X 是赋范空间, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ 线性无关, 则存在常数 $C > 0$, 使得对任何 n 个标量 $\beta_1, ..., \beta_n \in K$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} |\beta_i| = 1$, 由 $||\beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n|| \geq C > 0$;

   i. 设 X 是赋范空间, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ 线性无关, 则存在常数 $C > 0$, 使得对任何 n 个标量 $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$, $||\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n|| \geq C(|\alpha_1| + ... + |\alpha_n|)$;

(c) 赋范空间子空间的完备性: 赋范空间 X 的任一有限维子空间 Y 是完备的;

   i. 有限维的赋范空间, 一定是巴拿赫空间;

(d) 设 X 是赋范空间, $Y \subset X$, Y 是有限维子空间, 则 Y 一定是 X 中的闭集;

13. 等价范数: 设 X 是一个线性空间, $|| \cdot ||$ 和 $|| \cdot ||_0$: $X \to \mathbb{R}$ 都是范数. 若 $\exists a, b > 0$ 使得 $\forall x \in X, a||x||_0 \leq ||x|| \leq b||x||_0$, 则称 $|| \cdot ||$ 和 $|| \cdot ||_0$ 等价;

   (a) 等价范数不改变收敛性: 若 $||\cdot||$ 和 $||\cdot||_0$ 等价, 则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X, x_0 \in X, x_n \to x_0$ 在 $|| \cdot ||$ 下, 当且仅当 $x_n \to x_0$ 在 $|| \cdot ||_0$ 下;

   (b) 设 X 是有限维线性空间, 任意两种范数 $|| \cdot ||$ 和 $|| \cdot ||_0$ 一定是等价的;

      i. 有限维上的任意范数都与 $|| \cdot ||_2$ 等价;

14. 紧空间: 设度量空间 X 的每一个序列都有收敛的子序列, 则称空间 X 是一个紧的;

   (a) 紧子集: 设 $M \subset X$, (M, d) 是 (X, d) 的子空间, 若 (M, d) 是紧的, 则称 M 是紧子集;

      i. M 是紧集, 当且仅当 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M, \exists \{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, s.t.: x_{n_i} \to x \in M(i \to \infty)$;

   (b) 度量空间 X 中紧子集 M 一定是有界闭集;

      i. 若 M 是一个紧集, 则 M 是一个有界闭集;

(c) 若 X 是有限维赋范空间, 则有界闭集 $M \subset X$ 是一个紧子集;

15. 黎斯引理: 设 Z 是赋范空间, 真子空间 $Y \subset Z$, 若 Y 是闭集, 则对 $\forall \theta \in (0,1)$, 都 $\exists z, ||z|| = 1, s.t. : d(z,Y) = \inf_{y \in Y} ||z - y|| \geq \theta$;

    (a) 有限维赋范空间条件: 设 X 是一个赋范空间, 若闭单位球 $M = \{x \in X| ||x|| \leq 1\}$ 是紧集, 则 X 是有限维赋范空间;

        i. 有限维赋范空间 $\Leftrightarrow$ 赋范空间中的闭单位球是紧集;

        ii. 无穷维赋范空间 $\Leftrightarrow$ 赋范空间中的闭单位球不是紧集;

    (b) 令 (X,d) 和 (Y,d) 是度量空间, 映射 $T : (X,d) \to (Y,d)$ 连续, 则 X 中紧子集 M 在 T 下的象是紧的;

    (c) 设 X 是度量空间, $M \subset X$ 是紧子集, $T : (X,d) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ 连续, 则 T 在某点达到最大值 (最小值);

16. 线性算子: X, Y 是数域 K 上的线性空间, $D(T)$ 是 X 的子空间, 算子 $T : D(T) \subset X \to Y$ 满足 $\forall x, y \in X, \forall a \in K$,$T(x+y) = Tx + Ty$ 和 $T(ax) = aTx$, 则称 T 为线性算子. 其中: $D(T)$ 表示 T 的定义域, $R(T)$ 表示 T 的值域, $N(T) = \{x \in D(T), Tx = \theta\}$ 表示 T 的零空间;

    (a) 线性算子的性质: 如果 $T : D(T) \subset X \to Y$ 是线性算子,

        i. 则 $R(T)$ 是 Y 中的线性子空间;

        ii. 则零空间 $N(T)$ 是 X 的线性子空间;

        iii. 若 $\dim D(T) = n < +\infty$, 则 $\dim R(T) \leq n$;

            A. 若 T 存在逆映射 T^{-1}, 则 $\dim D(T) = \dim R(T)$;

        iv. 则 T 是单射当且仅当 $Tx = \theta \Leftrightarrow x = \theta$;

    (b) 线性算子的逆算子: 线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$, 若 T 存在 $T^{-1} : R(T) \to D(T)$, 则 T^{-1} 也是线性算子;

    (c) 有界算子: 设 X, Y 是赋范空间, 线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$, 若存在一个常数 $C \geq 0$, 使得 $\forall x \in D(T)$ 都有 $||Tx|| \leq C||x||$, 则称算子 T 是有界算子;

        i. 有界算子的范数: 有界线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$, 称 $||T|| = \sup_{x \in X, x \neq \theta} \frac{||Tx||}{||x||} < +\infty$ 是映射 T 的范数;

17. 有界线性算子: 设 X, Y 是赋范空间, K 是数域, 所有有界线性算子集合 $B(X,Y) := \{T : X \to Y \text{是有界线性算子}\}$. 定义加法 $+ : B(X,Y) \times B(X,Y) \to B(X,Y)$ 为 $(T_1 + T_2)(x) = T_1x + T_2x$, 定义数乘 $\cdot : K \times B(X,Y) \to B(X,Y)$ 为 $\alpha \cdot T(x) = \alpha Tx$, 定义范数 $||\cdot|| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$ 为 $||T|| = \sup\limits_{x\in X, x\neq\theta} \frac{||Tx||}{||x||} < +\infty$. 则集合 $(B(X,Y), K, +, \cdot, ||\cdot||)$ 是赋范空间;

18. 有界线性算子性质:

    (a) 若 $T \in B(X,Y)$,

    i. 则 $\forall x \in X, ||Tx|| \leq ||T|| \cdot ||x||$;

    A. 则 $||T|| = \sup\limits_{x\in X, ||x||=1} ||Tx||$;

    (b) 若 X 是有限维的赋范空间, 则线性算子 $T : X \to Y$ 有界;

    i. 若 X,Y 是赋范空间, 线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$ 连续, 当且仅当 T 是有界算子;

    ii. 若 X, Y 是赋范空间, 线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$, 则 T 在 x_0 连续, 当且仅当 T 处处连续;

    A. 有界线性算子 $T : X \to Y$, 则零空间 $N(T) = \{x \in X, Tx = 0\}$ 是闭集;

19. 求算子范数的方法:

    (a) $\forall x \in X, ||Tx|| \leq C||x||$, 从而 $||T|| = \sup\limits_{x\in X} \frac{||Tx||}{||x||} \leq C$;

    (b) 取特殊 $x_0 \in X$, 使得 $||T|| = \sup\limits_{x\in X} \frac{||Tx||}{||x||} \geq \frac{||Tx||}{||x||} \geq C$ 或 $C - \varepsilon$;

    (c) 综上 $||T|| = C$;

20. 算子相等: 对于算子 $T_1, T_2 : X \to Y$, 若 $D(T_1) = D(T_2)$, 且 $\forall x \in D(T_1), T_1x = T_2x$, 则称算子 T_1 与 T_2 相等, 记作 $T_1 = T_2$;

21. 限制算子: 对于算子 $T : D(T) \to Y$, 子集 $B \subset D(T)$, 令 $T|_B : B \to Y$ 满足 $\forall x \in B, T_B(x) = Tx$, 则称 T_B 为 T 在 B 上的限制算子;

22. 延拓算子: 对于算子 $T : D(T) \to Y$, 若集合 M 满足 $D(T) \subset M$, 算子 $\tilde{T} : M \to Y$ 满足 $\tilde{T}|_{D(T)} = T$, 则称 $\tilde{T}$ 为 T 的延拓算子;

(a) 若 X 是赋范空间, Y 是巴拿赫空间, 若线性算子 $T: D(T) \subset X \to Y$ 有界, 则 T 有延拓算子 $\tilde{T}: \overline{D(T)} \to Y$ 也是有界线性算子, 且 $||\tilde{T}|| = ||T||$;

23. 泛函: 若算子 T 的值域 $R(T)$ 落在 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 内, 则称 T 是一个泛函;

 (a) 若 $f: D(f) \subset X \to K(\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C})$ 线性, 则称 f 为线性泛函;

24. 映射关于基的表示: 设 X, Y 是有限维线性空间, $\dim X = n, \{e_1, ..., e_n\}$ 为 X 的一个基, $\dim Y = m, \{b_1, ..., b_m\}$ 为 Y 的一个基, $T: X \to Y$ 是一个线性算子, $\forall x \in X, x = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i e_i$(即 $x = (e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$), 设

$$y = Tx = (b_1, ..., b_m) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}, Te_i = (b_1, ..., b_m) \begin{pmatrix} \tau_1^i \\ \vdots \\ \tau_m^i \end{pmatrix}, 1 \le i \le n,$$

$$Tx = T(e_1, ..., e_n) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = (Te_1, ..., Te_n) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = (b_1, ..., b_m) \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \cdots & \tau_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_m^1 & \cdots & \tau_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix},$$

故 $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1^1 & \cdots & \tau_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_m^1 & \cdots & \tau_m^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$. 令 $\tau = (\tau_{ij})_{m \times n}$, 称 τ 是 T 关于两个基的一个表示;

 (a) 考虑泛函 $f: X \to \mathbb{R}, \dim X = n$, 基为 $\{e_1, ..., e_n\}, \forall x \in X, x = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i e_i$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i f(e_i)$, 即 $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ 决定了一个泛函 f;

 (b) 对偶基: 线性泛函 $f_1, ..., f_n: X \to \mathbb{R}, f_k(e_j) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \ne j \end{cases}$, 称 $\{f_1, ..., f_n\}$ 为 $\{e_1, ..., e_n\}$ 的对偶基;

 (c) 设 X 是 n 维线性空间, $\{e_1, ..., e_n\}$ 是一个基, 令线性空间 $X^* = \{f: X \to K\text{是线性泛函}\}$, $\{f_1, ..., f_n\}$ 为 $\{e_1, ..., e_n\}$ 的对偶基, 则 $\dim X^* = n$, 且 $\{f_1, ..., f_n\}$ 是 X^* 中的一个基;

  i. 设 X 是有限维线性空间, $x_0 \in X$, 若 $\forall f \in X^*$ 都有 $f(x) = 0 \in K$, 则 $x_0 = \theta$;

   ii. 设 X,Y 是赋范空间, 若 Y 完备, 则 $B(X,Y)$(有界线性算子集合) 是巴拿赫空间;

25. 对偶空间: 设 X 是赋范空间, $X'=\{f:X\to K$有界线性泛函$\}$, $||f||=\sup\limits_{x\in X,x\neq 0}\frac{|f(x)|}{||x||}$, $(X',||\cdot||)$ 称为 X 的对偶空间;
   (a) 对偶空间 X' 是巴拿赫空间;
26. 空间同构: 设 $X,\tilde{X}$ 是赋范空间, 若 $\exists T:(X,||\cdot||)\to(\tilde{X},||\cdot||)$ 是线性双射, 且映射保持范数不变 ($||Tx||=||x||$), 则称 X 与 $\tilde{X}$ 同构, 记作 $X=\tilde{X}$;
27. 作业: 20230317
   (a) 证明同一个域上的两个矢量空间 X_1 和 X_2 的笛卡尔积 $X=X_1\times X_2$, 按 $\begin{cases}(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)\\ \alpha(x_1,x_2)=(\alpha x_1,\alpha x_2)\end{cases}$ 定义代数运算使 X 成为一个矢量空间;
28. 作业: 20230425
   (a) 线性算子 $T_1:Y\to Z, T_2:X\to Y$ 有界, 则 $T_1\circ T_2:X\to Z$ 也是有界线性算子, 且 $||T_1\circ T_2||\leq||T_1||\cdot||T_2||$;
   (b) $(C[a,b],||\cdot||)$, $||\cdot||=\sup\limits_{a\leq x\leq b}|x(t)|$, 证明算子 $f:(C[a,b],||\cdot||)\to(\mathbb{R},|\cdot|)(f(x)=x(t_0))$ 是有界线性泛函, 且 $||f||=1$;

5 内积空间

1. 内积: 设 (X,K) 线性空间, 内积运算 $<\cdot,\cdot>$: $X\times X\to K$ 应该满足:
   (a) 双线性: $\forall\alpha,\beta\in K,x_1,x_2\in X, <\alpha x_1+\beta x_2,y>=\alpha<x_1,y>+\beta<x_2,y>$;
      i. 共轭线性: $<x,\alpha y_1+\beta y_2>=\bar{\alpha}(x,y_1)+\bar{\beta}(x,y_2)$;
   (b) 共轭对称性: $\forall x,y\in X, <x,y>=\overline{<y,x>}$;
   (c) $<x,x>\geq 0$, 对于 $<x,x>=0$ 当且仅当 $x=\theta$;
2. 内积空间: 装配内积结构 $<\cdot,\cdot>$ 的空间 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 被称为内积空间;

   (a) 内积诱导的范数: $||x|| := \sqrt{<x,x>}$;
   (b) 引理: $\forall x, y \in X, |<x,y>| \leq ||x|| \cdot ||y||$;
   (c) 施瓦兹不等式: $|<x,y>| \leq ||x|| \cdot ||y||$;

3. 希尔伯特空间: 若 $(X, <\cdot,\cdot>)$ 是完备的, 则称 $(X, <\cdot,\cdot>)$ 是希尔伯特空间;

4. 平行四边形法则: 对内积空间 $(X, <\cdot,\cdot>)$, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$;

5. 正交: 在内积空间 $(X, <\cdot,\cdot>)$ 中, $x, y \in X, A, B \subset X$:
   (a) 若 $<x,y>= 0$ 则称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$;
   (b) 若 $\forall z \in A$, 有 $<x,y>= 0$, 则称 x 与 A 正交, 记为 $x \perp A$;
   (c) 若 $\forall z \in A, h \in B$, 都有 $<z,h>= 0$, 则称 A 与 B 正交, 记为 $A \perp B$;

6. 内积的连续性: 对内积空间 $(X, <\cdot,\cdot>)$, 序列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$, 若 $x_n \to x, y_n \to y$, 则 $<x_n, y_n> \to <x,y>$;

7. 内积空间中点到子空间的距离: 在度量空间 (X,d) 中, $x \in X, M \subset X$, $\delta = d(x,M) = \inf\limits_{y \in M} d(x,y)$;

8. 凸集: 设 X 是线性空间, $M \subset X$, 若 $\forall x, y \in M$, 有凸组合 $\forall \lambda \in [0,1], \exists z \in M, z = \lambda x + (1-\lambda)y$, 则称 M 是凸集;
   (a) 点到集合距离可达的条件: 设 $(X, <\cdot,\cdot>)$ 是内积空间, $M \subset X, M \neq \phi$, 若 M 是完备的凸集, 则 $\forall x \in X, \exists! y \in M : d(x,M) = \inf\limits_{\tilde{y} \in M} ||x - \tilde{y}|| = ||x - y||$;
   (b) 垂足存在条件: 设 $(X, <\cdot,\cdot>)$ 是内积空间, $Y \subset X$, Y 是完备子空间, $x \in X$, 则 $\exists! y \in Y, s.t. : ||x-y|| = \inf\limits_{\tilde{y} \in Y} ||x - \tilde{y}|| = d(x,Y)$. 令 $z = x - y$, 则 $z \perp Y$;

9. 直和: 设 X 为线性空间, $Y, Z \subset X$, 若 $\forall x \in X$, 都 $\exists! x = y + z, y \in Y, z \in Z$, 则称 X 为子空间 Y, Z 的直和, 记作 $X = Y \oplus Z$;
   (a) 正交补: 设 $(X, <\cdot,\cdot>)$ 是内积空间, $M \subset X$ 非空, 称 $M^{\perp} = \{x \in X | x \perp M\}$ 为 M 的正交补 (集合);

i. 无论 M 是不是子空间, $M^{\perp}$ 都是子空间;

ii. 无论 M 是不是闭集, $M^{\perp}$ 都是闭集 (进一步是闭子空间);

(b) 直和分解: 设 $(H, <\cdot,\cdot>)$ 是希尔伯特空间, $Y \subset H$ 是闭子空间, 则 $H = Y \oplus Y^{\perp}$;

i. $Y \cap Y^{\perp} = \{\theta\}$;

ii. 正交投影: 若 $x \in H, x = y + z, y \in Y, z \in Y^{\perp}$, 则称 y, z 分别为 x 在 $Y, Y^{\perp}$ 上的正交投影;

iii. 投影算子: $P : H \to Y, x \to Px = y$;

A. 幂等性: $P^2 = P$;

(c) 设 H 是希尔伯特空间, $Y \subset H$ 是闭子空间, 则 $(Y^{\perp})^{\perp} = Y$;

10. X 是内积空间, 若 $A \subset B \subset X$, 则 $B^{\perp} \subset A^{\perp}$;

(a) 对希尔伯特空间 H, $M \subset H$ 是非空子集, 当且仅当 $M^{\perp} = \{\theta\}$, $span\{M\}$ 在 H 中稠密;

11. 正交集: 对内积空间 X, $S = \{e_\alpha | \alpha \in A\} \subset X$, 若 $\forall \alpha, \beta \in A, \alpha \neq \beta$, 都有 $e_\alpha \perp e_\beta$, 则称 S 为正交集;

(a) 正交规范集: 若正交集 S 中的元素都满足 $||e_\alpha|| = 1$, 则称 S 为正交规范集;

12. Bessel 不等式: 对内积空间 X, $S = \{e_\alpha | \alpha \in A\} \subset X$ 是正交规范集, 则 $\forall x \in X$, 都有 $\sum\limits_{\alpha \in A} | < x, e_\alpha > |^2 \leq ||x||^2$;

(a) 设 H 是希尔伯特空间, $\{e_\alpha | \alpha \in A\} \subset H$ 是正交规范子集, $x \in H$, 则 $\sum\limits_{\alpha \in A} < x, e_\alpha > e_\alpha \in H$, 且 $||x||^2 = \sum\limits_{\alpha \in A} | < x, e_\alpha > |^2 + ||x - \sum\limits_{\alpha \in A} < x, e_\alpha > e_\alpha||^2$;

13. 设 X 是内积空间, $\{e_\alpha, \alpha \in A\} = S \subset X$ 是正交规范集:

(a) 完备性: 若 $S^{\perp} = \{\theta\}$, 则称 S 完备;

(b) Fourier 系数: 若 $\forall x \in X$, 都有 $x = \sum\limits_{\alpha \in A} < x, e_\alpha > e_\alpha$, 则称 S 为一个基 (或封闭), 称 $\{< x, e_\alpha >\}_{\alpha \in A}$ 为 x 关于基 S 的 Fourier 系数;

14. 设 H 是希尔伯特空间, $S = \{e_\alpha, \alpha \in A\} \subset H$ 是正交规范集合, 则下面 3 点等价:

(a) S 是基 (或封闭);

(b) S 是完备的;

(c) Bessel 不等式退化为 Parseval 等式: $\forall x \in A, ||x||^2 = \sum\limits_{\alpha \in A} |<x, e_\alpha>|^2$;

15. 正交规范基存在: 设 H 是希尔伯特空间, 若 H 可分, 则 H 存在一个正交规范基 S, 且 S 可数;

16. Schmidt 正交化过程:

(a) $y_1 = x_1, e_1 = \frac{y_1}{||y_1||}$;

(b) $y_2 = x_2 - <x_2, e_1> e_1, e_2 = \frac{y_2}{||y_2||}$;

(c) $y_n = x_n - \sum\limits_{i=1}^{n-1} <x_n, e_i> e_i, e_n = \frac{y_n}{||y_n||}$;

17. 黎斯定理: 设 H 是希尔伯特空间, H 上任何有界线性泛函 $f : H \to K$, 都可以表示为内积形式, 即 $\exists! z = z_f \in H, s.t. : \forall x \in H, f(x) = <x, z>$, 且 $||f|| = ||z||$;

18. 内积空间的元素相等: 设 X 是内积空间, 元素 $v_1, v_2 \in X$, 若对 $\forall w \in X$, 有 $<v_1, \omega> = <v_2, \omega>$, 则 $v_1 = v_2$. 特别的, 若对 $\forall w \in X$, 有 $<v_1, w> = 0$, 则 $w = 0$;

19. Hahn-Banach 定理: 设 X 是赋范空间, 子空间 $Z \subset X$, 映射 $f : Z \to K$ 是有界线性泛函, 则 f 的延拓 $\exists \tilde{f} : X \to K$ 也是有界线性泛函, 并满足:

(a) 延拓: $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in Z$;

(b) 保范: $||\tilde{f}|| = ||f||$;

(c) 推论: 设 X 是赋范空间, $x_0 \in X, x_0 \neq \theta$, 则 $\exists \tilde{f} : X \to K$ 有界线性泛函, 使得 $\tilde{f}(x_0) = ||x_0|| \neq 0$, 且 $||\tilde{f}|| = 1$;

(d) 注释: 赋范空间 X 上的有界线性泛函足够多. 即若 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则 $\exists \tilde{f} : X \to K$ 有界线性泛函, 使得 $\tilde{f}(x_1) \neq \tilde{f}(x_2)$;

20. 一致有界定理 (共鸣定理): 设 X 是巴拿赫空间, Y 是一般赋范空间, 序列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} : X \to Y$ 中的算子都有界线性. 若 $\forall x \in X, \exists M_x > 0$, 使得 $||T_n x|| \leq M_x, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, 则 $\exists M > 0$ 使得 $||T_n|| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}^+$;

21. 开映射: 设 X, Y 是度量空间, 映射 $T : X \to Y$. 若 X 中任意开集 U, 它的象 $TU = \{Tx, x \in U\}$ 是 Y 中的开集, 则称 T 是开映射;

    (a) 注意: 连续映射 ($Im \to Ker$ 均是开集)$\neq$ 开映射 ($Ker \to Im$ 均是开集);

22. 开映射定理: 设 X, Y 是巴拿赫空间, 映射 $T : X \to Y$ 是满射且为有界线性算子, 则 T 是开映射;

    (a) 进一步, 若 T 是双射且为有界线性算子, 则逆映射 $T^{-1} : Y \to X$ 是连续线性算子;

23. 等价范数: 设 X 是线性空间, 范数 $||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 都是 X 上的范数, 且 $(X, ||\cdot||_1)$ 和 $(X, ||\cdot||_2)$ 都是完备的. 若存在 $b > 0$, 使得 $||x||_2 \leq b||x||_1, \forall x \in X$, 则存在 $a > 0$, 使得 $||x||_1 \leq a||x||_2, \forall x \in X$. 从而, $||x||_1$ 与 $||x||_2$ 是等价的;

24. 闭线性算子: X, Y 是赋范空间, 映射 $T : D(T) \subset X \to Y$ 是线性算子, 乘积赋范空间 $(X \times Y, ||\cdot||)$ 中的元素 $(x, y) \in X \times Y$, 乘积空间的范数 $||(x, y)|| = ||x|| + ||y||$. 若算子 T 的图 $G(T) = \{(x, y) \in X \times Y | x \in D(T), y = Tx\}$ 在 $X \times Y$ 中是闭集, 则称 T 为闭线性算子;

    (a) 注意: 对于线性算子, 闭算子 $\not\Rightarrow$ 连续 (有界);

25. 闭图像定理: 设 X, Y 是巴拿赫空间, 线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$. 若 $D(T)$ 是闭集, 且 T 是闭算子, 则 T 有界;

    (a) 闭算子条件: $T : D(T) \subset X \to Y$ 有界线性, 且 $D(T)$ 是闭集, 则 T 是闭算子;

26. 伴随算子: 设 X, Y 是赋范空间, X 的对偶空间 $X' = \{f : X \to K \text{有界线性泛函}\}$, Y 的对偶空间 $Y' = \{g : Y \to K \text{有界线性泛函}\}$, 有界线性算子 $T : X \to Y$, 则可定义 $T^* : Y' \to X', g \to T^*g$, 满足 $T^*g(x) := g(Tx)$. 称 T^* 为 T 的伴随算子;

    (a) 伴随算子 T^* 是线性有界算子, 且 $||T^*|| = ||T||$;

27. 二次对偶空间: 设 $(X, ||\cdot||)$ 是赋范空间, 对偶空间 $X' = \{f : X \to K \text{有界线性泛函}\}$, 算子 $f \in X'$ 的范数 $||f|| = \sup\limits_{x \in X, x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{||x||}$, 则 $(X', ||\cdot||)$

也是赋范空间. X' 的对偶空间 $(X')' = \{g : X' \to K$有界线性泛函$\}$, 再对算子 $g \in (X')'$ 定义范数 $||g|| = \sup\limits_{f \in X', f \neq \theta} \frac{|g(f)|}{||f||}$ 得到赋范空间 $((X')', ||\cdot||)$. 称 $(X')'$ 为 X 的二次对偶空间, 记作 X'';

(a) 赋范空间 $X, x \in X$, 定义 $g_x : X' \to K, f \to g_x(f) = f(x)$, 则 $g_x \in X''$ 是有界线性泛函, 且 $||g_x|| = ||x||$;

28. 弱收敛: 在赋范空间 X 中, 有序列 $\{x_n\} \subset X$, 若有界线性泛函 $\forall f \in X', f(x_n) \to f(x)$, 则称序列弱收敛, 记为 $x_n \to^{\omega} x \in X$(手写时 ω 记在 $\to$ 上方);

    (a) 弱收敛的极限唯一;

    (b) 弱收敛序列的任意子序列也是弱收敛;

    (c) 弱收敛序列一定是有界的, 即 $||x_n|| \leq M, \forall n$;

29. 强弱收敛的关系:

    (a) 在赋范空间 X 中, 序列 $\{x_n\} \subset X$, 若序列强收敛 $x_n \to x$, 则序列弱收敛 $x_n \to^{\omega} x$;

    (b) 在赋范空间 X 中, 若维数 $\dim X = K < +\infty$ 有限, 则弱收敛可推出强收敛;

30. 在希尔伯特空间 H 中, 序列 $x_n \to^{\omega} x$ 当且仅当 $\forall z \in H$ 都有 $< x_n, z > \to < x, z >$;

6 实变函数

1. $\sigma-$ 代数与可测: 设 $X = \mathbb{R}^n$, 集类 $\Sigma = \{E \subset \mathbb{R}^n\}$ 满足下面的三个性质, 则称 Σ 为一个 $\sigma-$ 代数, 称 $(\mathbb{R}^n, \Sigma)$ 为可测空间, 称 $E \in \Sigma$ 为可测集:

    (a) 平庸封闭: $\phi, \mathbb{R}^n \subset \Sigma$;

    (b) 余运算封闭: 若 $E \in \Sigma$, 则 $E^c = \mathbb{R}^n \backslash E \in \Sigma$;

    (c) 可列并封闭: 若 $E_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}$, 则 $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$;

        i. (或) 可列交封闭: 若 $E_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}$, 则 $\cap_{i=0}^{\infty} E_i \in \Sigma$;

2. 不等号定义: 设 $X = \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, ..., a_n)^T, b = (b_1, ..., b_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 若 $a_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n$, 则称 $a \leq b$;

(a) 半开半闭区间: $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}^n,a_i<x\le b_i,1\le i\le n\}$;

3. 测度: 对集类 $\mathfrak{C}=\{(a,b],a,b\in\mathbb{R}^n,a<b\}$, 定义测度 $m:\mathfrak{C}\to[0,+\infty]((a,b]\to m(a,b]),m(a,b]=\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$;

4. 集类生成的 $\sigma-$ 代数: 设 $X=\mathbb{R}^n$, 集类 $\mathfrak{C}=\{(a,b]\}$, 则 $\exists!\sigma-$ 代数 $\sigma(\mathfrak{C})$ 使得 $\mathfrak{C}\subset\sigma(\mathfrak{C})$, 且若还有一个 $\sigma-$ 代数 Σ 满足 $\mathfrak{C}\subset\Sigma$, 则 $\sigma(\mathfrak{C})\subset\Sigma$. 称 $\sigma(\mathfrak{C})$ 为由 $\mathfrak{C}$ 生成的 $\sigma-$ 代数;

   (a) Borel $\sigma-$ 代数: $\sigma(\mathfrak{C})=\beta$. 可测空间 $(\mathbb{R}^n,\beta)$ 称为 Borel 可测空间, $\mathbb{R}^n$ 上的子集 $B\in\beta$ 作为 β 的元素被称为 Borel 可测集;

      i. $\beta=\sigma(\{(a,b]\})=\sigma(\{(a,b)\})=\sigma(\{[a,b]\})=\sigma(\{开集\})$;

      ii. 子集 B 的测度: $m(B)=\inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(I_n),B\subset\cup_{n=1}^{\infty}\}$, 其中 I_n 为半开半闭区间;

   (b) Borel 测度空间: 装配了测度 m 的 Borel 可测空间 $(\mathbb{R}^n,\beta,m)$;

      i. $m(\phi)=0$;

      ii. 可列可加性: 若可列个 Borel 可测集 $B_i\in\beta,i\in\mathbb{N}$, 且它们两两不交 $B_i\cap B_j=\phi$, 则 $m(\cup_{i=1}^{\infty}B_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(B_i)$;

   (c) Lebesgue $\sigma-$ 代数: 称 $\bar{\beta}=\mu=\sigma(\{z\subset B|B\in\beta,m(B)=0\}\cup\beta)$ 即全部零测度集的全体子集为 Lebesgue $\sigma-$ 代数, 称 $E\in\bar{\beta}$ 为 Lebesgue 可测集;

5. 测度的性质:

   (a) 可数集 $E=\{x_i,i\in\mathbb{N}\}\in\mu,m(E)=0$;

   (b) $\{x_0\}\in\mu,m(\{x_0\})=0$;

   (c) 次可加性: $m(\cup_{i=1}^{\infty}E_i)\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}(E_i)$;

   (d) 下连续性: 若 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mu,E_1\subset E_2\subset...\subset E_i\subset...$, 则 $m(\cup_{i=1}^{\infty}E_i)=m(\lim\limits_{i\to\infty}E_i)=\lim\limits_{i\to\infty}m(E_i)$;

   (e) 上连续性: 若 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mu,...\subset E_i\subset...\subset E_2\subset E_1$, 且 $m(E_1)<+\infty$, 则 $m(\cap_{i=1}^{\infty}E_i)=m(\lim\limits_{i\to\infty}E_i)=\lim\limits_{i\to\infty}m(E_i)$;

   (f) 若 $E\subset\mu,x_0\in\mathbb{R}^n,E+x_0=\{x+x_0,x\in E\}$, 则 $m(E)=m(E+x_0)$;

6. 可测函数: 函数 $f:(\mathbb{R}^n,\mu)\to(\mathbb{R},\beta)$, 若 $\forall B\subset\mathbb{R}$(Borel 可测集) 有 $f^{-1}(B)\subset\mathbb{R}^n$(Lebesgue 可测集), 则称 f 为可测函数;
   (a) 设函数 $f:E\to\mathbb{R}, E\in\mu$(Lebesgue 可测集), 若 $\forall B\subset\mathbb{R}$(Borel 可测集), 有 $f^{-1}(B)\subset\mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集, 则称 f 是 E 上的可测函数;
   (b) $f:E\to\mathbb{R}$ 是可测函数 $\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, f^{-1}(t,+\infty)$(或 $f^{-1}[t,+\infty), f^{-1}(-\infty,t), f^{-1}(-\infty,t], f^{-1}(a,$ $\mathbb{R}$) 是 Lebesgue 可测集;

7. 几乎处处: $a.e.$ 表示几乎处处, 即除去零测集 $m(\{x\in E: f_k(x)\nrightarrow f(x)\})=0$ 外的部分;

8. 控制收敛定理: 设 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}: E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, f_k(x)\in L(E), k\in\mathbb{N}$ 即 Lebesgue 可积, 且 $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x)\to f(x), a.e.x\in E$, 存在 $F(x)\in L(E)$ 使得 $|f_k(x)|\le F(x), a.e.x\in E, \forall k\in\mathbb{N}$, 则 $\lim\limits_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E \lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x)dx=\int_E f(x)dx$;

9. 函数 $f,g:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 可测, 若 $f(x)=g(x), a.e.x\in E$, 则 $\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx$;

10. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集, 函数 $f:E\to\mathbb{R}$ 是可测函数, 等价类 $[f]=\{g:E\to\mathbb{R}\text{是可测函数}, g(x)=f(x), a.e.x\in E\}$, 代表元 $f\in[f]$, 对任意 $f_1,f_2\in[f]$, 有 $\int_E f_1(x)dx=\int_E f_2(x)dx$;

11. L^P 空间: 给定 $1\le P<+\infty, L^P(E):=\{[f]:\quad f:E\nrightarrow\mathbb{R}\text{是可测函数}, \int_E|f(x)|^P dx<+\infty\}$. 当 $P=+\infty$ 时, $L^\infty(E)=\{[f]:\quad f:E\to\mathbb{R}\text{是可测函数}, \inf\limits_{z\subset E, m(z)=0}\left(\sup\limits_{E\setminus Z}|f(x)|\right)<+\infty\}$. 有时可以用代表元 f 代替等价类 $[f]$, 而省略 $[f]$;
    (a) L^P 赋范空间: 当 $1\le P<+\infty, X=L^P(E), ||\cdot||_P: L^P(E)\to\mathbb{R}(f\to||f||_P), ||f||_P=\left(\int_E|f(x)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}}<+\infty$. 当 $P=+\infty, ||\cdot||: L^\infty(E)\to\mathbb{R}(f\to||f||_\infty), ||f||_\infty=\inf\limits_{m(z)=0, z\subset E}\left(\sup\limits_{E\setminus Z}|f(x)|\right)<+\infty$. 则 $(L^P, ||\cdot||_P)$ 是赋范空间;
       i. $L^P(E), 1\le P\le+\infty$ 是完备赋范空间 (巴拿赫空间);
       ii. 当 $1\le P<+\infty$ 时, $L^P(E)$ 是可分空间; 当 $P=+\infty$ 时, $L^P(E)$ 是不可分空间;

(b) L^P 线性空间: 空间 $X = L^P(E), 1 \leq P \leq +\infty$, 数域 $K = \mathbb{R}$, 加法 $+ : X \times X \to X((f,g) \to f+g, (f+g)(x) = f(x)+g(x), \forall x \in E)$, 数乘 $\cdot : K \times X \to X((\alpha, f) \to \alpha f, (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in E)$, 则 $(L^P(R), \mathbb{R}, +, \cdot)$ 是线性空间;

12. Holder 不等式: 若 $f \in L^P(E), g \in L^q(E), \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, 则 $\int_E |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$. 即 $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$;
    (a) 当 $p = q = 2$ 时, Holder 不等式退化为柯西-许瓦兹不等式;
    (b) 当 $m(E) < +\infty, 1 \leq P_1 < P_2 < +\infty$, 有 $L^{P_2}(E) \subset L^{P_1}(E)$;
13. 勒让德多项式: 在 L^2 上的基 $\{1, t, t^2, ..., t^n, ...\}$ 经过施密特正交化后得到的正交规范基;