实变函数

1. $\sigma-$ 代数与可测: 设 $X=\mathbb{R}^n$, 集类 $\Sigma=\{E\subset\mathbb{R}^n\}$ 满足下面的三个性质, 则称 Σ 为一个 $\sigma-$ 代数, 称 $(\mathbb{R}^n,\Sigma)$ 为可测空间, 称 $E\in\Sigma$ 为可测集:
   (a) 平庸封闭: $\phi,\mathbb{R}^n\subset\Sigma$;
   (b) 余运算封闭: 若 $E\in\Sigma$, 则 $E^c=\mathbb{R}^n\backslash E\in\Sigma$;
   (c) 可列并封闭: 若 $E_i\in\Sigma, i\in\mathbb{N}$, 则 $\cup_{i=1}^{\infty}E_i\in\Sigma$;
      i. (或) 可列交封闭: 若 $E_i\in\Sigma, i\in\mathbb{N}$, 则 $\cap_{i=0}^{\infty}E_i\in\Sigma$;
2. 不等号定义: 设 $X=\mathbb{R}^n$, $a=(a_1,...,a_n)^T, b=(b_1,...,b_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 若 $a_i\le b_i, 1\le i\le n$, 则称 $a\le b$;
   (a) 半开半闭区间: $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}^n, a_i<x\le b_i, 1\le i\le n\}$;
3. 测度: 对集类 $\mathfrak{C}=\{(a,b],a,b\in\mathbb{R}^n,a<b\}$, 定义测度 $m:\mathfrak{C}\to[0,+\infty]((a,b]\to m(a,b]), m(a,b]=\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$;
4. 集类生成的 $\sigma-$ 代数: 设 $X=\mathbb{R}^n$, 集类 $\mathfrak{C}=\{(a,b]\}$, 则 $\exists!\sigma-$ 代数 $\sigma(\mathfrak{C})$ 使得 $\mathfrak{C}\subset\sigma(\mathfrak{C})$, 且若还有一个 $\sigma-$ 代数 Σ 满足 $\mathfrak{C}\subset\Sigma$, 则 $\sigma(\mathfrak{C})\subset\Sigma$. 称 $\sigma(\mathfrak{C})$ 为由 $\mathfrak{C}$ 生成的 $\sigma-$ 代数;
   (a) Borel $\sigma-$ 代数: $\sigma(\mathfrak{C})=\beta$. 可测空间 $(\mathbb{R}^n,\beta)$ 称为 Borel 可测空间, $\mathbb{R}^n$ 上的子集 $B\in\beta$ 作为 β 的元素被称为 Borel 可测集;
      i. $\beta=\sigma(\{(a,b]\})=\sigma(\{(a,b)\})=\sigma(\{[a,b]\})=\sigma(\{\text{开集}\})$;
      ii. 子集 B 的测度: $m(B)=\inf\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(I_n), B\subset\cup_{n=1}^{\infty}\}$, 其中 I_n 为半开半闭区间;
   (b) Borel 测度空间: 装配了测度 m 的 Borel 可测空间 $(\mathbb{R}^n,\beta,m)$;
      i. $m(\phi)=0$;
      ii. 可列可加性: 若可列个 Borel 可测集 $B_i\in\beta, i\in\mathbb{N}$, 且它们两两不交 $B_i\cap B_j=\phi$, 则 $m(\cup_{i=1}^{\infty}B_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(B_i)$;
   (c) Lebesgue $\sigma-$ 代数: 称 $\bar{\beta}=\mu=\sigma(\{z\subset B|B\in\beta, m(B)=0\}\cup\beta)$ 即全部零测度集的全体子集为 Lebesgue $\sigma-$ 代数, 称 $E\in\bar{\beta}$ 为 Lebesgue 可测集;

5. 测度的性质:

   (a) 可数集 $E = \{x_i, i \in \mathbb{N}\} \in \mu, m(E) = 0$;

   (b) $\{x_0\} \in \mu, m(\{x_0\}) = 0$;

   (c) 次可加性: $m(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} (E_i)$;

   (d) 下连续性: 若 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mu, E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_i \subset ...$, 则 $m(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = m(\lim\limits_{i\to\infty} E_i) = \lim\limits_{i\to\infty} m(E_i)$;

   (e) 上连续性: 若 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mu, ... \subset E_i \subset ... \subset E_2 \subset E_1$, 且 $m(E_1) < +\infty$, 则 $m(\cap_{i=1}^{\infty} E_i) = m(\lim\limits_{i\to\infty} E_i) = \lim\limits_{i\to\infty} m(E_i)$;

   (f) 若 $E \subset \mu, x_0 \in \mathbb{R}^n, E + x_0 = \{x + x_0, x \in E\}$, 则 $m(E) = m(E + x_0)$;

6. 可测函数: 函数 $f : (\mathbb{R}^n, \mu) \to (\mathbb{R}, \beta)$, 若 $\forall B \subset \mathbb{R}$(Borel 可测集) 有 $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$(Lebesgue 可测集), 则称 f 为可测函数;

   (a) 设函数 $f : E \to \mathbb{R}, E \in \mu$(Lebesgue 可测集), 若 $\forall B \subset \mathbb{R}$(Borel 可测集), 有 $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集, 则称 f 是 E 上的可测函数;

   (b) $f : E \to \mathbb{R}$ 是可测函数 $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, f^{-1}(t, +\infty)$(或 $f^{-1}[t, +\infty), f^{-1}(-\infty, t), f^{-1}(-\infty, t], f^{-1}(a,$ $\mathbb{R}$) 是 Lebesgue 可测集;

7. 几乎处处: $a.e.$ 表示几乎处处, 即除去零测集 $m(\{x \in E : f_k(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0$ 外的部分;

8. 控制收敛定理: 设 $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_k(x) \in L(E), k \in \mathbb{N}$ 即 Lebesgue 可积, 且 $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) \to f(x), a.e. x \in E$, 存在 $F(x) \in L(E)$ 使得 $|f_k(x)| \le F(x), a.e. x \in E, \forall k \in \mathbb{N}$, 则 $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E \lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x)dx = \int_E f(x)dx$;

9. 函数 $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可测, 若 $f(x) = g(x), a.e. x \in E$, 则 $\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx$;

10. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集, 函数 $f : E \to \mathbb{R}$ 是可测函数, 等价类 $[f] = \{g : E \to \mathbb{R}$是可测函数$, g(x) = f(x), a.e. x \in E\}$, 代表元 $f \in [f]$, 对任意 $f_1, f_2 \in [f]$, 有 $\int_E f_1(x)dx = \int_E f_2(x)dx$;

11. L^P 空间: 给定 $1 \leq P < +\infty, L^P(E) := \{[f] : \quad f : E \nrightarrow \mathbb{R}$是可测函数$, \int_E |f(x)|^P dx < +\infty\}$. 当 $P = +\infty$ 时$, L^\infty(E) = \{[f] : \quad f : E \to \mathbb{R}$是可测函数$, \inf_{z \subset E, m(z)=0} \left(\sup_{E \setminus Z} |f(x)| \right) < +\infty\}$. 有时可以用代表元 f 代替等价类 $[f]$, 而省略 $[f]$;

    (a) L^P 赋范空间: 当 $1 \leq P < +\infty, X = L^P(E), ||\cdot||_P : L^P(E) \to \mathbb{R}(f \to ||f||_P), ||f||_P = \left(\int_E |f(x)|^P dx\right)^{\frac{1}{P}} < +\infty$. 当 $P = +\infty, ||\cdot|| : L^\infty(E) \to \mathbb{R}(f \to ||f||_\infty), ||f||_\infty = \inf_{m(z)=0, z \subset E} \left(\sup_{E \setminus Z} |f(x)| \right) < +\infty$. 则 $(L^P, ||\cdot||_P)$ 是赋范空间;

        i. $L^P(E), 1 \leq P \leq +\infty$ 是完备赋范空间 (巴拿赫空间);

        ii. 当 $1 \leq P < +\infty$ 时$, L^P(E)$ 是可分空间; 当 $P = +\infty$ 时$, L^P(E)$ 是不可分空间;

    (b) L^P 线性空间: 空间 $X = L^P(E), 1 \leq P \leq +\infty$, 数域 $K = \mathbb{R}$, 加法 $+ : X \times X \to X((f, g) \to f + g, (f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in E)$, 数乘 $\cdot : K \times X \to X((\alpha, f) \to \alpha f, (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in E)$, 则 $(L^P(R), \mathbb{R}, +, \cdot)$ 是线性空间;

12. Holder 不等式: 若 $f \in L^P(E), g \in L^q(E), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $\int_E |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$. 即 $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$;

    (a) 当 $p = q = 2$ 时, Holder 不等式退化为柯西-许瓦兹不等式;

    (b) 当 $m(E) < +\infty, 1 \leq P_1 < P_2 < +\infty$, 有 $L^{P_2}(E) \subset L^{P_1}(E)$;

13. 勒让德多项式: 在 L^2 上的基 $\{1, t, t^2, ..., t^n, ...\}$ 经过施密特正交化后得到的正交规范基;