[**笔者说明**] 该课程是笔者在校选修的感兴趣课程, 理论上是对<微分方程数值解>中双曲型守恒律方程的延伸. 此笔记与<微分方程数值解>笔记互为补充. 其任一者既可能存在重复, 也可能需要另一份笔记补充以阅读.

一. 双曲守恒律简介

[**课程的研究对象**] 本课程研究形如 $\frac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{i=1}^{d}A_i(u,x_1,...,x_d,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}=g(u,x_1,...,t)$ 的一阶偏微分方程 (组).

$x=(x_1,...,x_d)\in\Omega\subset R^d$ 是空间变量, $t\in R^+$ 是时间变量.

$u=(u_1,...,u_n)^T$ 和 $g=(g_1,...,g_n)^T$ 为已知的向量函数. $A_i,(i=1,...,n)$ 为已知的矩阵函数, 每个 A_i 都是 $n\times n$ 的实矩阵.

当 $n=1$ 时, 该式为一个方程; 当 $n>1$ 时, 该式为方程组.

1. 一阶双曲型守恒律方程 (组)

[**双曲型方程**] 对于 $\frac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{i=1}^{d}A_i(u,x_1,...,x_d,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}=g(u,x_1,...,t)$, 若在变量 $(u,x_1,...,x_d,t)$ 变化的范围内, 对于任意单位向量 $\omega=(\omega_1,...,\omega_d)$, 矩阵 $\sum\limits_{i=1}^{d}\omega_iA_i$ 都有 n 个实特征值, 则其为双曲型方程.

对于实函数, 当 $n=1$ 时其永远是双曲型.

当空间变量只有一个时 $(d=1)$, 方程简化为 $\frac{\partial u}{\partial t}+A(u,x,t)\frac{\partial u}{\partial t}=g(u,x,t)$.

[**严格双曲型方程**] 对于双曲型方程, 若矩阵 $\sum\limits_{i=1}^{d}\omega_iA_i$ 的 n 个特征值各不相同, 则其为严格双曲型方程.

[**守恒律**] 若双曲型方程可以写成形式 $\frac{\partial u}{\partial t}+\sum\limits_{i=1}^{d}\frac{\partial f_i(u,x_1,...,x_d,t)}{\partial x_i}=g(u,x_1,...,x_d,t)$, 其中每个 f_i 是同 u 一样维数的向量函数, 则称方程满足守恒律.

即若方程可以找到与 u 同样维数的向量函数 f_i, 使 $A_i(u,x_1,...,x_d,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{\partial f_i(u,x_1,...,x_d,t)}{\partial x_i}$, 则方程满足守恒律.

当 $g=0$ 时, 此守恒律是齐次的.

[**守恒形式**] 守恒律方程可记为 $u_t+\nabla_x\cdot f(u)=g(u,x,t)$. 其中, $x\in R^d$ 是空间变量, $u(x,t)\in R^d$ 是待求函数 (物理守恒量).

通量函数: $f:R^n\to R^{d\times n}$, 一半时非线性的;

源项: $g\in R^m$.

[**Jacobi 矩阵**] 守恒律方程形式 $u_t+\sum\limits_{i=1}^{d}A_i(u)u_{x_i}=g(u,x,t)$ 中的 $A_i(u)=\left(\frac{\partial f_{ij}(u)}{\partial u_k}\right)_{j=1,...,n;k=1,...,n}$ 是第 i 维通量的 Jacobi 矩阵.

[**常见的两个双曲守恒律方程**]

Hopf 方程: $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$, 又称 "无粘性" 的 Burgers 方程;

弦振动方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=g(x,t)$, 其中 $a^2>0$.

弦振动方程可通过 $\begin{cases} p=\frac{\partial u}{\partial x} \\ q=\frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$ 变换得到 $\begin{cases} p_t-q_x=0 \\ q_t-a^2p_x=g(x,t) \end{cases}$.

对比双曲型方程形式, 有 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}$. 其特征值为 $\pm a$, 是严格双曲型方程.

2. 双曲守恒律及其数值方法的特点

[**双曲型方程没有耗散**] 没有耗散意味着方程的通解不会随着时间推演而变得光滑.

如果在初值或计算过程中产生了间断, 间断一般不会消失.

[**双曲守恒律方程一般是非线性的**] 对于非线性方程, 即使初值光滑, 方程也可能在发展过程中产生间断.

设计数值格式时必须考虑间断解存在的可能.

[**双曲守恒律方程的适定性**] 需要正则性较弱的有界变差空间估计.

[**守恒律的特点**]

1. 守恒量具有守恒性;

2. 方程的解沿特征线传播, 且传播速度有限.

[**Riemann 问题**] 初值为两片常数的初值问题.

对于一维双曲型方程 (组)$\frac{\partial u}{\partial t}+A(u,x,t)\frac{\partial u}{\partial t}=g(u,x,t)$, 分片常数初值可表示为 $u_0(x)=\begin{cases} u_l, & x<0 \\ u_r, & x>0 \end{cases}$. 其中 u_l,u_r 是两个常数或常向量.

双曲守恒律问题经过分片常数离散后, 其时间推进格式与求解局部 Riemann 问题非常相关.