度量空间与集合 (作业: 20230220)

1. 度量空间: 设 X 是集合, 有映射 $d:(x,y)\to d(x,y).d$ 满足:

   (a) $\forall x,y\in X,d(x,y)\geq 0$;

   (b) $\forall x,y\in X$,$d(x,y)=d(y,x)$;

   (c) $\forall x,y,z\in X,d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$;

   则称 d 为一个度量 (距离), (X,d) 为度量空间;

2. 常见度量:

   (a) $p-$ 度量: $d_p(x,y)=\left(\sum\limits_{x=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;

   (b) $\infty-$ 度量: $d_\infty(x,y)=\max|x_i-y_i|$;

3. 球: 在度量空间 (X,d) 中, 称

   (a) 开球: $B(x_0,r)=\{x\in X|d(x,x_0)<r\}$;

   (b) 闭球: $\overline{B(x_0,r)}=\{x\in X|d(x,x_0)\leq r\}$;

   (c) 球面: $S(x_0,r)=\{x\in X|d(x,x_0)=r\}$;

4. $\varepsilon-$ 邻域: 开球 $B(x_0,\varepsilon)$ 称为 x_0 的一个 $\varepsilon-$ 邻域;

   (a) 开集: 度量空间 $(X,d),M\subset X$, 若对任意元素 $x_0\in M$, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(x_0,\varepsilon)\subset M$, 则称 M 是 X 中的开集;

   (b) 闭集: 度量空间 $(X,d),K\subset X$, 若 $K^c=X|K$ 是开集, 则称 K 是 X 中的闭集;

   (c) 内点: 度量空间 (X,d), $M\subset X,x_0\in M$, 若存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(x_0,\varepsilon)\subset M$, 则称 x_o 是 M 的一个内点;

   (d) 内部: M 中全体内点构成的集合称为 M 的内部, 记为: M^o;

5. 集类: Ξ 是 X 中某些子集构成的集合, 称 Ξ 为集类;

6. 拓扑空间: 满足开集条件的集类组成的空间 (X,Ξ), 定义见另一笔记文件;

7. 聚点 (极限点): 度量空间 $(X,d),M\subset X,x_0\in X$, 若, x_0 的任一 $\varepsilon-$ 邻域都至少函有一个不同于 x_0 的点 $y_o\in M$, 则称 x_0 是 M 的聚点;

(a) 导集: M 的聚点全体构成的集合称为 M 的导集, 记为 M';

(b) 闭包: $\bar{M} := M \cup M'$;

  i. 度量空间 $(X, d), M \subset X$, 则 $\overline{M}$ 是闭集;

  ii. 度量空间 $(X, d), M \subset X : M$ 是闭集 $\Leftrightarrow M = \bar{M}$;

(c) 边缘: $\partial M = \bar{M} - M^o$;

8. 有限集: 如果集合中元素个数有限, 则称其为有限集;

   (a) 可列集: 若集合中元素的个数无限多, 但可与自然数集 $\mathbb{N}$ 中的元素一一对应, 则集合为可列集;

   (b) 可数集: 有限集和可列集统称为可数集;

   (c) $A_n(n \in \mathbb{N})$ 为可列集, 则 $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ 为可列集;

     i. 推论: 可列个可列集的并集为可列集. 如: 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集;

   (d) 常见的不可列集: 无理数集, 实数集 $\mathbb{R}$;

9. 稠密子集: 度量空间 $(X, d), M \subset X$, 若 $\overline{M} = X$, 则称 M 在 X 中稠密, M 是 X 中的稠密子集;

10. 可分性: 若 X 有一个可数的稠密子集 M, 则称 X 是可分的, (X, d) 是一个可分空间;

    (a) 常见可分空间: $(\mathbb{R}^n, d_p)(1 \le p \le \infty)$, $(l^p, d_p)(1 \le p \le \infty)$, 其中 $l^p = \{\{x_i\}, i \in \mathbb{N}, \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$;

      i. 函数空间可分: $(\mathbb{C}[a, b], d_{max})$
      $d_{max}(f, g) = \max_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|$
      $C[a, b] = \{f : [a, b] \to R | \exists f'(t)\}$

    (b) 常见不可分空间: (l^{∞}, d_{∞});
    $l^{\infty} = \{(x_i) | i \in \mathbb{N}, \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$

11. 作业: 20230220

    (a) 设 (X, d) 是任一度量空间, 证明由 $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ 在 X 上定义了另一个度量, 且在 $\tilde{d}$ 度量下, X 是有界的;