二. 一维标量守恒律的数学性质

1. 特征线

[**特征线法**] 对于准线性偏微分方程 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\vec{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\vec{x},u)$, 其中 $u(\vec{x}) = u(x_1,x_2,...,x_N)$. 定义特征线 $\frac{\partial x_k}{\partial s} = a_k(\vec{x},u)$, 原方程可变为常微分方程组 $\begin{cases}\frac{\partial x_k}{\partial s} = a_k(\vec{x},u) \\ \frac{du}{ds} = b(\vec{x},u)\end{cases}, k = 1,...,n$. 方程组中第二个方程表示原方程的解沿给定特征线的变化.

定义变量 s, 将 $u(\vec{x})$ 对 s 求导得: $\frac{du}{ds} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial s}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

给 s 增加限制条件 $\frac{\partial x_k}{\partial s} = a_k(\vec{x},u)$, 得 $\frac{du}{ds} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\vec{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\vec{x},u)$.

原方程变为 $\begin{cases}\frac{\partial x_k}{\partial s} = a_k(\vec{x},u) \\ \frac{du}{ds} = b(\vec{x},u)\end{cases}, k = 1,...,n.$

[**对流方程**] 形如 $u_t + [a(x)u]_x = 0$ 的方程被称为对流方程, 其中 a 是关于 x 的光滑函数.

[**常系数对流方程的特征 (线)**] 对于一维常系数线性对流方程 $u_t + au_x = 0$ 在无穷区域 $x \in (-\infty,+\infty)$ 上的初值问题 $u(x,0) = u_0(x)$, 其特征线为满足 $x'(t) = a, x(0) = x_0$ 的直线 $x - at = x_0$.

[**变系数对流方程的特征 (方程)**] 对于 $u_t + [a(x)u]_x = 0$, 其中 $a(x)$光滑. 其特征线满足 $x'(t) = a(x(t)), x(0) = x_0$.

[**一维标量双曲型方程的特征线**] 对于一维标量双曲型方程 $u_t + A(u,x,t)u_x = g(u,x,t)$, 其特征线 $((X(t),t)$ 是 $x-t$ 平面内的一条曲线. 特征线满足 $\frac{dX(t)}{dt} = A(u,X(t),t)$.

当源项 $g = 0$ 时, 沿 u 的特征线是常数. 此时如果 A 不依赖于 X 和 t, 则特征线是一条过 $X(0)$ 的直线.

[**依赖域**] 特征线法求得方程的解 $u(x,t)$ 在任一点 $(\overline{x},\overline{t})$ 的值仅仅依赖于 u_0 在一点处的值 $\overline{x}_0$. 集合 $D(\overline{x},\overline{t}) = \{\overline{x}_0\}$ 称为点 $(\overline{x},\overline{t})$ 的依赖域.

改变除 $\overline{x}_0$ 以外所有点的数值都不会影响 $(\overline{x},\overline{t})$.

[**依赖区间 (依赖区域)**] 对于方程组, 每个方程的依赖域共同构成一个依赖区间或区域.

守恒律系统的依赖域总是有界的, 因为守恒律方程解的传播速度有限. 解在 $(\overline{x},\overline{t})$ 的值依赖于距离 $\overline{x}$ 有限距离处的初值.

依赖域的大小随时间增长, 但是增长速度是有界的. 一般 $D(\overline{x},\overline{t}) \subset \{x : |x-\overline{x}| \le a_{max}\overline{t}\}$, 其中 a_{max} 对应于方程中的最大特征速度.

[**非光滑初值问题**] 当初值不光滑时, 解在间断处的导数是没有定义的.

[**引入弱解**] 只满足方程的积分形式的解. 通过特征线方法构造出来的含有间断的解是弱解.

对于守恒律方程, 在初边界条件适当给出的情况下, 弱解的存在是唯一的.

[**强解**] 处处满足方程形式的解. 也被称为古典解.

[**非光滑初值问题求强解的方法 1**] 找一组光滑初值 $u_0^\varepsilon(x)$ 来逼近间断初值, 使 $||u_0 - u_0^\varepsilon||_1 < \varepsilon, (\varepsilon \to 0)$. 对每个光滑初值, 可以找到原来线性方程的强解 $u^\varepsilon(x,t) = u_0^\varepsilon(x - at)$.

这种方法对非线性方程不适用. 对于非线性方程, 即使初值是无穷光滑的, 经过一段时间后也可能产生间断的解. 因此无法保证强解的存在性.

[**非光滑初值问题求强解的方法 2**] 在守恒律方程上加入一个比较小的扩散.

2. 间断解和 Rankine-Hugoniot 条件

[**本质非线性**] 对于非线性标量守恒律方程 $u_t + f(u)_x = 0$, 其中 $f(u)$ 是关于 u 的一个非线性函数, 如果对所有的 u 都有 $f''(u) \neq 0$(即 $f(u)$ 是严格凸或严格凹的), 则称该方程是本质非线性的.

[**弱解**] 弱解有两个等价的定义, 都是通过将原来的微分方程化成积分形式得到的.

1. 如果对于任意给定的区间 (a,b) 函数 u 都能满足 $\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx + f(u(b,t)) - f(u(a,t)) = 0$, 则 u 是方程的一个弱解.

2. 如果对任意 $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, $\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x)dxdt + \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\varphi(x,0)dx = 0$, 则称 u 是方程的一个弱解.

注意: 弱解虽然能解决解的存在性问题, 但不能解决解的唯一性问题.

[**Rankine-Hugoniot(R-H) 条件**] 弱解若连续则满足条件 $u^- = u^+$. 弱解若在 $x(t)$ 两侧不连续, 则满足条件 $x'(t) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$. 其中 $x'(t)$ 表示间断传播速度, 等于通量穿过间断点的跳跃值比解的跳跃值.

假设 u 是方程的一个分片光滑弱解, 它在一个由曲线 $(x(t), t)$ 分割成的两块区域内分别是 C^1 的. 取区间 $[a,b]$, 包含间断点 $x(t)$.

由 $\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx + f(u(b,t)) - f(u(a,t)) = 0$ 沿间断点拆分得:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_a^{x(t)} u(x,t)dx + \int_{x(t)}^b u(x,t)dx\right] + f(u(b,t)) - f(u(a,t)) = 0.$$

因为 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$ 且 $x'(t) = \frac{dx}{dt}$, 得:

$$\begin{aligned} 0 &= u^- x'(t) + \int_a^{x(t)} u_t(x,t)dx - u^+ x'(t) + \int_{x(t)}^b u_t(x,t)dx + f(u(b,t)) - f(u(a,t)) \\ &= (u^- - u^+)x'(t) - f(u(b,t)) + f(u^+) - f(u^-) + f(u(a,t)) + f(u(b,t)) - f(u(a,t)) \\ &= (u^- - u^+)x'(t) + [f(u^+) - f(u^-)]. \end{aligned}$$

即: $x'(t) = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$.

[**激波**] 若方程弱解中的间断是由间断两边的特征相互汇聚最终相交形成的, 则这个间断被称为激波.

3. 熵解和熵条件

[**熵解**] 当方程有多个弱解时, 唯一一个与物理相符的解被称为熵解. 其名称来源于物理中的熵增加定律.

熵解被定义为满足方程 $\begin{cases} u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \\ u^\varepsilon(x,0) = u^0(x) \end{cases}$ $,\varepsilon \in (0,1]$ 的解 $u(x,t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(x,t)$.

[**一般熵条件**] 任取熵函数 $U''(u) \geq 0$, 称满足 $F'(u) = U'(u)f'(u)$ 的 F 为熵函数 U 对应的熵通量. 熵解对任意熵函数和其对应的熵通量满足 $U(u^\varepsilon)_t + F(u^\varepsilon)_x \leq 0$.

[**Oleinik 熵条件**] 设 u^-, u^+ 是间断两侧的值, 任意介于 u^-, u^+ 之间的熵解 u 都应该使不等式 $\frac{f(u)-f(u^-)}{u-u^-} \geq s \geq \frac{f(u)-f(u^+)}{u-u^+}$ 成立. 其中 $s = x'(t)$ 是间断速度, 由 R-H 条件决定.

[**Lax 熵条件**] 设 u^-, u^+ 是间断两侧的值, 如果通量函数 f 是严格凸的或严格凹的, 则熵解间断满足 $f'(u^-) > s > f'(u^+)$. 这个间断是一个激波, $s = x'(t)$ 是间断速度, 由 R-H 条件决定.

Oleinik 熵条件能够导出 Lax 熵条件. 对于一般的通量函数 f, Lax 熵条件只是一个必要条件. 当 f 是严格凸或严格凹时, Lax 熵条件充分且必要.

[L^1 **压缩性**] 初值问题 $\begin{cases} u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon \\ u^\varepsilon(x,0) = u^0(x) \end{cases}$ 的解 u^ε 是 L^1 压缩的.

即当 v^ε 是初值问题 $\begin{cases} v_t^\varepsilon + f(v^\varepsilon)_x = \varepsilon v_{xx}^\varepsilon \\ v^\varepsilon(x,0) = v^0(x) \end{cases}$ 的解, 两个解满足满足 $||u^\varepsilon(\cdot,t) - v^\varepsilon(\cdot,t)||_{L^1} \leq ||u^0 - v^0||_{L^1}$.

[**总变差**] 函数 u 的总变差 $TV(u)$ 定义为 $TV(u) := \sup\limits_h \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \right| dx$.

[**解的总变差不增性**] 守恒律初值问题的解 u 是总变差不增的, 即 $TV(u(\cdot,t)) \leq TV(u^0)$.

4.Riemann 问题

[**一维标量守恒律的黎曼问题**] $\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l, x < 0 \\ u_r, x > 0 \end{cases} \end{cases}$.

[**一维标量守恒律黎曼问题解的特征线**] 一维标量守恒律黎曼问题的特征线 $(X(t),t)$ 满足 $\frac{dX(t)}{dt} = f'(u)$.

当特征线不相交时, $X(t) = \begin{cases} x_0 + f'(u_l)t, x_0 < 0 \\ x_0 + f'(u_r)t, x_0 > 0 \end{cases}$.

[**一维标量守恒律黎曼问题解的特征速度**] 一维标量守恒律黎曼问题解的特征速度 λ_l, λ_r 定义为 $\begin{cases} \lambda_l = f'(u_l) \\ \lambda_l = f'(u_r) \end{cases}$.

1. 当 $\lambda_l < \lambda_r$ 时, 在 $x_0 = 0$ 附近的特征线会随着时间增长越来越远且不会相交, 特征线远离会产生稀疏波. 在区域 $\lambda_l t < x < \lambda_r t$ 的解需要自行构造.

2. 当 $\lambda_l > \lambda_r$ 时, 在 $x_0 = 0$ 附近的特征线将会相交. 特征线相交会产生激波, 激波的传播速度由 R-H 条件确定. 但激波的数量由 $f(\cdot)$ 的具体性质决定.

[**本质非线性 Riemann 问题**] 对于 $\lambda_l < \lambda_r$(稀疏波) 情况, 熵解为 $u(x,t) = \begin{cases} u_l, x < \lambda_l t \\ g(\frac{x}{t}), \lambda_l t \le x \le \lambda_r t \\ u_r, x > \lambda_r t \end{cases}$, 其中 $g(\cdot)$ 是 $f'(\cdot)$ 的反函数. 对于 $\lambda_l > \lambda_r$(激波) 情况, 熵解为 $u(x,t) = \begin{cases} u_l, x < st \\ u_r, x > st \end{cases}$, 其中 $s = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$ 是激波速度.

黎曼问题 (无论是稀疏波还是激波), 解都沿着射线 $\lambda = \frac{x}{t}$, $\lambda \in R$ 是常数. 若 $u(x,t)$ 是解, $u(ax, at)$ 也是解. 即解 $u(u,t)$ 只与 $\frac{x}{t}$ 有关.

设 $u(x,t) = w(\frac{x}{t})$, 其中 $w(\cdot)$ 是一个待定函数.

1. 如果有稀疏波产生.

对 $u(x,t) = w(\frac{x}{t})$ 求导得 $\begin{cases} u_t = w'(\frac{x}{t}) \cdot (-1)\frac{x}{t^2} \\ f(u)_x = f'(u) w'(\frac{x}{t}) t^{-1} \end{cases}$.

代入守恒律方程 $u_t + f(u)_x = 0$ 得 $0 = w'(\frac{x}{t}) \frac{f'(u) - \frac{x}{t}}{t}$.

1.a. 若 $w' = 0$, 即 w 是常数, 对应于左右两侧解为常数的区域.

1.b. 若 $w' \ne 0$, $t > 0$, 则 $f'(u) = \frac{x}{t}$.

本质非线性守恒律方程 f' 的反函数处处存在, 定义 $f'(\cdot)$ 的反函数为 $g(\cdot)$.

则含稀疏波的解为 $u(x,t) = \begin{cases} u_l, x < \lambda_l t \\ g(\frac{x}{t}), \lambda_l t \le x \le \lambda_r t \\ u_r, x > \lambda_r t \end{cases}$, 是熵解

2. 如果有激波产生.

含激波的解为 $u(x,t) = \begin{cases} u_l, x < st \\ u_r, x > st \end{cases}$, 其中激波速度 $s = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$. 此解满足 Lax 熵条件, 是熵解.

[**一般 Riemann 问题的困难**] 一般黎曼问题的 f 不是严格凸或严格凹的. 对于稀疏波情况, 无法确定两个初值都能通过一个稀疏波过度 (f' 不一定唯一存在). 对于激波情况, 无法只通过一个激波把两个初值连接且相应的解满足 Oleinik 熵条件.

[**一般 Riemann 问题的凸包方法**]

由熵解的总变差不增性知连接 u_l, u_r 的解 $u(x,t)$ 在 x 方向必须是单调的. 否则 $TV(u(\cdot,t)) > |u_l - u_r| = TV(u(\cdot,0))$.

设 u^-, u^+ 是连接 u_l, u_r 的解在间断处的左极限和右极限, 由 Oleinik 条件知 $\frac{f(u)-f(u^-)}{u-u^-} \geq s \geq \frac{f(u)-f(u^+)}{u-u^+}, u \in (u^-, u^+)$. 其中 s 是间断速度, 由 R-H 条件确定.

1. 对于 $u_l = u_r$. 解是一个常数 $u(x,t) = u_l = u_r$. 古典解是熵解.

2. 对于 $u_l < u_r$.

若有间断, 由总变差不增性得 $u_l \leq u^- < u^+ \leq u_r$.

Oleinik 熵条件变为 $\begin{cases} f(u) \geq f(u^-) + s(u-u^-) \\ f(u) \geq f(u^+) + s(u-u^+) \end{cases}$, 不等式右端分别是过 $(u^-, f(u^-))$ 和 $(u^+, f(u^+))$ 斜率为 s 的直线段.

由于 s 固定, 这两条线段实际上同一条直线段, 即同时过 $(u^-, f(u^-))$ 和 $(u^+, f(u^+))$ 斜率为 s 的直线段. 设该直线为 L.

若取 $u^- = u_l, u^+ = u_r$, Oleinik 熵条件成立. 即使 $f(u)$ 整体在直线 L 上方. 则 u_l, u_r 可以由一个激波直接连接, 相应的解为熵解.

如果 $u^- = u_l, u^+ = u_r$ 不能成立, 则 u^-, u^+ 只能取到某些中间值, 熵条件无法满足. 连接 u_l, u_r 的解中应该有连续过度部分, 解的形式为 $u(x,t) = w(\frac{x}{t})$, 为稀疏波.

综合上述, 此时方法即做一个连接 $(u_l, f(u_l)), (u_r, f(u_r))$ 两点的曲线 $f(u)$ 的下凸包. 下凸包中直线部分对应间断, 曲线部分对应稀疏波. 因为凸包的曲线部分是凸的, 因此对应 f' 在相应区域是可逆的. 这种构造的解满足熵条件.

3. 对于 $u_l > u_r$, 可通过构造上凸包的方法求解.