

Laboratorio di Ottica — Gruppo

Odorico Luca, Speranza Andrea, Umassi Michele

May 22, 2019

1 Scopo dell'esperienza

In questa esperienza ricaveremo il valore sperimentale del coefficiente di finesse F_{exp} studiando i massimi di interferenza. Per fare questo eseguiremo un fit dei dati sperimentali sull'andamento teorico della funzione di Airy. Calcoleremo poi il coefficiente di finesse di diverse combinazioni di specchi con diversa riflettività e per ognuno ricaveremo anche il *contrast ratio*. Infine, misurando la distanza tra le frange di interferenza circolari, saremo in grado di dedurre la lunghezza dell'interferometro.

2 Apparato sperimentale

- Laser He-Ne;
- Attenuatore di intensità del laser;
- Un'iride, per eliminare fasci spuri;
- Due specchi fissi per egolare la direzione del laser e specchi piani con diverse riflettività comprese tra $R = 0.80$ e $R = 0.98$ per la realizzazione di un interferometro Fabry-Perot;
- Slitta micrometrica dotata di ceramica piezoelettrica per regolare il movimento di uno dei due specchi dell'interferometro;
- Una lente divergente per aumentare le dimensioni dello spot;
- Un fotodiodo montato su un sostegno mobile;
- Oscilloscopio digitale con collegamento USB per l'acquisizione dei dati;
- Un generatore di segnali per alimentare il cristallo piezoelettrico;
- Carta millimetrata per misurare la distanza tra le frange circolari;

3 Note teoriche

3.1 Fabry-Però e funzione di Airy

L'interferometro FP è costituito di due specchi, posti l'uno parallelamente all'altro, caratterizzati ognuno da coefficienti di riflettività (R), assorbimento (A) e trasmissione (T), legati dalla relazione $T + R + A = 1$. Noi utilizzeremo varie combinazioni di questi per studiarne il comportamento. Consideriamo il caso di luce incidente ortogonale alla superficie dei due specchi, situazione in cui ci porremo poi. Il fascio laser, interagendo con gli specchi, subirà una serie di riflessioni e trasmissioni concatenate, le quali andranno a contribuire con coefficienti aggiuntivi e fattori di fase, oltre a quello dipendente dalla distanza tra i due specchi δ , (quelli dovuti alla trasmissione possono essere considerati una fase globale e trascurati nel calcolo dell'intensità) e alla struttura del campo elettrico trasmesso. Esso si scrive nel seguente modo:

$$E = E_0 t^2 + E_0 t^2 r^2 e^{2i(\delta+\delta_r)} + E_0 t^2 r^4 e^{4i(\delta+\delta_r)} + \dots$$

nella quale si riconosce la forma di una serie geometrica di ragione $r^2 e^{2i(\delta+\delta_r)}$, da cui

$$E = E_0 \frac{t^2}{1 - r^2 e^{i\Delta}}$$

dove $r = |r| e^{i\frac{\delta_r}{2}}$ e t sono i coefficienti che contribuiscono al campo elettrico ogni qualvolta c'è riflessione e trasmissione e $\Delta = 2(\delta + \delta_r)$. Passando poi dal campo all'intensità e sviluppando il modulo al denominatore di quest'ultima, si giunge alla formula (avendo considerato trascurabile il coefficiente di assorbimento per la lunghezza d'onda con cui lavoriamo):

$$I = I_0 \frac{1}{1 + f \sin^2 \frac{\Delta}{2}} \quad (1)$$

Questa è la funzione di Airy. Il coefficiente $f = \frac{\pi R}{(1-R)^2}$ è detto di "finesse" del FB, direttamente collegato con il potere risolutivo dello strumento $\frac{\nu}{\Delta\nu}$, ed $R = \sqrt{R_1 R_2}$. Se $\delta_r \rightarrow 0$ allora $\Delta = \frac{4\pi d}{\lambda}$ e pilotando uno dei due specchi del FB con un cristallo piezoelettrico che lo fa vibrare di ordini di grandezza pari a quello della lunghezza d'onda del laser è possibile studiare l'andamento dell'intensità in funzione della distanza relativa d fra gli specchi. Caratterizzeremo il comportamento del FB attraverso la finesse, definita come la distanza fra due picchi successivi diviso la larghezza a mezza ampiezza Σ

$$F = \frac{2\pi}{\Sigma}$$

che espressa in funzione del coefficiente di finesse F diviene

$$F = \frac{\pi}{2} \sqrt{F}$$

Si vede dunque che la larghezza a mezza ampiezza è $\Sigma \simeq \frac{4}{\sqrt{F}}$, ricavabile anche imponendo che $\frac{1}{1 + F \sin^2(\frac{\Sigma}{4})} = \frac{1}{2}$.

4 Operazioni preliminari

4.1 Allineamento dell'apparato

Anteponiamo un attenuatore di intensità davanti all'uscita del fascio laser per assicurarci che il fotodiodo lavori in regime lineare, compreso tra 0 ed 8-9 Volt, nei casi in cui gli specchi usati

abbiano dei coefficienti di riflessione bassi, che quindi consentono il passaggio di percentuali alte dell'intensità iniziale. Utilizziamo un'iride per bloccare il passaggio di fasci spuri e riflessi che potrebbero andare a sommarsi al campo trasmesso totale. Con un metro, ci assicuriamo che il fascio laser rimanga ad un'altezza costante ($\sim 14\text{ cm}$) dal tavolo di lavoro durante tutto il percorso. Ripetiamo la seguente procedura di allineamento ogni volta che cambiamo la combinazione degli specchi. Inviaio poi un segnale triangolare, attraverso il generatore di segnali, al piezoelettrico collegato al secondo specchio del FB. Fissiamo gli specchi scelti sulle apposite postazioni del FB, cercando di porli fra loro parallelamente (il percorso compiuto dal fascio laser nel FB deve essere lo stesso in ogni punto di incidenza, perpendicolarmente alla superficie degli specchi). Quando il fascio incide sull'interferometro, non ancora allineato, visualizziamo una serie di spot che giacciono sulla stessa retta: il primo passo è far convergere la serie di spot che tornano indietro dal FB, sul punto di incidenza del laser sopra il secondo dei due specchi fissi (quelli che orientano il fascio nel percorso), utilizzando le rotelle di posizionamento del primo degli specchi dell'interferometro. Una volta fatto ciò passiamo ad allineare, nello stesso modo, gli spot che invece sono trasmessi sul fotodiodo, questa volta utilizzando le rotelle del secondo specchio. Alla fine di questi passaggi visualizziamo, avendo cura di centrarlo sulla zona attiva del fotodiodo, uno spot "intermittente" (dovuto, come già detto, allo spostamento indotto dal piezoelettrico). Per la terza parte dell'esperimento porremo davanti al FB una lente divergente per rendere il fronte d'onda sferico, ma la procedura d'allineamento iniziale sarà la stessa. In questo caso visualizzeremo i dischi di Airy.

5 Presa dati

5.1 Studio della funzione di trasferimento del FB e della funzione di Airy

Per questa prima parte dell'esperienza ci serviamo di specchi con riflettività relativamente basse (0.80, 0.85 e 0.90) e dunque, con un valore della finesse F non troppo alto. Dopo aver allineato l'apparato come sù descritto iniziamo la presa dati. Impostiamo l'oscilloscopio, collegato al fotodiodo, come descritto nella scheda dell'esperienza per far sì che salvi i dati di interesse sulla pennetta USB. Tramite il pulsante RUN/STOP fermiamo l'immagine visualizzata sull'oscilloscopio e successivamente salviamo i corrispondenti dati sulla pennetta. Cerchiamo di fermare l'immagine quando sia il più pulita possibile, cioè evitando sovrapposizioni dei diversi picchi della funzione di Airy dovute alla ristretta schermata su cui vengono osservati. Quel che ci interessa è fare un fit dei diversi dati accumulati con la funzione di Airy

$$T = \frac{1}{1 + 4\left(\frac{F_{exp}}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right)} \quad (2)$$

nella quale abbiamo semplicemente sostituito il valore del coefficiente di finesse F in funzione della finesse F e $\Delta = \frac{4\pi d}{\lambda}$. Da questa ricaveremo il valore della finesse F_{exp} che meglio approssima quello sperimentale, dipendente unicamente dai valori delle riflettività degli specchi utilizzati.

5.2 Misura della finesse per diversi valori della riflettività

Montando diverse combinazioni di specchi, salviamo i dati sulla pennetta per poi misurare, grazie dalla griglia inseribile nei plot di Matlab, distanza tra picchi e FWHM. I dati sono elaborati nei paragrafi successivi.

5.3 Misura della lunghezza d degli specchi del Fabry-Però

In questa parte dell'esperienza studieremo le frange d'interferenza circolari in uscita dall'interferometro al fine di misurare la distanza d fra i due specchi. Per ottenere le frange circolari poniamo una lente divergente fra il secondo specchio fisso e il FP, aggiustandone la distanza per ottenere lo spot delle dimensioni adatte per visualizzare e successivamente misurare la distanza tra le frange con una buona precisione. Non dovendo effettuare misure dell'intensità del fascio, ma solo della distanza tra i massimi d'interferenza, poniamo un foglio di carta millimetrata al posto del fotodiodo, così che la figura venga proiettata su di esso permettendo una lettura immediata della misura. A questo punto spegniamo il generatore di forme d'onda per avere una figura ferma. Da questa

$$\cos \theta_{m-1} - \cos \theta_m \sim \frac{1}{2} [(\theta_{m-1} - \theta_m) (\theta_{m-1} + \theta_m)] = \frac{1}{n} \quad (3)$$

e quindi la distanza tra gli specchi d sarà data da $d = \frac{n\lambda}{2}$.

6 Analisi dati

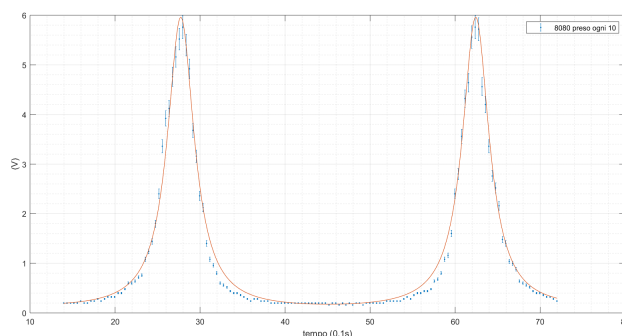
6.1 Funzione di Airy

Per trovare i migliori parametri dell'equazione (1) nella forma

$$\frac{a}{1+b^2 \sin^2(c(x+d))}$$

scegliamo la coppia di specchi con riflettività $R=0.80$, in quanto danno una figura di diffrazione più nitida, con dati più attendibili (è anche la coppia con finesse più simile al valore vero).

Per non sovrappopolare il plot, viene graficato solo un dato ogni 10, mentre per il fit sono stati usati tutti i punti. Le misure sono riportate nella prima e seconda tabella.



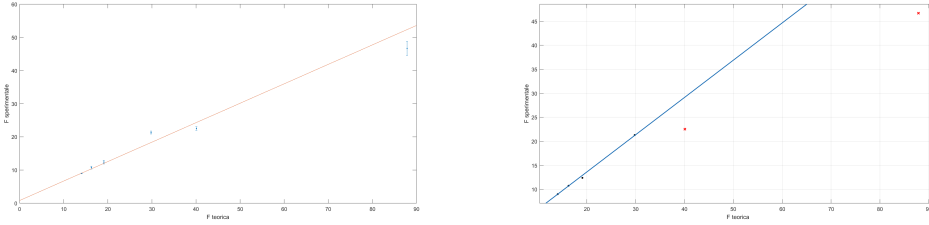
Il calcolo delle incertezze (effettuato solo sulle ordinate) consiste nell'assegnare il 4% di errore relativo alle misure di tensione: 2 le fluttuazioni del laser, e due delle tensioni lette dall'oscilloscopio.

6.2 Stima delle finesse

In questa parte facciamo riferimento ai grafici (3) riportati in appendice

Come discusso nel par (5.2), ricaviamo la finesse sperimentale dal rapporto tra distanza (d) e FWHM (a) dei picchi. Gli errori sono associati alla divisione della griglia della quale abbiamo usufruito per misurare: questa è $\sigma_{div} \frac{0.2}{\sqrt{3}}$, che, inserita nella formula alle derivate parziali di un quoziente diventa $\frac{\sigma_{div}}{a^2} \sqrt{a^2 + d^2}$. Sono riportati nella tabella (4). Come si può vedere, l'incertezza sulla finesse della prima coppia (stimata col fitting tool) è molto minore, in quanto calcolata minimizzando un χ^2 anzichè "ad occhio".

Se grafichiamo le finesse trovate in funzione di quelle attese, dovremmo aspettarci una retta con un coefficiente angolare massimo ad 1 (intercetta ~ 0). Per motivi pratici quali qualità degli specchi/stabilità dell'apparato, ciò non avviene. Notiamo come più F teorica sia alta, più le imperfezioni sulle superfici (graffi di non indifferente entità, ditate ecc) incidano su di essa, abbassandole notevolmente. Questo fenomeno è perfettamente logico, in quanto la riflettività in prossimità dei graffi è statisticamente identica sugli specchi, e la sua differenza con quella teorica aumenta con essa.

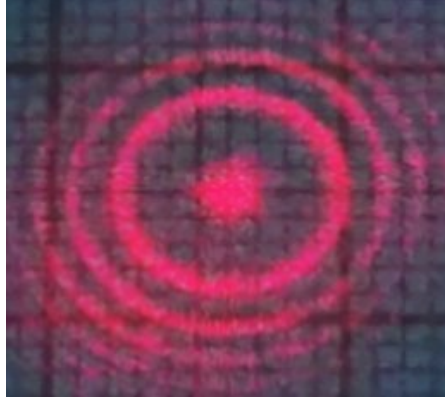


Si può vedere come il coefficiente angolare aumenta togliendo le coppie di specchi con R maggiore (9095, 9895).

Il coefficiente angolare del primo grafico è 0.586, mentre il secondo 0.776. E' apparente ciò che abbiamo appena discusso. Inoltre, i grafici hanno $\chi^2 = 72$ e $\chi^2 = 0.88$ con 6 e 4 punti sperimentali. Essendo le incertezze molto piccole per le prime finesse, i loro pesi avranno una maggiore influenza. Infatti, considerando anche gli ultimi due punti, la retta è costretta ad abbassarsi, allontanandosi di molte più sigma dai punti.

6.3 Fascio ad un angolo

Montiamo gli specchi da 0.85 e 0.80 (quello con riflettività maggiore verso il fascio) e la lente divergente immediatamente prima del FP ad una distanza $L = 335 \pm 1$ mm dal fotodiodo. Il fascio principale viene deviato, entrando ad un angolo θ nell'interferometro. Riallineando gli spot uno sopra l'altro, e poi spegnendo il piezoelettrico per fermare l'interferenza, otteniamo la seguente figura di diffrazione (l'immagine è stata presa non perfettamente perpendicolarmente alla carta millimetrata, e le impostazioni della fotocamera quali ISO, shutter speed ed esposizione sono state aggiustate di conseguenza. Per eliminare la prospettiva è stato utilizzato un software di elaborazione immagini molto semplice).



Prendiamo, dal centro del massimo centrale, le distanze dei primi tre massimi (il loro centro) a destra e sinistra. Questi vengono subito divisi per L , e viene calcolata l'incertezza come nei casi precedenti (derivate parziali di f/g). $\sigma_\theta = \frac{1}{L^2} \sqrt{L^2 * (1/3 + sd p^2) + d^2/3}$ dove l'incertezza su L è $1\text{mm}/\text{sqrt}(3)$, e su d è quest'ultima sommata in quadratura alla semidisersione/ $\text{sqrt}(3)$.

Dalla formula (3) ricaviamo 2 valori $1/n$, e quindi di n . Sapendo che $(\frac{1}{f})' = \frac{f'}{f^2}$, ricaviamo le incertezze dalla seguente formula:

$$\sigma_{n_{21}} = \frac{4\sigma_\theta}{(\theta_2^2 - \theta_1^2)^2} \sqrt{(\theta_2)^2 + (\theta_1)^2} \quad (4)$$

e rispettivamente per la coppia 32.

Facendo la media di questi valori, otteniamo $n = (1.622 \pm 1.010) \times 10^4$. Sono riportati nella tabella (5) i valori di θ medio. L'incertezza è uniforme in quanto dominata dal fattore $(L\sqrt{3})^{-1}$ (se nella radice prendiamo solo $L^2/3$).

Dall'ordine di interferenza possiamo ricavare la distanza del FP. Questa risulta essere $d_{FP} = \frac{n\lambda}{2} = 5.1 \pm 3.2\text{mm}$. L'incertezza è moltiplicata scalarmente per il fattore di conversione, e viene così alta a causa della formula (4)

7 Conclusioni

Nonostante la qualità degli specchi, soggetti all'effetto del tempo e dell'usura, abbiamo ricavato dati coerenti con quanto aspettatoci.

Le incertezze di misura grandi sono spesso dovute ai fattori inversi presenti delle formule, come discusso nell'ultimo paragrafo.

Dati e Test del chi quadro sono riportati in appendice.

8 Appendice

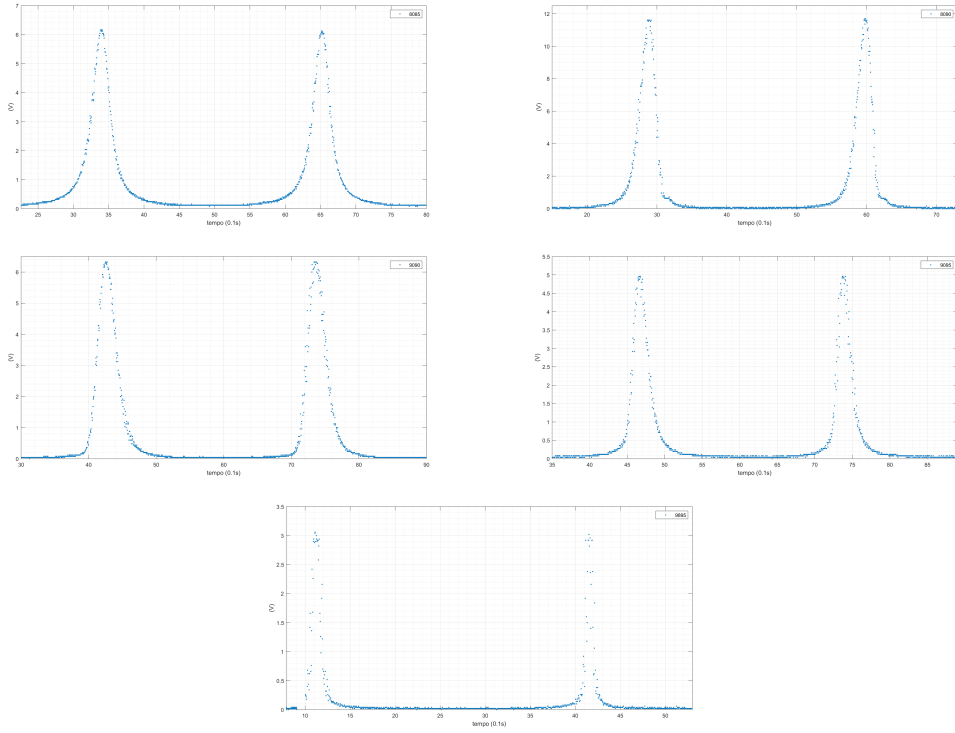
t (decimi di s)	V	σ_V	t (decimi di s)	V	σ_V
13.96	0.200	0.008	43.96	0.200	0.008
15.96	0.240	0.009	45.96	0.200	0.008
17.96	0.280	0.011	47.96	0.160	0.006
19.96	0.320	0.013	49.96	0.200	0.008
21.96	0.600	0.024	51.96	0.240	0.009
23.96	1.240	0.049	53.96	0.280	0.011
25.96	3.920	0.157	55.96	0.400	0.016
27.96	5.760	0.230	57.96	0.680	0.027
29.96	2.360	0.094	59.96	2.400	0.096
31.96	0.800	0.032	61.96	5.560	0.222
33.96	0.400	0.016	63.96	3.360	0.134
35.96	0.240	0.009	65.96	1.400	0.056
37.96	0.240	0.009	67.96	0.600	0.024
39.96	0.200	0.008	69.96	0.400	0.016
41.96	0.200	0.008	71.96	0.240	0.009

Dati ogni 50 punti sperimentali (1)

Parametro	a	b	c	d
Valore	5.958	5.732	2.731	2.906
σ	0.042	0.046	0.003	0.002

$$\chi^2 = 31.$$

Valori ed incertezze dei parametri della funzione (). Di seguito il Chi quadro. (2)



Grafici delle funzioni di Airy per le combinazioni 8085,8090,9090,9095, 9895 (3)

R	F_{teo}	F_{spe}
0.80, 0.80	14.049	9.004 ± 0.072
0.80, 0.85	16.268	10.759 ± 0.432
0.80, 0.90	19.105	12.400 ± 0.575
0.90, 0.90	29.804	21.310 ± 0.426
0.90, 0.95	40.098	22.520 ± 0.522
0.95, 0.98	87.877	46.662 ± 2.0742

$$\chi^2 = 71.46 \text{ per tutti i punti sperimentali}$$

$$\chi^2 = 0.88 \text{ per i primi 4 punti}$$

Valori ed incertezze delle finesse sperimentali rispetto a quelle teoriche. Seguono i χ^2 (4)

i	1	2	3	4
$\theta_i \pm 0.0017 \text{ (rad)}$	0	0.0113	0.0158	0.0193

Valori dell'angolo dell'i-esimo massimo della figura di interferenza. (5)