

Laboratorio di Ottica — Gruppo

Odorico Luca, Speranza Andrea, Umassi Michele

June 11, 2019

1 Scopo dell'esperienza

In questa esperienza studieremo il funzionamento delle lamine di ritardo $\frac{\lambda}{2}$ e $\frac{\lambda}{4}$ ed il grado di polarizzazione di fasci incidenti polarizzati diversamente caratterizzandoli attraverso i parametri di Stokes.

2 Apparato sperimentale

- Laser He-Ne;
- Attenuatore di intensità del laser;
- Un'iride, per eliminare fasci spuri;
- Due specchi fissi per regolare la direzione orizzontale e verticale del laser;
- Due cubi polarizzatori PBS montati su supporti orientabili;
- Lamine di ritardo $\frac{\lambda}{2}$ e $\frac{\lambda}{4}$ orientabili;
- Un polaroid ad asse mobile;
- Un fotodiode montato su un sostegno mobile con slitta micrometrica;
- Un multimetro digitale per leggere l'intensità del fascio incidente sul fotodiode;
- Un metro per misurare la distanza tavolo-fascio laser;

3 Note teoriche

3.1 Lamine di ritardo $\frac{\lambda}{2}$ e $\frac{\lambda}{4}$

Le lamine di ritardo sono degli elementi ottici che consentono di cambiare la polarizzazione dell'onda incidente su di essi, sfasando le componenti del campo elettrico. Per come sono costruite le possiamo ruotare mantenendo l'asse ottico parallelo al piano di separazione tra superficie della lamina ed aria (nel nostro caso), così che le componenti del campo non vengano separate ma semplicemente sfasate fra loro.

La lamina $\frac{\lambda}{2}$, introduce uno sfasamento fra le due componenti del campo pari a $\phi = (2m + 1)\pi$, ovvero una rotazione del piano di polarizzazione. La lamina $\frac{\lambda}{4}$ produce invece uno sfasamento $\phi = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, cioè sfasa le due polarizzazioni di $\pm\frac{\pi}{2}$ (a seconda che l'asse sia orizzontale o verticale), producendo onde polarizzate ellitticamente (circularmente per $\theta = 45^\circ$).

Il formalismo matriciale di Jones descrivere l'azione di questi elementi ottici su stati qualsiasi. Conoscendo la forma delle matrici delle due lamine, e ruotandole come $T_x(\theta) = R(-\theta)T_xR(\theta)$ (con x indichiamo l'elemento ottico), otteniamo:

$$T_{\frac{\lambda}{2}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix} \quad T_{\frac{\lambda}{4}}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 + i\cos(2\zeta) & i\sin(2\zeta) \\ i\sin(2\zeta) & 1 - i\cos(2\zeta) \end{bmatrix}.$$

Queste non commutano: sarà necessario specificarne l'ordine in seguito, quando verranno calibrati tutti i componenti.

3.2 Parametri di Stokes

La trattazione matriciale di Jones funziona però solo su stati completamente polarizzati ($v=1$). Per questo è utile introdurre il formalismo dei parametri di Stokes (legati al grado di polarizzazione dell'onda). Questi parametri sono grandezze definite a partire dall'intensità iniziale di un'onda incidente e delle intensità delle sue varie polarizzazioni, vettori delle 3 basi scelte per descriverla (H, V, $+45^\circ$, -45° , L, R), alle quali corrispondono le intensità che misureremo ($I_1, I'_1, I_2, I'_2, I_3, I'_3$), tali che $I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 + I'_1 = I_2 + I'_2 = I_3 + I'_3$. Definiamo i parametri di Stokes normalizzati come:

$$s_0 = 1, \quad s_1 = \frac{I_1 - I'_1}{I_1 + I'_1}, \quad s_2 = \frac{I_2 - I'_2}{I_2 + I'_2}, \quad s_3 = \frac{I_3 - I'_3}{I_3 + I'_3} \quad (1)$$

Possono essere rappresentati su di una sfera tridimensionale detta di Poincaré. Questo ci permette di introdurre i vettori di Stokes $S = (1; s_1; s_2; s_3)$ dai quali otteniamo informazioni dirette sulla polarizzazione (es.: (1,0,0,0) assenza di polarizzazione, (1,1,0,0) polarizzazione lineare orizzontale ecc.). Il grado di polarizzazione dell'onda è:

$$v = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \quad (2)$$

Per caratterizzare lo stato di polarizzazione del fascio laser dobbiamo posizionare le lamine in configurazioni precise:

- Intensità della componente con polarizzazione orizzontale I_1 ($\zeta(\frac{\lambda}{4}) = 0^\circ; \theta(\frac{\lambda}{2}) = 0^\circ$) e verticale I'_1 ($\zeta(\frac{\lambda}{4}) = 0^\circ; \theta(\frac{\lambda}{2}) = 45^\circ$);
- Intensità della componente con polarizzazione lineare a $+45^\circ$, I_2 ($\zeta(\frac{\lambda}{4}) = 45^\circ; \theta(\frac{\lambda}{2}) = 22.5^\circ$) e a -45° , I'_2 ($\zeta(\frac{\lambda}{4}) = 45^\circ; \theta(\frac{\lambda}{2}) = -22.5^\circ$);

- Intensità della componente con polarizzazione circolare destra I_3 ($\zeta(\frac{\lambda}{4}) = 0^\circ$; $\theta(\frac{\lambda}{2}) = 22.5^\circ$) e sinistra I'_3 ($\zeta(\frac{\lambda}{4}) = 90^\circ$; $\theta(\frac{\lambda}{2}) = 22.5^\circ$, la $\frac{\lambda}{4}$ orientata a 90° inverte l'orientamento della polarizzazione circolare);

Una volta ricavate queste grandezze siamo in grado di risalire facilmente ai parametri di Stokes e quindi al grado di polarizzazione v del fascio.

3.3 Polarizzazione

Nell'ultima parte, ricavati i parametri di Stokes che ci interessano, verranno ricostruite le curve di polarizzazione $\Gamma(t) = (E_x(t), E_y(t))$ della luce descritta dai suddetti parametri. Si hanno

$$E_x = E_x^0 \cos(wt) \quad ; \quad E_y = E_y^0 \cos(wt + \phi) \quad ; \quad wt = [0; 2\pi) \quad (3)$$

Le due ampiezze e la fase possono essere scritte come

$$E_x^0 = \sqrt{v + s_1} \quad ; \quad E_y^0 = \sqrt{v - s_1} \quad ; \quad \phi = \text{atan}\left(\frac{s_3}{s_1}\right) \quad (4)$$

Disegnarle ci aiuterà a visualizzare la polarizzazione ed interpretare graficamente i valori di s_i ricavati.

4 Presa dati

4.1 Operazioni preliminari: allineamento

La prima fase dell'esperimento è la più critica e temporalmente dispendiosa. Le lamine a nostra disposizione sono usurate, e se la preparazione dell'apparato sperimentale non è accurata, potremmo avere un andamento incoerente dell'intensità incidente.

Per questo motivo, ogni volta che aggiungiamo un componente all'apparato, ci assicuriamo che il fascio riflesso da esso si sovrapponga con quello incidente (sovrapponendo gli spot sullo specchio più lontano). Questo è possibile grazie alle viti sui supporti ed alla griglia filettata, usata come riferimento. Poniamo nell'ordine PBS_1 , lamina $\frac{\lambda}{2}$ (dopo averla calibrata le anteporremo la $\frac{\lambda}{4}$), e PBS_2 . Avendo scelto un riferimento solidale (grid sul tavolo) e controllato che il fascio è perpendicolare a tutti gli elementi ottici, possiamo ottenere una buona calibrazione. Poniamo attenzione che l'altezza del fascio laser, durante tutto il percorso, rimanga ad un'altezza costante di circa 14cm dal tavolo di lavoro (controlliamo anche i fasci riflessi dai due PBS). Rimane da regolare l'attenuatore nelle sezioni successive.

4.2 Calibrazione e studio di $|I|$: $\frac{\lambda}{2}$

Il PBS_1 trasmette la componente orizzontale della luce emessa dal laser. Cerchiamo la posizione angolare, ed il corrispondente valore dell'angolo θ_0 , per la quale è massima l'intensità del fascio incidente sul fotodiodo. Dei quattro angoli che massimizzano l'intensità (avendo la funzione periodicità $\frac{\pi}{2}$) troviamo per primo 330° . Prendiamo i valori di tensione da qualche grado prima di questo angolo (per un fit più accurato) per un intervallo di angoli di circa 180° . Estrapoliamo un valore di θ_0 più preciso, utilizziamo la funzione

$$V(\theta) = V_0 \cos^2(\alpha(\theta - \theta_0)) \quad (5)$$

che ci da il grafico (1) (riportato nel paragrafo (6.1)), dal quale otteniamo $\theta_0 = (61.192 \pm 0.172)^\circ$. L'incertezza su di esso è data dal fitting tool, mentre le incertezze su angoli e tensioni sono rispettivamente $\sigma_o = \frac{2^\circ}{\sqrt{3}}$ e $\sigma_V = \frac{0.01V}{\sqrt{3}}$, dove i numeratori sono le divisioni degli strumenti. Non sono state effettuate misure ripetute, per questo non considereremo le fluttuazioni (2%) del laser.

4.3 Calibrazione e studio di $|I|$: $\frac{\lambda}{4}$

Inseriamo questa tra il PBS_1 e la lamina $\frac{\lambda}{2}$. Lasciando la $\frac{\lambda}{2}$ all'angolo θ_0 la componente orizzontale uscente dal PBS_1 viene (quasi) interamente trasmessa attraverso la lamina. Evitiamo così di dover riallineare l'apparato.

Il primo massimo intercettato è a circa 125° . Procediamo come prima.

Come ci si aspetta, dopo 90 gradi (sempre idealmente) è presente il secondo massimo. Questo però è di circa un Volt e mezzo più alto del primo. Ci accorgiamo che il laser non incide perfettamente al centro della lamina, e sulle zone di incidenza sono presenti vari graffi che provocano 'salti' di tensione notevoli come quello appena citato. Riallineato l'elemento ottico notiamo che l'O-ring che connette ghiera e cristallo è lento, in quanto per un certo intervallo di angoli la tensione rimane costante (il cristallo non ruota in maniera solidale). Sostituiamo questa lamina con un'altra e ripetiamo l'allineamento.

Altro fattore critico è la sensibilità di questo strumento. A differenza della $\frac{\lambda}{2}$, lo sfasamento è molto meno accurato, e qualunque imperfezione nella costruzione viene amplificata. Per $\zeta_0 + 45^\circ$, infatti, leggiamo un'intensità minore di quella attesa: $\frac{I_0}{2}$. Seguono i grafici dell'intensità di entrambe le $\lambda/4$, ma sono riportati fit e dati solo del secondo (per impossibilità di fittare la curva con picchi di intensità diversa)

$$V(\zeta) = \frac{V_0}{2} \left(1 + \cos^2(\beta(\zeta - \zeta_0)) \right) \quad (6)$$

Si trova $\zeta_0 = (170.684 \pm 1.083)^\circ$. (non ha più senso confrontare questo valore con quello ricavato empiricamente, in quanto la lamina è diversa).

Come si può vedere dal secondo grafico, la curva non arriva ai massimi e minimi sperimentali. Questo non è un problema di pesi/analisi, bensì dei dati (quindi della lamina) stessi, in quanto il problema si risolverebbe moltiplicando il coseno nell'eq. (6) per un fattore ~ 1.22 . Questo è omesso dai parametri per attenerci all'andamento atteso, e non cambia la posizione angolare dei punti.

4.4 Parametri di Stokes

Misuriamo le I_i ed I'_i di 3 diverse configurazioni per caratterizzarne i vari stati di polarizzazione. Tutte le posizioni angolari (delle lamine) necessarie alle misure, riportate nel par. (3.2), sono relative agli angoli degli assi ottici trovati nelle sezioni precedenti.

Dalle formule (4) ricaviamo i parametri di interesse, e gli associamo un'incertezza calcolata con

$$\sigma_{s_i} = \frac{2\sigma_V}{(I_i + I'_i)^2} \sqrt{I_i^2 + I_i'^2} \quad (7)$$

(il fattore σ_V è stato portato fuori in quanto comune alle due grandezze nella radice).

Con questi valori possiamo ricavare v (eq. (2)) e la sua incertezza

$$\sigma_v = \frac{1}{v} \sqrt{\sum_1^3 (s_i \sigma_{s_i})^2} \quad (8)$$

sempre ricavata dalle derivate parziali.

Oltre a discutere i valori ottenuti, possiamo rappresentare la polarizzazione nel piano E_y vs E_x i cui vettori sono $E_x = E_{0x}\cos(\phi)$ ed $E_y = E_{0y}\cos(\phi + \delta)$ dove

4.4.1 Luce trasmessa dal PBS_1

Come già detto, la polarizzazione trasmessa dal cubo è orizzontale. Per questo ci aspettiamo un valore di s_1 molto più alto di s_2 ed s_3 . Dalle (1) e la (7) otteniamo il vettore di Stokes, con le relative incertezze

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.982 \pm 0.001 \\ 0.058 \pm 0.001 \\ -0.027 \pm 0.001 \end{bmatrix}$$

Con le (3) e le (4) ricostruiamo l'ellisse (non sono riportate incertezze su nessuna delle grandezze, in nessuno dei prossimi casi) e la riportiamo (figura (3)) nel paragrafo (6.2), assieme le altre figure sui parametri di Stokes.

Come ci aspettavamo, il suo asse maggiore è quasi coincidente con le ascisse, e la sua eccentricità è molto piccola. In termini dei parametri di Stokes, questo significa che le componenti $+$, $-$, r , l vengono assorbite, e solo quella lineare passa. Della polarizzazione lineare, guardando la tabella dei valori di I nel par (6.3), si vede come sia prevalentemente I_1 , ossia H . Questa "dominanza" della componente si vede nel grado di polarizzazione ottenuto con la formula (2): $v = 0.984 \pm 0.001$ (incertezza calcolata con la (8)). Il valore è coerente con quanto aspettatoci: il PBS fa in modo che circa il $\sim 99\%$ della luce trasmessa sia orizzontale.

4.4.2 Luce direttamente uscente dal laser

Per questa parte (e la prossima), spostiamo il PBS_1 davanti il fotodiodo, prima del PBS_2 . Facendo ciò, possiamo misurare i parametri del fascio emesso (con polarizzazione ignota, e non stimabile empiricamente). Si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -0.224 \pm 0.002 \\ -0.030 \pm 0.002 \\ -0.595 \pm 0.003 \end{bmatrix}$$

e la polarizzazione in fig (4)

Su di questa non potevamo sapere nulla, se non che, statisticamente, delle 6 Intensità non ve ne è una "preferita", per questo la curva ha eccentricità "elevata", e l'asse non ha angolo particolare.

Il suo grado di polarizzazione è $v = 0.636 \pm 0.003$, minore che nel paragrafo precedente, in quanto non passante attraverso alcuno strumento polarizzante.

4.4.3 Luce trasmessa da un polaroid

Prima di montare il polaroid nell'apparato, lo montiamo in serie ad un PBS che trasmette orizzontale per trovarne l'asse ottico verticale (cercando l'angolo per il quale la tensione è minima). Questo è $\psi_0 = 48^\circ$. Viene così inserito prima delle altre componenti.

Avendo avuto grandi problemi nell'allineamento (e ricambio di lamine), si è perso molto tempo nella prima parte dell'esperimento e non è stato possibile prendere tutte e 6 le I per più di 3

angoli. Questi sono 20, 40 e 100 gradi.

$$S_{20^\circ} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.976 \pm 0.003 \\ 0.390 \pm 0.002 \\ -0.011 \pm 0.002 \end{bmatrix}; \quad S_{40^\circ} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.771 \pm 0.002 \\ 0.102 \pm 0.001 \\ -0.036 \pm 0.002 \end{bmatrix}; \quad S_{100^\circ} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.901 \pm 0.002 \\ -0.364 \pm 0.001 \\ 0.059 \pm 0.001 \end{bmatrix}$$

I grafici delle ellissi sono riportati su un unico sistema di coordinate per essere confrontati (figura (3)). Si può vedere come, ruotando il polaroid, l'asse maggiore dell'ellisse si inclini sempre di più verso ψ_0 . Le eccentricità hanno valori simili, ma non confrontabili quantitativamente.

Il grado di polarizzazione nelle 3 posizioni è debolmente correlato all'eccentricità. I valori sono

$$\begin{bmatrix} v_{20^\circ} = 1.051 \pm 0.003 \\ v_{40^\circ} = 0.778 \pm 0.002 \\ v_{100^\circ} = 0.974 \pm 0.002 \end{bmatrix}$$

Si attribuisce la sovrastima del primo valore a tutti i fattori che interferiscono con le misure discussi in precedenza. e' dovuto quindi ad errori sperimentali.

5 Conclusioni

Avendo eseguito solamente misure istantanee, l'incertezza associata alle tensioni (ed a tutte le grandezze calcolate con essa) è molto bassa. Combinando ciò alla sensibilità degli apparecchi a nostra disposizione, tutti gli scarti quadratici sono altissimi. Per questo i due valori del χ^2 altissimi (tabelle in sezione (7.2)).

Quella che è essenzialmente la legge di Malus, e la funzione della $\lambda/4$, sono state riscontrate entro buoni termini, ed hanno dato dei valori di θ_0 e ζ_0 abbastanza accurati.

La parte sullo studio della polarizzazione è avvenuto con successo. Ed è stata riscontrata la sua correlazione ai parametri di Stokes.

5.1 Prova angoli di inclinazione

Come calcolo ulteriore, può essere interessante cercare una correlazione tra grado di polarizzazione lineare (orizzontale e verticale) e l'inclinazione dell'asse delle ellissi. Questa è, come abbiamo visto, quasi nulla nel caso PBS, lamine, PBS, e tendente a $\pi/2$ per l'asse verticale del polaroid.

Possiamo trovare la forma della quadrica che le descrive:

$$AX^2 + BXY + CY^2 + D = 0 \quad (9)$$

X ed Y sono E_x ed E_y , assi cartesiani. Le costanti sono $A = \frac{1}{E_{0x}^2 \sin^2(\phi)}$. $B = \frac{2\cos(\phi)}{\sqrt{E_x^0 E_y^0 \sin^2(\phi)}}$ e $C = \frac{1}{E_{0y}^2 \sin^2(\phi)}$. D non ha alcuna importanza nel calcolo che stiamo per riportare (si potrebbe pensare a -1, ma sono stati ripetuti i calcoli con -v, pensando che avendo polarizzazione parziale, fosse quello il valore giusto da inserire).

Dall'equazione (9) si può ottenere

$$\text{atan}\left(\frac{A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}\right) \quad (10)$$

I valori trovati, trasformati in gradi, non corrispondono perfettamente a quelli dell'asse: essi si discostano di $\sim 5^\circ$.

Non si è riuscito a trovare un metodo migliore. E' una possibile conseguenza della polarizzazione parziale (o influenza di componenti $\pm 45^\circ$ in quella lineare totale della polarizzazione).

6 Figure

6.1 Grafici delle calibrazioni

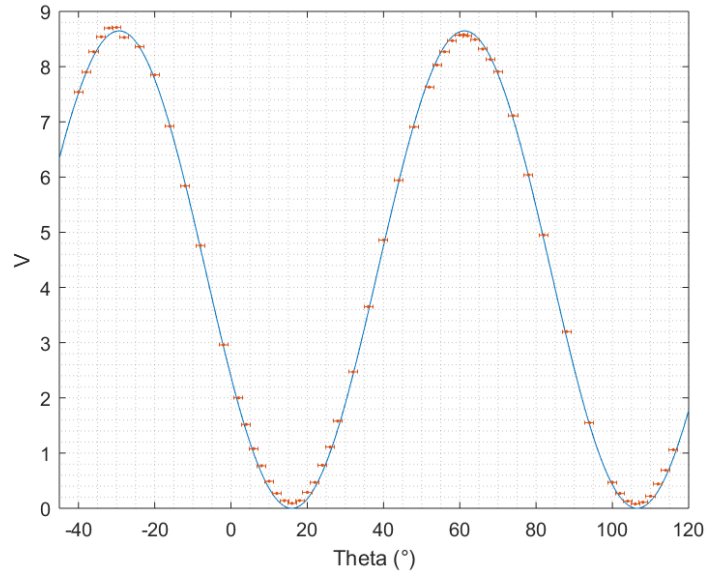


Figure 1: V in funzione di θ

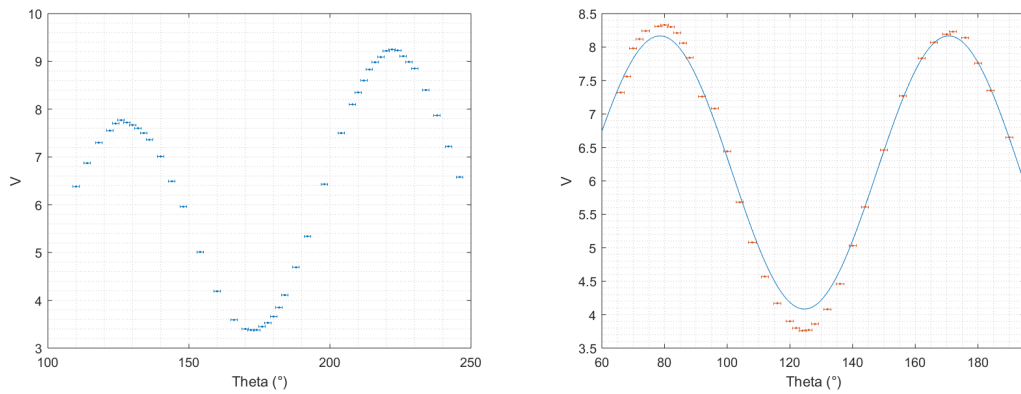


Figure 2: V in funzione di ζ

6.2 Grafici delle ellissi

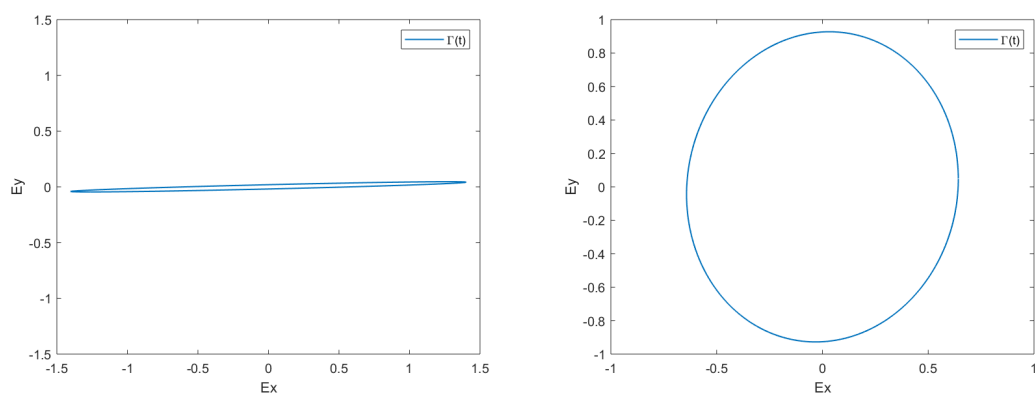
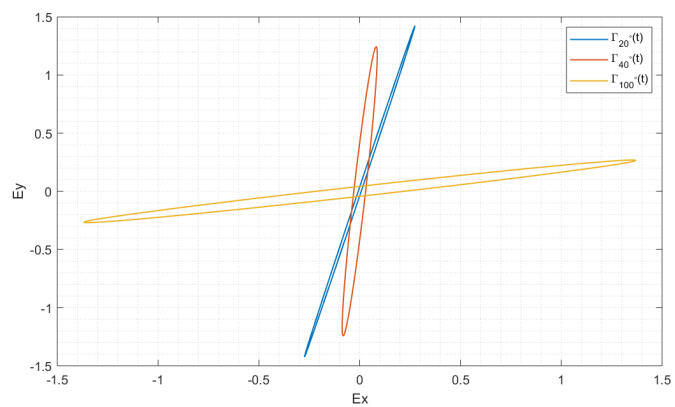


Figure 3: V in funzione di θ



7 Appendice

7.1 Valori di V per diversi angoli

$\theta \pm 1.2 (^{\circ})$	$V \pm 0.01$	36.0	3.65
-40.0	7.54	40.0	4.86
-38.0	7.90	44.0	5.94
-36.0	8.27	48.0	6.91
-34.0	8.54	52.0	7.63
-32.0	8.70	54.0	8.03
-30.0	8.71	56.0	8.27
-28.0	8.53	58.0	8.47
-24.0	8.36	60.0	8.57
-20.0	7.85	61.0	8.58
-16.0	6.92	62.0	8.56
-12.0	5.84	64.0	8.49
-8.0	4.76	66.0	8.32
-2.0	2.96	68.0	8.13
2.00	2.00	70.0	7.91
4.00	1.52	74.0	7.11
6.0	1.08	78.0	6.04
8.0	0.77	82.0	4.95
10.0	0.49	88.0	3.20
12.0	0.27	94.0	1.55
14.0	0.14	100.0	0.47
16.0	0.09	102.0	0.27
18.0	0.14	104.0	0.13
20.0	0.29	106.0	0.08
22.0	0.47	108.0	0.11
24.0	0.78	110.0	0.22
26.0	1.11	112.0	0.44
28.0	1.58	114.0	0.69
32.0	2.47	116.0	1.06

$\lambda/2$

$\theta \pm 1.2$ (°)	$V \pm 0.01$		
66.0	7.32	120.0	3.90
68.0	7.56	122.0	3.80
70.0	7.98	124.0	3.76
72.0	8.12	126.0	3.77
74.0	8.24	128.0	3.86
78.0	8.31	132.0	4.08
80.0	8.33	136.0	4.46
82.0	8.30	140.0	5.03
84.0	8.21	144.0	5.61
86.0	8.06	150.0	6.46
88.0	7.84	156.0	7.27
92.0	7.26	162.0	7.83
96.0	7.08	166.0	8.07
100.0	6.44	170.0	8.19
104.0	5.68	172.0	8.23
108.0	5.08	176.0	8.14
112.0	4.57	180.0	7.76
116.0	4.17	184.0	7.35
		190.0	6.65
$\lambda/4$			

7.2 Parametri dei fit delle sezioni 4.2 e 4.3

V_0	θ_0	α	χ^2
8.648	61.192	0.035	13.700×10^3
parametri dell'eq. (5)			

V_0	ζ_0	β	χ^2
8.165	170.681	0.034	32.300×10^3
parametri dell'eq. (6)			

7.3 Valori di I per le componenti della polarizzazioni

Config	I_1	I'_1	I_2	I'_2	I_3	I'_3
PBS, $\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}$,PBS	9.230	0.084	4.430	3.940	4.500	4.750
$\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}$,PBS,PBS	1.440	2.270	2.450	2.600	0.760	2.990
Intensità delle componenti ($I \pm 0.006V$)						

$\psi \pm 1.2$ ($^{\circ}$)	I_1	I'_1	I_2	I'_2	I_3	I'_3
20.0	0.042	3.48	2.53	1.11	1.86	1.9
40.0	0.56	4.32	2.97	2.42	2.38	2.56
100.0	7.13	0.37	1.99	4.27	4.24	3.77

Intensità delle componenti di un polaroid ($I \pm \mathbf{0.006V}$)

7.4