

# Laboratorio di Ottica Esperienza 1

Odorico Luca, Speranza Andrea, Umassi Michele

April 1, 2019

## 1 Scopo dell'esperienza

L'intento della prima parte dell'esperienza è l'osservazione sperimentale della legge di Malus: utilizzando un fascio Laser, due polaroid e un PBS vogliamo verificare l'andamento teorico dell'intensità della radiazione incidente sul fotodiodo, proporzionale al coseno quadro dell'angolo relativo fra i due componenti.

Nella seconda parte, invece, ci concentriamo sullo studio dell'andamento della riflettività  $R$  di un materiale dielettrico (Perspex) per onde p ed onde s, nuovamente in funzione dell'angolo di incidenza del fascio laser. Da questi andamenti ricaveremo il valore per l'angolo di Brewster.

## 2 Apparato sperimentale

La postazione in laboratorio poggia su diverse camere d'aria per minimizzarne le vibrazioni. I diversi componenti di cui è fornita sono fissati al tavolo di ferro, attraverso magneti o viti. Sono presenti i seguenti dispositivi:

- Laser a luce rossa di classe 3, depotenziato a classe 2 HNL050L-EC HeNe;
- Un attenuatore, per evitare che l'intensità del fascio sia oltre il valore di saturazione del rilevatore;
- Un Iride per eliminare possibili fasci riflessi;
- Lamina di ritardo  $\frac{\lambda}{4}$  per polarizzare circolarmente il raggio Laser;
- Due Polaroid ad asse mobile e uno a orientazione fissa (Polarized Beam Splitter);
- Due specchi orientabili per indirizzare il fascio laser;
- Un fotodiodo collegato ad un multimetro digitale che converte l'intensità in tensione;
- Una lastra di Perspex su un supporto orientabile.

NOTA: tutte le misure del multimetro sono riportate in Volt, senza essere convertite in  $\frac{W}{cm^2}$ . Poichè i coefficienti studiati sono dei rapporti, non importa, in quanto le costanti di proporzionalità tra grandezze vengono semplificate.

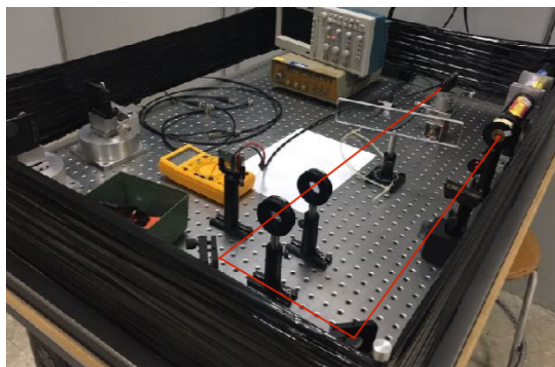


Figure 1: Tavolo di lavoro. Sono montati, in fila, laser- $\frac{\lambda}{4}$ -iride-attenuatore-due polaroid-lastra-fotodiodo

### 3 Background teorici

#### 3.1 Operazioni preliminari

Una volta presa la mano con la nuova strumentazione siamo passati alla 'calibrazione' dell'apparato di misura: misuriamo il segnale d'intensità luminosa di fondo (laser spento) - sono state fatte poche prese dati poiché abbiamo notato che tutte le misurazioni, in un intervallo temporale di due minuti, oscillavano intorno al valore di 0.008V in un intervallo di  $\pm 0.001V$  - che in seguito sottrarremo ad ogni misura di intensità.

Regoliamo ora l'attenuatore, posto subito davanti il Laser, con l'intento di ottenere un'intensità incidente che non superi la soglia di saturazione del fotodiodo: sotto gli 8-9 V (dopo i 12V il rilevatore va in saturazione) e studiare solo i valori di Intensità per i quali il fotodiodo risponde linearmente all'onda ricevuta. Passiamo alla seconda fase: allineiamo il fascio con il fotodiodo, ponendo attenzione che segua il percorso e che i riflessi spuri non interferiscano con il fascio principale, cercando di massimizzare la sezione di Laser incidente sulla zona attiva del fotodiodo. Questa è individuabile da un piccolo foro.

#### 3.2 Legge di Malus

Vogliamo verificare sperimentalmente la legge di Malus, data dalla seguente relazione:

$$I(\theta)=I(0)\cos^2(\theta)$$

Dove  $I(0)$  è l'intensità della radiazione ricevuta dal polaroid,  $\theta$  è l'angolo relativo tra i modi di polarizzazione dei due.

Il fascio è però polarizzato circolarmente (non perfettamente, per questo avremo diverse letture di  $I(0)$  nei casi di onda p ed s, dovute anche ai parziali assorbimenti dei materiali). Per polarizzarlo possiamo ricorrere al cubo polarizzatore (p), o porre due polaroid in fila. Considerando la seconda di queste due possibilità, se questi vengono calibrati così da avere il minimo di lettura possibile (teoricamente il fondo) sul multimetro, allora i polaroid sono configurati fra loro ortogonalmente. Cambiando ora l'inclinazione di uno dei due (il secondo, nel nostro caso), abbiamo la nostra  $\theta$ . Studiamo poi l'andamento dell'intensità trasmessa attraverso tre strumenti ottici: i due Polaroid ed il PBS. Per tale configurazione inseriamo il cubo seguito dai due polarizzatori, di cui solo il primo, cioè l'elemento centrale, verrà ruotato.

L'andamento aspettato è

$$I(\theta) = I(0)\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$$

dove  $\theta$  è l'angolo relativo fra i due Polaroid.

Per la calibrazione è stato usato il metodo sopra descritto, con l'accortezza che bisogna guardare a quando il voltmetro segna il valore massimo (entrambi i polarizzatori in p), in quanto cercando il valore minimo, si può erroneamente porre quello centrale su configurazione s, rendendo vana la ricerca di un opportuno angolo sull'ultimo. In corrispondenza di questo valore di I, l'equazione appena riportata ci dice che i due polaroid sono a 45° tra di loro.

### 3.3 Riflettanze $R_s$ ed $R_p$

In questa parte ci concentriamo sullo studio delle riflettanze  $R_s$  ed  $R_p$ , rispettivamente per l'onda s (TE) e l'onda p (TM), di una lastra di Perspex. Studiamo quindi l'andamento delle onde incidenti su tale lastra al variare dell'angolo  $\theta$  di incidenza, rispetto la normale alla lastra, con l'intento di stimare il suo angolo di Brewster. Le leggi per le riflettanze sono date da

$$R_s = |r_s|^2 = \frac{\sin^2(\theta - \phi)}{\sin^2(\theta + \phi)} \text{ e } R_p = |r_p|^2 = \frac{\tan^2(\theta - \phi)}{\tan^2(\theta + \phi)}$$

con  $\phi = \arcsin\left(\frac{\sin(\theta)}{\tan(\theta_B)}\right)$  e  $\theta_B$  l'angolo di Brewster (o angolo di Polarizzazione), per il quale il coefficiente di riflessione  $r_p$  per l'onda p è nullo e di conseguenza anche  $R_p$ . Utilizziamo il valore di  $\theta_B$  estratto dal fit dei dati sperimentali e sfruttiamo la relazione  $\theta_B = \arctan(n)$ , dove n è l'indice di rifrazione relativo fra i due mezzi (aria-Perspex):  $n = \frac{n_{Perspex}}{n_{aria}}$ . Estrapoliamo da qui valore di  $n_{Perspex}$ . Come obiettivo finale, studieremo il grado di polarizzazione dell'onda riflessa in assenza di assorbimento

$$V_r = \frac{R_s - R_p}{R_s + R_p}$$

L'angolo di Brewster sarà stimato con  $R_p$  e  $V_r$ .

## 4 Presa dati

### 4.1 Incertezze ed analisi preliminare

Come incertezze di partenza, utilizziamo quelle sistematiche degli strumenti, calcolate come la sensibilità (la divisione per i goniometri) su  $\sqrt{12}$ . Otteniamo  $\sigma_V = \frac{10^{-3}}{\sqrt{12}} = 0.0003V$  e  $\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0.58$ . Quest'ultima verrà approssimata ad 1 grado, per dare flessibilità ai grafici e non sottostimare la propagazione degli errori.

Sapendo delle oscillazioni nell'intensità del laser (che crescono al suo aumentare) prendiamo, a distanza temporale di circa 6 secondi (l'uniformità nel tempo non è rilevante quanto il conteggio stesso), la tensione misurata dal multimetro. Otteniamo il seguente grafico.

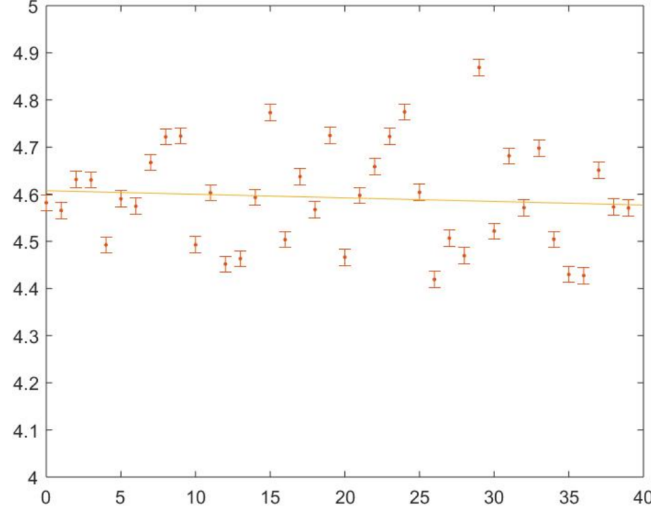


Figure 2: Distribuzione delle n rilevazioni

La retta che interpola i punti ha coefficiente angolare pari a  $\sim -7.6 * 10^{-4}$ , suggerendo che nonostante le fluttuazioni, l'intensità media è praticamente costante. Questa, affiancata dalla deviazione standard della media è  $(4.593 \pm 0.017)V$ . Sapendo che  $sd(I)=0.107$ , ricaviamo l'incertezza relativa  $\frac{sd(I)}{I} = 0.023$ , ossia per tutte le misure, l'incertezza sistematica va sommata in quadratura a questa, moltiplicata per il valore stesso (ricordando che sottraiamo la I di fondo a tutti i dati, l'incertezza sistematica è presa due volte, per questo il fattore 4). Infatti

$$\sigma_I = \sqrt{4\sigma_V^2 + (2.3\%I)^2} \quad (1)$$

Le incertezze di V ed  $n_2$  sono calcolate sfruttando la formula della propagazione

$$\sigma_{f(a_1, a_2 \dots)} = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial a_i} \sigma_{a_i} \right)^2} \quad (2)$$

e non verrà dunque riportata la forma esplicita. (V, come I, ha incertezze diverse per ogni misura. Queste verranno dunque riportate accanto ai rispettivi dati)

## 4.2 Legge di Malus

Allineati gli specchi in maniera da tenere il Laser, per quanto possibile, nel centro di tutti gli elementi ottici (per evitare ulteriori fluttuazioni dell'intensità del fascio incidente sul fotodiodo), configuriamo il piano di lavoro come riportato al punto 3.2. Come già riportato, consideriamo  $I(0)$  l'intensità massima incidente sul fotodiodo dopo che il fascio ha attraversato i due Polaroid (sono polarizzati parallelamente fra loro). Lasciando fisso il primo Polaroid a  $70^\circ \pm 1^\circ$ , ed il secondo a  $316^\circ \pm 1^\circ$  (angolo di riferimento  $\theta_0$ ) ruotiamo di multipli interi di  $4^\circ \pm 1^\circ$  il secondo (per un totale di 180 spazzati).

Per il fit dei dati, utilizziamo il metodo dei minimi quadrati con le funzioni di prova  $a * \cos^2(b\theta + c) + d$  e  $a * \cos^2(b\theta + c) \sin^2(b\theta + c) + d$ . I coefficienti sono riportati nelle tabelle in appendice. Si misura  $I_1(0) = 3.107 \pm 0.072$

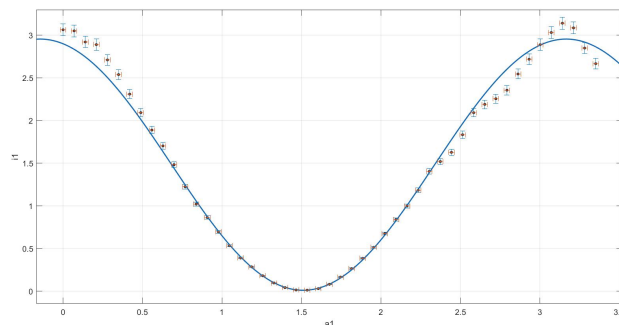


Figure 3: Legge di Malus con 2 Polaroid

Ripetiamo la procedura, stavolta inserendo il PBS come primo elemento ottico seguito dai due Polaroid. Anche qui, omettiamo di ripetere la disposizione degli strumenti. Si misura, stavolta,  $I_2(0) = 2.172 \pm 0.050$

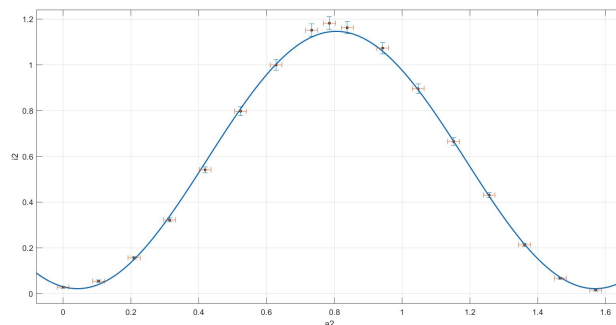


Figure 4: Legge di Malus con 3 Polaroid

Entrambi i fit sono coerenti con quanto aspettatoci. Tratteremo la loro affidabilità in seguito.

### 4.3 Riflettanze onde p ed s

Per questa parte dell'esperienza utilizziamo un polarizzatore ed il PBS. Quest'ultimo servirà a sapere quando il polaroid fa passare p od s. Come nei punti precedenti, minimizziamo la lettura del multimetro trovando la configurazione s del polaroid. Tolto il PBS, possiamo ruotare di un angolo retto il polarizzatore così da prendere, per ogni angolo della lastra, sia l'intensità della TE che della TM. Questo metodo, nonostante aumenti l'incertezza dovuta all'errore umano nel continuamente cambiare angolo, rende temporalmente efficiente la presa dati, in quanto per ogni angolo della lastra va accuratamente riposizionato il fotodiodo (così da essere perpendicolare al fascio riflesso), procedura lunga e non sempre accurata. La polarizzazione verticale è ottenuta ad un angolo di  $82^\circ \pm 1^\circ$ , l'orizzontale a  $172^\circ \pm 1^\circ$  (o o 352). Siamo poi passati a regolare la lastra di Perspex sul suo sostegno rotante cercando di far coincidere l'angolo  $\theta=0$  della tacca di lettura quando la lastra è normale al fascio. Ultimi accorgimenti da precisare prima di riportare i dati: manteniamo il fotodiodo ad una distanza approssimativamente costante dalla lastra di Perspex

aiutandoci con una fascetta di plastica, così da minimizzare la dispersione del laser, ed evitare di inserire un ulteriore fattore casuale di incertezza. Il fascio incidente sul fotodiodo, inoltre, non è uno solo: vi sono sia quello di prima riflessione e quello prodotto dalla riflessione del Laser sulla seconda superficie di separazione fra i mezzi (Perspex-aria). Con accortezza scegliamo quello giusto.

Partiamo da un angolo di 6 gradi (non si legge che il fondo sul fotodiodo per 0 gradi, come ci si aspetta), e ci muoviamo dello stesso passo fino a  $48^\circ \pm 1^\circ$ , per ripartire da  $52^\circ \pm 1^\circ$  a  $60^\circ \pm 1^\circ$  con un passo di 2. Da 60 si riparte con il passo da 6. Come già detto, per ogni angolo, ruotiamo di 90 gradi il polaroid per misurare entrambe le polarizzazioni.

Otteniamo i seguenti grafici. Sull'ascissa l'angolo è riportato in gradi. Seguono il grafico di  $R_s(\theta)$

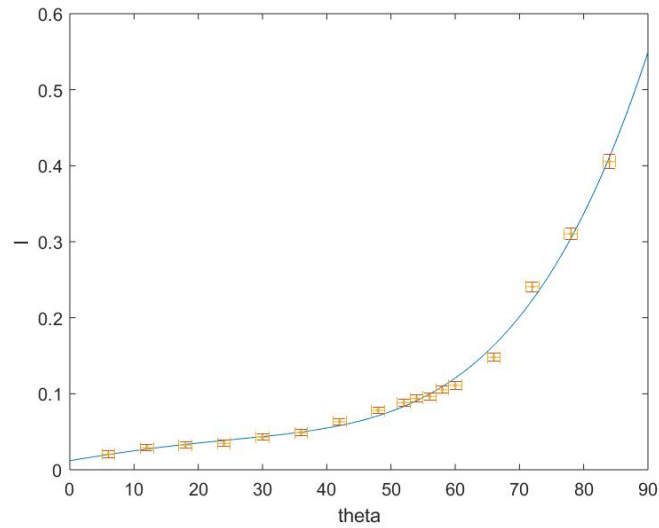


Figure 5: Riflettività dell'onda s per angolo di incidenza

e quelli di  $R_p(\theta)$

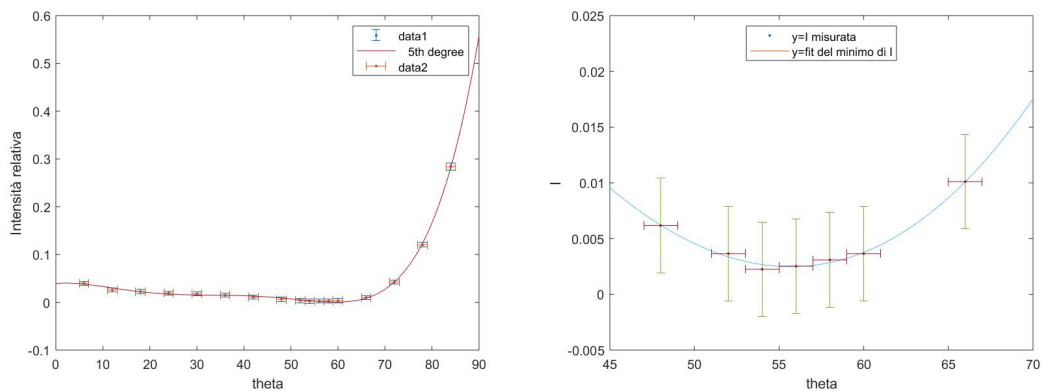


Figure 6:  $R_p$  in funzione di  $\theta$  e zoom sui dati di interesse

Le prime due curve sono fit di polinomi di grado 3 e 5. Dall'ultimo grafico possiamo ricavarci il primo valore di  $\theta_B$ . Godendo del passo di due gradi, prendiamo le misure tra 52 e 60 gradi, più i primi dati adiacenti. Fittando un polinomio di grado 2, possiamo calcolarne il minimo (o i minimi, e prendere quello con ascissa nel nostro intervallo). I coefficienti  $a_i$  degli  $x^i$  (in radianti, non in gradi come da grafico) sono riportati nell'appendice.

Il minimo, trovato in  $R_p = 0.009$  (idealmente il fondo rilevato), ha ascissa  $\theta'_B = 55.46^\circ \pm 1^\circ$ : la prima stima dell'angolo di Brewster.

Questo può anche essere trovato osservando il grafico di  $V$ , nel quale vi è un massimo, anzichè un minimo. Riportiamo il suo grafico, seguito da quello del fit dal quale abbiamo ricavato  $\theta_B$  (entrambi polinomi di quarto grado).

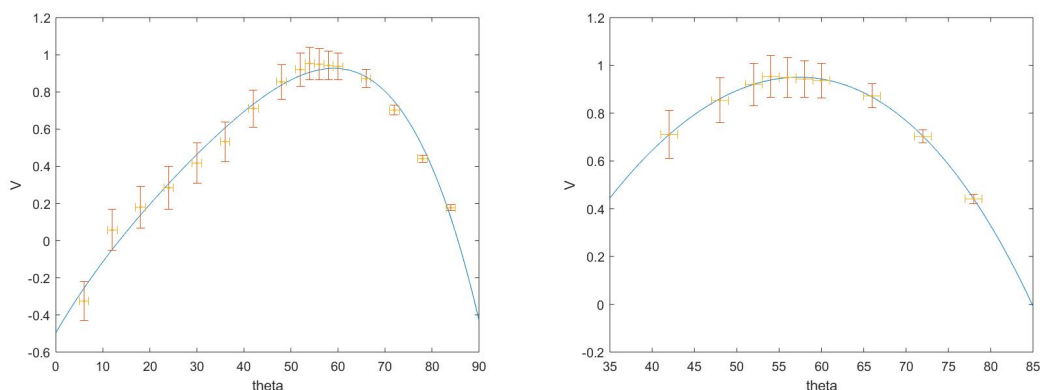


Figure 7:  $V$  in funzione di  $\theta$  con zoom sui dati di interesse

Il massimo ha coordinate  $\theta''_B = 56.888^\circ \pm 1^\circ$  e  $V(\theta_B) = 0.912$  (il valore dell'ordinata è futile, ma riportato per completezza. Per questo non vi sono state propagate le incertezze).

Da entrambi gli angoli trovati ricaviamo il valore di  $n_2 = n_1 \tan(\theta_B)$  (perspex) con i relativi errori (formula 2)

$n'_2 = 1.453 \pm 0.054$  ed  $n''_2 = 1.533 \pm 0.059$ . Le incertezze sono state calcolate con la formula (2), convertendo la  $\sigma_\theta$  in radianti.

## 4.4 Conclusioni

Tutti i fit sono soddisfacenti, nonostante dei notevoli discostamenti dal valore atteso di alcuni valori.

—Tutti i commenti eseguiti in questa sezione sono riferiti ai dati riportati nell'appendice (ultimo capitolo).—

E' stato eseguito il test del  $\chi^2$  sui dati seguenti: fit di entrambi gli studi della legge di Malus, e zoom dei grafici di  $R_p$  e  $V_r$ , dai quali sono stati ricavati i due angoli di Brewster (non dal set completo). Questo è stato fatto perchè polinomi di grado tanto alto, approssimano l'andamento in maniera estremamente precisa, e sono buoni solo per una stima qualitativa (i  $\chi^2$  sarebbero pressochè 0).

Nonostante il buon andamento delle misure, i test suggeriscono il contrario: nel primo caso abbiamo un intervallo di confidenza del 25%, e nel secondo, meno dell'1%. Essendo definito come

$$\chi^2 = \sum_i \left( \frac{y_i - f_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (3)$$

possiamo dedurre di aver sottostimato delle incertezze. Ciò è probabilmente implicito alle conversioni tra gradi e radianti, ed alle alte fluttuazioni del laser. Inoltre, come si può vedere dalla tabella 4, i valori dei coefficienti si discostano (dai valori attesi) di molte volte le loro incertezze. Per quanto riguarda i Chi degli ultimi due fit, questi sono notevolmente più piccoli dei loro valori attesi (4 e 6). Questo fenomeno è dovuto all'arbitrarietà del calcolatore di minimizzare i residui sul grafico. Anche per questo sono stati scelti polinomi di grado ragionevolmente basso. Altro fattore incidente è la grandezza degli errori relativamente ai dati associati (prossimi a 0 per p e prossimi ad 1 per V).

## 5 Appendice

In questa sezione riportiamo le tabelle coi dati, seguite dai coefficienti (e test del chi quadrato) dei relativi fit.

$(\theta \pm 1)^\circ$	Tensione	$(\theta \pm 1)^\circ$	Tensione
0	$3.063 \pm 0.070$	100	$0.165 \pm 0.006$
4	$3.050 \pm 0.070$	104	$0.265 \pm 0.007$
8	$2.920 \pm 0.067$	108	$0.385 \pm 0.010$
12	$2.889 \pm 0.067$	112	$0.514 \pm 0.013$
16	$2.710 \pm 0.062$	116	$0.675 \pm 0.016$
20	$2.538 \pm 0.058$	120	$0.839 \pm 0.020$
24	$2.309 \pm 0.053$	124	$0.999 \pm 0.023$
28	$2.092 \pm 0.048$	128	$1.183 \pm 0.027$
32	$1.888 \pm 0.043$	132	$1.403 \pm 0.032$
36	$1.702 \pm 0.039$	136	$1.519 \pm 0.035$
40	$1.482 \pm 0.034$	140	$1.627 \pm 0.038$
44	$1.224 \pm 0.028$	144	$1.833 \pm 0.042$
48	$1.021 \pm 0.023$	148	$2.091 \pm 0.048$
52	$0.864 \pm 0.020$	152	$2.189 \pm 0.050$
56	$0.695 \pm 0.016$	156	$2.255 \pm 0.052$
60	$0.532 \pm 0.013$	160	$2.355 \pm 0.054$
64	$0.389 \pm 0.010$	164	$2.545 \pm 0.059$
68	$0.285 \pm 0.009$	168	$2.718 \pm 0.063$
72	$0.180 \pm 0.006$	172	$2.888 \pm 0.067$
76	$0.096 \pm 0.005$	176	$3.031 \pm 0.069$
80	$0.042 \pm 0.004$	180	$3.140 \pm 0.072$
84	$0.014 \pm 0.004$	184	$3.085 \pm 0.071$
88	$0.012 \pm 0.004$	188	$2.849 \pm 0.066$
92	$0.030 \pm 0.004$	192	$2.666 \pm 0.061$
96	$0.081 \pm 0.005$		

Tab 1: Legge di Malus 2 Polaroid

Vista l'irregolarità dei punti dopo circa 120 gradi, ottenendo per tutti i dati un chi quadro di 200, il fit è eseguito sui primi 35 punti



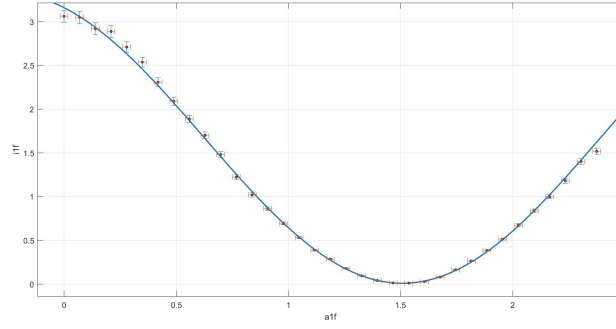


Figure 8: Legge di Malus con 3 Polaroid

Coefficiente	Valore calcolato	Valore atteso
a	$3.318 \pm 0.152$	$I_1(0)$
b	$0.891 \pm 0.025$	1
c	$0.227 \pm 0.042$	0
d	$0.011 \pm 0.007$	0.008
$\chi^2$	38	31

Tab 2: Parametri del primo fit descritto nel paragrafo 4.2

$(\theta \pm 1)^\circ$	Tensione(V)	Angolo $\pm 1$ in gradi	Tensione(V)
0	$0.028 \pm 0.004$	45	$1.181 \pm 0.027$
6	$0.054 \pm 0.004$	48	$1.162 \pm 0.027$
12	$0.156 \pm 0.006$	54	$1.073 \pm 0.025$
18	$0.321 \pm 0.008$	60	$0.895 \pm 0.021$
24	$0.541 \pm 0.013$	66	$0.664 \pm 0.016$
30	$0.797 \pm 0.019$	72	$0.430 \pm 0.011$
36	$0.999 \pm 0.023$	78	$0.213 \pm 0.006$
42	$1.151 \pm 0.027$	84	$0.067 \pm 0.004$
		90	$0.015 \pm 0.004$

Tab 3: Legge di Malus PBS e 2 Polaroid

Coefficiente	Valore calcolato	Valore atteso
a	$4.498 \pm 0.163$	$2 \cdot I_2(0)$
b	$1.029 \pm 0.018$	1
c	$0.742 \pm 0.013$	0
d	$1.146 \pm 0.031$	0.008
$\chi^2$	29	13

Tab 4: Parametri del secondo fit descritto nel paragrafo 4.2

Nella seguente tabella sono riportati i valori misurati dal multimetro (che divisi per  $I_2(0)$  daranno i coefficienti di interesse)

$(\theta \pm 1)^\circ$	Tensione di s(V)	Tensione di p(V)
6	$0.042 \pm 0.004$	$0.142 \pm 0.005$
12	$0.060 \pm 0.004$	$0.092 \pm 0.004$
18	$0.067 \pm 0.004$	$0.080 \pm 0.004$
24	$0.072 \pm 0.005$	$0.069 \pm 0.004$
30	$0.089 \pm 0.005$	$0.063 \pm 0.004$
36	$0.101 \pm 0.005$	$0.053 \pm 0.004$
42	$0.131 \pm 0.005$	$0.038 \pm 0.004$
48	$0.162 \pm 0.006$	$0.022 \pm 0.004$
52	$0.183 \pm 0.006$	$0.013 \pm 0.004$
54	$0.194 \pm 0.006$	$0.008 \pm 0.004$
56	$0.200 \pm 0.006$	$0.009 \pm 0.004$
58	$0.218 \pm 0.007$	$0.011 \pm 0.004$
60	$0.230 \pm 0.007$	$0.013 \pm 0.004$
66	$0.307 \pm 0.008$	$0.036 \pm 0.004$
72	$0.499 \pm 0.012$	$0.150 \pm 0.005$
78	$0.643 \pm 0.015$	$0.429 \pm 0.011$
84	$0.840 \pm 0.019$	$1.011 \pm 0.024$

Tab 5: Dati per  $R_s$  ed  $R_p$

---

coefficienti del polinomio per il calcolo di  $\theta_B$  dal grafico di  $R_p$

$$a_i = \begin{bmatrix} 0.801 \\ -1.551 \\ 0.759 \end{bmatrix}$$

$$\chi^2 = 0.5$$

coefficienti del polinomio per il calcolo di  $\theta_B$  dal grafico di  $V_r$

$$a_i = \begin{bmatrix} 0.369 \\ -6.507 \\ 11.830 \\ -4.781 \end{bmatrix}$$

$$\chi^2 = 1.5$$