

Laboratorio di Ottica

Tempo di coerenza di un laser He-Ne

Odorico Luca, Speranza Andrea, Umassi Michele

April 15, 2019

1 Scopo dell'esperienza

Studieremo il tempo di coerenza del laser HeNe attraverso l'uso di un interferometro di Michelson. Questo ci permetterà di suddividere il fascio iniziale, attraverso un BS, in due separati. Modificheremo poi la distanza del cammino di uno dei due fasci per variare il grado di coerenza dell'onda. Da qui, mandiamo un segnale triangolare di ampiezza 16 V al cristallo piezoelettrico (farà vibrare di $\frac{\lambda}{4}$ lo specchio, con $\lambda = 632.8\text{ nm}$ la lunghezza d'onda del laser), creando l'interferenza che cerchiamo.

1.1 Apparato sperimentale

La postazione in laboratorio è la stessa: il tavolo di lavoro poggia su diverse camere d'aria per minimizzarne le vibrazioni. I nuovi dispositivi di cui è fornito sono i seguenti:

- Generatore di forme d'onda e un oscilloscopio digitale;
- Cubo BS (Beam Splitter);
- Tre specchi orientabili per indirizzare il fascio laser, di cui uno dotato di un trasduttore piezoelettrico, controllato dal generatore di forme d'onda, per produrne spostamenti dell'ordine dei nanometri;
- Una lente divergente che disperde il fascio e permette di individuare meglio le frange di interferenza;

Tutti gli apparecchi ottici montano su supporti avvitabili al tavolo, e per spostare lo specchio mobile è stata sfruttata la griglia di fori filettati (spaziati di 2.5cm).

2 Teoria e metodi utilizzati

2.1 Funzionamento

Il fascio uscente dal laser entra nel BS e viene separato in due fasci. Questi compieranno percorsi diversi, per poi ritornare al BS e ricombinarsi in un unico fascio. La parte trasmessa e la parte riflessa incideranno rispettivamente sullo specchio mobile e sullo specchio fisso, dotato di piezoelettrico. Lo spot di quest'ultimo è già centrato sul fotodiodo (in particolare sulla zona attiva). Allineiamo lo specchio mobile in maniera tale da sovrapporre gli spot. Possiamo spostare orizzontalmente, verticalmente e diagonalmente la direzione del fascio laser. Prima li allineiamo orizzontalmente, poi li sovrapponiamo, così da osservare le prime frange di interferenza (la sequenza di allineamento è importante affinché le frange siano verticali).

2.2 Visibilità delle frange e tempo di coerenza τ_c

Per lo studio della visibilità e, successivamente, per il tempo di coerenza è utile introdurre la funzione di intercorrelazione normalizzata, anche detta grado di coerenza parziale: questa esprime quanta correlazione esiste tra i due campi che differiscono per un tempo di percorrenza $\tau = \frac{2(d_2-d_1)}{c}$, dove c è la velocità della luce nel vuoto (nonostante l'esperimento non sia condotto nel vuoto, per le grandezze con cui ci troviamo a lavorare possiamo considerarla tale) e d_1 e d_2 rispettivamente le distanze dal BS dello specchio fisso e di quello mobile. Il grado di coerenza è così definito:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0) \Gamma_{22}(0)}}$$

Dove la funzione di intercorrelazione Γ_{12} è detta di mutua coerenza e le funzioni Γ_{11} e Γ_{22} sono dette di autocorrelazione. Queste ultime due per $\tau = 0$ sono le intensità, rispettivamente, dei campi E_1 ed E_2 . Possiamo così scrivere l'intensità totale come:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\tau)] \quad \text{oppure} \quad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)| \cos(\Delta\psi)$$

dove $\Delta\psi$ rappresenta lo sfasamento tra i campi. Si dice che la coerenza è parziale se $0 < |\gamma| < 1$. In questo caso, che è quello che ci interessa, possiamo definire un parametro detto visibilità delle frange, nel seguente modo:

$$V = \frac{I_{Max} - I_{min}}{I_{Max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma_{12}(\tau)|}{I_1 + I_2}$$

da cui si vede che per un fascio sdoppiato, cioè tale che $I_1 = I_2$, diviene $V = |\gamma_{12}(\tau)|$.

2.3 Procedure sperimentali

Per prima cosa misuriamo il rumore di fondo rilevato dal fotodiodo. Questo risulta maggiore di quello della scorsa esperienza ($0.017 \pm 0.001V$ vs $0.008 \pm 0.001V$), in quanto lavoriamo con le luci accese. Come possiamo subito constatare, però, questo è influente sulle letture e sull'andamento finale (incertezze incluse): verrà dunque trascurato.

Ci poniamo a contatto ottico (differenza dei cammini per cui $d=0$, per la quale V è massima), e prendiamo 5 valori di I_{Max} ed I_{min} . Per ogni acquisizione della coppia, disallineiamo i fasci, per poi allinearli nuovamente sul fotodiodo. In questo modo ci assicuriamo l'affidabilità della misura (se, riallineandolo n volte, osserviamo dati vicini tra loro). Ripetiamo tale procedura per altre 13 distanze (14 in totale). Per comodità, anziché prendere la distanza dal BS e sottrarvi $d_0 = 8.48 \pm 0.58cm$ (distanza dal BS in configurazione iniziale), fissiamo un supporto inutilizzato dotato di magneti, e lo usiamo come 0 della scala di d . All'aumentare di questa, V decresce (teoricamente a 0) prima di risalire. Il suo senso fisico risiede nel nome stesso: dopo le prime 4 misure, l'intensità luminosa dello spot sul fotodiodo è abbastanza bassa da non farci vedere le frange, e rendere lunga la ricalibrazione. Per questo sono stati presi solo 14 valori, le cui incertezze sono maggiori nel centro (zona con V bassa)

3 Analisi dati

Le coordinate dei punti, accompagnati dalle proprie incertezze, sono riportate in appendice.

3.1 Fit qualitativo

Per trovare una funzione che interpoli i nostri dati in maniera opportuna, procediamo nell'ordine. La prima $V(\tau)$ che testiamo è l'equazione (3) del modulo dell'autocorrelazione, riportata nella nota teorica in appendice. Il fitting tool di MatLab non è in grado di eseguire l'operazione, restituendo NaN. Un polinomio di grado 3 o 4, oltre ad avere χ^2 troppo alti, non è coerente con l'andamento atteso agli estremi (la f ha troppi flessi per gradi più alti, aumentando l'effetto).

Optiamo per la somma di seni: 3 per la precisione. I coefficienti sono riportati nell'appendice. L'equazione è

$$f(x) = \sum_1^3 a_i \sin(b_i x + c_i) \quad (1)$$

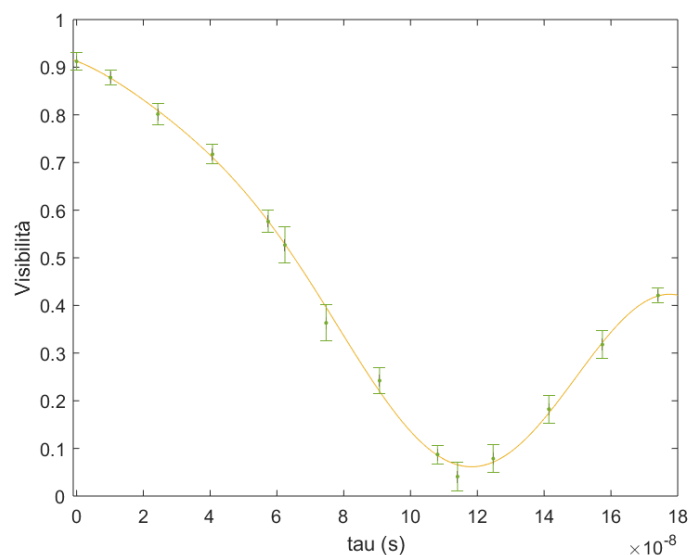


Figure 1: Visibilità in funzione di τ

Gli errori sono stati calcolati come segue.

Sulle ascisse abbiamo $\sigma_\tau = \frac{10^{-3}}{\sqrt{3}} \frac{2}{c} = 3.852 \text{ ps}$, con $c = 2.9979 \times 10^8 \frac{m}{s}$ ed il millesimo a numeratore la divisione del metro con cui misuriamo d_2 , distanza dello specchio dalla posizione di contatto ottico (nessuna interferenza in teoria). Per V abbiamo bisogno di $I_{Max/min}$, ed avendo acquisito 5 letture per ogni valore di d , possiamo associare a $I_{M/m}$ la loro deviazione standard. Questo ci permette di calcolare un'incertezza per ogni valore di V . Dalla formula delle derivate parziali: $\sigma_V = \frac{2}{(I_M + I_m)^2} \sqrt{\sigma_{I_M}^2 I_m^2 + \sigma_{I_m}^2 I_M^2}$.

Vista la forma della funzione, non possiamo ricavare τ_c da questo grafico (analiticamente).

3.2 Stima di τ_c

Per la stima del tempo di coerenza, consideriamo solo i primi 10 punti sperimentali (prima discesa). Anche qui, la funzione (3) non è interpolabile dal fitting tool. Ricorriamo al polinomio di grado 3

$$P(\tau) = \sum_0^3 a_i \tau^i \quad (2)$$

(ha flesso nella zona di interesse ed ha massimo relativo in un intorno di 0. Viene preferito per questo ad un polinomio di ordine superiore).

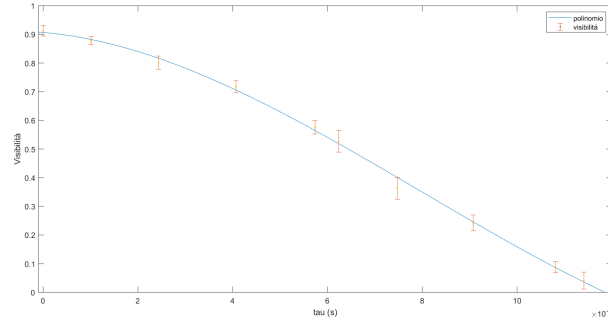


Figure 2: Visibilità in funzione di τ : primi 10 punti

Calcolato $P(0)$, cerchiamo il valore di τ in cui questo si dimezza (radici di $P(\tau) - \frac{P(0)}{2} = 0$). Nell'intervallo $[0, 12] \times 10^{-8}s$ troviamo $\tau_c = (69.274 \pm 0.004)ns$ (è stato necessario riscaldare in nano-secondi per apprezzarne la stima).

L'incertezza associata ad esso è stata calcolata grazie al teorema della derivata inversa. Essendo il risultato di $P^{-1}(\frac{P(0)}{2})$ ed il polinomio una funzione biunivoca nell'intervallo di interesse, la derivata della funzione inversa (nel punto) è $\frac{1}{P'(\tau_c)}$. Possiamo così propagare l'incertezza con la solita formula alle derivate parziali: $\sigma_P = \sqrt{(\frac{1}{3a_3\tau_c^2 + 2a_2\tau_c + a_1}\sigma_\tau)^2}$. A questa viene sommata in quadratura l'incertezza stessa di tau: $\sigma_{\tau_c} = \sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_\tau^2} = 3.852 \times 10^{-12}$.

4 Conclusioni ed affidabilità dell'esperimento

L'esperienza è da considerarsi conclusa con successo. Nonostante la progressiva difficoltà nel sovrapporre gli spot (già descritta nel par 2.3), i dati acquisiti sono soddisfacenti.

E' stato infine eseguito il test del χ^2 su entrambi i fit (paragrafi 3.1 e 3.2). Si ottengono $\chi_1^2=2.514$ e $\chi_2^2=2.215$ su gradi di libertà di 5 (14 punti - 9 coefficienti) e 6 (10 punti - 4 coefficienti), per un margine di confidenza dell'80% e del 90%. Ciò conferma ulteriormente quanto appena detto. L'incertezza sul valore di τ_c è stata chiaramente sottostimata, ed il suo valore è praticamente lo stesso di σ_τ , in quanto la derivata in τ_c assume valore altissimo (ordine -9 sulle x, ordine 0 sulle y). Se avessimo preso più misure di intensità (10, ad esempio) le deviazioni standard, e di conseguenza le σ_V , sarebbero state minori. Ciò non è stato possibile a causa del tempo limitato disponibile in laboratorio. Per questo motivo sono anche stati presi solo 14 misure di distanza.

5 Appendice

5.1 Dati

$\tau \pm 0.0004 (10^{-8}s)$	V	σ_V
0.0000	0.912	0.018
1.0140	0.878	0.015
2.4350	0.801	0.023
4.0695	0.717	0.021
5.7373	0.576	0.023
6.2377	0.527	0.038
7.4719	0.363	0.038
9.0730	0.242	0.027
10.808	0.087	0.019
11.408	0.041	0.029
12.475	0.079	0.028
14.143	0.182	0.029
15.744	0.318	0.029
17.412	0.421	0.015

Valori di ritardo temporale e visibilità con rispettive incertezze

5.2 Coefficienti

i	1	2	3
a_i	0.727	0.443	0.105
$b_i (\times 10^{-7})$	1.269	3.013	5.353
c_i	0.960	1.967	4.193

Coefficienti della funzione (1)

i	0	1	2	3
a_i	0.907	-1.430×10^6	-1.039×10^{14}	4.341×10^{20}

Coefficienti del polinomio (2)

5.3 Nota teorica

Il tempo di coerenza τ_c del fascio, come è stato definito convenzionalmente, è il valore di τ (ritardo temporale relativo) per il quale la funzione $V(\tau)$ assume il valore $\frac{V_{max}}{2}$. In questo caso la visibilità V coincide con il modulo della funzione di autocorrelazione γ . Questa è ottenuta tenendo conto del seguente ragionamento: il laser è una cavità risonante lunga 40.06 cm, nella quale la distribuzione delle frequenze è una somma di lorentziane di intensità costante, centrate sulle frequenze di massimo w_m . Così si sviluppa l'intensità trasmessa nelle frequenze $\frac{I(w)}{I(0)} = \sum \frac{\frac{\sigma^2}{4}}{\frac{\sigma^2}{4} + (w - w_m)^2}$, e grazie al teorema di Wiener-Khwiching, la sua trasformata di fourier: la funzione di autocorrelazione $\gamma(\tau) = C e^{-\frac{|\sigma|}{2}\tau} \sum e^{i w_m \tau}$. Il suo modulo (ciò che interessa a noi) è la visibilità:

$$|\gamma(\tau)| = \frac{e^{-\frac{|\sigma|}{2}\tau}}{N} \left| \frac{\sin(\frac{N w_m \tau}{2})}{\sin(\frac{w_m \tau}{2})} \right| = V(\tau) \quad (3)$$