



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

## L'effetto Schwinger

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Fisica

Candidato

Michele Umassi

Matricola 1756438

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Michele Umassi".

Relatore

Dott. Fabio Riccioni

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Fabio Riccioni".

Anno Accademico 2019/2020

---

**L'effetto Schwinger**

Tesi di Laurea. Sapienza – Università di Roma

© 2020 Michele Umassi. Tutti i diritti riservati

Questa tesi è stata composta con  $\text{\LaTeX}$  e la classe Sapthesis.

Email dell'autore: [umassi.1756438@studenti.uniroma1.it](mailto:umassi.1756438@studenti.uniroma1.it)

*“There are neither particles nor fields,  
but only operators.”*

—n.d.

# Indice

<b>1</b>	<b>Il vuoto dall'equazione di Dirac</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>On Gauge Invariance and Vacuum Polarization</b>	<b>7</b>
2.1	Formulazione del problema . . . . .	7
2.2	Campi costanti . . . . .	10
2.3	Azione e rate di produzione . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Risultati per campi variabili</b>	<b>22</b>
3.1	Inomogeneità spaziali e temporali . . . . .	22
3.2	Campo oscillante . . . . .	23
3.3	Sovrapposizione di frequenze diverse . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Considerazioni finali</b>	<b>26</b>

# Introduzione

Questa tesi ha l'obiettivo di rivisitare i risultati ottenuti nella prima metà del '900 seguenti la teoria di Dirac, e riprodurre l'importante pubblicazione del 1951 di Julian Schwinger *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*, i cui risultati e strategie di calcolo hanno contribuito allo sviluppo della teoria quantistica dell'elettromagnetismo, in letteratura elettrodinamica quantistica (QED). Ad esso è attribuito il fenomeno della produzione di coppie  $e^+ e^-$  nel vuoto in presenza di campo elettrico: l'effetto Schwinger. Questa è una predizione ad oggi quasi secolare, ma che non ha mai avuto un riscontro sperimentale. Il meccanismo alla sua base è l'effetto tunnel e, come tale, è esponenzialmente soppresso. Nello specifico, l'intensità del campo elettrico necessario affinché ciò non accada è dell'ordine di  $10^{18} V/m$ , fuori dalla portata degli apparati più moderni.

Avendo inoltre natura non perturbativa (non comune nelle teorie di campo) e trasformando il vuoto in un sistema al non-equilibrio, ha suscitato grande interesse nella ricerca: non solo implica un regime di non linearità delle equazioni di Maxwell, violando così il principio di sovrapposizione, ma prevede anche l'interazione tra quanti di luce. Nonostante l'interazione diretta sia proibita dalla simmetria di gauge  $U(1)$  (ovvero l'invarianza per cambio di fase), un fotone può interagire con un dipolo temporaneo (nel linguaggio moderno “fluttuazioni quantistiche”, o particelle “off shell”) e dar luogo ai fenomeni menzionati<sup>1</sup>.

La difficoltà sperimentale nella realizzazione di un campo omogeneo tanto intenso richiede l'utilizzo di una sorgente diversa. Il candidato perfetto, visti i progressi tecnologici degli ultimi 20 anni, è il laser. Assieme allo sviluppo di tecniche computazionali in grado di risolvere problemi integro-differenziali sempre più complessi, la ricerca è stata spostata sulle soluzioni numeriche dell'equazione di Vlasov per campi spazialmente e temporalmente variabili, in linea con la natura dei laser. L'obiettivo è quello di trovare una configurazione (geometria, durata, sovrapposizione degli impulsi EM) in grado di favorire la produzione di coppie ad intensità minori del limite di Schwinger (1.1).

Il primo capitolo descriverà il percorso ed i meccanismi alla base della produzione elettromagnetica di coppie, mentre il secondo, interamente basato sull'articolo [7], ripercorrerà esplicitamente i calcoli ed i metodi che l'autore ha utilizzato per arrivare agli straordinari risultati (2.54) e (2.87). Il terzo ed ultimo sarà un'ispezione delle possibilità sperimentali per l'osservazione dell'effetto Schwinger.

---

<sup>1</sup>Nel 1997 il laser di SLAC ha prodotto un evento classificato come scattering anelastico di ben 5 fotoni [13], e nel 2018 ATLAS, al CERN, ha osservato per la prima volta lo scattering elastico  $\gamma\gamma$ , come riportato in [14].

# 1 Il vuoto dall'equazione di Dirac

Con la pubblicazione de *The Quantum Theory of the electron* [2] nel 1928, Paul A.M. Dirac mostrò che la descrizione relativistica di una particella carica di spin  $\frac{1}{2}$  implica naturalmente la presenza di energie negative (presenti già nelle soluzioni dell'equazione quadratica di Klein-Gordon). In questo modo, agli elettroni liberi (nello specifico) sarebbe permesso di decadere dalle energie positive a quelle negative tramite emissione elettromagnetica. Per ovviare a questo problema ipotizzò la presenza di un mare infinito di particelle che permei tutto lo spazio, i cui livelli energetici (negativi) siano tutti occupati: il mare di Dirac. Questo, assieme al principio di Pauli, impedirebbe il decadimento spontaneo di tutti gli elettroni nell'universo. Nonostante questa struttura abbia chiari problemi come eccesso infinito di massa e carica, risolti successivamente dalla Teoria Quantistica dei Campi (QFT) implica la sbalorditiva possibilità di estrarre particelle dal vuoto grazie all'applicazione di una qualche perturbazione. Il primo a studiarne la fenomenologia fu Fritz Sauter, che nel 1931 risolse l'equazione di Dirac in un campo elettrico omogeneo  $E_0$  [3]. Essendo il suo potenziale un fascio di rette ( $E_0x \pm mc^2$ ), vedi Fig. 1, un elettrone può scatterare su di esso come fosse una barriera di potenziale ed attraversare la banda  $-mc^2$ ;  $mc^2$  in entrambi i versi<sup>2</sup> con coefficiente di trasmissione  $T \propto \exp \left[ -\frac{m^2 c^3}{e\hbar E_0} \pi \right]$

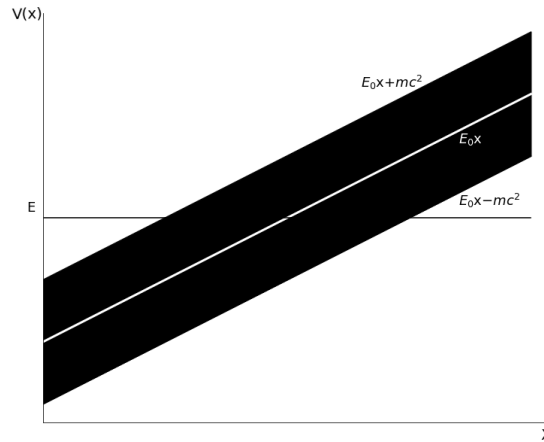


Fig. 1: Banda tra energie positive e negative in presenza di un campo elettrico costante.  $E$  è l'energia dell'elettrone incidente

<sup>2</sup>Oscar Klein calcolò la probabilità  $T$  che un elettrone attraversi una barriera di potenziale infinitamente alta e ripida [4], trovando che veniva trasmesso con probabilità finita  $\frac{E-pc}{E+pc}$  ( $E=\gamma mc^2$ ,  $p$  modulo dell'impulso). Sauter trovò la stessa  $T$

In altre parole, un elettrone ad energia negativa può fare tunnel dal mare di Dirac lasciandovi una lacuna positiva: un  $e^+$ . Questo avviene con probabilità finita solo per un potenziale che aumenti di  $mc^2$  su una lunghezza comparabile alla lunghezza Compton dell'elettrone (quest'ultimo fu un ansatz di N. Bohr precedente l'articolo)<sup>3</sup>, ovvero per  $E_0 > E_c$ , con

$$E_c = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} \approx 1.3 \times 10^{18} \text{V/m} \quad (1.1)$$

Con questo schema in mente, Werner Heisenberg studiò le implicazioni della teoria sul vuoto, concludendo che questo fosse il teatro di violazioni temporanee del principio di indeterminazione tempo-energia. Per conservazione di carica queste fluttuazioni, le “particelle” create ed annichilite di continuo, devono venire in coppie di carica opposta, e nel breve intervallo della loro esistenza possono comportarsi come dipoli elettrici. Di conseguenza, sotto determinate condizioni, il vuoto è assimilabile ad un mezzo polarizzabile non lineare<sup>4</sup>.

In vista di ciò è naturale interrogarsi sul suo effetto nelle interazioni elettromagnetiche.

La proposta della possibilità di scattering  $\gamma\gamma$ , attribuita a Debye, venne investigata da H. Euler e B. Cockel [5] che trovarono le prime correzioni non lineari alla lagrangiana elettromagnetica: con  $\mathbf{A} = |\vec{A}|$  e dati gli invarianti relativistici

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad \mathcal{G} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} = \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} + \frac{1}{90} \frac{\hbar c}{e^2 E_e^2} (-4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2) \quad (1.3)$$

dove  $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$  sono le componenti del tensore elettromagnetico ed il primo addendo della (1.3) è la lagrangiana di Maxwell.  $E_e$  è il campo elettrico della carica  $-e$  al raggio dell'elettrone, una sorta di campo limite per il quale gli effetti della *vacuum polarization* non sono più trascurabili (più tardi identificato con  $E_c$  della (1.1)). Nel paper è riportato l'esempio di un fotone che interagisce con un dipolo temporaneo e “decade” in due fotoni (il primo riesce ad eccitare una coppia  $e^+ e^-$ , che poi si annichila emettendo due fotoni per conservazione della quantità di moto nel cdm). Finalmente, nel 1935, Euler ed Heisenberg pubblicano *Consequences of the Dirac theory of positrons* [6], nel quale trovano la lagrangiana in forma chiusa

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} + 4\pi^2 mc^2 \left( \frac{mc^2}{h} \right)^3 \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} \left( -a\eta \cot a\eta \coth b\eta + 1 + \frac{\eta^2}{8} (b^2 - a^2) \right) \quad (1.4)$$

---

<sup>3</sup>cfr. p1 [3]

<sup>4</sup>Le fluttuazioni quantistiche e la polarizzabilità del vuoto sono la causa di effetti come il Lamb shift, scattering tra fotoni ed effetto Casimir.

con

$$a = \frac{\mathbf{E}}{E_c}, \quad b = \frac{\mathbf{B}}{E_c} \quad (1.5)$$

Si vede come per  $a=0$  (nessun campo elettrico) l'integrale converga ovunque sul piano complesso. Se invece  $a \neq 0$  il termine con le cotangenti ha poli periodici in  $\eta = n\frac{\pi}{a}$ . Per  $\eta = \frac{\pi}{a}$  e  $b=0$  (primo polo, nessun campo magnetico) l'integrale vale  $-\frac{2i}{\pi}\alpha\mathbf{E}^2 e^{-\pi/a}$ . Questo in accordo con il valore trovato da Sauter.

Un'espansione in termini di  $a$  e  $b$  della (1.4), ovvero per campi “deboli” (la scala è in  $E_c$ ), restituisce al quarto ordine la (1.3). Ogni termine dello sviluppo in  $E$  e  $B$  può essere associato ad un fenomeno di scattering con sezione d'urto da esso determinato. Quello al quarto ordine corrisponde allo scattering a due fotoni, quello al sesto con quello a tre fotoni e così via<sup>5</sup>. Questo è ciò che si intende nella letteratura per regime perturbativo dell'effetto Schwinger.

Notano infatti che per un dato  $\mathbf{E}$ , l'integrale nella (1.4) agisce come la somma attorno l'energia di risonanza di una serie perturbativa, il cui polo può essere visto come il termine dominante della serie (il cui denominatore diverge) che ne permette la convergenza (in funzione dell'intensità dei campi, quale ordine di scattering  $\gamma\gamma$  è dominante). È così che trovano lo stesso rate di Sauter.

Per campi di intensità dell'ordine di  $E_c$ , però, la probabilità che una coppia  $e^+e^-$  faccia tunnel “nella realtà” diviene non trascurabile. Heisenberg scrive allora: “Non è generalmente possibile separare eventi nel vuoto da eventi in presenza di materia, in quanto i campi possono crearne quando abbastanza energetici. Se queste energie non sono raggiunte si istituirà una sorta di “polarizzazione del vuoto”, e con essa le relative discrepanze dalla lagrangiana classica”<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>I termini hanno ordine pari in quanto nella serie appaiono solo termini quadratici di  $E$  e  $B$

<sup>6</sup>cfr. p. 1 [6]



## 2 On Gauge Invariance and Vacuum Polarization

Il problema che Schwinger si pone di risolvere è la comparsa di quantità non gauge-invarianti in teorie che lo sono in partenza. Non solo questi risultati non sono ammissibili in una teoria di campo, ma i metodi utilizzati per la loro regolarizzazione erano tutt'altro che rigorosi. Lo strumento principale del suo calcolo è un parametro  $s$ , identificato come una sorta di tempo proprio, dal quale dipendono tutti gli operatori e che è completamente indipendente dalla gauge e dalle coordinate. In questo modo è possibile relegare le divergenze in termini che non hanno nulla a che fare con i campi di interesse, ed ottenere risultati gauge-invarianti dalle espansioni perturbative.

Il punto di partenza è la definizione di una funzione naturalmente scaturita dall'operatore corrente, le cui proprietà permettano poi di costruire un'azione, e di conseguenza una lagrangiana. In questa maniera la risoluzione dell'equazione di un campo carico di massa  $m$  in presenza del potenziale vettore è portata avanti come un problema dinamico, in cui gli operatori dipendono da un nuovo parametro: il "tempo proprio"<sup>7</sup>

### 2.1 Formulazione del problema

L'equazione di Dirac per una particella carica di massa  $m$  soggetta al potenziale vettore è

$$\gamma^\mu (-i\partial_\mu - eA_\mu(x))\Psi(x) + m\Psi(x) = 0 \quad (2.1)$$

e la sua coniugata, nella quale gli operatori agiscono a sinistra

$$(i\partial_\mu - eA_\mu(x))\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu + m\bar{\Psi}(x) = 0 \quad (2.2)$$

dove

$$\partial_\mu = \left( -\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad A_\mu(x, t) = (\phi(x, t), \vec{A}(x, t)), \quad \gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}) = (\beta, \beta\boldsymbol{\alpha})$$

costruite con le matrici di Pauli  $\sigma_i$  e tali che  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$m$  è la massa dell'elettrone e  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0$ . In questo caso, come si può vedere dalla forma delle equazioni (2.1) ed (2.2),  $\Psi(x)$  non è più una funzione d'onda, bensì un vettore colonna.

È definita poi la corrente

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2} [\bar{\Psi}(x), \gamma_\mu \Psi(x)] = -\frac{e}{2} (\gamma_\mu)_{kl} [\Psi_k(x), \bar{\Psi}_l(x)] \quad (2.3)$$

<sup>7</sup>Da non interpretare come  $\tau$  in relatività, è più un parametro che non è legato alle grandezze fisiche, ma scandisce l'evoluzione del sistema

dove l'ultima uguaglianza viene dalla simmetrizzazione del campo. Questa è esprimibile anche tramite l'introduzione di un ordinamento temporale per gli operatori

$$(A(x)B(x'))_+ = \begin{cases} A(x)B(x'), & x_0 > x'_0 \\ B(x')A(x), & x_0 < x'_0 \end{cases}, \quad \epsilon(x-x') = \begin{cases} 1, & x_0 > x'_0 \\ -1, & x_0 < x'_0 \end{cases}$$

così che

$$\frac{1}{2}[\Psi_k(x), \bar{\Psi}_l(x)] = (\Psi_k(x)\bar{\Psi}_l(x'))_+ \epsilon(x-x') \quad (2.4)$$

purchè si prenda la media del limite  $x' \rightarrow x$  da destra e da sinistra ( $x'$  approssima  $x$  dal passato e dal futuro). Così possiamo scrivere il valore di aspettazione della corrente del vuoto (la quantità di vero interesse) come

$$\langle j_\mu(x) \rangle = -e \operatorname{tr}(\gamma_\mu \langle (\Psi(x)\bar{\Psi}(x'))_+ \rangle \epsilon(x-x')) \equiv ie \operatorname{tr} \gamma_\mu G(x, x') \quad (2.5)$$

dove  $G(x, x') = i \langle (\Psi(x)\bar{\Psi}(x'))_+ \rangle \epsilon(x-x')$  è una funzione che soddisfa

$$[\gamma(-i\partial - eA) + m]G(x, x') = \delta(x-x') \quad (2.6)$$

ovvero  $G(x, x')$  è una funzione di Green per l'equazione (il campo) di Dirac. Possiamo riscrivere l'equazione (2.6) prendendo  $G(x, x') = (x|G|x')$ , ossia l'elemento di matrice dell'operatore  $G$ . In questo modo

$$(\gamma\Pi + m)G = 1 \quad (2.7)$$

dove

$$\Pi_\mu = p_\mu - eA_\mu = -i\partial_\mu - eA_\mu \quad (2.8)$$

segue le classiche regole di commutazione

$$[x_\mu, \Pi_\nu] = i\delta_{\mu\nu}, \quad [\Pi_\mu, \Pi_\nu] = ieF_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

In questi termini, considerando il limite  $x \rightarrow x'$ , possiamo riscrivere  $\langle j_\mu(x) \rangle = ie \operatorname{tr} \gamma_\mu (x|G|x)$  ed ottenere la corrente dalla variazione di  $A_\mu(x)$  nell'azione in termini di  $j$ , ovvero

$$\delta W = \int dx \delta A_\mu(x) \langle j_\mu(x) \rangle = ie \operatorname{Tr} \gamma \delta A G \quad (2.10)$$

nella quale  $\operatorname{Tr}$  è l'operatore  $\operatorname{tr}$  integrato su tutte e 4 le coordinate spazio-temporali.

Si noti che

$$\delta(\gamma\Pi + m) = \delta(\gamma\Pi) = -e\gamma\delta A \quad (2.11)$$

Schwinger riscrive la (2.7):

$$G = \frac{m - \gamma\Pi}{m^2 - (\gamma\Pi)^2} = i \int_0^\infty ds (m - \gamma\Pi) e^{-i(m^2 - (\gamma\Pi)^2)s} \quad (2.12)$$

La seconda uguaglianza è triviale. Unendo le equazioni (2.10) (2.11) e (2.12) troviamo

$$\begin{aligned} \delta W &= ie \operatorname{Tr} \delta A G = -\operatorname{Tr} \delta(\gamma\Pi) \gamma\Pi \int_0^\infty ds e^{-i(m^2 - (\gamma\Pi)^2)s} = \\ &= \delta \left[ \frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-i(m^2 - (\gamma\Pi)^2)s} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

dalla quale possiamo estrarre la lagrangiana (grazie alla definizione di azione)

$$\begin{aligned} W &= \frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-i(m^2 - (\gamma\Pi)^2)s} = \frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-im^2s} \operatorname{Tr} e^{i(\gamma\Pi)^2s} = \\ &= \frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-im^2s} \operatorname{tr}(x | \overbrace{e^{-iHs}}^{U(s)} | x) = \int dx \mathcal{L}(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-im^2s} \operatorname{tr}(x | U(s) | x) \quad (2.15)$$

e nella quale abbiamo usato l'identità

$$H = -(\gamma\Pi)^2 = \Pi_\mu^2 - \frac{1}{2} e\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.16)$$

ed i commutatori

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (2.17)$$

Il calcolo dell'azione, e dunque della lagrangiana, dipende dagli autovalori  $\langle x | U(s) | x' \rangle$ . Se  $U$  è un operatore che descrive l'evoluzione di un sistema governato dall'“Hamiltoniana”  $H$  al “tempo”  $s$ , allora l'elemento di matrice di  $U(s)$  è la trasformazione del sistema dallo stato iniziale  $x(s=0) = x'$  a quello finale  $x(s) = x''$ , ovvero

$$\langle x'' | U(s) | x' \rangle = \langle x(s) | x(0) \rangle \quad (2.18)$$

Stiamo avendo a che fare con un problema dinamico in cui le 4-coordinate dipendono da un parametro di natura arbitraria con le caratteristiche di un tempo proprio, in quanto indipen-

dente dal sistema e dalle grandezze in gioco<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_\mu}{ds} &= -i[x_\mu, H] = 2\Pi_\mu \\
\frac{d\Pi_\mu}{ds} &= -i[\Pi_\mu, H] = e\{F_{\mu\nu}, \Pi^\nu\} + \frac{1}{2}e\sigma_{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} = \\
&= 2eF_{\mu\nu}\Pi^\nu - \overbrace{ie\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\mu}}^{e[F_{\mu\nu}, \Pi^\nu]} + \frac{1}{2}e\sigma_{\lambda\nu}\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Questa trasformazione è descritta dal problema differenziale

$$\begin{aligned}
\langle x(s)|H(s)|x(0)\rangle &= i\partial_s \langle x(s)|x(0)\rangle \\
\langle x(s)|\Pi_\mu(s)|x(0)\rangle &= (-i\partial'_\mu - eA_\mu(x'')) \langle x(s)|x(0)\rangle \\
\langle x(s)|\Pi_\mu(0)|x(0)\rangle &= (i\partial'_\mu - eA_\mu(x')) \langle x(s)|x(0)\rangle
\end{aligned} \tag{2.20}$$

con la condizione al contorno

$$\langle x(s)|x(0)\rangle \Big|_{s \rightarrow 0} = \delta(x'' - x') \tag{2.21}$$

Gli apici agli operatori indicano il tempo nel quale agiscono: rispettivamente  $s$  e  $0$

## 2.2 Campi costanti

In questa configurazione, le derivate delle componenti del tensore elettromagnetico  $F$  ( $E_i/c$ ,  $B_i$ ) sono nulle. Di conseguenza, le equazioni (2.19) diventano

$$\begin{aligned}
\frac{dx_\mu}{ds} &= 2\Pi_\mu \\
\frac{d\Pi_\mu}{ds} &= 2eF_{\mu\nu}\Pi^\nu
\end{aligned} \tag{2.22}$$

con soluzioni (facendo cadere gli indici)

$$\begin{aligned}
\Pi(s) &= e^{2eFs}\Pi(0) \\
x(s) - x(0) &= [(e^{2eFs} - 1)/eF]\Pi(0) = \\
&= [2e^{-eFs} \sinh(eFs)/eF]\Pi(0)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

---

<sup>8</sup>cfr. [7] p. 3

dalla quale si ricavano facilmente

$$\begin{aligned}
\Pi(s) &= \frac{1}{2} eF e^{eFs} \sinh^{-1}(eFs) (x(s) - x(0)) = \\
&= (x(s) - x(0)) \frac{1}{2} eF e^{-eFs} \sinh^{-1}(eFs) \\
\Pi(0) &= \frac{1}{2} eF e^{-eFs} \sinh^{-1}(eFs) (x(s) - x(0))
\end{aligned} \tag{2.24}$$

nella quale abbiamo usato l'antisimmetria di  $F$  per invertire l'ordine della prima (cambia solo il segno dell'esponenziale perché  $F \sinh^{-1}(F)$  è prodotto di funzioni dispari, quindi globalmente pari).

Dalla (2.16), isolando  $\Pi_\mu^2$  e sostituendoci la prima delle (2.24), si ottiene

$$\begin{aligned}
H + \frac{1}{2} e\sigma_{\mu\nu} F_\mu^\nu &= \Pi^2(s) = \Pi_\mu(s) \Pi^\mu(s) = \\
&= \frac{1}{4} e^2 (x(s) - x(0)) F e^{-eFs} F e^{eFs} \sinh^{-2}(eFs) (x(s) - x(0)) = \\
&= (x(s) - x(0)) K (x(s) - x(0)) ; \quad K = \frac{1}{4} e^2 F^2 \sinh^{-2}(eFs)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

che ha bisogno del commutatore  $[x(s), x(0)]$  per essere sviluppato<sup>9</sup>. Dall'equazione in  $x$  delle (2.23):

$$\begin{aligned}
[x(s), x(0)] &= [x(0) + (eF)^{-1}(e^{2eFs} - 1)\Pi(0), x(0)] \\
&= -i(eF)^{-1}(e^{2eFs} - 1)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

nella quale -i viene dal commutatore tra  $\Pi$  ed  $x$ , mentre quello di  $x$  con sé stesso è 0.

Così

$$\begin{aligned}
H + \frac{1}{2} e\sigma_{\mu\nu} F_\mu^\nu &= \overbrace{x(s)Kx(s) - 2x(s)Kx(0) + x(0)Kx(0)}^{\Xi(K)} + \overbrace{\text{tr}([x(s), x(0)]K)}^{x(s)Kx(0) - x(0)Kx(s)} = \\
&= \Xi(K) + \frac{i}{4} \text{tr} \left( \frac{e^{2eFs} - 1}{eF} \frac{(eF)^2}{\sinh^2(eFs)} \right) = \Xi(K) + \\
&\quad - \frac{i}{4} \text{tr} \left( eF \frac{e^{eFs} - e^{-eFs}}{e^{-eFs}} \frac{1}{(e^{eFs} - e^{-eFs})} \right) = \Xi(K) - \frac{i}{4} \text{tr} \left( eF \frac{e^{eFs}}{e^{eFs} - e^{-eFs}} \right) = \\
&= \Xi(K) - i \text{tr} \left( \frac{eF}{2} \frac{e^{eFs} + e^{-eFs}}{e^{eFs} - e^{-eFs}} \right) = x(s)Kx(s) - 2x(s)Kx(0) + x(0)Kx(0) + \\
&\quad - \frac{i}{2} \text{tr} (eF \coth(eFs))
\end{aligned} \tag{2.27}$$

nella quale abbiamo sfruttato il fatto che se  $A$  è un operatore antisimmetrico,  $\text{tr}(A) = 0$ , ovvero  $\text{tr}(e^A) = \text{tr}(1 + A + \frac{A^2}{2} + \dots) = \text{tr}(1) + \cancel{\text{tr}(A)} + \frac{1}{2}\text{tr}(A^2) + \dots$  che possiamo riscrivere come  $\frac{1}{2}\text{tr}(e^A + e^{-A}) = \frac{1}{2}\text{tr}(1 + A + \frac{A^2}{2} + \dots + 1 - A + \frac{A^2}{2} - \dots) = \text{tr}(1) + \frac{1}{2}\text{tr}(A^2) + \dots = \text{tr}(e^A)$ .

<sup>9</sup>Per passare direttamente alla Lagrangiana avanzare a p. 14, eq (2.54)

Di conseguenza, la prima equazione delle (2.20) può essere riscritta come

$$i \frac{\partial}{\partial s} \langle x(s) | x(0) \rangle = \left[ -\frac{1}{2} e \sigma F + (x'' - x') K(x'' - x') + \right. \\ \left. - \frac{i}{2} \text{tr}(e F \coth(e F s)) \right] \langle x(s) | x(0) \rangle \quad (2.28)$$

la cui soluzione è ottenuta tramite integrazione diretta

$$\langle x(s) | x(0) \rangle = C(x', x'') s^{-2} e^{\frac{i}{2} e \sigma F s} e^{-L(s)} \times \\ \times \exp \left[ \frac{i}{4} (x'' - x') e F \coth(e F s) (x'' - x') \right] \quad (2.29) \\ L(s) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \ln \left( \frac{\sinh(e F s)}{e F s} \right) \right]$$

La funzione dei punti iniziali e finali  $C(x', x'')$  si trova riscrivendo le seconde delle (2.19)

$$\langle x(s) | \Pi_\mu(s) | x(0) \rangle = \frac{1}{2} [e F \coth(e F s) + e F] (x'' - x') \langle x(s) | x(0) \rangle \\ \langle x(s) | \Pi_\mu(0) | x(0) \rangle = \frac{1}{2} [e F \coth(e F s) - e F] (x'' - x') \langle x(s) | x(0) \rangle \quad (2.30)$$

Esplicitando  $\coth(A) = \frac{e^A + e^{-A}}{2 \sinh(A)}$  ed eseguendo la somma nelle parentesi quadre si vede come si riottiene la prima delle (2.24), ma visto che  $F$  non agisce sulle coordinate spaziali, rimane fuori il prodotto scalare tra  $x(s)$  ed  $x(0)$ . Sostituendoci dunque la (2.29) e riutilizzando le definizioni (2.20), si ottiene il sistema differenziale

$$\left[ -i \partial_\mu'' - e A_\mu(x'') - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (x'' - x')^\nu \right] C(x', x'') = 0 \\ \left[ i \partial_\mu' - e A_\mu(x') - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (x'' - x')^\nu \right] C(x', x'') = 0 \quad (2.31)$$

con soluzione

$$C(x', x'') = C(x') \exp \left[ i e \int_{x'}^{x''} dx A(x) + \frac{1}{2} F(x - x') \right] = \\ = C \exp \left[ i e \int_{x'}^{x''} dx A(x) \right] \equiv C \Phi(x', x'') \quad (2.32)$$

La seconda uguaglianza è dovuta all'aver scelto una “retta” che collega  $x'$  ed  $x''$  come percorso di integrazione (l'argomento ha rotore nullo, dunque l'integrale è indipendente dal percorso di integrazione). La costante  $C$  si trova grazie alla condizione (2.21), ovvero  $C = -\frac{i}{16\pi^2}$

Ora, grazie alla (2.18) ed alle considerazioni ad essa inerenti, possiamo scrivere la lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-im^2 s} \text{tr} \langle x | U(s) | x \rangle = \frac{i}{2} \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \text{tr} \langle x(s) | x(0) \rangle_{x'', x' \rightarrow x} = \\ = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-im^2 s} \times e^{-L(s)} \text{tr} \exp \left( \frac{i}{2} e \sigma F s \right) \quad (2.33)$$

ed esprimerla in termini di quantità reali tramite una rotazione di  $-\frac{\pi}{2}$  nel piano complesso  $s \longrightarrow -is$  così da ottenere

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \times \underbrace{e^{-l(s)}}_{\text{tr exp}} \left( \frac{1}{2} e \sigma F s \right) \quad (2.34)$$

$$l(s) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \ln \left( \frac{\sin(eFs)}{eFs} \right) \right]$$

Per il calcolo esplicito delle due tracce sfruttiamo le proprietà delle matrici  $\gamma_\mu$  ed i loro commutatori  $\sigma_{\mu\nu}$ :

$$\frac{1}{2} \{ \sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\lambda k} \} = \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu k} - \delta_{\mu k} \delta_{\nu\lambda} + i \epsilon_{\mu\nu\lambda k} \gamma_5 \quad (2.35)$$

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad \gamma_5^2 = -1$$

dove  $\epsilon_{\mu\nu\lambda k}$  è il simbolo di Levi-Civita a 4 indici (l'indice della nuova matrice  $\gamma$  è 5 poiché è la quinta). Questo permette di passare dal tensore elettromagnetico  $F$  al suo duale

$$F_{\mu\nu}^* = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda k} F^{\lambda k} \quad (2.36)$$

nel quale le componenti dei campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono scambiate tra loro ( $E_x \longleftrightarrow B_x, \dots$ ). Di conseguenza

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)^2 &= \frac{1}{4} \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\lambda k} F^{\mu\nu} F^{\lambda k} = \frac{1}{8} \{ \sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\lambda k} \} F^{\mu\nu} F^{\lambda k} = \\ &= \frac{1}{4} \left[ F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} + 2\gamma_5 F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} \right] = \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} \gamma_5 F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} = 2(\mathcal{F} + \gamma_5 \mathcal{G}) \end{aligned} \quad (2.37)$$

per la quale abbiamo usato la simmetria del prodotto  $\sigma\sigma$  (l'anticommutatore (2.35) è la somma del prodotto di due commutatori), l'antisimmetria di  $F$  nella terza uguaglianza e le definizioni (1.2) nell'ultima.

Grazie all'ultima identità delle (2.35) possiamo sostituire  $\gamma_5 = \pm i$  ed ottenere i quattro autovalori

$$\left( \frac{1}{2} \sigma F \right) = \pm (2(\mathcal{F} \pm i\mathcal{G}))^{\frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} \text{tr exp} \left( \frac{1}{2} e \sigma F s \right) &= e^{es(2(\mathcal{F}+i\mathcal{G}))^{\frac{1}{2}}} + e^{-es(2(\mathcal{F}+i\mathcal{G}))^{\frac{1}{2}}} + e^{es(2(\mathcal{F}-i\mathcal{G}))^{\frac{1}{2}}} + \\ &+ e^{-es(2(\mathcal{F}-i\mathcal{G}))^{\frac{1}{2}}} = 2 \cosh(es(2(\mathcal{F}+i\mathcal{G}))^{\frac{1}{2}}) + 2 \cosh(es(2(\mathcal{F}-i\mathcal{G}))^{\frac{1}{2}}) = \\ &= 4 \text{Re} \cosh(es(2(\mathcal{F}+i\mathcal{G}))^{\frac{1}{2}}) \equiv 4 \text{Re} \cosh(es\mathcal{X}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

dove rimane solo la parte reale poiché, sviluppando gli esponenziali con la formula di Eulero, le parti immaginarie si cancellano. Si noti inoltre che  $\mathcal{X} = \mathbf{B} + i\mathbf{E}$ .

Per il calcolo di  $e^{-l(s)}$  bisogna trovare gli autovalori di  $F$ . Riscrivendo le (1.2) come

$$F_{\mu\lambda}^* F^{\lambda\nu*} - F_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} = 2\delta_{\mu\nu} \mathcal{F} \quad (2.40)$$

per la quale è stata usata l'antisimmetria di  $F$  e la proprietà moltiplicativa dei simboli di Levi-Civita, e

$$F_{\mu\lambda}^* F^{\lambda\nu} = -\delta_{\mu\nu} \mathcal{G} \quad (2.41)$$

Considerando l'equazione agli autovalori

$$F_{\mu\nu} \psi^\nu = f \psi_\mu \quad (2.42)$$

che insieme alla (2.41) dà

$$F_{\mu\lambda}^* F^{\lambda\nu} \psi_\nu = F_{\mu\lambda}^* f \psi^\lambda = -\delta_{\mu\nu} \mathcal{G} \psi_\nu = -\mathcal{G} \psi_\mu$$

ovvero

$$F_{\mu\nu}^* \psi^\nu = -\frac{\mathcal{G}}{f} \psi_\mu \quad (2.43)$$

che reiterate danno

$$F_{\mu\lambda} F^{\lambda\nu} \psi_\nu = f F_{\mu\lambda} \psi^\lambda = f^2 \psi_\mu, \quad F_{\mu\lambda}^* F^{\lambda\nu*} \psi_\nu = -\frac{\mathcal{G}}{f} F_{\mu\lambda} \psi^\lambda = \frac{\mathcal{G}^2}{f^2} \psi_\mu \quad (2.44)$$

ed una volta inserite nella (2.40) forniscono l'equazione nell'incognita  $f$

$$f^4 + 2f^2 \mathcal{F} - \mathcal{G}^2 = 0 \quad (2.45)$$

che ha soluzioni triviali  $\pm f_1, \pm f_2$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{i}{\sqrt{2}} [(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{\frac{1}{2}} + (\mathcal{F} - i\mathcal{G})^{\frac{1}{2}}] \\ f_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}} [(\mathcal{F} + i\mathcal{G})^{\frac{1}{2}} - (\mathcal{F} - i\mathcal{G})^{\frac{1}{2}}] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Queste vanno inserite in  $l(s)$  (2.34), ovvero

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2} \text{tr} \left[ \ln \left( \frac{\sin(eFs)}{eFs} \right) \right]} &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \ln \frac{\sin ef_1 s}{ef_1 s} + \ln \frac{\sin e(-f_1)s}{e(-f_1)s} + \ln \frac{\sin ef_2 s}{ef_2 s} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln \frac{\sin e(-f_2)s}{e(-f_2)s} \right) \right] = \exp \ln \left[ \frac{ef_1 s}{\sin ef_1 s} \right] \exp \ln \left[ \frac{ef_2 s}{\sin ef_2 s} \right] = \\ &= \frac{(es)^2 f_1 f_2}{\sin ef_1 s \sin ef_2 s} = \frac{2(es)^2 f_1 f_2}{\cos e(f_1 - f_2)s - \cos e(f_1 + f_2)s} \end{aligned} \quad (2.47)$$

nella quale abbiamo usato il fatto che  $\sin(x)$  ed  $x$  sono funzioni dispari (dunque il loro rapporto è pari) e la terza formula di Werner.



Sviluppando i coseni e notando che la somma e differenza degli autovalori di  $F$  sono rispettivamente  $\mathcal{X}$  ed  $\tilde{\mathcal{X}}$ , possiamo scrivere

$$e^{-l(s)} = \frac{(es)^2 \mathcal{G}}{\text{Im} \cosh(es\mathcal{X})} \quad (2.48)$$

Inserendo questa e la (2.39) nella (2.34) otteniamo finalmente

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \times \left[ (es)^2 \mathcal{G} \frac{\text{Re} \cosh(es\mathcal{X})}{\text{Im} \cosh(es\mathcal{X})} - 1 \right] \quad (2.49)$$

dove  $\mathcal{F}$  è il termine di Maxwell, ed alla quale abbiamo aggiunto il -1 per annullare l'espressione in caso di assenza di campo.

In vista del modo in cui verrà espressa, è utile espandere la (2.49) al primo ordine, per poi aggiungere e sottrarre il termine derivante, ovvero

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \mathcal{F} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & - \left[ 1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \right] \mathcal{F} + \\ & - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \times \left[ (es)^2 \mathcal{G} \frac{\text{Re} \cosh(es\mathcal{X})}{\text{Im} \cosh(es\mathcal{X})} - 1 - \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} \right] \end{aligned} \quad (2.51)$$

In questo modo, però, la parte classica della lagrangiana è moltiplicata per un termine divergente. Il metodo che usa Schwinger è inglobarlo in una costante

$$k = \frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \quad (2.52)$$

e riferendoci alle quantità fin ora utilizzate con pedice 0,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} + i\mathcal{G} &= (1 + ke_0^2)(\mathcal{F}_0 + i\mathcal{G}_0) \\ e^2 &= \frac{e_0^2}{1 + ke_0^2} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Queste quantità hanno un effetto globale nullo in quanto appaiono sempre moltiplicate tra loro, nonostante la presenza implicita di una divergenza: è la prima proposta di rinormalizzazione. Il risultato finale è la lagrangiana gauge-invariante

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \times \left[ (es)^2 \mathcal{G} \frac{\text{Re} \cosh(es\mathcal{X})}{\text{Im} \cosh(es\mathcal{X})} - 1 - \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} \right] \quad (2.54)$$

Oltre a dipendere solo dai quadrati degli invarianti  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$ , ed essere convergente ovunque, da un'espansione in  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  si ritrova esattamente il termine di Euler e Cockel [5].

### 2.3 Azione e rate di produzione

Trovata la (2.54), ci interessiamo al calcolo<sup>10</sup> dell'azione come vista nella (2.14)

$$W = \frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-im^2 s} \text{Tr} U(s) \quad (2.55)$$

Riscriviamo allora l'Hamiltoniana (2.16) nella maniera seguente

$$H = \overbrace{(p - eA)^2}^{\Pi^2} - \frac{1}{2} e\sigma F = p^2 - e(pA + Ap) + e^2 A^2 - \frac{1}{2} e\sigma F = H_0 + H_1 \quad (2.56)$$

$$H_0 = p^2, \quad H_1 = -e(pA + Ap) + e^2 A^2 - \frac{1}{2} e\sigma F \quad (2.57)$$

legate alle equazioni di Shrödinger

$$i\partial_s U_0(s) = H_0 U_0(s), \quad i\partial_s U(s) = (H_0 + H_1)U(s) \quad (2.58)$$

con soluzioni triviali

$$U_0(s) = e^{-iH_0 s}, \quad U(s) = e^{-i(H_0 + H_1)s} \quad (2.59)$$

Definiamo ora l'operatore

$$V(s) = U_0^{-1}(s)U(s), \quad V(0) = 1 \quad (2.60)$$

tale che (omettendo la variabile  $s$  nei passaggi)

$$\begin{aligned} i\partial_s V(s) &= i(\partial_s U_0^{-1})U + iU_0^{-1}(\partial_s U) = -\cancel{H_0}U_0^{-1}U + U_0^{-1}(\cancel{H_0} + H_1)U = \\ &= U_0^{-1}H_1U_0U_0^{-1}U = U_0^{-1}H_1U_0V(s) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Possiamo combinare l'equazione (2.61) con la condizione in (2.60) per ottenere

$$V(s) = 1 - i \int_0^s ds' U_0^{-1}(s')H_1U_0(s')V(s') \quad (2.62)$$

e costruire la soluzione tramite iterazione (reinserendo  $V(s)$  nell'integrale)

$$\begin{aligned} V(s) &= 1 - i \int_0^s ds' U_0^{-1}(s')H_1U_0(s') \left( 1 - i \int_0^s ds' U_0^{-1}(s')H_1U_0(s')V(s') \right) = \\ &= 1 - i \int_0^s ds' U_0^{-1}(s')H_1U_0(s') + (-i)^2 \int_0^s ds' U_0^{-1}(s')H_1U_0(s') \times \\ &\quad \times \int_0^{s'} ds'' U_0^{-1}(s'')H_1U_0(s'') + (-i)^3 \int_0^s ds' \dots \int_0^{s'} ds'' \dots \int_0^{s''} ds''' \dots + \dots \end{aligned} \quad (2.63)$$

<sup>10</sup>La soluzione finale si trova a p. 19, eq (2.81), dalla quale si trova il rate (2.83). Per il rate di produzione in un campo puramente elettrico cfr. ivi p. 20 eq (2.87)

Se ora effettuiamo la sostituzione

$$s' = su_1, \quad s'' = s'u_2 = su_1u_2, \quad s''' = s''u_3 = su_1u_2u_3, \quad \dots \quad (2.64)$$

e moltiplichiamo a sinistra per  $U_0(s)$  (ricordando che sono esponenziali, dunque  $U_0(a)U_0^{-1}(b) = U_0(a-b)$ ), si ottiene un'equazione integrale per  $U(s)$ :

$$\begin{aligned} U(s) &= U_0(s) \overbrace{U_0^{-1}(s)U(s)}^{V(s)} = U_0(s) - is \int_0^1 du_1 U_0(s(1-u_1)) H_1 U_0(su_1) + \\ &+ (-is)^2 \int_0^1 du_1 U_0(s(1-u_1)) H_1 U_0(u_1s) \int_0^1 u_1 du_2 U_0(su_1(1-u_2)) H_1 U_0(su_1u_2) + \\ &+ \dots \\ &+ (-is)^n \int_0^1 u_1^{n-1} du_1 \int_0^1 u_2^{n-2} du_2 \dots \int_0^1 du_n \times \\ &\times \left[ U_0(s(1-u_1)) H_1 U_0(su_1) \dots U_0(su_1 \dots u_{n-1}(1-u_n)) H_1 U_0(su_1 \dots u_n) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.65)$$

Se riscriviamo, tramite il semplice integrale

$$\text{Tr } U(s) = \text{Tr } U_0(s) - is \int_0^1 d\lambda \text{Tr } H_1 e^{-i(H_0 + \lambda H_1)s} \quad (2.66)$$

Applicando la traccia, allora, possiamo eseguire un'integrazione in  $d\lambda$  una volta sostituito  $H_1 \longrightarrow \lambda H_1$ , per ottenere

$$\begin{aligned} \text{Tr } U(s) &= \text{Tr } U_0(s) - is \int_0^1 d\lambda \text{Tr } [H_1 U_0(s)] + \\ &+ (-is)^2 \int_0^1 d\lambda \lambda \int_0^1 du_1 \text{Tr } [U_0(s(1-u_1)) H_1 U_0(su_1)] + \dots = \\ &= \text{Tr } U_0(s) - is \text{Tr } [H_1 U_0(s)] + \\ &+ \frac{1}{2} (-is)^2 \int_0^1 du_1 \text{Tr } [U_0(s(1-u_1)) H_1 U_0(su_1)] + \dots + \\ &+ \frac{(-is)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 u_1^{n-1} du_1 \dots \int_0^1 du_n \times \\ &\times \text{Tr} \left[ U_0(s(1-u_1)) H_1 U_0(su_1) \dots U_0(su_1 \dots u_{n-1}(1-u_n)) H_1 U_0(su_1 \dots u_n) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.67)$$

nella quale il fattore  $(-is)$  in più viene direttamente dalla (2.66), mentre i fattori  $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n+1}$  dall'integrazione di  $\lambda$ , presente tante volte quante  $H_1$  in un dato addendo.

Sostituire questa espressione nell'azione (2.14) sarebbe, oltre che macchinoso, poco utile nei confronti dei risultati: prendiamo allora solo i primi tre termini scrivendo  $u \equiv u_1$  (essendo l'unico).

$$\begin{aligned}
W = & \frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-im^2 s} \overbrace{\text{tr}(x|U(s)|x)}^{\text{Tr } U(s)} = \frac{i}{2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-im^2 s} \left\{ \text{Tr } e^{-ip^2 s} + \right. \\
& - is \text{Tr} \left[ -e(pA + Ap) + e^2 A^2 - \frac{1}{2} e \sigma F \right] e^{-ip^2 s} + \\
& + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_0^1 du \text{Tr} \left[ -e(pA + Ap) + e^2 A^2 - \frac{1}{2} e \sigma F \right] e^{-ip^2(1-u)s} \times \\
& \quad \times \left[ -e(pA + Ap) + e^2 A^2 - \frac{1}{2} e \sigma F \right] e^{-ip^2 us} \Big\}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Avendo definito la normalizzazione (2.53), nella quale appare solo un termine quadratico in  $e$ , di tutti gli addendi derivanti dalla (2.68) prenderemo solo quelli con  $e^2$  senza operatori misti, e facendo l'utile sostituzione  $u \rightarrow \frac{1}{2}(1+v)$ , che sposta gli estremi di integrazione tra -1 ed 1 e tira fuori un fattore  $\frac{1}{2}$  dall'integrale in  $du$

$$\begin{aligned}
W = & \frac{i}{2} e^2 \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-im^2 s} \left\{ -is \text{Tr } A^2 e^{-ip^2 s} + \right. \\
& + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \text{Tr} \left[ (pA + Ap) e^{-\frac{i}{2} p^2(1-v)s} (pA + Ap) e^{-\frac{i}{2} p^2(1+v)s} \right] + \\
& + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \text{Tr} \left[ \frac{1}{2} \sigma F e^{-\frac{i}{2} p^2(1-v)s} \frac{1}{2} \sigma F e^{-\frac{i}{2} p^2(1+v)s} \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Per proseguire nel calcolo delle tracce vogliamo avere solo dipendenze dalle quattro coordinate dell'impulso. Per fare ciò basta riscrivere le componenti del potenziale vettore grazie alla trasformata di Fourier

$$A_\mu(x) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^\infty d^4 k e^{ikx} \hat{A}_\mu(k) \tag{2.70}$$

Notando che gli elementi di matrice nelle coordinate spaziali dipendono solo dalle differenze di impulso si può scrivere

$$\langle p + \frac{1}{2}k | A_\mu | p - \frac{1}{2}k \rangle = (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^\infty d^4 x e^{-ikx} A_\mu(x) = (2\pi)^{-2} \hat{A}_\mu(k) \tag{2.71}$$

mentre per il suo quadrato possiamo ignorare la differenza  $k$ , visto che nella (2.69)  $A^2$  non agisce su nessun operatore impulso

$$\begin{aligned}
\langle p | A_\mu^2 | p \rangle &= (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^\infty d^4 x A_\mu^2(x) = \\
&= (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^\infty d^4 x \int_{-\infty}^\infty \frac{d^4 k d^4 k'}{(2\pi)^4} \underbrace{e^{-ikx} e^{-ik'x}}_{(2\pi)^4 \delta(k+k')} \hat{A}_\mu(k) \hat{A}_\mu(k') = \\
&= (2\pi)^{-4} \int_{-\infty}^\infty d^4 k \hat{A}_\mu(k) \hat{A}_\mu(-k)
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Così la (2.69) diventa (lavorando con le componenti degli operatori e non con le loro tracce, i termini commutano e si moltiplicano algebricamente. È stato inoltre rimosso  $\hat{\phantom{A}}$  da  $\hat{A}$ )

$$\begin{aligned}
W = & \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-im^2 s} \left\{ -is \int_{-\infty}^\infty d^4 k A_\mu(-k) A^\mu(k) \int_{-\infty}^\infty d^4 p e^{-ip^2 s} + \right. \\
& + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \int_{-\infty}^\infty d^4 k \int_{-\infty}^\infty d^4 p 2p_\mu A^\mu(-k) e^{-\frac{i}{2}(p+\frac{1}{2}k)^2(1-v)s} \times \\
& \quad \times 2p_\nu A^\nu(k) e^{-\frac{i}{2}(p-\frac{1}{2}k)^2(1+v)s} + \\
& + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \int_{-\infty}^\infty d^4 k \int_{-\infty}^\infty d^4 p \frac{1}{4} \text{tr} \left[ \frac{1}{2} \sigma F(-k) e^{-\frac{i}{2}(p+\frac{1}{2}k)^2(1-v)s} \times \right. \\
& \quad \left. \left. \times \frac{1}{2} \sigma F(k) e^{-\frac{i}{2}(p-\frac{1}{2}k)^2(1+v)s} \right] \right\} \quad (2.73)
\end{aligned}$$

nella quale possiamo sostituire gli integrali<sup>11</sup>

$$\int_{-\infty}^\infty d^4 p e^{-ip^2 s} = -i\pi^2 s^{-2} \quad (2.74)$$

$$\int_{-\infty}^\infty d^4 p e^{-i(p^2 + \frac{k^2}{4})s + ipkvs} = -i\pi^2 s^{-2} e^{-i\frac{k^2}{4}(1-v^2)s} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty d^4 p p_\mu p^\nu e^{-i(p^2 + \frac{k^2}{4})s + ipkvs} = & -\frac{1}{2} \pi^2 s^{-3} \delta_{\mu\nu} + \\
& -\frac{1}{4} i\pi^2 s^{-2} v^2 (k_\mu k^\nu - \delta_{\mu\nu} k^2) e^{-i\frac{k^2}{4}(1-v^2)s} \quad (2.76)
\end{aligned}$$

con l'accortezza che  $k_\mu k^\nu - \delta_{\mu\nu} k^2$  (che verrà sostituito nel secondo addendo della (2.73)) agisce su  $A_\mu(-k)A^\nu(k)$ . Riscrivendo allora (per compattezza il segno di  $k$  è annotato all'apice)

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}(-k)F^{\mu\nu}(k) = & (\partial_\mu A^{\nu-} - \partial_\nu A^{\mu-})(\partial_\mu A^{\nu+} - \partial_\nu A^{\mu+}) = \\
= & \partial_\mu A^{\nu-} \partial_\mu A^{\nu+} - \partial_\mu A^{\nu-} \partial_\nu A^{\mu+} - \partial_\nu A^{\mu-} \partial_\mu A^{\nu+} + \partial_\nu A^{\mu-} \partial_\nu A^{\mu+} = \\
= & (-k_\mu k^\mu - k_\nu k^\nu + k_\mu k^\nu + k_\nu k^\mu) A_\mu^- A^{\nu+} = -2(k_\mu k^\nu - \delta_{\mu\nu} k^2) A_\mu^- A^{\nu+} \quad (2.77)
\end{aligned}$$

Nell'inserire questi risultati, il primo addendo della (2.73) (una volta sostituito l'integrale (2.74)) si semplifica con il primo addendo della (2.76), ed usando la proprietà (2.37) nell'ultima traccia rimasta<sup>12</sup> (ultimo addendo della (2.73)) otteniamo

$$W = -\frac{e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty d^4 k \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(-k) F^{\mu\nu}(k) \int_0^1 dv (1-v^2) \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-[m^2 + \frac{k^2}{4}(1-v^2)]s} \quad (2.78)$$

nella quale abbiamo usato la parità dell'integrando in  $v$  per dimezzare l'intervallo di integrazione ed eseguito una rotazione di  $-\frac{\pi}{2}$  nel piano complesso ( $s \rightarrow -is$ ) come nella sezione

<sup>11</sup>Notare che nel secondo e terzo addendo sviluppare il prodotto  $(p \pm \frac{1}{2}k)^2(1 \mp v)$  agli esponenziali fa sì che l'unico termine in cui appare  $v$  sia il prodotto  $pk$ , non i quadrati

<sup>12</sup>la traccia, ovvero la somma degli autovalori è  $2(\mathcal{F} + i\mathcal{G}) + 2(\mathcal{F} - i\mathcal{G}) = 4\mathcal{F} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

precedente (per ottenere quantità reali).

Integrando per parti l'integrale in  $dv$  come

$$\begin{aligned} \int_0^1 dv e^{-\frac{k^2}{4}(1-v^2)s} &= \left[ v e^{-\frac{k^2}{4}(1-v^2)s} \right]_0^1 - \frac{k^2}{2}s \int_0^1 dv v^2 e^{-\frac{k^2}{4}(1-v^2)s} \\ \int_0^1 dv v^2 e^{-\frac{k^2}{4}(1-v^2)s} &= \left[ \frac{v^3}{3} e^{-\frac{k^2}{4}(1-v^2)s} \right]_0^1 - \frac{k^2}{2}s \int_0^1 dv \frac{v^4}{3} e^{-\frac{k^2}{4}(1-v^2)s} \end{aligned} \quad (2.79)$$

ed aggiungendo il termine classico  $W_0 = -\frac{1}{4} \int d^4k F_{\mu\nu}(-k) F^{\mu\nu}(k)$  possiamo integrare in  $s$  i termini nei quali, grazie alle (2.79),  $s^{-1}$  si semplifica con  $s$  lasciando solo l'esponenziale nell'integrando:

$$\begin{aligned} W &= - \left[ 1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \right] \int_{-\infty}^\infty d^4k \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F^{\mu\nu}(k) + \\ &+ \frac{e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty d^4k \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F^{\mu\nu}(k) k^2 \int_0^1 dv \frac{v^2(1 - \frac{v^2}{3})}{m^2 + \frac{k^2}{4}(1-v^2)} \end{aligned} \quad (2.80)$$

che grazie alla normalizzazione (2.53) diventa

$$W = - \int_{-\infty}^\infty d^4k \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F^{\mu\nu}(k) \left[ 1 - \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{k^2}{m^2} \int_0^1 dv \frac{v^2(1 - \frac{v^2}{3})}{1 + \frac{k^2}{4m^2}(1-v^2)} \right] \quad (2.81)$$

Come si può immediatamente notare l'integrale in  $dv$  è divergente solo se  $-k^2 > 4m^2$ , ovvero, in questa rappresentazione di Fourier, un campo può produrre una coppia tramite l'assorbimento di un quanto di luce solamente se il 4-impulso di quest'ultimo è di tipo tempo e magnitudo  $|k| > 2m$ , in accordo con quanto anticipato.

Per il calcolo del rate di produzione è sufficiente trovare la parte immaginaria della (2.81), in quanto la probabilità che nessuna coppia sia stata prodotta nella storia del campo è data da  $|e^{iW}|^2 = e^{-2 \text{Im}W}$ . Questa è ottenuta tramite l'aggiunta di una costante immaginaria negativa al denominatore dell'integrando e la proprietà

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x) \quad (2.82)$$

dove  $\mathcal{P}f(x)$  è la parte principale della funzione  $f(x)$ . In questo modo si ottiene

$$\begin{aligned} 2 \text{Im}W &= \frac{e^2}{2} \int_{-\infty}^\infty d^4k \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F^{\mu\nu}(k) \frac{k^2}{m^2} \int_0^1 dv v^2 \left( 1 - \frac{v^2}{3} \right) \delta \left( 1 + \frac{k^2}{4m^2}(1-v^2) \right) = \\ &= -e^2 \int_{-k^2 > 4m^2} d^4k \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F^{\mu\nu}(k) \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{4m^2}{-k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 2 + \frac{4m^2}{-k^2} \right) \end{aligned} \quad (2.83)$$

nella quale sono state utilizzate la proprietà della delta  $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ , con  $x_i$  zeri della funzione  $f(x)$ , e la condizione del radicando  $\sqrt{f(x)} \parallel f(x) \geq 0$ . Il segno davanti  $k^2$  è

stato tenuto negativo per consistenza. La (2.83) fornisce così la probabilità che un campo con componenti  $F_{\mu\nu}$  (nello spazio dei momenti) produca una coppia elettrone-positrone.

Nel caso specifico di un campo puramente elettrico, omogeneo nello spazio e nel tempo, possiamo trovare la probabilità dalla lagrangiana (2.54). Con le condizioni appena specificate<sup>13</sup> questa prende la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \times \left[ e\mathcal{E}s \cot(e\mathcal{E}s) - 1 + \frac{1}{3}(e\mathcal{E}s)^2 \right] \quad (2.84)$$

dove il termine divergente ( $\cot(\dots)$ ) ha poli per  $s = s_n = \frac{n\pi}{e\mathcal{E}}$ ,  $n$  intero positivo. Per poterne calcolare i valori utilizziamo l'espansione di Mittag-Leffler per la cotangente

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2} \longrightarrow \cot(z) = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2 \pi^2} \quad (2.85)$$

che inserita nella (2.84) dà

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} e^{-m^2 s} \times \left[ \cancel{e\mathcal{E}s} \frac{1}{e\mathcal{E}s} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e\mathcal{E}s)^2}{(e\mathcal{E}s)^2 - n^2 \pi^2} \cancel{1} + \frac{1}{3}(e\mathcal{E}s)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 - \frac{n^2 \pi^2}{e^2 \mathcal{E}^2}} + \frac{1}{6} \right] \end{aligned} \quad (2.86)$$

Applicando la (2.82) (in questo caso  $x$  è il denominatore della serie) l'unico termine immaginario è quello con la sommatoria. Sviluppandolo allora con la proprietà della delta già utilizzata si ottiene

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} \mathcal{L} &= \cancel{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty ds s^{-1} e^{-m^2 s} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(s - \frac{n\pi}{e\mathcal{E}})}{2n\pi/e\mathcal{E}} = \\ &= \frac{e^2}{4\pi^3} \mathcal{E}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{nm^2}{e\mathcal{E}} \pi\right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Questa serie, per la prima volta calcolata da Julian Schwinger, rappresenta la probabilità per unità di tempo e di volume che una coppia  $e^+e^-$  venga creata dalla presenza di un campo elettrico nel vuoto<sup>14</sup>. Come anticipato, la (2.87) non è espandibile né in termini di  $e$  né in termini di  $\mathcal{E}$ : da qui “non perturbativo”. Infatti non saremmo stati in grado di calcolarla dall'azione (2.83), in quanto questa è stata ottenuta selezionando un numero finito di termini della (2.67): se avessimo sostituito la trasformata di Fourier del campo, una  $\delta(k)$  in quanto esso è costante, al posto di  $F_{\mu\nu}(-k)F^{\mu\nu}(k)$  nella (2.83), l'integrale si sarebbe annullato, non essendo 0 parte del suo dominio di integrazione.

<sup>13</sup>dalle (1.2)  $\mathcal{F} = -\frac{1}{2}\mathcal{E}^2$ ,  $\mathcal{G} = 0$

<sup>14</sup>Il primo termine della serie,  $n = 1$ , è identico (a meno di una costante di proporzionalità) al valore del primo polo della (1.4), come menzionato a p. 5

### 3 Risultati per campi variabili

#### 3.1 Inomogeneità spaziali e temporali

In questo capitolo saranno illustrate, senza entrare nel dettaglio dei calcoli, delle configurazioni del campo elettrico che permettano la produzione di coppie ad intensità notevolmente inferiore del limite (1.1). I mezzi principali per lo studio di queste configurazioni sono integrali di cammino ed istantoni e l'equazione di Vlasov, analoga all'equazione di trasporto di Boltzmann ma adattata a particelle cariche con interazione a lungo raggio (Coulomb).

Il primo risultato interessante è come la dipendenza del potenziale vettore da spazio/tempo influenzi il meccanismo di Schwinger. Per

$$A_z(z) = -\mathcal{E}L \tanh\left(\frac{z}{L}\right), \quad A_t(t) = -\mathcal{E}T \tanh\left(\frac{t}{T}\right) \quad (3.1)$$

ovvero un campo elettrico che va come  $\text{sech}^2$  in funzione di  $z$  e  $t$  rispettivamente (una specie di impulso “gaussiano”, il più generico impulso elettrico, in una regione di spazio  $L$  ed in un intervallo di tempo  $T$ ), la densità del numero di coppie prodotte per unità di volume è [8]

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_z &\propto \mathcal{E}^{\frac{5}{2}} (1 - \gamma_z^2)^{\frac{5}{4}} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{e\mathcal{E}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \gamma_z^2}}{2\gamma_z^2}\right)\right] \\ \mathcal{N}_t &\propto \mathcal{E}^{\frac{5}{2}} (1 + \gamma_t^2)^{\frac{5}{4}} \exp\left[-\frac{\pi m^2}{e\mathcal{E}} \left(\frac{\sqrt{1 + \gamma_t^2} - 1}{2\gamma_t^2}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

con  $\gamma_z = \frac{m}{e\mathcal{E}L}$  e  $\gamma_t = \frac{m}{e\mathcal{E}T}$  ( $\hbar=c=1$ )  $< 1$ . Da queste equazioni è chiaro l'effetto delle variazioni del campo: le inomogeneità spaziali tendono a sopprimere la produzione di coppie, mentre quelle temporali ad aumentarla. Questo perché, nel primo caso, i centri di “nucleazione” dominanti si troveranno nei punti dello spazio dove il campo è massimo e, se questo decresce troppo velocemente nel suo intorno, la coppia virtuale non acquisirà abbastanza energia cinetica per diventare reale (fare tunnel). Di conseguenza la produzione è notevolmente soppressa. Nel secondo caso, invece, il problema di scattering è tale che la barriera da superare sia dipendente dal tempo, e di conseguenza mediamente più bassa.

In vista di ciò, e dato che un'onda piana soddisfa sempre  $\mathcal{F} = \mathcal{G} = 0$  (non può produrre particelle), richiedendo così la sovrapposizione di almeno due onde coerenti che producano un'onda stazionaria, ha senso investigare la forma e la superposizione di diversi impulsi laser.



### 3.2 Campo oscillante

Dal 2005, quando il primo laser ad elettroni liberi in grado di emettere luce nella frequenza X (XFEL, X-Ray Free Electron Laser) è entrato in funzione, i progetti DESY (*Deutsches Elektronen Synchrotron*) e SLAC (*Stanford Linear Accelerator Center*) hanno fatto sì che l'osservazione dell'effetto Schwinger divenisse un evento prossimo. Questi sono infatti in grado di raggiungere intensità di  $E \approx 0.1E_c$  per varie frequenze, intensità sufficiente per le configurazioni trattate.

Prendiamo in esempio [9] il campo elettrico  $\vec{E} = (0, 0, \mathcal{E}(t)) = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)$ . Per studiarne l'effetto, si definisce un'equazione di Vlasov nella quale non appaiono termini collisionali, essendo la quantità di coppie prodotte non sufficiente a garantirne l'apprezzabilità. È inoltre trascurabile l'effetto che le coppie hanno sul campo stesso. La funzione di interesse è la distribuzione dell'impulso:

$$\frac{d f(\vec{p}, t)}{dt} = \frac{e\mathcal{E}(t)m_{\perp}^2}{2\varepsilon^2(\vec{p}, t)} \int_{t_0}^t dt' \frac{e\mathcal{E}(t')(1 - 2f(\vec{p}, t'))}{\varepsilon^2(\vec{p}, t')} \cos \left[ 2 \int_{t'}^t dt'' \varepsilon(\vec{p}, t'') \right] \quad (3.3)$$

dove  $m_{\perp}^2 = m^2 + p_{\perp}^2$  è la massa trasversa al quadrato,  $\varepsilon^2(\vec{p}, t) = m_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 = m^2 + p^2$  è l'energia totale al quadrato (essendo  $\vec{p} = (\vec{p}_{\perp}, p_{\parallel})$ , e  $p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2 = p^2$ ) ed il fattore  $1 - 2f$  fa in modo che ogni stato con impulso  $p$  abbia al più due fermioni (per il principio di esclusione). Questo e l'ultimo termine, il coseno, implicano una sorta di “memoria” della storia del campo, dando carattere non-Markoviano al sistema. Il primo si accoppia con la funzione di distribuzione stessa, il secondo con il campo. Ciò significa semplicemente che la probabilità di produzione di coppie è dipendente dal tempo. La magnitudo di questi effetti è dipendente dall'intensità del campo considerato (vedi Fig.3).

L'integrazione numerica della (3.3) (nello specifico con un algoritmo Runge-Kutta al 4° ordine) in funzione dei parametri del laser ci dà la funzione  $f(\vec{p}, t)$ . La Fig.2 mostra le distribuzioni di  $\vec{p}_{\perp}$  e  $\vec{p}_{\parallel}$  per  $\mathcal{E}_0 = 0.1E_c$  e  $\mathcal{E}_0 = E_c$ , con  $\lambda = 0.15nm \rightarrow \omega \approx 1.25 \times 10^{19} rad/s$

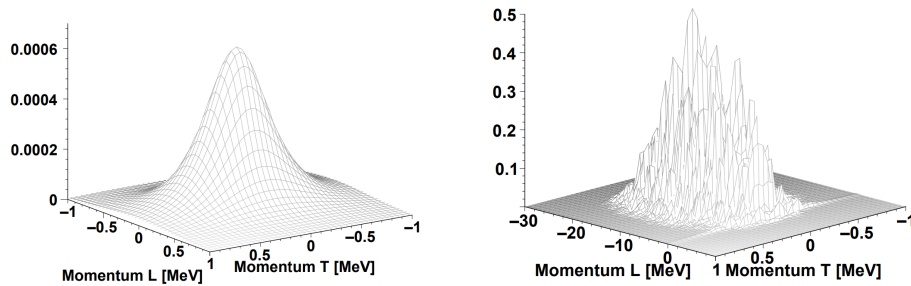


Fig. 2: Distribuzioni delle componenti dell'impulso nel caso di campo debole (sx) e forte (dx)

Come si vede, nel campo “debole”, le particelle non hanno tempo di essere accelerate abbastanza e non annichilirsi; per questo le componenti trasversale e longitudinale sono pesantemente concentrate intorno allo 0. Al contrario, raggiunto il valore critico il momento parallelo al campo elettrico è fortemente dominante, in quanto la coppia riesce ad acquisire l’energia per diventare reale e separarsi, e la scala di  $f$  è tre ordini di grandezza più grande. Dalla struttura fortemente irregolare si nota anche il carattere non Markoviano del processo. Marginalizzando  $\vec{p}$  si ottiene la densità del numero di particelle nel tempo

$$n(t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\vec{p}, t) \quad (3.4)$$

che ha l’andamento mostrato in figura

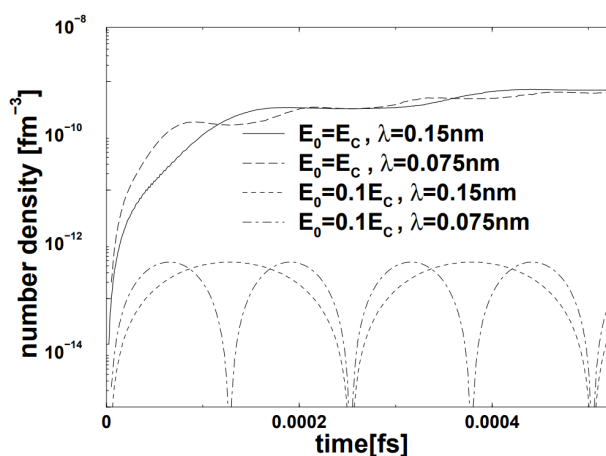


Fig. 3: Densità del numero di particelle  $n(t)$  per parametri diversi del laser

Come detto in precedenza, nei campi più deboli di  $E_c$  non vi è accumulo di particelle, e si istituiscono cicli di creazione e distruzione. Nell’altro caso invece, queste non riescono ad annichilirsi tutte, e vengono accelerate fino quasi alla velocità della luce (per questo i plateaux) accumulandosi fino a saturazione, per poi riaumentare al ciclo successivo. Anche qui l’irregolarità della curva, data dalle piccolissime oscillazioni lungo di essa, sono conseguenza dei termini  $1-2f$  e  $\cos(\dots)$ . I diversi valori di  $\lambda$  mostrano come la frequenza del laser influisca solamente sulla durata dei cicli e non sul numero di particelle prodotte.

### 3.3 Sovrapposizione di frequenze diverse

Come menzionato alla fine del primo capitolo, il regime perturbativo (per campi deboli rispetto ad  $E_c$ ), è caratterizzato dalla produzione di coppie tramite l’interazione di più fotoni. Nel 1997 questo è stato confermato dall’esperimento E-144 di SLAC [13], nel quale è stato osservato per la prima volta lo scattering anelastico dei fotoni, 5 in questo caso.

Nell'articolo [10], gli autori investigano la possibilità di incentivare la produzione di coppie tramite la superposizione di due impulsi laser: uno forte e lento, ed uno più debole ma rapido. In altre parole, far interagire costruttivamente i meccanismi perturbativi e non.

Prendiamo in esame i campi (etichettati lento e veloce)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_l &= \mathcal{E} \operatorname{sech}^2(\Omega t) \\ \mathcal{E}_v &= \varepsilon \operatorname{sech}^2(\omega t)\end{aligned}\tag{3.5}$$

governati dalle relazioni

$$\begin{aligned}0 < \varepsilon \ll \mathcal{E} \ll E_c \\ 0 < \Omega \ll \omega \ll m\end{aligned}\tag{3.6}$$

(Con  $\hbar=c=1$ , l'ultima disuguaglianza implica che l'energia dei fotoni è molto minore di  $mc^2$ ). Per configurazioni sperimentali realistiche, il volume nel quale i fasci sono focalizzati ha dimensioni molto maggiori della lunghezza compton dell'elettrone  $\lambda_c \approx 2.4 \times 10^{-12}m$  e di quella del laser. Di conseguenza, si può trattare il problema in maniera unidimensionale (lungo la componente parallela al campo elettrico) ed usare soluzioni WKB per la probabilità di transizione  $e^I$  con

$$I \propto \int_{x_-}^{x_+} dx \sqrt{m^2 - (eEx - w)^2} \propto \frac{m^2}{eE} f\left(\frac{w}{m}\right)\tag{3.7}$$

con  $x_{\pm} = \pm \frac{m-w}{eE}$  i punti di inversione classici tra le energie  $m\cancel{e}^2$  ed  $\hbar w$ ,  $E = \mathcal{E}_l + \mathcal{E}_v$  ed  $f$  la funzione

$$f(\kappa) = \pi + 2 \arcsin(1 - 2\kappa) + 4\sqrt{\kappa(1 - \kappa)}(1 - 2\kappa)\tag{3.8}$$

con  $\kappa = \frac{w}{m}$ . Interessandoci solo l'intervallo  $[0, 1]$ , possiamo approssimare  $f(\kappa) \approx 2\pi(1 - \kappa)$ . Nel limite  $\kappa \rightarrow 0$  (campi costanti) si ritrova l'esponenziale di Sauter  $e^{\frac{\pi m^2}{eE}} = e^{\frac{E_c}{E}\pi} = T$ . Per  $\kappa > 0$  si ha  $e^I > T$ , ovvero una produzione di particelle maggiore, fino ad arrivare a  $\kappa = 1$ , per il quale  $f(\kappa) = 0$ , ovvero  $e^I = 1$ , punto nel quale ogni oscillazione  $w$  ha energia sufficiente a creare una coppia.

La sovrapposizione di due impulsi dati dalla (3.5) ha allora l'effetto di incoraggiare l'effetto Schwinger. Da un punto di vista energetico il campo lento, forte, ha l'effetto di deformare temporaneamente i livelli elettronici negativi in maniera tale da permettere alle rapide, piccole, oscillazioni  $w$  di eccitare gli elettroni alle energie positive attraversando una barriera meno spessa.

## 4 Considerazioni finali

Una quesito naturale, a questo punto, è perchè si sia parlato di campi puramente elettrici e/o elettromagnetici: mai puramente magnetici. Questi ultimi, infatti, non possono produrre coppie. Lo si può evincere dalle lagrangiane (1.4) e (2.54) che, rispettivamente per  $a = 0$  e  $\mathcal{X} = B$  non hanno poli, ovvero non danno luogo a nessun fenomeno di produzione. Una spiegazione più intuitiva, meno matematica, è la seguente: quando un campo elettrico  $E$  separa di una distanza  $L$  una coppia  $e^+e^-$  virtuale, questa può diventare reale se il lavoro da essa accumulato raggiunge la soglia  $eEL = 2m$ . In un campo magnetico (che non compie lavoro, quindi risponde già alla domanda), invece, le particelle (ancora virtuali) percorrono orbite di Landau chiuse senza mai potersi allontanare. In questo caso il vuoto è un sistema stabile.

L'importanza e le conseguenze della produzione particella-antiparticella sono ormai ben note. L'elemento mancante è la sua osservazione in veste non perturbativa, fondamentale per la comprensione di fenomeni quali radiazione di Unruh-Hawking, produzione cosmologica di coppie e tutta la parte non perturbativa della fisica alle alte energie. La strategia più promettente, ovvero la sovrapposizione di campi diversi provenienti da sorgenti laser, è stata ampiamente esplorata, e se le strutture come ELI (*Extreme Light Infrastructure*), DESY e SLAC raggiungessero la potenza nominale prevista, permetterebbero l'esplorazione di questi effetti. Con le configurazioni proposte nel Cap. 3 saremmo dunque in grado di osservare fino a  $\sim 1000$  coppie nel punto focale dei raggi. La difficoltà sperimentale è nella distinzione di eventi di creazione e scattering perturbativo  $\gamma\gamma$ . La soluzione a questo problema è la "traccia" che le particelle prodotte lasciano nello spazio degli impulsi: soluzioni più elaborate di quelle riportate in questa dissertazione mostrano come l'approccio WKB (utilizzato in [10]) nasconda la presenza di oscillazioni molto precise dell'impulso longitudinale  $\vec{p}_{\parallel}$  [11]. Queste sono causate dall'interferenza di coppie prodotte in tempi diversi: la loro forma è infatti la stessa di quella attesa da una doppia fenditura, ma anzichè essere separate spazialmente, le fenditure lo sono temporalmente. Essendo la distanza temporale direttamente correlata alla frequenza e la struttura dell'impulso laser, sarebbe possibile distinguere gli eventi di interesse da quelli in background.

Con il suo articolo [7], oltre ad aver contribuito alla formulazione di una teoria di rinormalizzazione, Schwinger ha consolidato il metodo del "tempo proprio"  $s$ , a proposito del quale Yôichirô Nambu scrive: "Il tempo stesso perde il senso di indicatore dell'evoluzione di un fenomeno [...]; l'eventuale creazione od annichilazione di coppie è in realtà un'inversione del verso di percorrenza della linea temporale [...]; una coppia virtuale, condannata ad esistere per un tempo limitato, può essere interpretata come una singola particella che segue una traiettoria chiusa nello spazio 4-dimensionale; una particella reale allora non segue tale orbita, ma tende all'infinito". Questa visione, ultimata ed incorporata nella costruzione dei diagrammi di Feynman è stata ulteriormente elaborata da Schwinger. L'utilizzo delle funzioni di Green

per il campo di Dirac non si limita al paper trattato in questa dissertazione: notò infatti che l'approccio perturbativo e diagrammatico con il quale veniva trattata la teoria di campo (fornita da Feynman e Dyson), scaturiva naturalmente dalle equazioni funzionali soddisfatte dalle sue funzioni di Green [15]. Queste, come illustrato nel Cap. 2, descrivono i valori di aspettazione nel vuoto di operatori ordinati temporalmente, con i quali si può definire la teoria in termini non perturbativi.

## Bibliografia

- [1] P. W. Milonni, *The Quantum Vacuum; An Introduction to Quantum Electrodynamics*. Academic Press, INC., 1994.
- [2] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 117, no. 778, pp. 610–624, 1928.
- [3] F. Sauter, “On the behavior of an electron in a homogeneous electric field in dirac’s relativistic theory,” Apr 1931.
- [4] O. Klein *Zeitschrift für Physik*, vol. 53, no. 157, 1929.
- [5] Euler, H. and Kockel, B., “The scattering of light by light in Dirac’s theory,” *Naturwiss.*, vol. 23, no. 15, pp. 246–247, 1935.
- [6] W. Heisenberg and H. Euler, “Consequences of dirac theory of the positron,” *arXiv: History and Philosophy of Physics*, 2006.
- [7] J. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” *Phys. Rev.*, vol. 82, pp. 664–679, Jun 1951.
- [8] S. P. Kim, “Improved approximations for fermion pair production in inhomogeneous electric fields,” *Physical Review D*, vol. 75, 02 2007.
- [9] R. Alkofer, M. B. Hecht, C. D. Roberts, S. M. Schmidt, and D. V. Vinnik, “Pair creation and an x-ray free electron laser,” *Physical Review Letters*, vol. 87, Oct 2001.
- [10] R. Schützhold, H. Gies, and G. Dunne, “Dynamically assisted schwinger mechanism,” *Physical Review Letters*, vol. 101, Sep 2008.
- [11] F. H. et al., “Momentum signatures for schwinger pair production in short laser pulses with a subcycle structure.,” *Physical review letters*, vol. 102 15, p. 150404, 2009.
- [12] G. V. Dunne, “New strong-field qed effects at extreme light infrastructure,” *The European Physical Journal D*, vol. 55, p. 327–340, Feb 2009.
- [13] C. B. et. al, “Positron production in multiphoton light-by-light scattering,” *AIP Conference Proceedings*, vol. 396, no. 1, pp. 165–177, 1997.
- [14] G. A. et. al, “Observation of light-by-light scattering in ultraperipheral Pb+Pb collisions with the atlas detector,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 123, p. 052001, Jul 2019.
- [15] S. Schweber, “The sources of schwinger’s green’s functions,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 102, pp. 7783–8, 06 2005.