Т. 4

p_1 - неизв.

$$\xi \sim p(x) = p\{(-1,0)\cup(0,1)\} + p_1\{0\} + p_1\{2\}$$

Из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p\,dx = 1$

$$\Rightarrow 2p + 2p_1 = 1 \Rightarrow p_1 = -p + 0{,}5$$

Тогда пусть $\theta = p$, $0 < \theta < \frac{1}{2}$, $\exists \vec{x}_n$

и

$$\xi \sim p(x,\theta) = \theta\{(-1,0)\cup(0,1)\} + (0{,}5-\theta)\{0\} + (0{,}5-\theta)\{2\}$$

$\boxed{\text{О.М.М.}}$ Возьмём α_1:

$$\alpha_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x,\theta)\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x\,p\,dx = \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} x\,\theta\,dx}_{=0} + 0 + 2(0{,}5-\theta) =$$

$$= 1 - 2\theta$$

$$\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 = \overline{x} \Rightarrow 1 - 2\theta = \overline{x}$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{\theta} = 0{,}5(1-\overline{x})} \text{ — О.М.М.}$$

- проверим несмещ.:

$$M[\tilde{\theta}] = 0{,}5\,M[1-\overline{x}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{M[\xi]}_{\alpha_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2}\theta = \theta$$

$\Rightarrow \tilde{\theta}$ несмещ.

- проверим состоятельность:

$$D[\tilde{\theta}] = \frac{1}{4}D[1-\overline{x}] = \frac{1}{4}D[\overline{x}] = \frac{\overbrace{D[\xi]}^{\mu_2}}{4n} =$$

$$\alpha_2 = \int\limits_{-1}^{1} x^2 p\,dx = \int\limits_{-1}^{1} x^2\theta\,dx + 0 + 4(0{,}5-\theta) = 2 - \frac{10}{3}\theta$$

$\Rightarrow \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \theta\left(\frac{2}{3} - 4\theta\right) + 1$

$$(=) \quad \underbrace{\frac{\theta}{6n}}_{\substack{\to 0 \\ n\to\infty}} - \underbrace{\frac{\theta^2}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{4n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \tilde{\theta} \text{ — состоят.}$$

- проверим эффективность

Докажем регулярность модели:

1) $\rho(x,\theta) = \theta\{(-1,0)\cup(0,1)\} + (0{,}5-\theta)\{0\} + (0{,}5-\theta)\{2\}$

— непр. дифф. по θ на $(0, \frac{1}{2})$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\theta}\rho(x,\theta)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx - 1 - 1 = 2 - 2 = 0$$

3) $$I(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial \ln \rho(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 \cdot \rho(x,\theta)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\theta^2}\cdot\theta\,dx + \frac{0{,}5-\theta}{(0{,}5-\theta)^2} + \frac{0{,}5-\theta}{(0{,}5-\theta)^2} = \frac{2}{\theta} + \frac{2}{0{,}5-\theta} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\theta - 2\theta^2} = \frac{2}{\theta(1-2\theta)} > 0 \quad \text{и непр. на } (0, \tfrac{1}{2})$$

$\Rightarrow$ модель регулярна

регулярна будет и оценка (по дост. усл.),

т.к. она несмещ., П.В.М регул.

и $D[\tilde{\theta}] = \frac{\theta}{6n} - \frac{\theta^2}{n} + \frac{1}{4n}$ — огр. на $\forall$ компакте $\subset (0, \frac{1}{2})$

тогда по нер-ву Крамера – Рао:

$$\frac{\theta}{6n} - \frac{\theta^2}{n} + \frac{1}{4n} \geq \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$\neq \Rightarrow$ ничего об эффект. сказ. нельзя

$\boxed{\text{О. М. П.}}$

функция правдоподобия:

пусть m раз встретилось $\{0\}$ или $\{2\}$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \rho(x_i, \theta) = \theta^{n-m}(0{,}5-\theta)^m$$

$$(\ln L)'_\theta = \left((n-m)\ln\theta + m\ln(0{,}5-\theta)\right)'_\theta = \frac{n-m}{\theta} - \frac{m}{0{,}5-\theta} = \frac{n-m}{\theta} - \frac{2m}{1-2\theta} = \frac{n-m-2n\theta}{\theta-2\theta^2}$$

$$\frac{n-m-2n\theta}{\theta-2\theta^2} = 0 \Rightarrow 2n\theta = n-m \Rightarrow \underbrace{\tilde\theta = 0{,}5-0{,}5\nu}_{\text{О. М. П.}}$$

проверим, что явл. максимумом

$$(\ln L)''_{\theta\theta} = \frac{n-m}{\theta^2} + \frac{m}{(0{,}5-\theta)^2}\cdot(-1)^3 = \frac{n-m}{\theta^2} - \frac{4m}{(1-2\theta)^2} =$$

$$= \frac{(1-2\theta)^2\cdot(n-m) - 4\cdot m\theta^2}{\theta^2(1-2\theta)^2} = \frac{\overbrace{m(4\theta-1)}^{>0 \text{ на } \Theta} + \overbrace{n(1-2\theta)^2}^{>0}}{\underbrace{(-}_{<0}\underbrace{\theta^2(1-2\theta)^2}_{>0}}$$

$\Rightarrow (\ln L)''_{\theta\theta} < 0 \Rightarrow$ это максимум

- проверим несмещенность:

$M[\tilde\theta] = 0{,}5 - 0{,}5M[\nu] = 0{,}5 - 0{,}5p = \theta \Rightarrow$ несмещ.

- проверим состоятельность:

$$D[\tilde\theta] = \frac{1}{4}D[\nu] = \frac{1}{4}\left(\frac{p(1-p)}{n}\right) = \frac{\theta(0{,}5-\theta)}{n} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \text{регул.}$$

- проверим эффективность

$\tilde\theta$ – регул. (по дост. усл.) $\Rightarrow$ выполн. нер-во Крамера – Рао:

$$D[\tilde{\theta}] = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n} \equiv \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$\Rightarrow$ эффективн

т.о. О.М.М. — не эффектив.