Т.3

Закон распр. случ. велич. ξ:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)}{\theta}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

где параметр $\theta > 0$

по выборке $n = 3$ найдены оценки:

$$\tilde{\theta}_1 = \bar{x}$$

$$\tilde{\theta}_2 = x_{(2)}$$

a) проверить на несмещ. и испрaв.

b) выявить более эффект. оценку

c) исследовать оценки на эффект. с помощью нер-ва Крамера-Рао

Рассмотрим $\tilde{\theta}_1$:

(*) независ, имеют то же распр., что и ξ

a) $M[\bar{x}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] = M[\xi] = \theta$

✓ т.о. $\tilde{\theta}_1$ – несмещ.

b) Для оценки эффективности (без нер-ва Крамера-Рао)

сравним дисперсии соотв. оценок:

$$D[\tilde{\theta}_1] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\cdot n D\xi = \frac{\theta^2}{n}$$

(*)

при $n=3 \Leftrightarrow D[\tilde{\theta}_1] = \frac{\theta^2}{3}$

Рассмотрим $\tilde{\theta}_2$:

а) $\varphi(y) = n\frac{1}{\theta}\cdot C_{n-1}^{1}\left(1-\left(1-\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)\right)\right)^{n-2}\times$

✗, но можно исправить

$$\times\left(1-\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{\theta}\left(\exp\left(-\frac{y}{\theta}(n-1)\right)-\exp\left(-\frac{y}{\theta}n\right)\right)$$

т.о.

$$M[\tilde{\theta}_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,\varphi(y)\,dy = \int_0^{+\infty}\frac{n(n-1)}{\theta}y\times$$

$$\times\left(\exp\left(-\frac{y}{\theta}(n-1)\right)-\exp\left(-\frac{y}{\theta}n\right)\right)dy = \frac{n(n-1)}{\theta}\times$$

$$\times\int_0^{+\infty}\frac{y}{\exp\left(\frac{y}{\theta}n\right)}\left(\exp\left(\frac{y}{\theta}\right)-1\right)dy = \left\{\begin{array}{l}\text{замена}\\ t=\frac{y}{\theta}n\\ dt=\frac{n}{\theta}dy\end{array}\right\} \ominus$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{т.о.}\\ y=\theta\cdot\frac{t}{n}\\ dy=\theta\cdot\frac{dt}{n}\end{array}\right\}$$

$$\ominus \frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{\theta}}\cdot\frac{\theta^{\cancel{2}}}{n^{\cancel{2}}}\int_0^{+\infty}\frac{t}{\exp\left(t\cdot\frac{\cancel{\theta}}{\cancel{n}}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{\theta}}\right)}\left(\exp\left(\frac{t\cdot\cancel{\theta}}{n\cdot\cancel{\theta}}\right)-1\right)dt = \frac{\theta(n-1)}{n}\int_0^{+\infty}te^{-t}\left(e^{\frac{t}{n}}-1\right)dt =$$

$$= \frac{\theta(n-1)}{n}\left(\underbrace{\int_0^{+\infty}te^{t\left(\frac{1}{n}-1\right)}dt}_{}-\underbrace{\int_0^{+\infty}te^{-t}dt}_{1}\right) =$$

$$\frac{n-1}{n}\int_0^{+\infty}t\cdot e^{\frac{t}{n}}e^{-t}dt = \frac{n-1}{n}\int_0^{+\infty}te^{-t\left(\frac{n-1}{n}\right)}dt = \frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty}ue^{-u}du = \frac{n}{n-1}, \text{ где } \left\{\begin{array}{l}\text{замена:}\\ u=t\left(\frac{n-1}{n}\right)\end{array}\right\}$$

$$= \frac{\theta n}{n-1} - \frac{\theta(n-1)}{n} = \theta\left(\frac{n^2-(n-1)^2}{n(n-1)}\right) = \frac{2n-1}{n^2-n}\theta$$

Введём $\tilde{\theta}_2'$ – исправленную:

$$\tilde{\theta}_2' = \frac{n(n-1)}{2n-1} \cdot \tilde{\theta}_2 = \frac{n(n-1)}{2n-1} \cdot x_{(2)}$$

b)

$$M[\tilde{\theta}_2] = \int_0^{+\infty} \frac{n(n-1)}{\theta} y^2 \left(e^{-\frac{y}{\theta}(n-1)} - e^{-\frac{y}{\theta}n}\right) dy =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \text{замена:} \\ t = \frac{y}{\theta} n \end{matrix} \right\} = \theta^2 \left(\frac{n}{n^2-n} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt - \frac{n-1}{n^2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \right) =$$

$$= 2\theta^2 \left(\frac{n^3 - (n-1)^3}{n^2(n-1)^2} \right) = 2\theta^2 \left(\frac{3n^2 - 3n + 1}{n^2(n-1)^2} \right)$$

т.о.

$$D[\tilde{\theta}_2] = \theta^2 \left(\frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2(n-1)^2} \right)$$

и

$$D[\tilde{\theta}_2'] = \frac{n^2(n-1)^2}{(2n-1)^2} D[\tilde{\theta}_2] = \theta^2 \left(\frac{2n^2 - 2n + 1}{4n^2 - 4n + 1} \right)$$

при $n = 3 \Leftrightarrow D[\tilde{\theta}_2'] = \frac{13}{25} \theta^2$

b) Итог:

$$D[\tilde{\theta}_2'] > D[\tilde{\theta}_1] \Rightarrow \tilde{\theta}_1 \text{ – более эффективная}$$

c) Докажем регулярность П.В.М:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)}{\theta}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

где параметр $\theta > 0$

Опр регулярность ПВМ

Вер. модель $\xi \sim \rho(x,\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, $x \in A$

называв. регулярной, если

1) $\rho(x,\theta)$ — н.д. по θ на Θ

($p(x,\theta)$, $P_x(\theta)$ — непр. дифф.)

2) $$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_A \rho(x,\theta)\,dx = \int_A \frac{\partial}{\partial\theta}\rho(x,\theta)\,dx$$ на Θ

3) $\left.\begin{array}{l} I(\theta) \text{ — непр.} \\ I(\theta) > 0 \end{array}\right\}$ на Θ

---

(1) $p(x)$ — непр. дифф. по θ на $(0;+\infty)$ (очевидно)

(2) $$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)dx\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}1 = 0$$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta^2}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)\right)dx = \frac{1}{\theta} + 0 - \frac{1}{\theta} = 0$$

$\Rightarrow$ равенство соблюдается

(3) $$\ln\left(\frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)\right) = -\frac{x}{\theta} - \ln\theta$$

а также $$\left(\frac{\partial \ln p}{\partial\theta}\right)^2 = \left(\frac{x}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\right)^2$$

тогда

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln p}{\partial\theta}\right)^2\right] = \int_0^{+\infty}\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^2 - \frac{2x}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^2}\right)\times$$

$$\times \frac{1}{\Theta}\exp\left(-\frac{x}{\Theta}\right)dx = \frac{1}{\Theta^2}\left(\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}dt - 2\int_0^{+\infty} te^{-t}dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}dt\right) = \frac{1}{\Theta^2}(2-2+1) = \frac{1}{\Theta^2} - \begin{matrix}\text{непр.}\\ >0\end{matrix}\Big\}\begin{matrix}\text{на}\\ (0;+\infty)\end{matrix}$$

$\Rightarrow$ П.В.М. регулярна

Рассмотрим регулярность оценок:

Теорема достаточ. усл. регул. оценки:

$$\begin{cases} \tilde{g}(\vec{x}_n) - \text{несмещ. оценка} \\ \text{ПВМ} - \text{регулярна} \\ D[g(\vec{x}_n)] - \text{ограничена на } \forall \text{ компакте из } \Theta \text{ по } \theta \end{cases} \Rightarrow \tilde{g}(x_n) - \text{регул.}$$

$$\tilde{\Theta}_1 : \begin{cases} \text{несм. оценка} \\ \text{ПВМ} - \text{регул.} \\ D[\hat{\Theta}_1] = \frac{\Theta^2}{n} - \text{огр. на } \forall \text{ компакте (отрезке) на } (0;+\infty) \text{ по } \Theta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\hat{\Theta}_1$ - регул. оценка

$$\tilde{\Theta}_2' : \begin{cases} \text{несм. оценка} \\ \text{ПВМ} - \text{регул.} \\ D[\tilde{\Theta}_2'] = \Theta^2\left(\frac{2n^2-2n+1}{4n^2-4n+1}\right) \text{ огр. на } \forall \text{ компакте (отрезке) на } (0;+\infty) \text{ по } \Theta \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\hat{\Theta}_2'$ - регул. оценка

Применим нер-во Крамера - Рао:

Неравенство Краме́ра – Рао

Пусть

вер. модель явл. регулярной

$\tilde{g}(\vec{x}_n)$ – явл. регул. оценкой

$g(\theta)$ – дифф.

Тогда

$$\forall \theta \in \Theta \hookrightarrow D[\tilde{g}] \geq \frac{g'^2(\theta)}{n \cdot I(\theta)}$$

$\tilde{\theta}_1$: $\begin{cases} \text{П.В.М – регул.} \\ \tilde{\theta}_1 \text{ – регул.} \\ \theta \text{ – дифф.} \end{cases}$ $\Rightarrow \forall \theta \in (0; +\infty) \hookrightarrow$

$$\hookrightarrow D[\tilde{\theta}_1] \geq \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{\theta^2}} = \frac{\theta^2}{3}$$

Теорема достаточ. усл. эффективности

Пусть

выполн. усл. нер. Крамера – Рао

и $D[\tilde{g}] = \dfrac{g'^2(\theta)}{n I(\theta)}$

Тогда $\tilde{g}$ – эффект. оценка g

$D[\tilde{\theta}_1] = \dfrac{\theta^2}{3} \Rightarrow \tilde{\theta}_1$ – эффективна

$\tilde{\theta}_2'$: $\begin{cases} \text{П.В.М. – регул.} \\ \tilde{\theta}_2' \text{ – регул} \\ \theta \text{ – дифф.} \end{cases}$ $\Rightarrow \forall \theta \in (0; +\infty) \hookrightarrow D[\tilde{\theta}_2'] \geq \dfrac{\theta^2}{3}$

$D[\tilde{\theta}_2'] \neq \dfrac{\theta^2}{3} \Rightarrow \tilde{\theta}_2'$ – не эффектив.

и т.к. по т. единств. эффект. оценки

$$\begin{cases} \exists!\ \tilde{\theta}_1 - \text{эффект.} \\ \tilde{\theta}_2 \neq \tilde{\theta}_1 \end{cases} \Rightarrow \tilde{\theta}_2 - \text{не эффектив.}$$