Т.1

ξ - случ. вел

$\xi \sim R(0, \Theta)$, где $\Theta > 0$

По выборке $\vec{x}_n$ параметра Θ найдены его оценки:

$$\tilde{\Theta}_1 = 2\overline{x} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\tilde{\Theta}_2 = \min_{i=\overline{1,n}} x_i$$

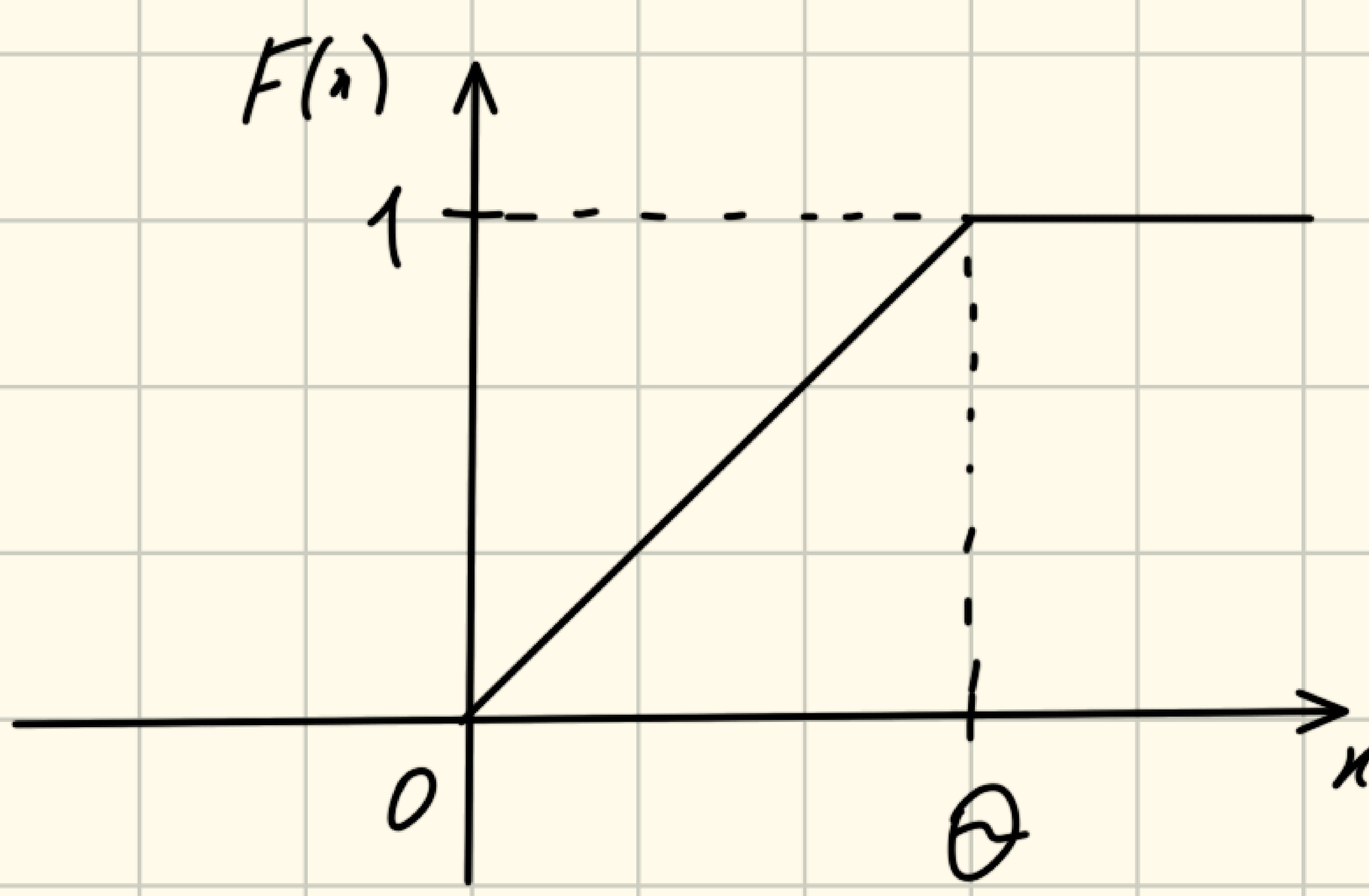
$$\tilde{\Theta}_3 = \max_{i=\overline{1,n}} x_i$$

$$\tilde{\Theta}_4 = x_1 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i$$

a) Проверить оценки на несмещ. и состоятельность. Исправить, если необходимо.

b) Выбрать наиболее эффективную оценку.

(a) Для начала вычисли $M\xi$ и $D\xi$



$$p(x) = \frac{1}{\Theta}\{(0, \Theta)\}$$

$$M[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{\Theta} \frac{x}{\Theta}\,dx = \frac{\Theta}{2}$$

$$M[\xi^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx = \int_0^{\theta} \frac{x^2}{\theta}\,dx = \frac{\theta^2}{3}$$

$$\Rightarrow D[\xi] = \frac{\theta^2}{12}$$

Исследуем $\tilde{\theta}_1$:

1) несмещенность ✓

независ, имеют то же распр., что и ξ

$$M[\tilde{\theta}_1] = M\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} M[x_i] = 2M[\xi] =$$

$$= \theta \Rightarrow \tilde{\theta}_1 \text{ — несмещ.}$$

2) состоятельность ✓

Достаточное условие:

$$D[\tilde{\theta}_1] = D\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[x_i] =$$

равно распр.

$$= \frac{4}{n} D\xi = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Дост. усл. выполнено $\Rightarrow$ $\tilde{\theta}_1$ — состоят.

Исследуем $\tilde{\theta}_2$:

1) несмещенность ✗, но можно исправить

$$M[\tilde{\theta}_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,\varphi(y)\,dy \;\boxed{=}$$

$$\Phi(y) = 1 - (1 - F(y))^n$$

$$\varphi(y) = \Phi'(y) = n\Big(1 - \underbrace{F(y)}_{\frac{y}{\theta}}\Big)^{n-1} \cdot \underbrace{p(y)}_{\frac{1}{\theta}\{(0,\theta)\}}$$

$$\ominus \int_0^{\theta} n\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}\,y\,dy = \left\{\begin{matrix}\text{замена:}\\ t=1-\frac{y}{\theta}\end{matrix}\right\} =$$

$$= -\int_1^0 n t^{n-1}(1-t)\,\theta\,dt = \int_0^1 n\theta t^{n-1}dt - \int_0^1 n\theta t^{n}dt =$$

$$= \theta\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\theta}{n+1} \Rightarrow \tilde{\theta}_2 \text{ - смещенная}$$

Введём $\tilde{\theta}_2'$ – исправленную:

$$\tilde{\theta}_2' = (n+1)\cdot\tilde{\theta}_2 = (n+1)\min_{i=\overline{1,n}} x_i$$

т.е. $M[\hat{\theta}_2'] = \theta$

2) состоятельность ✗ | ✗

для $\tilde{\theta}_2$ дост. усл. не подходит,

проверим для $\hat{\theta}_2'$:

$$D[\tilde{\theta}_2'] = (n+1)^2 D[\tilde{\theta}_2]$$

$$M[\tilde{\theta}_2^2] = \int_0^{\theta} n\left(1-\frac{y}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}\,y^2\,dy = \left\{\begin{matrix}\text{замена:}\\ t=1-\frac{y}{\theta}\end{matrix}\right\} =$$

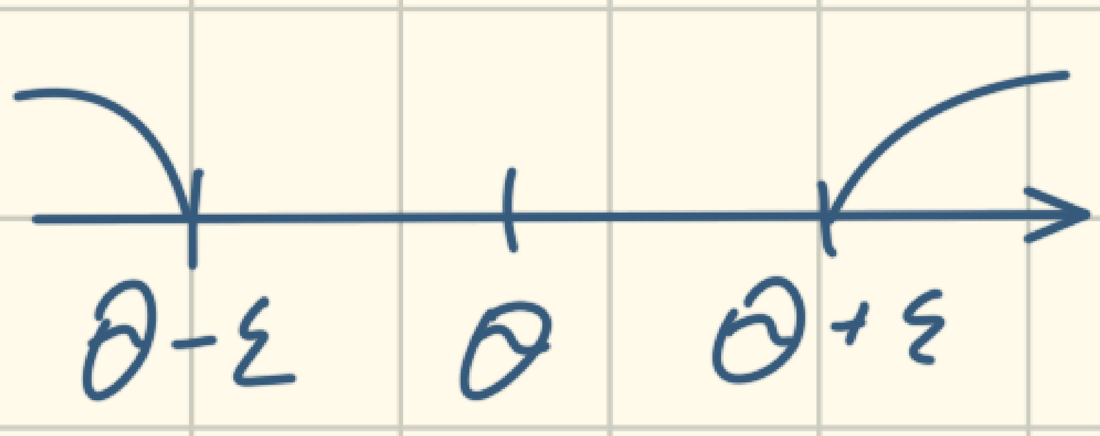
$$= -\int_1^0 n t^{n-1}\theta^2(1-t)^2 dt = n\theta^2\int_0^1\left(t^{n-1}-2t^n+\right.$$

$$\left.+t^{n+1}\right)dt = n\theta^2\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow D[\tilde{\theta}_2'] = \cancel{(n+1)^2}\cdot\theta^2\cdot\frac{n}{\cancel{(n+1)^2}(n+2)} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

проверим по определению:

$$\forall\theta>0\ \forall\varepsilon>0 \leftrightarrow P(|\hat{\theta}_2'-\theta|\geq\varepsilon) \overset{?}{\underset{n\to\infty}{\to}} 0$$



$$P(|\hat{\theta}_2' - \theta| \ge \varepsilon) = P(\hat{\theta}_2' \ge \theta + \varepsilon)$$

$$= P\left((n+1)\min_{i=\overline{1,n}} x_i \ge \theta + \varepsilon\right) =$$

$$= P\left(\min_{i=\overline{1,n}} x_i \ge \frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right) = 1 - P\left(\min_{i=\overline{1,n}} x_i < \frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \left(1 - \left(1 - F\left(\frac{\theta+\varepsilon}{n+1}\right)\right)^n\right) = \left(1 - \left(\frac{\theta+\varepsilon}{\theta(n+1)}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{\theta+\varepsilon}{\theta}} = \exp\left(-1-\frac{\varepsilon}{\theta}\right) \ne 0 \Rightarrow \hat{\theta}_2' \text{ несостоят.}$$

Исследуем по определению состоятельность $\tilde{\theta}_2$:

$$P(|\tilde{\theta}_2 - \theta| \ge \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{?} 0$$

$$P(|\tilde{\theta}_2 - \theta| \ge \varepsilon) = P(\tilde{\theta}_2 < \theta - \varepsilon) + \underbrace{P(\overset{\min\limits_{i=\overline{1,n}} x_i}{\tilde{\theta}_2} > \theta + \varepsilon)}_{=0}$$

$$P\left(\min_{i=\overline{1,n}} x_i < \theta - \varepsilon\right) = \Phi(\theta - \varepsilon) =$$

НУО $\varepsilon < \theta \hookrightarrow = 1 - \left(1 - \frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = 1 - \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_2$ – несостоят.

Исследуем $\tilde{\theta}_3$:

1) несмещенность ✗, но можно исправить

$$M[\tilde{\theta}_3] = \int_{-\infty}^{+\infty} z\,\psi(z)\,dz =$$

$$\Psi(z) = F^n(z)$$

$$\psi(z) = \Psi'(z) = n F^{n-1}(z) \cdot p(z) = n\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta}$$

$\ominus \int\limits_0^{\theta} n \cdot \frac{z^n}{\theta^n} dz = \frac{n}{n+1} \theta$ => смещенная

Введём $\tilde{\theta}_3'$ – исправленную:

$$\tilde{\theta}_3' = \frac{n+1}{n} \max_{i=\overline{1,n}} x_i$$

т.е. $M[\tilde{\theta}_3'] = \theta$

2) состоятельность ✓ | ✓

для $\tilde{\theta}_3$ дост. усл. не подходит,

проверим для $\tilde{\theta}_3'$:

$$D[\tilde{\theta}_3'] = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot D[\tilde{\theta}_3]$$

$$M[\tilde{\theta}_3^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2 \psi(z) dz = \int\limits_0^{\theta} n \cdot \frac{z^{n+1}}{\theta^n} dz = \frac{n}{n+2} \theta^2$$

$$\Rightarrow D[\tilde{\theta}_3] = \frac{n \cdot \theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$D[\tilde{\theta}_3'] = \frac{\cancel{(n+1)^2}}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{\cancel{n} \cdot \theta^2}{(n+2)\cancel{(n+1)^2}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

=> $\tilde{\theta}_3'$ состоятельна

Исследуем по определению состоятельность $\tilde{\theta}_3'$:

$$P(|\tilde{\theta}_3' - \theta| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{?} 0$$

$$P(|\tilde{\theta}_3' - \theta| \geq \varepsilon) = P\left(\max_{i=\overline{1,n}} x_i \cdot \frac{n+1}{n} \leq \theta - \varepsilon\right) +$$

$$+ P\left(\max_{i=\overline{1,n}} x_i \cdot \frac{n+1}{n} \geq \theta + \varepsilon\right) = P\left(\max_{i=\overline{1,n}} x_i \leq \frac{n(\theta - \varepsilon)}{n+1}\right)$$

$$+P\left(\max_{i=\overline{1,n}} x_i \geq \frac{n(\theta+\varepsilon)}{n+1}\right) = \underbrace{F^n\left(\frac{n(\theta-\varepsilon)}{n+1}\right)} + 1 -$$

$$-\underbrace{F^n\left(\frac{n(\theta+\varepsilon)}{n+1}\right)}_{Z} = 1 - Z + G$$

Рассмотрим G:

при $\theta > \varepsilon$: $\left(\frac{n(\theta-\varepsilon)}{\theta(n+1)}\right)^n = \frac{\theta-\varepsilon}{\theta(n+\frac{1}{n})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

при $\theta < \varepsilon$: $0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Рассмотрим Z:

при $\frac{n(\theta+\varepsilon)}{n+1} > \theta$: $Z = 1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

при $\frac{n(\theta+\varepsilon)}{n+1} \leq \theta$: $n\theta + \varepsilon n \leq \theta n + 0$

т.е. $n \leq \frac{\theta}{\varepsilon}$

т.е. $\exists N: \forall n \geq N \leftrightarrow \frac{n(\theta+\varepsilon)}{n+1} > \theta$

т.о. $Z \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

В итоге имеем:

$$P(|\tilde{\theta}_3' - \theta| \geq \varepsilon) = 1 - Z + G \longrightarrow 1 - 1 + 0 = 0$$

$\Rightarrow$ по определению $\tilde{\theta}_3'$ состоят.

Исследуем по определению состоятельность $\hat{\theta}_3$:

$$P(|\hat{\theta}_3 - \theta| \geq \varepsilon) = P\left(\max_{i=\overline{1,n}} x_i < \theta - \varepsilon\right) +$$

$$+\underbrace{P\left(\max_{i=\overline{1,n}} x_i > \theta+\varepsilon\right)}_{=0} = F^n(\theta-\varepsilon)$$

при $0<\varepsilon<\theta$: $\left(\dfrac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

при $\varepsilon \geq \theta$: $0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_3$ – состоятельна

Исследуем $\tilde{\theta}_4$:

1) несмещенность ✓

$$M[\tilde{\theta}_4] = M\left[x_1 + \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=2}^{n} x_i\right] = M[x_1] + \frac{1}{n-1}\times$$
$$\times\sum_{i=2}^{n} M[x_1] = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta \Rightarrow \tilde{\theta}_4 \text{ – несмещ.}$$

2) состоятельность ✗

Достаточное условие:

$$D[\tilde{\theta}_4] = D\left[x_1 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i\right] = D[\xi] + \frac{\cancel{(n-1)}}{(n-1)^2} D[\xi] =$$
$$= \frac{\theta^2}{12} + \frac{\theta^2}{12(n-1)} = \frac{\theta^2}{12}\cdot\frac{n}{n-1} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

Исследуем по определению состоятельность $\tilde{\theta}_4$:

$$\tilde{\theta}_4 \xrightarrow{P?} \theta; \quad \tilde{\theta}_4 = \underset{\substack{\downarrow P \\ \xi}}{x_1} + \underbrace{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i}_{\xrightarrow{P} ?}$$

применим ЗБЧ Хинчина: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i \to M[\xi]$

ξ_i – независ. одинраспр. $i=\overline{1,n}$

$$? = \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} x_i \xrightarrow{P} M[\xi] = \frac{\theta}{2}$$

т.о. $\tilde{\theta}_4 \xrightarrow{P} \xi + \frac{\theta}{2} \neq \theta$

$\Rightarrow \tilde{\theta}_4$ - не состоят.

ⓑ Рассмотрим среди состоят. и несм.

т.е. выберем $\tilde{\theta}_1$ или $\tilde{\theta}_3'$

$\tilde{\theta}_1 = 2\bar{x}$; $D[\tilde{\theta}_1] = \frac{\theta^2}{3n}$

$\tilde{\theta}_3' = \frac{n+1}{n} \cdot \max_{i=\overline{1,n}} x_i$; $D[\tilde{\theta}_3'] = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$

$\forall n > 1 \leftrightarrow 3n < n^2 + 2n$

т.е. $\forall \theta > 0 \leftrightarrow \frac{\theta^2}{n(n+2)} < \frac{\theta^2}{3n}$

$\Rightarrow$ самая эффективная оценка $\tilde{\theta}_3'$

1) состоятельная
2) несмещенная

} "хорошая"

3) с наименьшей дисперсией среди "хороших"