Консультация к ЛР № 222.

„Изучение колебаний с помощью LC-цепочки"

Введение 1. (Ф. Крауфорд. Волны)

1. Свободные колебания простых систем.

Мы изучаем колебания линейных систем. Для систем с 1 степенью свободы x имеем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x = F(t)\frac{1}{M}.$$

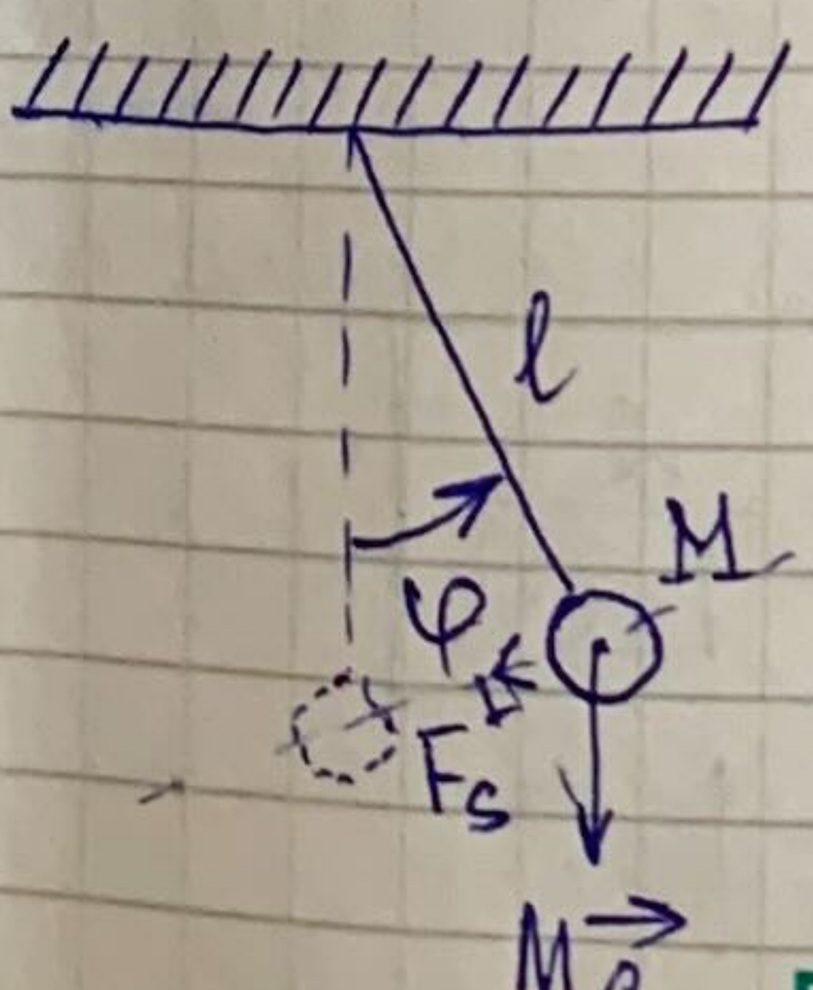
Здесь $F(t)$ – „вынуждающая сила", ω – циклическая частота, M – „масса" системы.

Физический смысл ω^2:

$\omega^2 =$ возвращающая сила на единицу смещения и единицу массы

Примеры.

а) Маятник



S – смещение по дуге окр-ти радиуса l.

$S = l\varphi$; II з. Н.: $M\dfrac{d^2S}{dt^2} = F_s$

$F_s = Mg\sin\varphi \Rightarrow Ml\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = Mg\sin\varphi$

$\varphi \ll 1$: $\sin\varphi = \varphi + \ldots \approx \varphi$.

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} \cong -\frac{g}{l}\varphi}$$

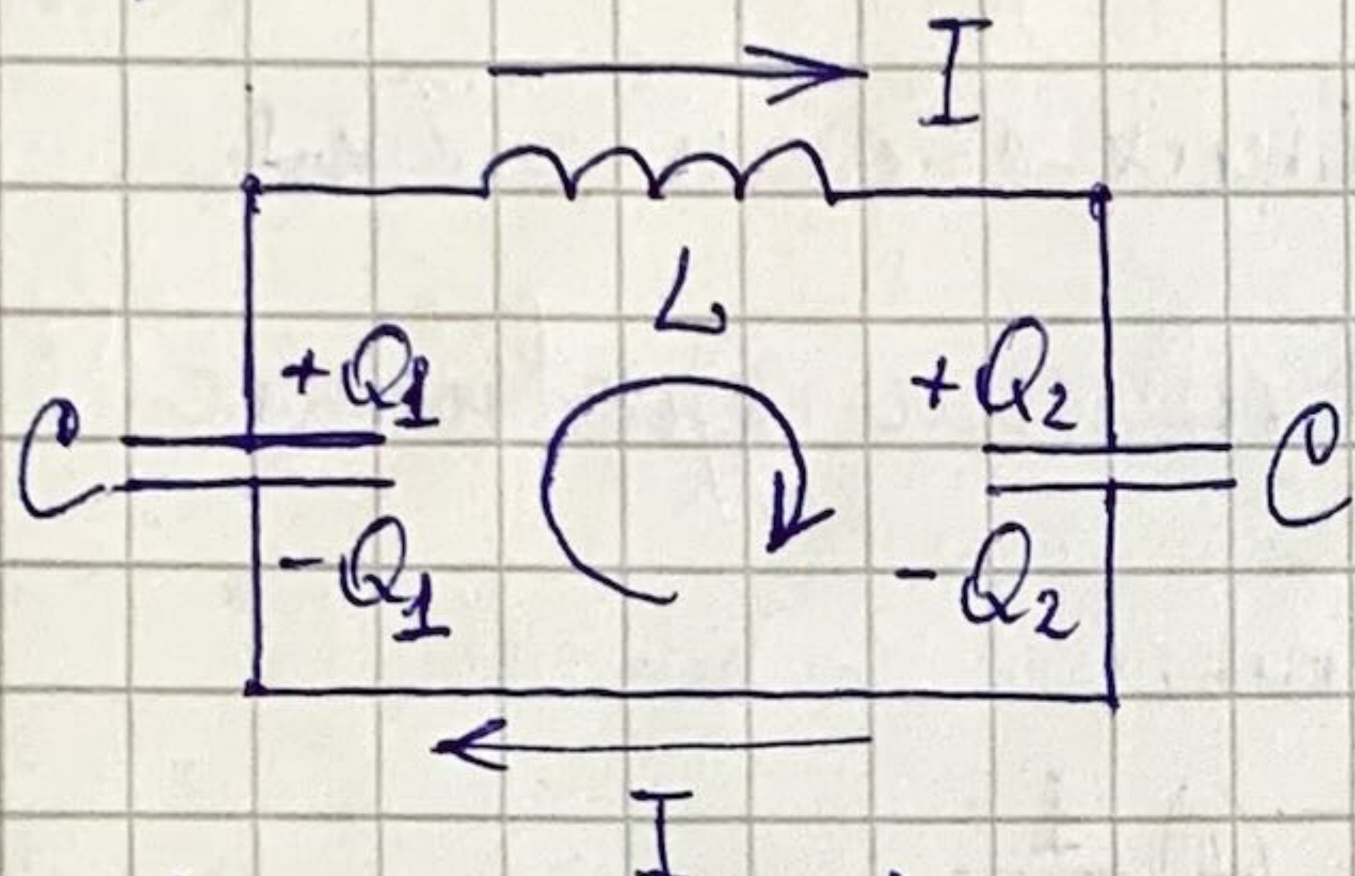
Видим, что

возвр. сила

$$\omega^2 = \frac{g}{l} = \frac{Mg\varphi}{(l\varphi)M}.$$

смещение масса

б) LC – цепь.



Пусть $R \neq 0$.

$$\vec{j} = \lambda(\vec{E} + \vec{E}_{стор})$$

$$j = \frac{I}{S}\,; \quad \cancel{\oint \vec{E}\,d\vec{l} = 0}$$

$$\oint: \ IR = \oint \vec{E}\,d\vec{l} + \oint \vec{E}_{стор}\,d\vec{l} = \oint \vec{E}\,d\vec{l} - \mathcal{E}_i$$

$$R \to 0: \ 0 = \oint \vec{E}\,d\vec{l} - \mathcal{E}_i$$

$$\begin{cases} \oint \vec{E}\,d\vec{l} = -\dfrac{Q_1}{C} + \dfrac{Q_2}{C} \\ \mathcal{E}_i = -L\dfrac{dI}{dt} \end{cases} \Rightarrow L\frac{dI}{dt} = \frac{Q_1}{C} - \frac{Q_2}{C}$$

$$\text{ЗСЗ}: \ Q_1 + Q_2 = 0, \quad \frac{dQ_2}{dt} = I$$

Это система с 1 степенью свободы!

$$\frac{dQ_2}{dt} = I\,; \quad Q_1 = -Q_2 \Rightarrow \frac{dQ_1}{dt} = -I$$

Отсюда

$$\boxed{\frac{d^2I}{dt^2} = -\omega^2 I, \quad \omega^2 = \frac{2}{LC}}.$$

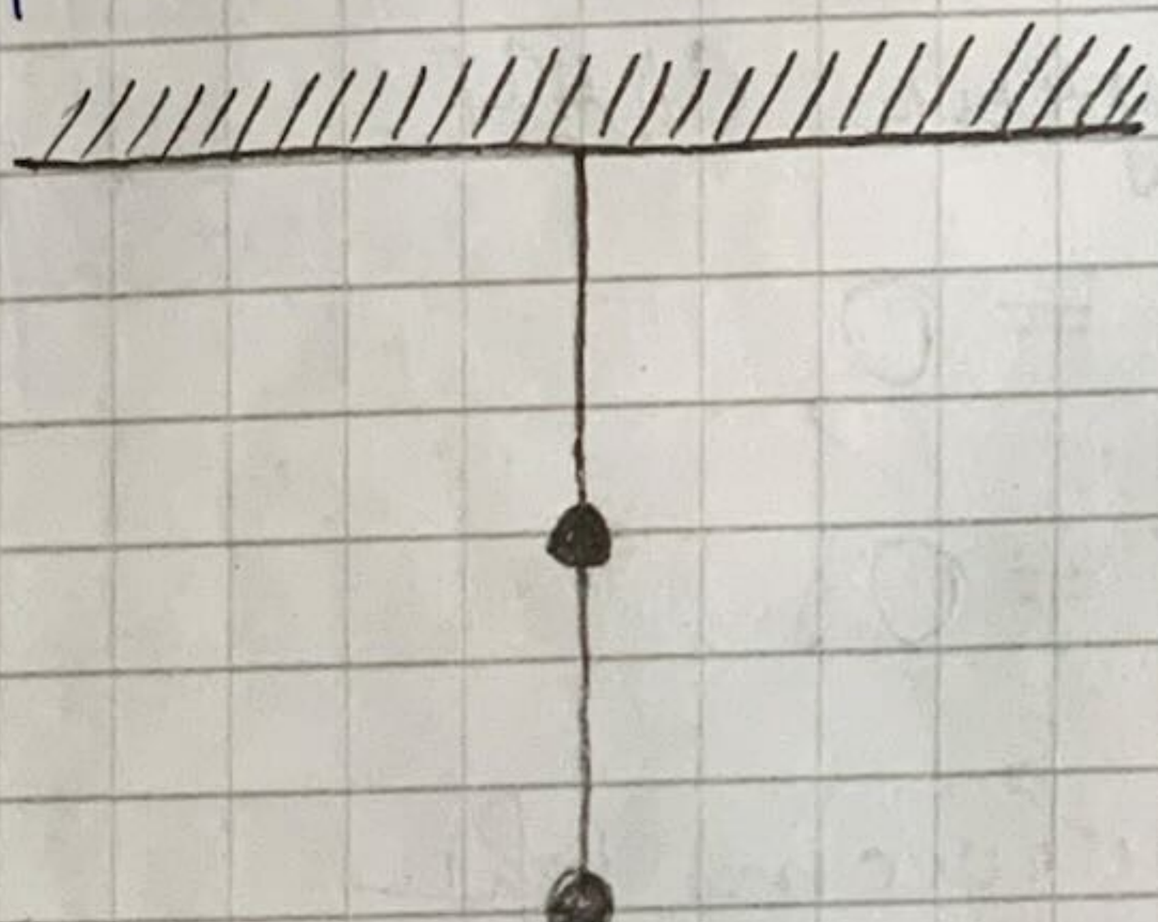
$$\omega^2 = \left(\frac{2Q}{C}\right) \Big/ (L \cdot Q) \text{ – работает!}$$

э.д.с., т.е. „сила", Q – „смещение", L – „масса"

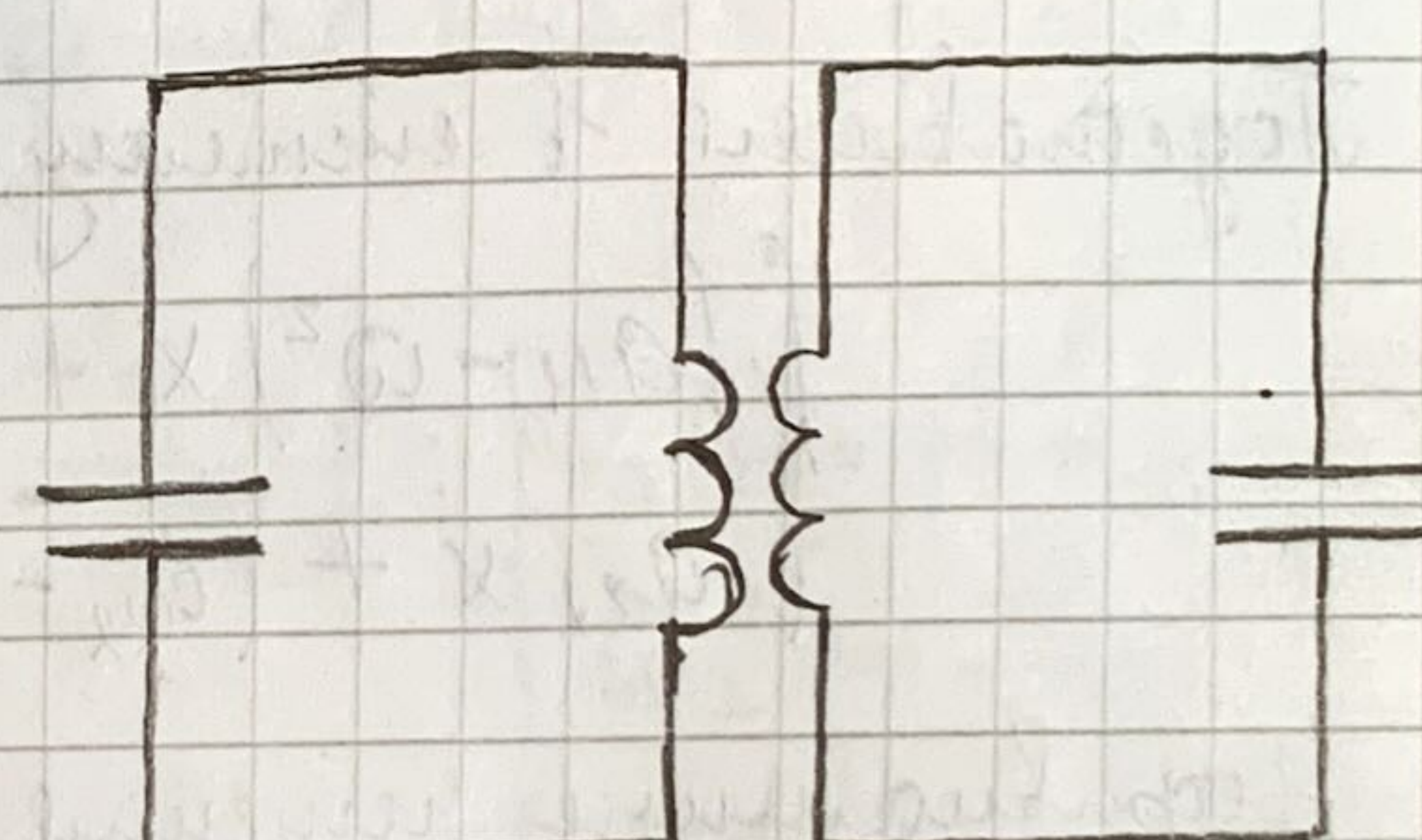
2. Свободные колебания систем с двумя степенями свободы.

До сих пор мы имели дело с системами, состояние которых определялось одной лишь функцией смещения $\psi(t)$. Существуют более сложные системы, состояние которых определяется уже двумя „координатами в пространстве состояний" ψ_a и ψ_b.

Примеры.



двойной маятник



две связанные LC-цепи

Малые колебания в таких системах могут быть описаны системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -a_{11}x - a_{12}y \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -a_{21}x - a_{22}y \end{cases}$$

Опр.

Модой колебательной системы называется такое движение в ней, при котором все части системы колеблются с одной частотой, одновременно проходя через положение равновесия.

Моды для системы, подчиняющейся записанной системе уравнений, необходимо искать в виде

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\quad y(t) = B\cos(\omega t + \varphi).$$

Подставляя в систему, получим СЛАУ:

$$\begin{cases} (a_{11} - \omega^2)x + a_{12}y = 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - \omega^2)y = 0. \end{cases}$$

Нетривиальные решения существуют при

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = (a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0.$$

Уравнение даёт корни ω_1^2 и ω_2^2 с учётом кратности, что соответствует двум модам колебаний системы. Общее решение для случая $\omega_1 \neq \omega_2$ есть суперпозиция мод:

$$x(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

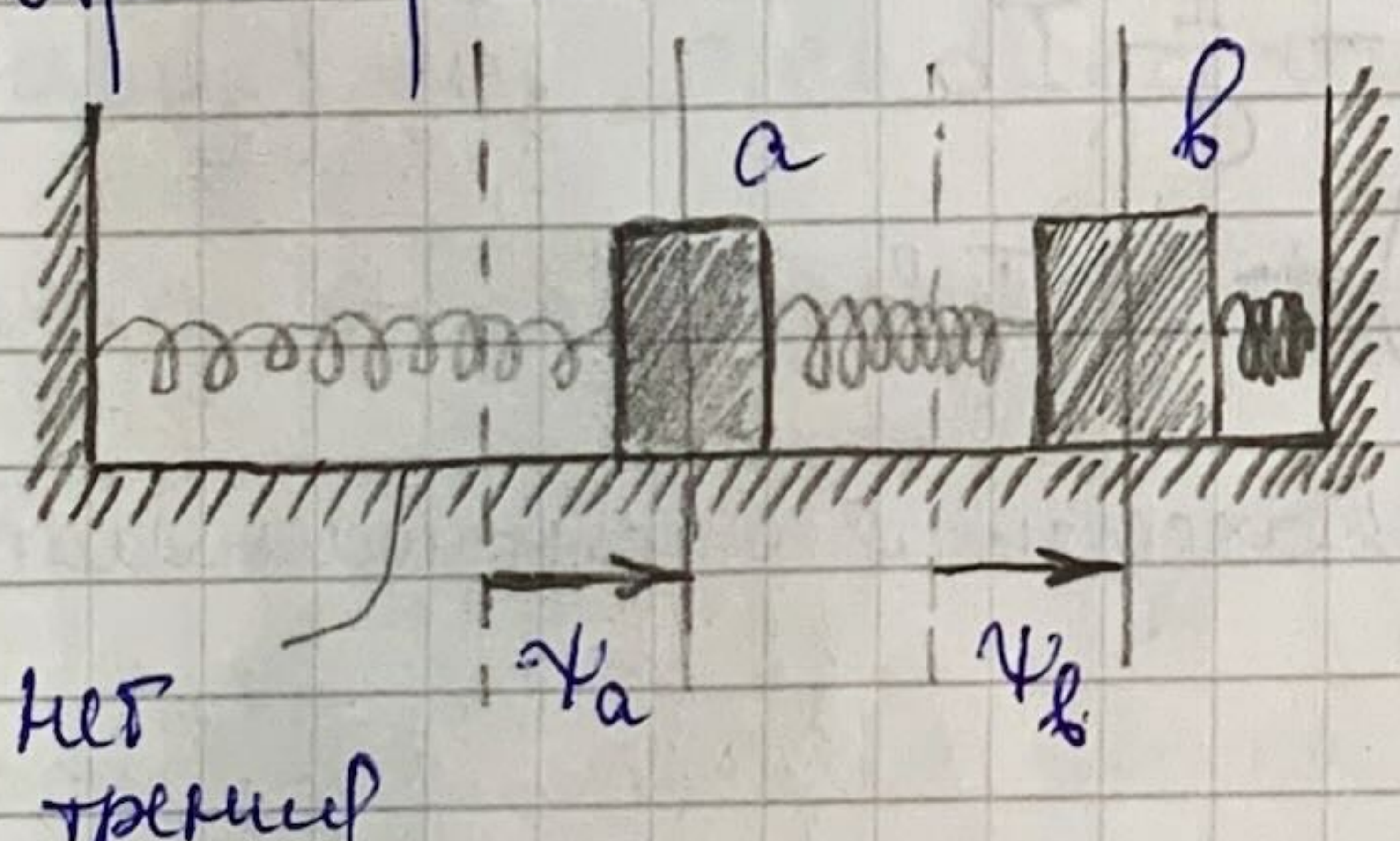
Заметим, что в данном решении имеется только 4 произвольных константы:

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}, \quad \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

Пусть это A_1, A_2 и фазы φ_1 и φ_2. Они позволяют удовлетворить Н.У. $x(0)$ $\frac{dx}{dt}(0)$, $y(0)$, $\frac{dy}{dt}(0)$.

Вместо поиска нормальных мод системы можно искать „нормальные координаты", при которых уравнения системы оказываются независимыми.

Пример 1



мода 1: $\begin{cases} \psi_a(t) = \psi_b(t) \\ \omega_1^2 = \dfrac{K}{M} \end{cases}$

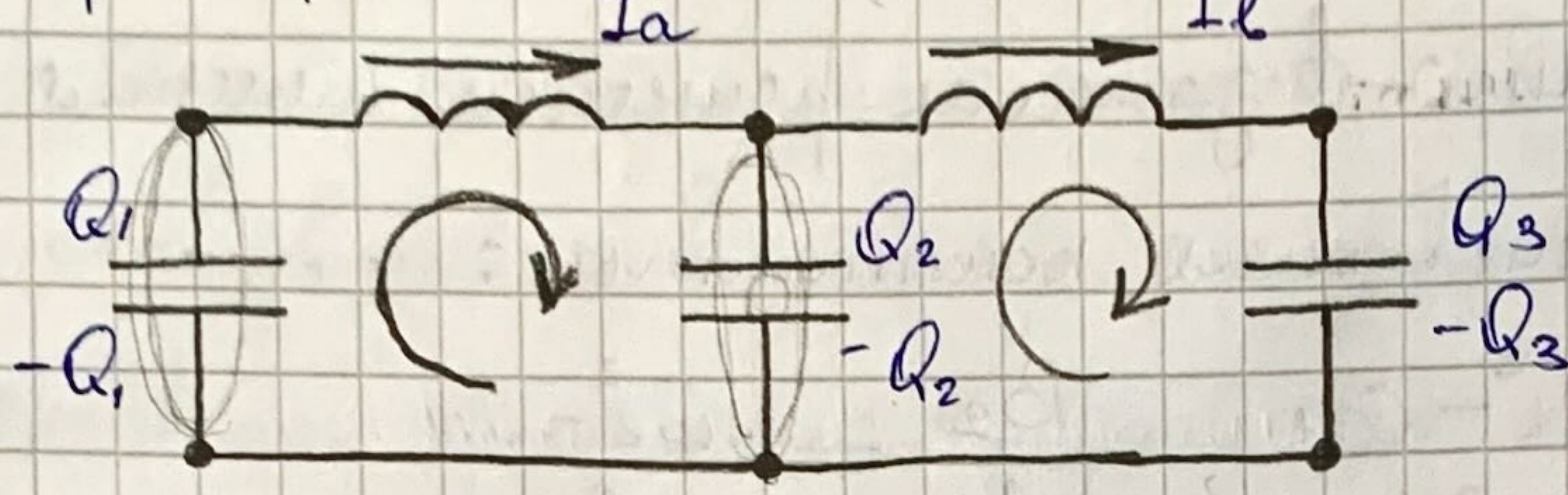
мода 2: $\begin{cases} \psi_a(t) = -\psi_b(t) \\ \omega_2^2 = \dfrac{3K}{M} \end{cases}$

Метод „нормальных координат".

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2\psi_a}{dt^2} = -K\psi_a + K(\psi_b - \psi_a) \\ M\dfrac{d^2\psi_b}{dt^2} = -K\psi_b - K(\psi_b - \psi_a) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{„}+\text{"}: \\ \text{„}-\text{"}: \end{array} \begin{cases} M\dfrac{d^2}{dt^2}(\psi_a + \psi_b) = -K(\psi_a + \psi_b), \\ M\dfrac{d^2}{dt^2}(\psi_a - \psi_b) = -3K(\psi_a - \psi_b). \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \psi_1 = \psi_a + \psi_b \\ \psi_2 = \psi_a - \psi_b \end{cases}}$$

Пример 2.



Применим к каждому замкнутому контуру соотношение $\oint \vec{E}\, d\vec{l} - \mathcal{E}_i = 0$

Получим: $\begin{cases} -L\dfrac{dI_a}{dt} = \dfrac{Q_2}{C} - \dfrac{Q_1}{C} \\ -L\dfrac{dI_b}{dt} = -\dfrac{Q_2}{C} + \dfrac{Q_3}{C} \end{cases}$

ЗСЗ: $\dfrac{dQ_2}{dt} = I_a - I_b,\ \dfrac{dQ_1}{dt} = -I_a,\ \dfrac{dQ_3}{dt} = I_b$

Дифференцируем уравнения системы:

$$\begin{cases} L\dfrac{d^2 I_a}{dt^2} = \dfrac{1}{C}(I_b - I_a) - \dfrac{1}{C} I_a \\ L\dfrac{d^2 I_b}{dt^2} = \dfrac{1}{C}(I_a - I_b) + \dfrac{1}{C} I_b \end{cases}$$

Нормальные координаты находятся аналогичным образом:

$$I_1 = I_a + I_b,\quad I_2 = I_a - I_b.$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{LC},\quad \omega_2^2 = \frac{3}{LC}.$$

Если в системе осуществляется I мода, то

$$I_2 = I_a - I_b = 0,\quad \omega^2 = \omega_1^2 = \frac{1}{LC}.$$

В противном случае

$$I_1 = I_a + I_b = 0,\quad \omega^2 = \omega_2^2 = \frac{3}{LC}.$$

3. Свободные колебания систем со многими степенями свободы.

В случае систем с N степенями свободы аналогично случаю $N=2$ можно показать, что существует N мод (с учетом кратности). Каждая мода обладает своей частотой и „формой", определяемой отношением амплитуд $A:B:C:D$ и т.д. (что соответствует степеням свободы $a_1, a_2, \dots a_N$). Все движущиеся элементы при зад. моде одновременно проходят положение равновесия, т.е. мода имеет свою фазовую постоянную, определяемую начальными условиями ($2N$). При частоте ω каждому движущемуся элементу соотв. одинаковая величина возвращающей силы, приходящаяся на единицу смещения и массы, ω^2.

Пример.

Пусть $N=4$, а для I моды $A:B:C:D = 1:0:-7:2$.

Тогда $\Psi_{a_1} = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, $\Psi_{a_2} = 0$, $\Psi_{a_3} = -7\Psi_{a_1}$, $\Psi_{a_4} = 2\Psi_{a_1}$

Если система занимает ограниченный объём, а $N \gg 1$, то расстояние между элементами стремится к нулю, а система ведёт себя как „непрерывная". В этом случае смещение элементов системы может быть описано с помощью непрерывной вектор-функции

$$\vec{\Psi}(x,y,z,t) = \vec{e}_x \Psi_x(x,y,z,t) + \vec{e}_y \Psi_y(x,y,z,t) + \vec{e}_z \Psi_z(x,y,z,t).$$

Здесь необходимо отметить, что при расположении мод в порядке возрастания частоты такое непрерывное приближение может быть некорректным для мод с номером $n \sim N$, когда смещение перестаёт плавно меняться от груза к грузу.

Опр.

Движения в непрерывной системе, описываемые вектор-функцией смещения $\vec{\Psi}(x,y,z,t)$, будем называть **волнами**. Координаты x, y и z описывают **равновесное положение частиц** системы. Моды непрерывной системы наз. **стоячими волнами**.

Пример.

Рассмотрим струну, натянутую вдоль оси z. Тогда $\vec{\Psi} = \vec{\Psi}(z,t) = \Psi_x(z,t)\vec{e}_x + \Psi_y(z,t)\vec{e}_y + \Psi_z(z,t)\vec{e}_z$

Смещения вдоль оси z наз. **продольными**, а вдоль осей x и y — поперечными. Рассмотрим поперечные колебания $(\psi_z = 0)$: $\vec{\psi} = \psi_x(z,t)\vec{e}_x + \psi_y(z,t)\vec{e}_y$.

Если колебания происходят только вдоль оси x, то говорят, что они линейно поляризованы.

В этом случае колебания описываются скалярной функцией $\psi_x(z,t) \equiv \psi(z,t)$. Малые поперечные линейно поляризованные колебания струны могут быть описаны уравнением

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}$$

T_0 — натяжение струны
ρ_0 — плотность материала струны.

Это классическое волновое уравнение.

Стоячие волны (моды) непрерывной струны.

По определению моды, все элементы струны колеблются с одинаковой частотой ω и фазовой постоянной φ, так что $\psi(z,t) \sim \cos(\omega t + \varphi)$.

„Геометрия" моды, определяемая отношением амплитуд колебаний элементов системы, в случае непрерывной системы представляется непрерывной функцией $A(z)$. Будем искать решение В.У. в виде

$$\psi(z,t) = A(z)\cos(\omega t+\varphi).$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{d^2A}{dz^2}\cos(\omega t+\varphi);$$

$$\boxed{\frac{d^2A}{dz^2} = -\omega^2\frac{\rho_0}{T_0}A(z).}$$

Получили уравнение колебаний, общее решение которого имеет вид

$$A(z) = A\sin(kz) + B\cos(kz), \text{ где}$$

$$k = \omega\sqrt{\frac{\rho_0}{T_0}}.$$

Можно написать: $kz = \frac{2\pi z}{\lambda}$. Тогда λ определяет пространственный период колебаний.

λ — длина волны

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число

Получили общее решение для мод:

$$\psi(z,t) = \cos(\omega t+\varphi)\left[A\sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) + B\cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)\right].$$

Граничные условия.

Все рассуждения до сих пор не учитывали, что концы струны закреплены. Это означает нулевые смещения на концах:

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0.$$

Тогда имеем: $B = 0$, $A\sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) = 0$.

При $A = 0$ имеем покоящуюся струну. При $A \neq 0$ имеем условие

$$\sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{2\pi L}{\lambda} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\lambda_k = \frac{2L}{k},\ k \in \mathbb{N}}$$

Поменяем k на $n \in \mathbb{N}$. Тогда для волновых чисел

$$\boxed{k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{\pi n}{L}}$$

В общем случае концы струны не обязаны быть закреплёнными. В этом случае изменяются только ГУ. Общее выражение для мод остаётся в силе. В случае свободного конца $(z = L)$ имеем Г.У.: $\left.\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|_{z=L} = 0$. (Наклон определяется возвр. силой).

Дисперсионное соотношение.

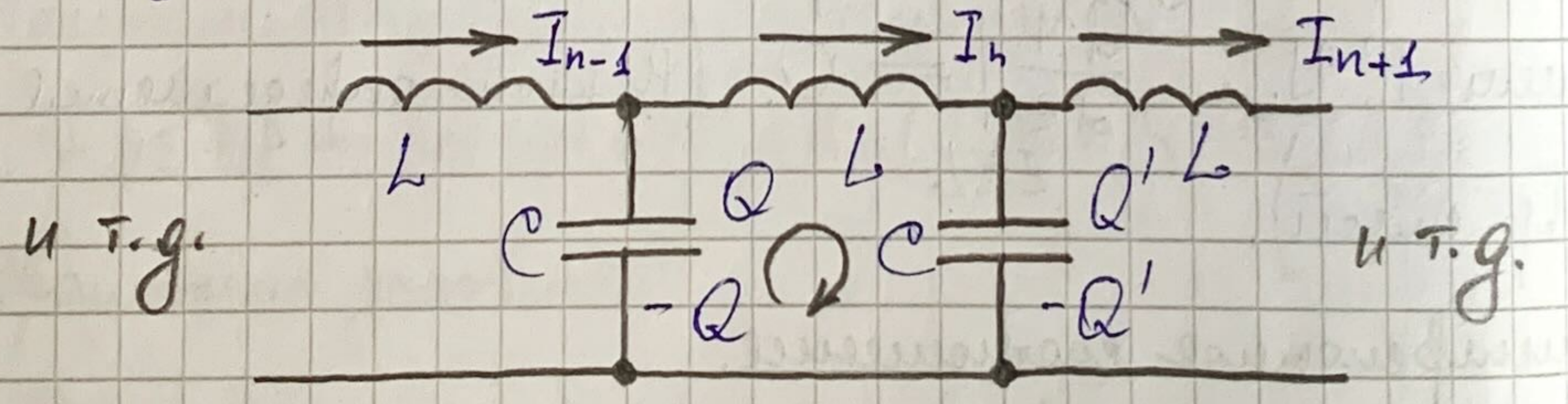
Мы получили соотношение, связывающее частоту колебаний с волновым числом:

$$\omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}\, k.$$

Связь ω и k и соотв. функцию $\omega(k)$ наз. законом дисперсии волн. Если отношение $\frac{\omega}{k}$ есть постоянная величина, то такие волны наз. недиспергирующими.

Моды дискретной системы с N степенями свободы.

Отвлечёмся от непрерывного приближения для колебательных систем в ограниченном объёме при $N \gg 1$ и рассмотрим колебания в системе с N степенями свободы на примере бесконечной LC-цепочки. Термин „бесконечная" здесь означает, что все элементы мы будем считать равноправными и отвлечёмся от границ системы.



Так же, как и для случая $N=2$, начнём с з-на э/м индукции:

для n-го контура имеем:

$$\oint \vec{E}\,d\vec{l} = +\mathcal{E}_i \Rightarrow L\frac{dI_n}{dt} = \frac{Q}{C} - \frac{Q'}{C}$$

ЗСЗ: $\frac{dQ}{dt} = I_{n-1} - I_n$, $\frac{dQ'}{dt} = I_n - I_{n+1}$.

Отсюда имеем уравнение для токов:

$$L\frac{d^2 I_n}{dt^2} = \frac{1}{C}(I_{n-1} - I_n) - \frac{1}{C}(I_n - I_{n+1})$$

Для l-й моды колебаний можно записать:

$$I_l = A_l \cos(\omega_l t + \varphi_l)$$

Подставим в уравнение: (опустим индекс l)

$$-L\omega^2 A_n = \frac{1}{C}(A_{n-1} - A_n) - \frac{1}{C}(A_n - A_{n+1})$$

или

$$A_{n-1} + A_{n+1} = A_n(-LC\omega^2 + 2)$$

Будем искать решение в виде:

$$A_n = A\sin n\varphi + B\cos n\varphi.$$

Тогда

$$A_{n\pm1} = A\sin[(n\pm1)\varphi] + B\cos[(n\pm1)\varphi] = A\sin n\varphi\cos\varphi \pm$$

$$\pm A\cos n\varphi\sin\varphi + B\cos n\varphi\cos\varphi \mp B\sin n\varphi\sin\varphi =$$

$$= A_n\cos\varphi \pm \sin\varphi(A\cos n\varphi - B\sin n\varphi)$$

Значит

$$A_{n-1} + A_{n+1} = 2A_n\cos\varphi,$$

откуда

$$2A_n\cos\varphi = A_n(2 - LC\omega^2)$$

Для удовлетворения уравнению в общем случае необходимо:

$$2\cos\varphi = 2 - LC\omega^2$$

$$1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Величина φ характеризует изменение фазы амплитуды при переходе от груза n к грузу $n+1$ так же, как волновое число k характеризует в струне такое изменение за единицу длины струны. Поэтому записанное соотношение имеет смысл дисперсионного соотношения для мод в LC-цепочке.

4. Вынужденные колебания.

Вообразим, что элементы рассмотренной LC-цепочки распределены в пространстве с некоторым шагом a (вдоль оси z). Тогда $z_n = an$, откуда $n = \frac{z}{a}$. Амплитуды мод примут вид

$$A_n = A\sin\frac{\varphi z}{a} + B\cos\frac{\varphi z}{a}.$$

Тогда величина $\frac{\varphi}{a}$ имеет смысл волнового числа k и можно написать $\varphi = ka$, откуда

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}\sin\frac{ka}{2}.$$

В приближении длинных волн $ka \ll 1$ получаем закон дисперсии

$$\omega \approx \frac{2}{\sqrt{LC}}\frac{ka}{2} = \frac{k}{\sqrt{\frac{L}{a}\frac{C}{a}}}.$$

Величины $\frac{L}{a}$ и $\frac{C}{a}$ есть погонные индуктивности и ёмкость. Полученное приближение есть приближение непрерывной линии. Видим, что в этом случае дисперсия отсутствует.

Вынужденные колебания одномерного гармонического осциллятора.

Вспомним уравнение колебаний с затуханием:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t).$$

a) $F = 0$.

Найдём общее решение ОДУ: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

$$x = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

- $\gamma \ll \omega_0$ — слабо затухающие колебания

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

• $\gamma = \omega_0$ — критический режим

Решение выше справедливо при $\gamma < \omega_0$. ~~Перейдём к пределу слева при $\gamma \to \omega_0 - 0$.~~ Тогда получим:

$$\cancel{x(t) = e^{-\gamma t}(A + B}$$

В случае $\gamma = \omega_0$ фундаментальные решения есть функции $e^{-\gamma t}$, $t e^{-\gamma t}$. Общее решение есть

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt).$$

• $\gamma > \omega_0$ — сильное затухание

Общее решение:

$$x(t) = \tilde{A} e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t} + \tilde{B} e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t}$$

или

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A \operatorname{ch}|\omega_1| t + B \operatorname{sh}|\omega_1| t\right)$$

Далее будем рассматривать случай $\omega_0 > \gamma$.

В частном случае $\gamma \ll \omega_0$ множитель $e^{-\gamma t}$ можно считать практически постоянным в течение одного периода колебаний. Тогда для энергии осциллятора можно получить:

$$E(t) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} = E_0 e^{-\gamma t}, \text{ где}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_0^2\right)\left(\frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2\right).$$

б) $F(t) = F_0 \cos\omega t$.

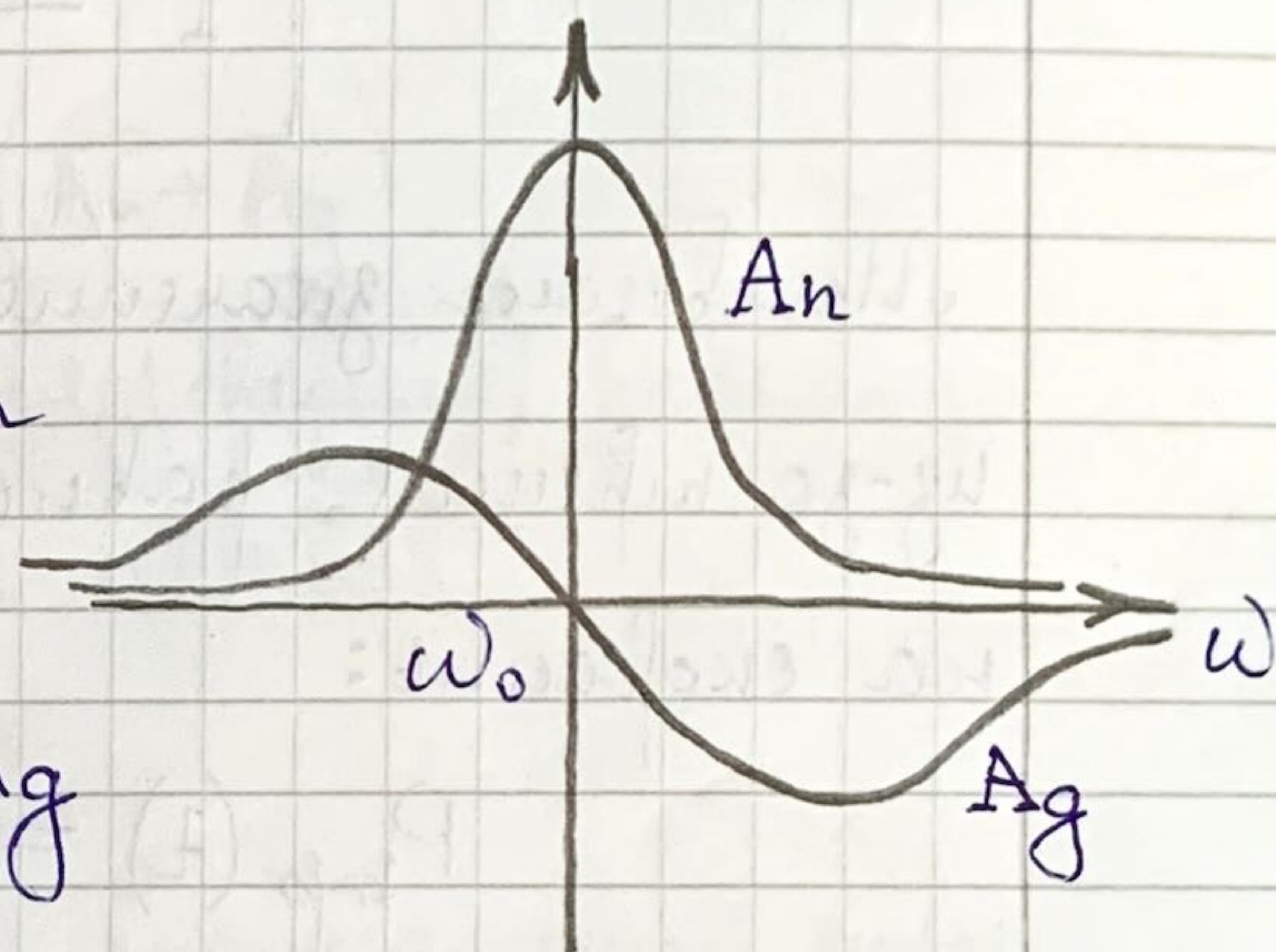
Рассмотрим установившееся движение – движение на временах $t \gg \frac{1}{2\gamma}$. В этом случае осциллятор совершает гармонические колебания с частотой вынуждающей силы ω:

$$x_s(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t.$$

Подстановка в ур-ие даёт

$$A = F_0 \frac{2\gamma\omega}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]} \equiv A_n$$

$$B = F_0 \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]} \equiv A_g$$



Опр.

Амплитуда колебаний, отличающихся по фазе с колебаниями вынуждающей силы на $\frac{\pi}{2}$, наз. амплитудой поглощения A_n. Синфазная с силой амплитуда – амплитуда дисперсии.

Вычислим среднюю мощность, поглощаемую осциллятором:

$$P(t) = F(t)\,\dot{x}_s(t) = F_0\cos\omega t\left[\omega A_n \cos\omega t - \right.$$
$$\left. - \omega A_g \sin\omega t\right]$$

Осредним по одному циклу.

$$\langle \cos^2\omega t \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \cos\omega t \sin\omega t \rangle = 0.$$

Здесь $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (\cdot)\, dt.$

Тогда для средней поглощаемой мощности имеем:

$$\boxed{P = \frac{1}{2} F_0 \omega A_n}$$

Мгновенное значение мощности, рассеиваемой из-за трения, равно произведению силы трения на скорость:

$$P_{тр}(t) = -2\gamma \dot{x}_s \cdot \dot{x}_s = -2\gamma \dot{x}_s^2$$

Среднее значение данной величины есть

$$P_{тр} = \frac{1}{2} \cdot 2\gamma\omega^2 \left(A_n^2 + A_g^2\right)$$

$$\boxed{P_{тр} = \gamma\omega^2 \left(A_n^2 + A_g^2\right)}$$

Заметим, что

$$A_n^2 + A_g^2 = F_0^2 \frac{1}{[\ldots]^2}\left(4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2\right) =$$

$$= \frac{F_0^2}{\left[4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2\right]} = \frac{A_n}{2\gamma F_0 \omega} \cdot F_0^2$$

Отсюда

$$P_{тр} = \gamma\omega^2 \frac{A_n F_0^2}{2\gamma F_0 \omega} = \frac{1}{2} F_0 \omega A_n = P.$$

Средняя величина энергии установившихся вынужденных колебаний равна

$$E = \frac{1}{2}\langle \dot{x}_s^2 \rangle + \frac{1}{2}\omega_0^2 \langle x_s^2 \rangle$$

$$\langle \dot{x}_s^2 \rangle = \omega^2 \frac{1}{2}\left(A_n^2 + A_g^2\right), \quad \langle x_s^2 \rangle = \frac{1}{2}\left(A_n^2 + A_g^2\right).$$

Отсюда

$$E = \frac{1}{4}\left(\omega_0^2 + \omega^2\right)\left(A_n^2 + A_g^2\right).$$

Видим, что кинетическая энергия (средняя) равна потенциальной только в случае $\omega = \omega_0$.

Резонанс.

Будем изменять частоту ω вынуждающей силы достаточно медленно, чтобы при каждом значении ω наблюдать установившийся режим колебаний. Усредненное значение поглощаемой мощности есть

$$P = P_0 \frac{4\gamma^2\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}.$$

Здесь $P_0 = P\big|_{\omega=\omega_0}$. Максимум P достигается при $\omega = \omega_0$, т.е. при частоте собственных колебаний без трения (!), а не частоте $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Найдём т.н. „точки половинной мощности".

$$\frac{1}{2} = \frac{4\gamma^2\omega^2}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$$2\gamma^2\omega^2 = \frac{1}{2}(\omega_0^2 - \omega^2)^2$$

$$\sqrt{2}\gamma\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}|\omega_0^2 - \omega^2|$$

$$\omega \geq \omega_0: \ 2\gamma\omega = \omega_0^2 - \omega^2 \Rightarrow \omega = -\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}$$

$$\omega < \omega_0: \ 2\gamma\omega = \omega^2 - \omega_0^2 \Rightarrow \omega = \gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2}$$

Имеем два положительных корня:

$$\boxed{\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \gamma^2} \pm \gamma}$$

Опр.

Ширина резонансной кривой — интервал частот между двумя точками половинной мощности.

По определению, получаем

$$\boxed{(\Delta\omega)_{рез} = 2\gamma}$$

Амплитуда дисперсии $A_д$ при резонансе $(\omega = \omega_0)$ равна нулю. Однако в случае частот ω, далёких от ω_0 дисперсионная составляющая преобладает:

$$\frac{A_д}{A_п} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}.$$

Отношение может быть сколь угодно большим и в случае $\omega \ll \omega_0$, и в случае $\omega \gg \omega_0$. В этом случае можно приближённо написать:

$$x_s(t) \approx A_d \cos\omega t \approx \frac{F_0 \cos\omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонанс в системе с несколькими степенями свободы.

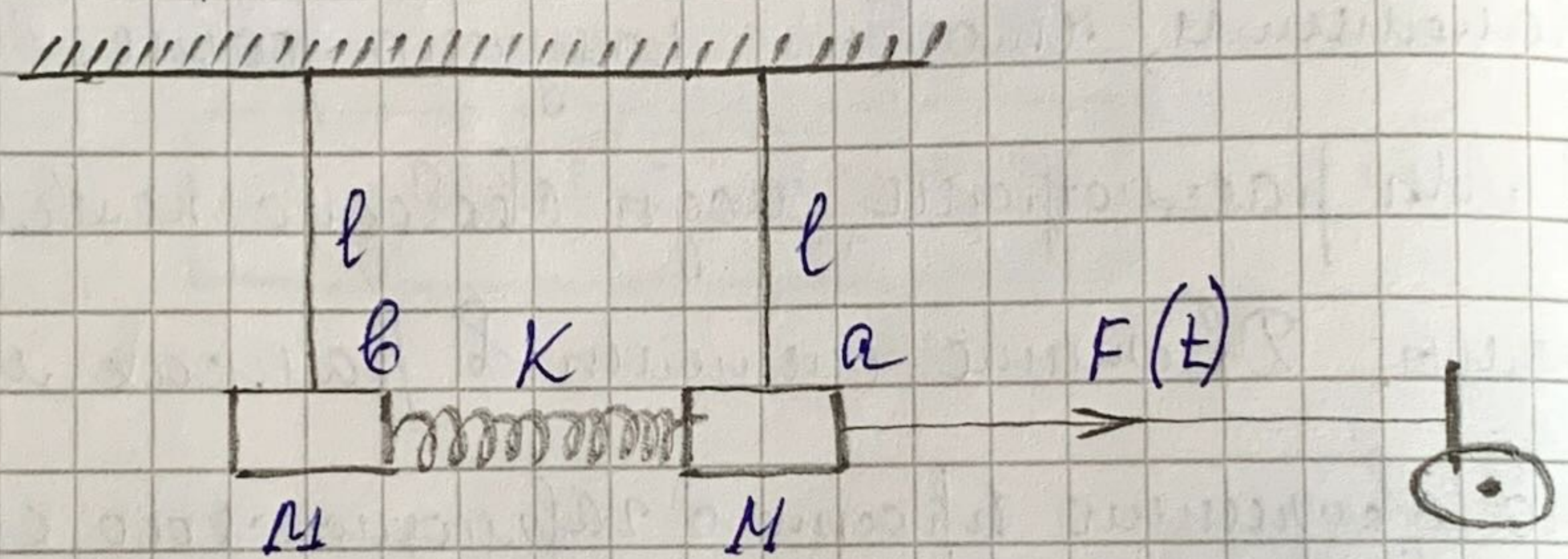
Напомним, что было получено ранее.

а) Мы рассмотрели моды свободно колеблющейся системы. Движение системы в рамках моды подобно движению простого гармонического осциллятора. Однако в случае многомерной системы „осцилляторы" занимают некоторую область в пространстве, поэтому моды характеризуются свойством „формы".

б) Изучая моды, мы пренебрегали трением. Однако можно полагать (и мы покажем это на частном примере), что каждая мода ведёт себя подобно затухающему гармоническому осциллятору. При этом различные моды могут иметь различные механизмы затухания и различные коэффункции γ.

Пример (Вынужденные колебания двух связанных маятников)

Рассмотрим систему, изображенную на рисунке ниже. Предположим для простоты, что каждый маятник имеет одинаковую постоянную затухания.



$$\begin{cases} M\ddot{\psi}_a = -\frac{Mg}{l}\psi_a - K(\psi_a - \psi_b) - 2M\gamma\dot{\psi}_a + F_0 \cos\omega t \\ M\ddot{\psi}_b = -\frac{Mg}{l}\psi_b - K(\psi_b - \psi_a) - 2M\gamma\dot{\psi}_b \end{cases}$$

1) Нормальные моды

В случае $F_0 = 0$ и $\gamma = 0$ определим моды свободных колебаний системы. Воспользуемся методом нормальных координат. Система подобна рассмотренному случаю двух блоков (см. п. 2). Поэтому достаточно рассмотреть сумму и разность уравнений:

$$\begin{cases} M\ddot{\psi}_1 = -M\frac{g}{l}\psi_1, \ \psi_1 = \frac{1}{2}(\psi_a+\psi_b) \\ M\ddot{\psi}_2 = -M\frac{g}{l}\psi_2 - 2K\psi_2, \ \psi_2 = \frac{1}{2}(\psi_a-\psi_b) \end{cases}$$

Получаем следующие независимые решения:

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1), \ \psi_2 = 0, \ \omega_1^2 = \frac{g}{l} \\ \psi_2 = A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2), \ \psi_1 = 0, \ \omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2K/M. \end{cases}$$

Для мод имеем:

$$1: \psi_a = \psi_b, \ \omega_1 = \frac{g}{l}$$

$$2: \psi_a = -\psi_b, \ \omega_2 = \frac{g}{l} + 2\frac{K}{M}.$$

2) Рассмотрим сумму и разность ур-ий при $F_0 \neq 0$ и $\gamma \neq 0$.

Получаем:

$$\begin{cases} M\ddot{\psi}_1 = -M\frac{g}{l}\psi_1 - 2M\gamma\dot{\psi}_1 + \frac{1}{2}F_0\cos\omega t \\ M\ddot{\psi}_2 = -M\frac{g}{l}\psi_2 - 2K\psi_2 - 2M\gamma\dot{\psi}_2 + \frac{1}{2}F_0\cos\omega t \end{cases}$$

Видим, что нормальные координаты ведут себя как независимые гармонические осцилляторы с собственными частотами, соответствующими частотам нормальных мод без затухания.

Поскольку колебания независимы, мы можем написать установившиеся решения для резонансов. Для движения элементов имеем:

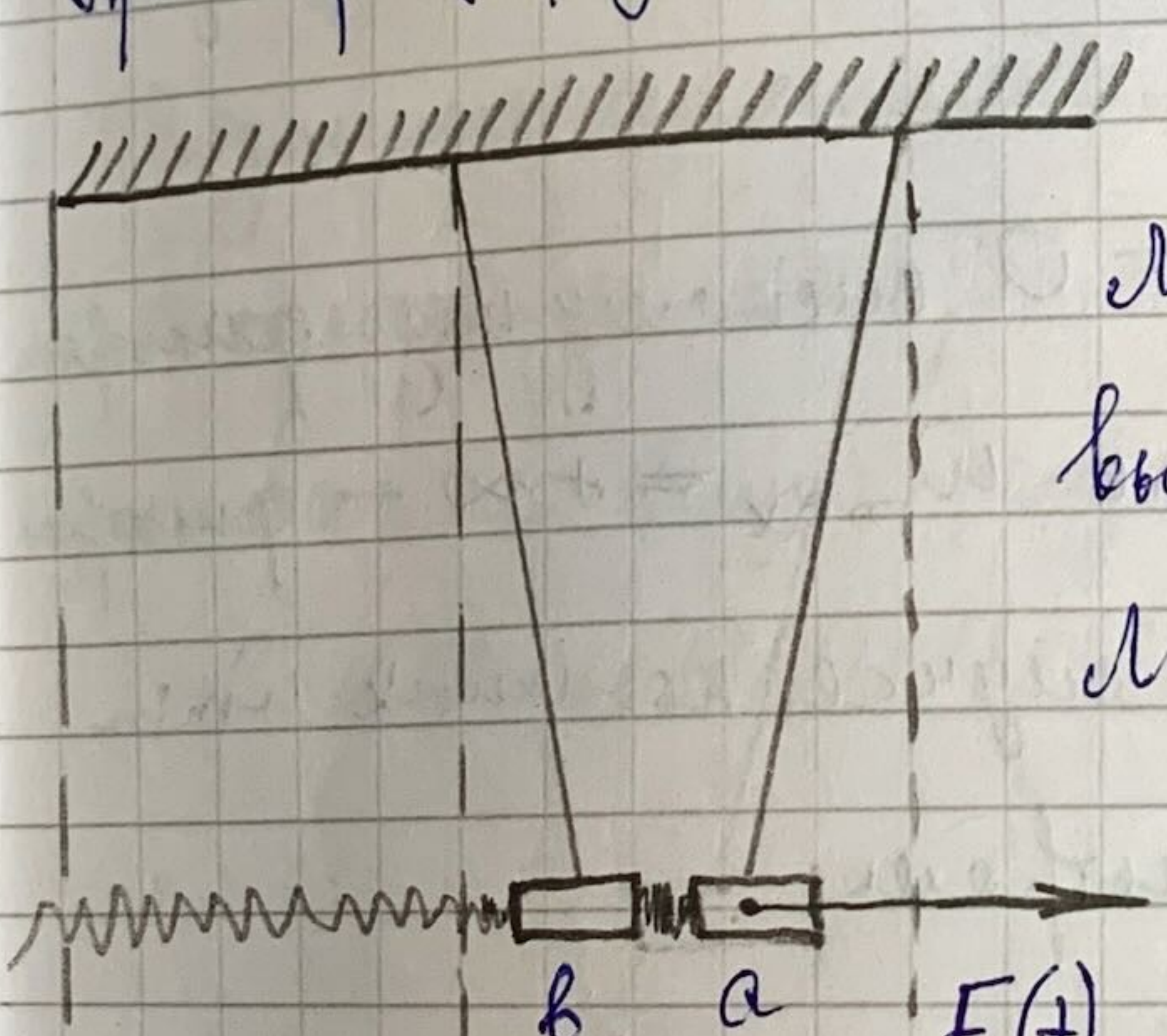
$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_b = \psi_1 - \psi_2$$

Следовательно, амплитуда положения для элемента a есть сумма амплитуд положений для мод, а в случае элемента b — разность. Если соответствующие резонансные кривые не пересекаются, т.е. $|\omega_1 - \omega_2| > \Delta\omega = 2\gamma$, то в случае резонанса одной из мод элементы a и b движутся так, как если бы их колебания принадлежали одной из мод.

Фильтры.

Пусть на систему действует внешняя сила с частотой ω. В установившемся режиме величина возвращающей силы на единицу смещения и единицу массы ω^2 для всех эл-тов системы одинакова. Если величина ω лежит между минимальным и максимальным значениями резонансных частот, но находится достаточно далеко от области резонанса, то амплитуда рассматр. элемента в основном определяется суперпозицией амплитуд дисперсии для всех мод. При этом амплитуды различных мод входят с разными знаками. При переходе через резонансную частоту некоторой моды знак A_ω изменяется. Пусть теперь, увеличивая частоту ω, мы перешли через максимальную частоту резонансов. Знаки A_ω уже не будут меняться, и элементы системы будут приближенно сохранять движение в соответствии с формой самой высокой моды. Что будет происходить с системой?

Пример (Срезание высоких частот)



Маятник а: есть вклад от вынуждающей силы частоты ω.

Маятник в: действуют те же силы, что и при свободных колебаниях => единственный вариант увеличить ω^2 — уменьшить смещение, т.е. уменьшить амплитуду. Эффект повторяется и для последующих маятников.

Аналогично рассматривается ситуация, когда частота ω меньше частоты самой низкочастотной моды. В этом случае маятники колеблются синфазно, а амплитуда при удалении от „входа" в систему так же убывает.

Опр.

В рассмотренном случае говорят, что система представляет собой фильтр. Частоты самой низкой и самой высокой мод называются соответственно нижней и верхней граничными частотами, а диапазон частот между ними — полосой пропускания.

В частном случае $\omega_{min} = 0$ систему наз. фильтром низких частот, а в случае $\omega_{max} = +\infty$ — фильтром высоких частот; в общем случае конечных ω_{min} и ω_{max} — полосовым фильтром.

Пренебрегаем затуханием

1) Оправданность.

Вдали от резонанса амплитудами поглощения можно пренебречь по сравнению с амплитудами дисперсии.

2) Преимущество.

— каждый элемент системы колеблется синфазно с вынуждающей силой => все элементы колеблются синфазно. (мы не упоминаем здесь фазы амплитуд)

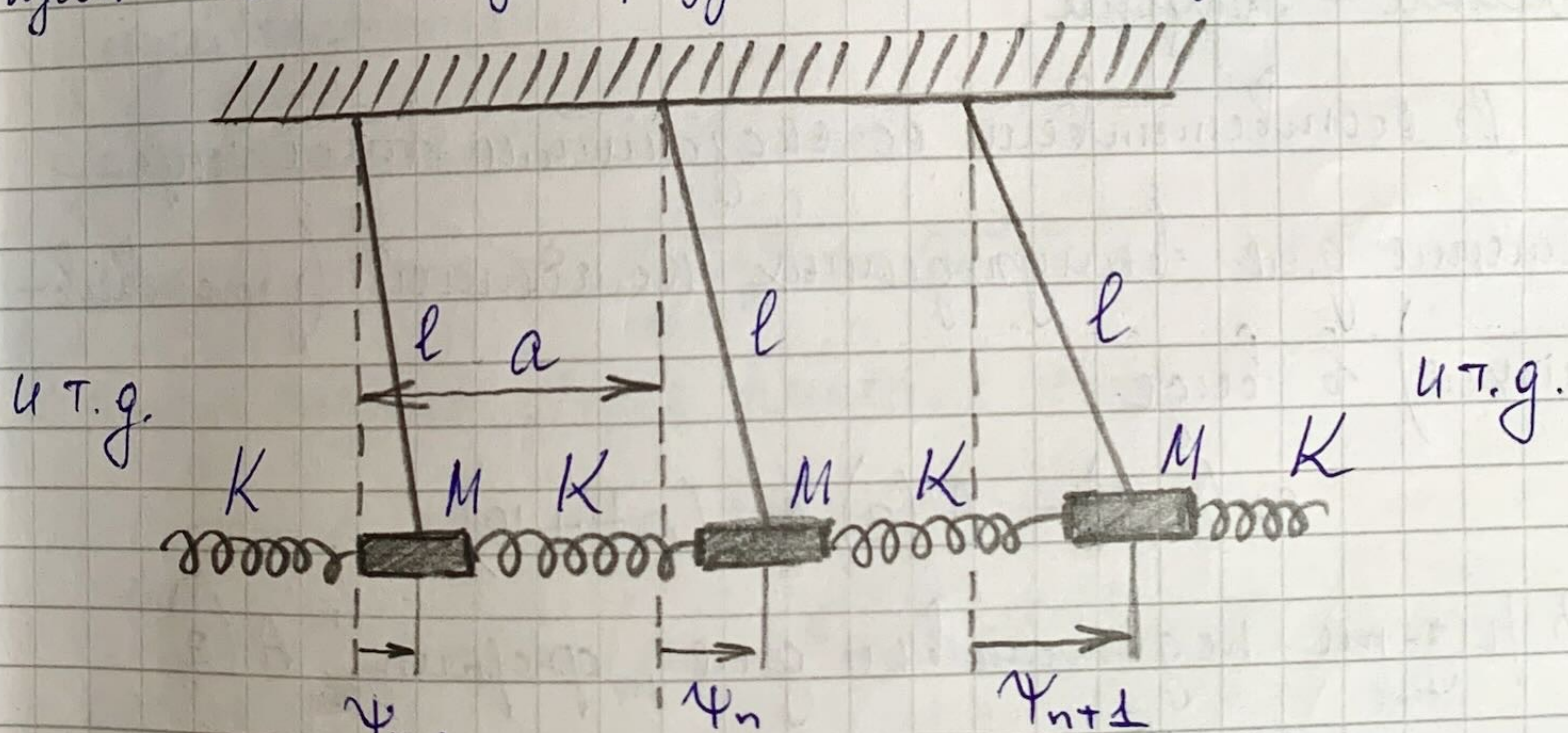
— все элементы колеблются с одинаковой частотой

Замечание.

Эти же свойства присущи и модам свободных колебаний системы.

Связанные маятники.

Рассмотрим конкретный пример, демонстрирующий весьма общие результаты и подходы.



Отвлекаясь от граничных условий, рассмотрим уравнение движения n-го маятника.

$$M\ddot{\psi}_n = -M\omega_0^2\psi_n + K(\psi_{n+1}-\psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1})$$

Здесь $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$.

Изучим для начала непрерывное приближение для закона колебаний: $\psi_n(t) \to \psi(z,t)$.

$$\psi_{n+1}(t) = \psi(z+a,t) = \psi(z,t) + a\frac{\partial\psi}{\partial z}(z,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z,t) + \ldots$$

$$\psi_{n-1}(t) = \psi(z-a,t) = \psi(z,t) - a\frac{\partial\psi}{\partial z}(z,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z,t) + \ldots$$

Тогда получаем:

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega_0^2\psi + \frac{Ka^2}{M}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}}$$

Это уравнение называют волновым уравнением Клейна – Гордона.

В соответствии со сказанным выше ищем решение для вынужденных колебаний (установившихся) в виде

$$\psi(z,t) = A(z)\cos(\omega t + \varphi)$$

В рез-те подстановки для „формы" $A(z)$ получаем уравнение:

$$\boxed{\frac{d^2A(z)}{dz^2} = \frac{M}{Ka^2}(\omega_0^2 - \omega^2)A(z)}$$

Имеем 2 принципиально разных ситуации:

а) Синусоидальные волны

$\underline{\omega > \omega_0} \Rightarrow \frac{d^2A}{dz} = -k^2A(z)$, где k удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{Ka^2}{M}\right)k^2}$$

Здесь k – волновое число, поскольку общее решение для $A(z)$ имеет вид

$$A(z) = A\sin kz + B\cos kz.$$

Константы A и B, определяемые из граничных условий, дают определённые волновые числа, определяемые внешним воздействием соответствующей частоты.

б) Экспоненциальные волны.

$\underline{\omega < \omega_0} \Rightarrow \frac{d^2A(z)}{dz^2} = \varkappa^2 A(z)$, $\boxed{\varkappa^2 = \frac{M}{Ka^2}(\omega_0^2 - \omega^2)}$

В этом случае общее решение есть

$$A(z) = Ae^{-\varkappa z} + Be^{\varkappa z}$$

$$\Psi(z,t) = \left(Ae^{-\varkappa z} + Be^{\varkappa z}\right)\cos(\omega t + \varphi)$$

Видим, что в непрерывном приближении система представляет собой высокочастотный фильтр.

Постоянная $\varkappa$ наз. коэффициентом поглощения. Если в системе существует волна, в которой

$$A(z) = Ae^{-\varkappa z},$$

то $\varkappa$ есть относительное уменьшение амплитуды на единицу длины: $\varkappa = -\frac{1}{A(z)}\frac{dA(z)}{dz}$. Обратная величина $\varkappa^{-1} = \delta$ наз. глубиной проникновения амплитуды и равна расстоянию, на котором амплитуда волны убывает в $e \approx 2.718$ раз.

Дисперсионные соотношения.

Мы видели, что если частота вынуждающей силы выше граничной частоты ω_0, то в установившемся режиме имеют место синусоидальные волны, для которых частота и волновое число связаны соотношением

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{Ka^2}{M}\right)k^2.}$$

При $\omega < \omega_0$ синусоидальных волн нет. Вместо этого существуют экспоненциальные волны, для которых связь частоты и коэффициента поглощения имеет вид

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{Ka^2}{M}\right)\varkappa^2}$$

Эти соотношения представляют полное дисперсионное соотношение системы в непрерывном приближении.

Замечание

Отметим, что дисперсионные соотношения для вынужденных синусоидальных колебаний и нормальных мод системы совпадают.

Дисперсивная и реактивная среды.

Опр.

Если в среде могут существовать синусоидальные волны, она наз. дисперсивной (или прозрачной). Среда, в которой не может быть синусоидальных волн, но возможны экспоненциальные, наз. реактивной. Одна и та же среда может быть реактивной на одних частотах и дисперсивной на других (как в рассмотренном случае).

Точное решение для вынужденных колебаний системы связанных маятников.

Рассмотрим ту же систему, не переходя к непрерывному приближению. Перепишем уравнение в виде

$$\ddot{\Psi}_n = -\omega_0^2 \Psi_n + \frac{K}{M}\left(\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}\right)$$

Предположим, что все элементы колеблются с одинаковой частотой и фазой:

$$\Psi_n = A_n \cos(\omega t).$$

Тогда получим:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}\left(1 - \frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{2A_n}\right)$$

Рассмотрим дисперсивную область частот. В ней A_n полагаем равным

$$A_n = A \sin kna + B \cos kna.$$

Тогда закон дисперсии примет вид:

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M}\sin^2\frac{ka}{2}}$$

Это соотношение определяет частоты от ω_0 при $ka = 0$ до $\left(\omega_0^2 + \frac{4K}{M}\right)^{1/2}$ при $ka = \pi$.

Используем наш опыт нахождения решения в непрерывном приближении. При частотах, меньших нижней граничной частоты ω_0, будем искать решение в виде

$$A_n = Ae^{-\varkappa na} + Be^{\varkappa na}$$

В этом случае

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2\,ch(\varkappa a)\,A_n$$

и

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2K}{M}\left(1 - ch(\varkappa a)\right).$$

Можно написать

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{M}\, sh^2\frac{\varkappa a}{2}}$$

Мы получили дисперсионное соотношение для нижней реактивной области. При $\omega = \omega_0$ имеем $k = 0$ в дисперсивной области и $\varkappa = 0$ в нижней реактивной. Видим, что характер волн на границе совпадает.

Пусть теперь $\omega > \omega_{max}$, где $\omega_{max}^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M}$. В этом случае в соответствии с проведёнными ранее рассуждениями (см. „Фильтры") волна должна быть экспоненциальной, но близкой по форме к высшей моде системы, имеющей „зигзагообразную" форму. Будем искать решение в виде

$$A_n = (-1)^n \left(A e^{-\varkappa n a} + B e^{\varkappa n a}\right)$$

В рез-те подстановки получим:

$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M}\, ch^2\frac{\varkappa a}{2}}$$

Получили дисперсионное соотношение для верхней реактивной области. Совокупность полученных выражений представляют полное дисперсионное соотношение системы. Заметим, что в отличие от непрерывного приближения точное решение даёт две реактивных области, т.е. система является полосовым фильтром.