

## Лабораторная работа №1.2.3

Цель работы: Измерение момента инерции тела  
и сравнение результатов с расчётами по ме-  
роприятиям формулам; проверка аддитивности момен-  
тов инерции и справедливости формулы Торренса-  
Штейнера.

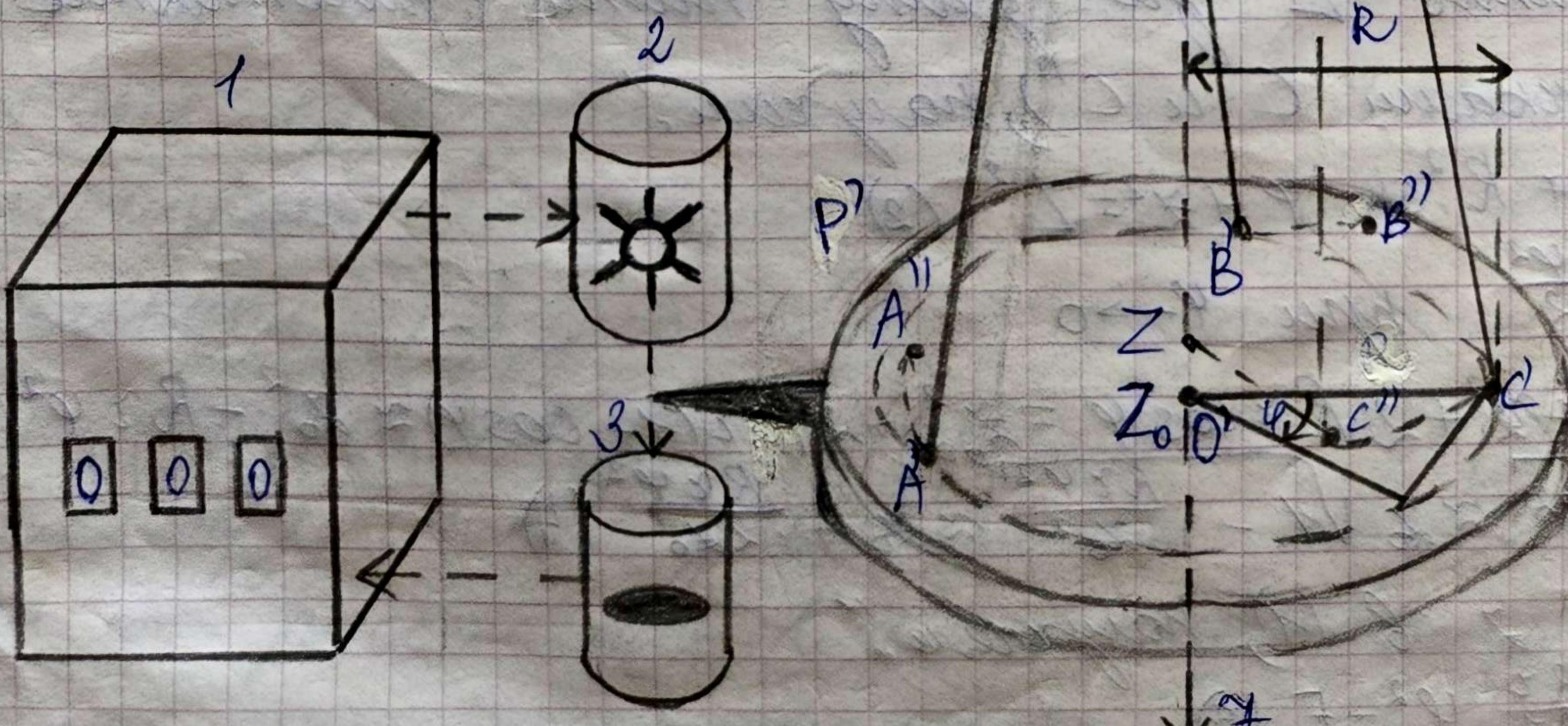
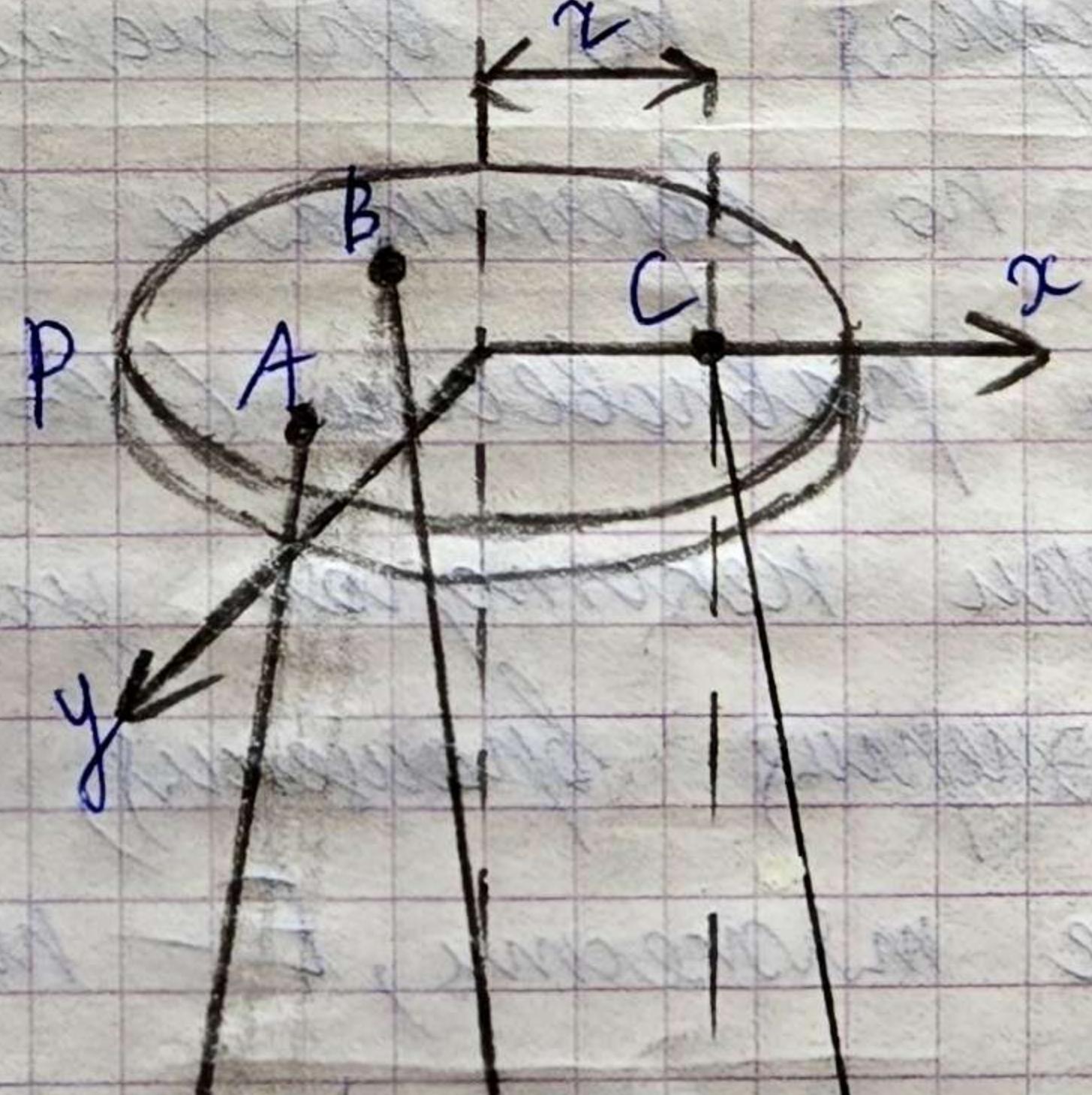
Оборудование: Трифильный подвес, секундомер, стёкла  
чайна, калibrator, набор тел момента инерции которых  
надлежит измерить (гвоздь, стержень, палец, цилиндр и  
др.).

### Теория.

Момент инерции твёрдого тела относительно не-  
извращённой оси вращения выражается по формуле  $J = \int r^2 dm$ ,  
где  $r$  — расстояние элемента массы  $dm$  от оси  
вращения.

### трифильный подвес

- 1) перекрёстное устройство
- 2) фиксатор
- 3) осциллятор



Поворотив платформу  $P$  можно создать в системе крутильные колебания. После поворота верхней платформы она остаётся неподвижной на время всего процесса. После того, как нижняя платформа повернулась на угол  $\varphi$  относительно верхней платформы, возникает момент сил стремящий вернуть нижнюю платформу в положение равновесия. Но в положении равновесия платформа не останавливается, так как имеет линзовую скорость (кинетическую энергию вращения). В результате платформа совершает крутильные колебания.

(1)  $\frac{J\ddot{\varphi}^2}{2} + mg(\frac{z_0}{2} - z) = E$ , где  $J$  — момент инерции платформы вместе с исследуемым телом,  $\varphi$  — угол поворота платформы от положения равновесия системы, точкой обозначена производная по времени (линовая скорость),  $z_0$  — координата по вертикальной оси центра масс платформы  $O$  при равновесии ( $\varphi=0$ ),  $z$  — координата той же точки при некотором угле поворота  $\varphi$ ,  $\frac{J\ddot{\varphi}^2}{2}$  — кинетическая энергия вращения,  $mg(\frac{z_0}{2} - z)$  — потенциальная энергия в поле тяжести,  $E$  — полная энергия системы (платформы с телом)

При этом приняв  $L$  за длину штифта (расстояние между точками  $C$  и  $C'$ ), получим:

$$(R \cos \varphi - z)^2 + R^2 \sin^2 \varphi + z^2 = L^2 \quad (2)$$

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{z^2}{2} \text{ при } \varphi \rightarrow 0$$

$$z^2 = L^2 - R^2 - z^2 + 2R^2 \cos \varphi = z^2 - 2R^2(1 - \cos \varphi) \approx z_0^2 - R^2 \varphi^2 \quad (3)$$

$$z \approx \sqrt{z_0^2 - R^2 \varphi^2} \approx z_0 \sqrt{1 - \frac{R^2 \varphi^2}{z_0^2}} \approx z_0 - \frac{R^2 \varphi^2}{2z_0} \quad (4)$$

подставив  $z$  в (1) получим:

$$\frac{1}{2} J \ddot{\varphi}^2 + mg \frac{R^2}{2z_0} \varphi^2 = E \quad (5)$$

$$\text{дифференцируя по } t \text{ и скрываю } \dot{\varphi} \text{ на } \dot{\varphi}, \text{ получим:}$$

$$\frac{J\ddot{\varphi}}{2} + mg \frac{R^2}{2z_0} \varphi^2 = E \quad (6)$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left( \sqrt{\frac{mgR^2}{Jz_0}} t + \theta \right) \quad (7)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Jz_0}{mgR^2}} \quad (8)$$

$$J = \frac{mgR^2 T^2}{4\pi^2 z_0} \quad (9)$$

$$Jz_0 = \text{const для каждой установки}$$

$$J = km T^2, \text{ где } k = \frac{gR^2}{4\pi^2 z_0} \quad (10)$$

При работе предполагается, что мало необходимое количество энергии, созданное с трением то есть мало затухание колебаний.

### Ход работы:

- 1) Настройка нижней платформы проверить пропорциональность установки для измерения;
- 2) проверить, достаточно ли хорошо выполняется соотношение  $t \gg T$ , возбудив крутильные колебания;
- 3) найти рабочий диапазон амплитуд колебаний;
- 4) измерить параметры установки ( $z_0, R, z$ ), вычислить  $k$  и  $\omega_k$ ;
- 5) определить момент инерции неподвижной платформы;
- 6) измерить моменты инерции двух тел из имеющихся набора стекла, пороха, а затем вместе, проверить аддитивность моментов инерции ( $J = J_1 + J_2$ ) рассчитать теоретически момента инерции  $J$  и сравнить результатом с измеренными значениями;
- 7) измерить на платформу диск разрезанный по диаметру, снять зависимость момента инерции  $J$  от расстояния  $R$  до оси вращения разрезанного плавника диска, построить график зависимости  $J(R^2)$ , опре-

делим по всему массу и момент инерции диска.

N	масса пластины всего $m_1$ , кг	количество колебаний, $n$	частота колебаний $f$ , Гц	период колебаний $T$ , с	момент инерции $J$ , $\text{kg} \cdot \text{м}^2$	непаруженная плитформа
1	576,02	20	88,21	4,4105	57146	
2	576,02	20	87,81	4,3905	56629	
3	576,02	20	87,64	4,382	56410	

Вычисления:

$$k = \frac{gR^2}{4\pi^2 T_0^2}, k = \frac{9,8 \cdot 135 \cdot 10^{-1}}{4 \cdot 314^2 \cdot 1970 \cdot 10^{-1}} = 5,1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

$$\zeta_k = \left( \frac{dk}{dR} \right)^2 \cdot \zeta_R^2 + \left( \frac{dk}{dz} \right)^2 \cdot \zeta_z^2 + \left( \frac{dk}{dz_0} \right)^2 \cdot \zeta_{z_0}^2$$

$$\zeta_k = \sqrt{\left( \frac{gR}{4\pi^2 z_0} \right)^2 \zeta_R^2 + \left( \frac{gR}{4\pi^2 z_0} \right)^2 \zeta_z^2 + \left( \frac{-gRz}{4\pi^2 z_0^2} \right)^2 \zeta_{z_0}^2}$$

$$\zeta_k = \sqrt{0,378^2 \cdot 0,05^2 + 0,7^2 \cdot 0,05^2 + (-0,026)^2 \cdot 0,1^2} = 0,09 \frac{\text{см}}{\text{м}^2}$$

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}, \bar{T} = \frac{4,4105 + 4,3905 + 4,382}{3} = 4,394 \text{ с}$$

$$\zeta_T = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 (T - \bar{T})^2}, \zeta_T = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^3 (T - \bar{T})^2 + (0,005 \cdot 4,394)^2} \approx 0,029 \text{ с}$$

$$J_g = kmT^2, J_g = 5,1 \cdot 576,02 \cdot 4,394^2 = 56,72 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\zeta_j = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^3 (J_i - J_g)^2}}, \zeta_j = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{(56720 - 57146)^2 + (56720 - 56629)^2 + (56720 - 56410)^2}} = 0,218 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_m = \frac{mR^2}{2}, J_m = \frac{576,02 \cdot 135^2 \cdot 9,1}{2} = 52,49 \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_o = (56,72 + 0,218) \cdot 10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$(1 - \frac{52,49 \cdot 10^3}{56,72 \cdot 10^3}) \cdot 100\% = 7,45\%$$

N	амплитуда $sh$ , см	количество колебаний, $n$	частота колебаний $f$ , Гц	период колебаний $T$ , с	момент инерции $J$ , $10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	момент инерции $J$ , $10^3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
1	0	20	51,12	3,56	11349	
2	0	20	51,15	3,56	11349	11349
3	0	20	51,17	3,56	11349	
4	1	20	51,78	3,59	12939	
5	1	20	51,68	3,58	12407	12762
6	1	20	51,8	3,59	12939	
7	2	20	53,2	3,66	16721	
8	2	20	53,17	3,66	16721	16721
9	2	20	53,23	3,66	16721	
10	3	20	55,43	3,77	22869	
11	3	20	55,33	3,77	22869	23059
12	3	20	55,57	3,78	23440	
13	4	20	58,5	3,93	32255	
14	4	20	58,39	3,92	31653	32054
15	4	20	58,52	3,92	32255	
16	5	20	62,26	3,11	43444	
17	5	20	62,24	3,11	43444	43231
18	5	20	61,99	3,1	42805	
19	6	20	66,22	3,31	56659	
20	6	20	66,21	3,31	56659	56659
21	6	20	66,2	3,31	56659	
22	7	20	71,11	3,56	74335	
23	7	20	71,04	3,55	73605	74091
24	7	20	71,13	3,56	74335	

$$M_m = 576,02 \text{ кг}$$

$$R = 135 \text{ мм}$$

$$z = 30 \text{ мм}$$

$$z_0 = 1970 \text{ мм}$$



расстояние  
меня на пластине

$$d = 89 \text{ мм}$$

$$m = 1442 \text{ г}$$

N	время калеба-ния t, с	период калебания T, с	масса шкивов J, г·см <sup>2</sup>	количество калеб-аний n	первое тело (диск)
1	60,49	3,0245	38966	20	$d = 159 \text{ мм}$
2	60,4	3,02	38681	20	$m = 14752$
3	60,52	3,026	39061	20	

Вычисления:

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}, \quad \bar{T} = \frac{3,0245 + 3,02 + 3,026}{3} = 3,0235 \text{ с}$$

$$G_T = E_T \cdot \bar{T}; \quad G_T = 0,05 \cdot 3,0235 = 0,15 \text{ с}$$

$$J_g = k(m_m + M_{\text{шк}}) \bar{T}^2 - J_{\text{шк}} = 5,1 \cdot (1475 + 576,02) \cdot 3,0235^2 - 56720 = 38,9 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$G_y = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sum_{c=1}^3 (J_g - J)^2}; \quad G_y = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{(38902 - 38966)^2 + (38902 - 38681)^2 + (38902 - 39061)^2}} = \\ = 0,114 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$J_{\text{шк}} = \frac{m_k R^2}{2}; \quad J_{\text{шк}} = \frac{1475 \cdot (\frac{159}{2} \cdot 0,91)^2}{2} = 46,6 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$J_g = (38,900 \pm 0,114) \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$(11 - \frac{46,6 \cdot 10^3}{38,9 \cdot 10^3}) \cdot 100\% = 19,8\%$$

N	время калеба-ния t, с	период калебания T, с	масса шкивов J, г·см <sup>2</sup>	количество калеб-аний n	два тела суппортерами
1	61,67	3,0835	120951	20	$m = 30882$
2	61,61	3,0805	120605	20	$d = 159 \text{ мм}$
3	61,53	3,0765	120145	20	

Вычисления:

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}, \quad \bar{T} = \frac{3,0835 + 3,0805 + 3,0765}{3} = 3,0802 \text{ с}$$

$$G_T = E_T \cdot \bar{T}; \quad G_T = 0,05 \cdot 3,0802 = 0,15 \text{ с}$$

$$J_g = k(m_m + M_{\text{шк}}) \bar{T}^2 - J_{\text{шк}} = 5,1 \cdot (1475 + 576,02) \cdot 3,0802^2 - 56720 = 120,571 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$G_y = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sum_{c=1}^3 (J_g - J)^2}; \quad G_y = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{(120571 - 120951)^2 + (120571 - 120605)^2 + (120571 - 120145)^2}} = 0,233 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$J_{\text{шк}} = \frac{(m_k R^2)}{2}; \quad J_{\text{шк}} = \frac{3088 \cdot (\frac{159}{2} \cdot 0,91)^2}{2} = 97,58 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$J_g = (120,571 \pm 0,233) \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$(11 - \frac{97,58 \cdot 10^3}{120,571 \cdot 10^3}) \cdot 100\% = 19,1\%$$

N	время калебания t, с	период калебания T, с	масса шкивов J, г·см <sup>2</sup>	количество калеб-аний n	второе тело (калько)
1	40,05	3,5025	80235	20	$d = 159 \text{ мм}$
2	69,94	3,497	79805	20	$m = 16132$
3	69,87	3,4935	79857	20	

Вычисления:

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}, \quad \bar{T} = \frac{3,5025 + 3,497 + 3,4935}{3} = 3,498 \text{ с}$$

$$G_T = E_T \cdot \bar{T}; \quad G_T = 0,05 \cdot 3,498 = 0,17 \text{ с}$$

$$J_g = k(m_m + M_{\text{шк}}) \bar{T}^2 - J_{\text{шк}} = 5,1 \cdot (1613 + 576,02) \cdot 3,498^2 - 56720 = 79,9 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$G_y = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sum_{c=1}^3 (J_g - J)^2}; \quad G_y = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{(79857 - 80235)^2 + (79857 - 79805)^2 + (79857 - 7832)^2}} = 0,205 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$J_{\text{шк}} = \frac{m_k R^2}{2}; \quad J_{\text{шк}} = \frac{1613 \cdot (\frac{159}{2} \cdot 0,91)^2}{2} = 50,97 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$J_g = (79,900 \pm 0,205) \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$(11 - \frac{50,97 \cdot 10^3}{79,9 \cdot 10^3}) \cdot 100\% = 36,2\%$$

N	время калебания t, с	период калебания T, с	масса шкивов J, г·см <sup>2</sup>	количество калеб-аний n	третье тело (цилиндр)
1	56,98	2,849	1565	20	$d = 49 \text{ мм}$
2	56,99	2,8495	1586	20	$m = 8322$
3	56,95	2,8475	1505	20	

Вычисления:

$$\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}, \quad \bar{T} = \frac{2,849 + 2,8495 + 2,8475}{3} = 2,850 \text{ с}$$

$$G_T = E_T \cdot \bar{T}; \quad G_T = 0,05 \cdot 2,85 = 0,1425 \text{ с}$$

$$J_g = k(m_m + M_{\text{шк}}) \bar{T}^2 - J_{\text{шк}} = 5,1 \cdot (832 + 576,02) \cdot 2,85^2 - 56720 = 1606 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$G_y = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sum_{c=1}^3 (J_g - J)^2}; \quad G_y = \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{(1606 - 1565)^2 + (1606 - 1586)^2 + (1606 - 1505)^2}} = 0,058 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$J_{\text{шк}} = \frac{m_k R^2}{2}; \quad J_{\text{шк}} = \frac{832 \cdot (\frac{159}{2} \cdot 0,91)^2}{2} = 3497 \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$J_g = (1606 \pm 0,058) \cdot 10^3 \text{ г·см}^2$$

$$(11 - \frac{3497 \cdot 10^3}{1606 \cdot 10^3}) \cdot 100\% = 55,5\%$$

12.11.19

Определение зависимости момента инерции от квадрата  
расстояния построение графика

$$h^2 = x^2 + y^2 \quad y = kx + b$$

По МНК:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\langle h^2 \rangle = \langle x \rangle = \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2}{8} = 17,5 \text{ см}^2$$

$$\langle y \rangle = \langle y \rangle = \frac{11349 + 12762 + 16721 + 23059 + 32054 + 43231 + 56659 + 74091}{8} = 33740,751 \text{ см}^2$$

$$\langle x^2 \rangle = \langle h^4 \rangle = \frac{0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 + 7^4}{8} = 584,5 \text{ см}^2$$

$$\langle h^2 y \rangle = \langle xy \rangle = \frac{0 \cdot 11349 + 1 \cdot 12762 + 2 \cdot 16721 + 3^2 \cdot 23059 + 4^2 \cdot 32054 + 5^2 \cdot 43231 + 6^2 \cdot 56659 + 7^2 \cdot 74091}{8} =$$

$$= 943874,875$$

$$k = \frac{943874,875 - 17,5 \cdot 33740,75}{584,5 - 17,5^2} = 1270,12$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle$$

$$b = 33740,75 - 1270,12 \cdot 17,5 = 11513,65$$

$$y = 1270,12 h^2 + 11513,65 \quad h \text{ [см]}$$

