DERS NOTU (9)

MUNZUR ÜNİVERSİTESİ	~~SINAV CEVAP KAĞIDI~~						MUNZUR ÜNİVERSİTESİ
ADI SOYADI:		NUMARASI:		BÖLÜM ADI:		İMZA:	

İntegrasyon Çarpanı :

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemde

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

şartı sağlamıyorsa bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. Ancak öyle bir $\mu(x,y)$ fonksiyonu bulunabilir ki bu fonksiyonla denklem çarpılınca tam diferansiyel denklem haline dönüşebilir. Bu şekilde bulunan $\mu(x,y)$ fonksiyonuna integrasyon çarpanı denir.

$$\mu(x,y)P(x,y)\,dx + \mu(x,y)Q(x,y)\,dy = 0$$

diferansiyel denkleminde

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

bağıntısı sağlanacağından

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot P + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\cdot \mu$$

veya

$$P.\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

olacaktır. Son bulunan denklem birinci mertebeden kısmi bir diferansiyel denklemdir. Çözümünü bulmak zor olduğundan bazı özel durumları gözönüne alacaktır. $z = z(x,y)$ olmak üzere $\mu = \mu(z)$ olsun.

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

olduğundan yukarıdaki kısmi türevli diferansiyel denklem:

$$P.\frac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \mu\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

veya

$$\frac{\partial \mu}{\partial z}\left(P.\frac{\partial z}{\partial y} - Q\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada da

$$\left(P\frac{\partial z}{\partial y} - Q\frac{\partial z}{\partial x}\right).\mu'(z) = \mu(z)\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$ veya

$$\boxed{\frac{\mu'(z)}{\mu(z)} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P\frac{\partial z}{\partial y} - Q\frac{\partial z}{\partial x}}}$$ bulunur.

MUNZUR ÜNİVERSİTESİ	~~SINAV CEVAP KAĞIDI~~						MUNZUR ÜNİVERSİTESİ
ADI SOYADI:		NUMARASI:		BÖLÜM ADI:		İMZA:	

→ İntegrasyon Çarpanının Sadece $\underline{\underline{x}}$ in Bir Fonksiyonu Olması Durumu:

Bu durumda, $z=x$ olacağından $\frac{\partial z}{\partial x}=1$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ dır.

O halde, integrasyon çarpanını veren denklem:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=\frac{Q_x-P_y}{-Q} \quad \text{veya} \quad \ln\mu(x)=-\int\frac{Q_x-P_y}{Q}dx$$

denkleminden

$$\mu(x)=\exp\left(-\int\frac{Q_x-P_y}{Q}dx\right) \Rightarrow \boxed{\mu(x)=e^{-\int\frac{Q_x-P_y}{Q}.dx}}$$

biçiminde elde edilir.

<u>ÖRNEK</u>: $(x-2x^2y)dy-y\,dx=0$ diferansiyel denkleminin x e bağlı bir integrasyon çarpanını bularak genel çözümünü yazınız.

$P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=x-2x^2y$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1-4xy$.

biçimindedir. O halde tam diferansiyel denklem değildir.

$z = x$ olacağından:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{-Q} = \frac{1-4xy+1}{-(x-2x^2y)} = \frac{2-4xy}{-x(1-2xy)} = \frac{2(1-2xy)}{-x(1-2xy)} = \frac{2}{-x}$$

elde edilir. İntegralini alalım:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{2}{-x} \Rightarrow \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx = -2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\mu(x) = -2\ln x$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(x) = \frac{1}{x^2}} \text{ bulunur.}$$

Denklemi $\frac{1}{x^2}$ ile çarpalım:

$$(x-2x^2y)dy - y\,dx = 0 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{x} - 2y\right)dy - \frac{y}{x^2}dx = 0}$$

elde edilir. Elde edilen denklemin çözümünü bulalım:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$$

olduğundan diferansiyel denklem tam diferansiyel denklemdir. O halde çözümü $\varphi(x,y) = C$ olacak şekilde bulalım:

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)dx + f(y) = \int -\frac{y}{x^2}dx + f(y) = \frac{y}{x} + f(y)$$

bulunur. $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ bağıntısından $f(y)$ yi bulalım:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x} + f'(y) = \frac{1}{x} - 2y \Rightarrow f'(y) = -2y \Rightarrow f(y) = -y^2.$$

Çözüm: $\boxed{\frac{y}{x} - y^2 = C}$ bulunur.

→ İntegrasyon çarpanının Sadece y nin Bir Fonksiyonu olması:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ olacağından integrasyon çarpanını veren denklem:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{Q_x - P_y}{P} \quad \text{veya} \quad \ln \mu(y) = \int \frac{Q_x - P_y}{P}\, dy$$

denkleminden

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{Q_x - P_y}{P} \cdot dy\right) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$$

şeklinde elde edilir.

ÖRNEK: $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\,dy = 0$

diferansiyel denkleminin y ye bağlı integrasyon çarpanı olup olmadığını araştırınız. Denklemi tam diferansiyel denklem tipine dönüştürerek genel çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM: $P(x,y) = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y$, $Q(x,y) = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2xy^4e^y - 2xy^3 - 3 \end{aligned}\right\} \neq$$

O halde tam dif. denklem değildir.

$\mu = \mu(y)$ çarpanını araştıralım.

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 - 8xy^3e^y - 2xy^4e^y - 6xy^2 - 1}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y}$$

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{-8xy^2 - 8xy^3e^y - 4}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} = \frac{-4\cancel{(2xy^2 + 2xy^3e^y + 1)}}{y\cancel{(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}} = -\frac{4}{y}.$$

bulunur. O halde:

$$\ln \mu(y) = \int \frac{Q_x - P_y}{P} \cdot dy = -4 \int \frac{dy}{y} = -4 \ln y \Rightarrow \boxed{\mu(y) = \frac{1}{y^4}}$$

elde edilir. Bu ifadeyle denklem çarpılırsa:

$$\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right)dy = 0$$

bulunur.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^y - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4}$$

olduğundan denklem tam bir diferansiyel denklemdir. Çözümünü $\varphi(x,y) = c$ olacak şekilde bulalım.

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx + f(y) = \int\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx + f(y)$$

$$\varphi(x,y) = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + f(y)$$ bulunur.

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = Q$ bağıntısından:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} + f'(y) = x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} \Rightarrow f'(y) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(y) = c_1}$$

bulunur. O halde genel çözüm:

$$x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} + c_1 = c_2 \Rightarrow \boxed{x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} = C}$$

biçiminde elde edilir.

→ İntegrasyon çarpanının $(x.y)$ nin Fonksiyonu Olması Durumu:

Bu durumda, $z = x.y$ olacağından:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \quad \text{ve} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

biçimindedir. İntegrasyon çarpanını veren denklem:

$$\frac{\mu'(x.y)}{\mu(xy)} = \frac{Q_x - P_y}{Px - Qy} \Rightarrow \ln\mu(x.y) = \int \frac{(Q_x - P_y)}{Px - Qy}\, d(xy)$$

denkleminden:

$$\mu(xy) = \exp\left(\int \frac{(Q_x - P_y)}{Px - Qy}\, d(xy)\right) \Rightarrow \boxed{\mu(xy) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{Px - Qy}\, d(xy)}}$$

şeklinde elde edilir.

ÖRNEK: $(y-3x^2y^2)dx + xdy = 0$ diferansiyel denklemi $(x.y)$ ye bağlı bir integral çarpanı yardımıyla tam diferansiyel denklem haline getiriniz ve denklemi çözünüz.

$$P(x,y) = y - 3x^2y^2, \qquad Q(x,y) = x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 6x^2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

olduğundan denklem tam diferansiyel denklem değildir. $z = x.y$ olacağından:

$$\frac{\mu'(xy)}{\mu(xy)} = \frac{Q_x - P_y}{Px - Qy} = \frac{1-(1-6x^2y)}{xy - 3x^3y^2 - yx} = \frac{6x^2y}{-3x^3y^2} = -\frac{2}{xy}$$

elde edilir. İntegralini alalım:

$$\ln \mu(xy) = -2\int \frac{d(xy)}{xy} = -2\ln(xy) \Rightarrow \boxed{\mu(xy) = \frac{1}{x^2y^2}}$$

bulunur. Bununla verilen denklemi çarpalım:

$$\left(\frac{1}{x^2y} - 3\right)dx + \frac{1}{xy^2}dy = 0$$

elde edilir. O halde:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2y^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2y^2}$$

olduğundan denklem tam diferansiyel denklemdir. Şimdi denklemin çözümünü $\varphi(x,y) = c$ olacak şekilde bulalım:

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx + f(y) = \int\left(\frac{1}{x^2y} - 3\right)dx + f(y)$$

$$\varphi(x,y) = -\frac{1}{xy} - 3x + f(y)$$

bulunur. Şimdi, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ bağıntısını kullanalım:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{xy^2} + f'(y) = \frac{1}{xy^2} \Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow \boxed{f(y) = c_1}.$$

Çözümün ifadesinde yerine yazalım:

$$\varphi(x,y) = -\frac{1}{xy} - 3x + c_1 = c_2 \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{xy} - 3x = c}$$ elde edilir.

→ İntegrasyon Çarpanının $(x+y)$ nin Bir Fonksiyonu Olması Durumu:

Bu durumda, $z = x+y$ olacağından

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

şeklindedir. O halde integrasyon çarpanını veren denklemi

$$\frac{\mu'(x+y)}{\mu(x+y)} = \frac{Q_x - P_y}{P-Q} \Rightarrow \ln\mu(x+y) = \int\frac{(Q_x - P_y)}{P-Q}\,d(x+y)$$

denkleminden:

$$\mu(x+y) = \exp\left(\int\frac{Q_x - P_y}{P-Q}\,d(x+y)\right) \Rightarrow \boxed{\mu(x+y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P-Q}\,d(x+y)}}$$

şeklindedir.

ÖRNEK: $(x^2+2xy+y^2)dx+(x^2-y^2)dy=0$ denkleminde $\mu=\mu(x+y)$ şeklinde bir integrasyon çarpanı araştırınız ve genel çözümü bulunuz.

$P(x,y)=x^2+2xy+y^2$, $Q(x,y)=x^2-y^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x+2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

olduğundan denklem tam dif. denklem değildir. $z=x+y$ olacağından

$$\frac{\mu'(x+y)}{\mu(x+y)}=\frac{Q_x-P_y}{P-Q}=\frac{2x-2x-2y}{x^2+2xy+y^2-x^2+y^2}=\frac{-2y}{2y(x+y)}=-\frac{1}{x+y}$$

bulunur. İntegralini alalım:

$$\ln\mu(x+y)=-\int\frac{d(x+y)}{(x+y)}=-\ln(x+y)\Rightarrow \boxed{\mu(x+y)=\frac{1}{x+y}}$$

elde edilir. Denklemi bu ifadeyle çarpalım:

$$\frac{(x^2+2xy+y^2)}{x+y}dx+\frac{(x^2-y^2)}{(x+y)}dy=0\Rightarrow\frac{(x+y)^2}{(x+y)}dx+\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)}dy=0$$

$$\boxed{(x+y)dx+(x-y)dy=0}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=1$$

olduğundan diferansiyel denklem tam diferansiyel denklemdir. O halde, çözümünü $\varphi(x,y)=c$ olacak şekilde bulalım.

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)\,dx + f(y) = \int (x+y)\,dx + f(y) = \frac{x^2}{2} + xy + f(y)$$

bulunur. Şimdi, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ bağıntısını kullanalım!

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + f'(y) = x - y \Rightarrow f'(y) = -y \Rightarrow \boxed{f(y) = -\frac{y^2}{2}}$$

elde edilir. O halde, genel çözüm!

$$\varphi(x,y) = C \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C}$$ elde edilir.

→ İntegrasyon Çarpanının (x^2+y^2) nin Bir Fonksiyonu Olması Durumu!

Bu durumda, $z = x^2+y^2$ olacağından, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ dir.

O halde:

$$\frac{\mu'(x^2+y^2)}{\mu(x^2+y^2)} = \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} \Rightarrow \ln \mu(x^2+y^2) = \int \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ}\, d(x^2+y^2)$$

olduğundan:

$$\mu(x^2+y^2) = \exp\left(\int \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ}\, d(x^2+y^2)\right)$$ veya

$$\boxed{\mu(x^2+y^2) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ}\, d(x^2+y^2)}}$$ şeklinde olacaktır.

Örnek: $x\,dx + y\,dy + 4y^3(x^2+y^2)\,dy = 0$ denkleminde $\mu = \mu(x^2+y^2)$ şeklinde integrasyon çarpanını araştırınız ve genel çözümü bulunuz.

$$P(x,y) = x, \qquad Q(x,y) = 4x^2y^3 + 4y^5 + y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 8xy^3$$

olduğundan denklem tam diferansiyel denklem değildir. $z = x^2+y^2$ olacağından:

$$\frac{\mu'(x^2+y^2)}{\mu(x^2+y^2)} = \frac{Q_x - P_y}{2yP - 2xQ} = \frac{8xy^3 - 0}{2yx - 2x(4x^2y^3 + 4y^5 + y)} = \frac{8xy^3}{-8x^3y^3 - 8xy^5}$$

$$= \frac{8xy^3}{-8xy^3(x^2+y^2)} = -\frac{1}{x^2+y^2}$$ bulunur. O halde;

$$\ln \mu(x^2+y^2) = -\int \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = -\ln(x^2+y^2) \Rightarrow \boxed{\mu(x^2+y^2) = \frac{1}{x^2+y^2}}$$

elde edilir. Denklemi bu ifadeyle çarpalım;

$$\frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy + \frac{4y^3(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dy = 0$$

$$\boxed{\frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \left(4y^3 + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dy = 0}$$ elde edilir.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$ olduğundan denklem tam dif. denklemdir.

ADI SOYADI:		NUMARASI:		BÖLÜM ADI:		İMZA:	

Elde edilen tam diferansiyel denklemin çözümünü bulunuz.

→ İntegrasyon Çarpanının (x^2-y^2) nin Bir Fonksiyonu Olması Durumu!

Bu durumda, $z=x^2-y^2$ olacağından: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$

olacaktır. O halde!

$$\frac{\mu'(x^2-y^2)}{\mu(x^2-y^2)}=\frac{Q_x-P_y}{-2Py-2Qx} \Rightarrow \mu(x^2-y^2)=\exp\left(\int \frac{P_y-Q_x}{2yP+2xQ}\,d(x^2-y^2)\right)$$

veya

$$\mu(x^2-y^2)=e^{\int \frac{P_y-Q_x}{2yP+2xQ}\,d(x^2-y^2)}$$

biçiminde olacaktır.

ÖRNEK: $(y^3+x^2y+2x)\,dx-(x^3+xy^2+2y)\,dy=0$ diferansiyel denkleminde $\mu=\mu(x^2-y^2)$ şeklinde integrasyon çarpanı araştırınız.

Çözüm:

$P(x,y)=y^3+x^2y+2x$, $\quad Q(x,y)=-x^3-xy^2-2y$.

$\frac{\partial P}{\partial y}=3y^2+x^2$, $\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-3x^2-y^2$

olduğundan denklem tam dif. denklem değildir. $z=x^2-y^2$ olduğundan!

$$\frac{\mu'(x^2-y^2)}{\mu(x^2-y^2)} = \frac{Q_x - P_y}{-2yP - 2xQ} = \frac{-3x^2-y^2-3y^2-x^2}{-2y(y^3+x^2y+2x)+2x(x^3+xy^2+2y)}$$

$$= \frac{-4x^2-4y^2}{-2y^4+2x^4} = \frac{-4(x^2+y^2)}{2(x^4-y^4)} = \frac{-2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \frac{-2}{x^2-y^2}$$

bulunur. Şimdi integral alalım;

$$\ln \mu(x^2-y^2) = -2 \cdot \int \frac{d(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = -2 \cdot \ln(x^2-y^2),$$

$$\boxed{\mu(x^2-y^2) = \frac{1}{(x^2-y^2)^2}}$$ bulunur.

SORULAR :

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri karşılarında belirtilen şekilde integrasyon çarpanını araştırınız ve denklemleri çözünüz.

1) $(x^2y^3+2y)dx+(2x-2x^3y^2)dy=0$, $\mu=\mu(x\cdot y)$

2) $xy'+2xy^2-y=0$, $\mu=\mu(y)$

3) $xdx-ydx-(1-x^2)dx=0$, $\mu=\mu(x)$

4) $(x+x^4+2x^2y^2+y^4)dx+ydy=0$, $\mu=\mu(x^2+y^2)$