DERS NOTU (1)

MUNZUR ÜNİVERSİTESİ 2006	SINAV CEVAP KAĞIDI						MUNZUR ÜNİVERSİTESİ 2006
ADI SOYADI:		NUMARASI:		BÖLÜM ADI:		İMZA:	

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Giriş:

Bir değişken ve bu değişkenin fonksiyonu ile bu fonksiyonun belirli türevleri arasındaki bir bağıntıya "Diferansiyel Denklem" denir.

x reel değişkeninin fonksiyonu $y(x)$ olmak üzere n. mertebeden bir diferansiyel denklem,

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde gösterilebilir. Denklemin n. mertebeden olması yani fonksiyonun n. türevin denklemde görünebilmesi için

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$$

olmalıdır.

→ F fonksiyonu $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ cinsinden lineer bir fonksiyon ise diferansiyel denkleme lineer aksi durumda non-lineer diferansiyel denklem denir.

→ Bir diferansiyel denklemde en yüksek türevin mertebesine diferansiyel denklemin <u>mertebesi</u> denir. Örneğin:

$$y''' + P(x)y'' + Q(x)y' = R(x)$$

denklemi en fazla üçüncü mertebeden türev bulundurduğu için üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklemdir.

→ Bir diferansiyel denklemde en yüksek mertebeli türevin derecesine diferansiyel denklemin <u>derecesi</u> denir.

$$x^2 (y''')^2 + 3x(y')^3 = \sin x$$

diferansiyel denkleminde en yüksek türev üçüncü mertebedendir. Üçüncü mertebeden türevin derecesi ikidir. O halde, verilen diferansiyel denklem ikinci derecedendir.

→ Bir diferansiyel denklemde $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, \ldots$ yerine $y=f(x)$ fonksiyonu ve bunun $f'(x), f''(x), \ldots$ türevleri konulduğunda denklem özdeş olarak gerçeklenirse $y=f(x)$ fonksiyonuna diferansiyel denklemin <u>özel çözümü</u> denir. Örneğin:

$y' - x^2 = 0$ denklemimin genel çözümü:

$$y = \frac{x^3}{3} + C$$

şeklindeki fonksiyonlardır. C keyfi sabitine özel değerler verilerek diferansiyel denklemin özel çözümleri elde edilir. Bir özel çözümün gösterdiği eğriye diferansiyel denklemin integral eğrileri denir.

→ Bazı özel çözümler genel çözümlerden elde edilemeyebilir. Yani, çözüm olduğu halde denklemin genel çözümlerinden elde edilemeyen çözümlerdir. Böyle çözümlere "Tekil Çözümler" denir.

→ y fonksiyonunun tek ve çok değişkenli olmasına göre, diferansiyel denklem adi ve kısmi türevler içerir. Adi türev bulunduran bir diferansiyel denklere adi diferansiyel denklem kısmi türevler bulunduran bir diferansiyel denklere kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

Scanned with CamScanner

örneğin:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - xy\frac{dy}{dx} + y = 0$$ $\Rightarrow$ adi diferansiyel denklem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$ $\Rightarrow$ kısmi diferansiyel denklem.

$$(x^2+y^2)\frac{dx}{dy} - 2xy = 0$$ $\Rightarrow$ adi diferansiyel denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$ $\Rightarrow$ kısmi diferansiyel denklem

→ Genel olarak, n. mertebeden lineer bir adi diferansiyel denklem aşağıdaki biçime sahiptir:

$$b_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + b_n(x)y = R(x).$$

örneğin:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2b\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y = 0$$ adi diferansiyel denklemi non-lineerdir.

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 4x^3$$ denklemi ise lineerdir.

DERS NOTU (5)

MUNZUR ÜNİVERSİTESİ 2008	~~SINAV CEVAP KAĞIDI~~						MUNZUR ÜNİVERSİTESİ 2008
ADI SOYADI:		NUMARASI:		BÖLÜM ADI:		İMZA:	

SORULAR: Aşağıdaki verilen denklemlerin adi, kısmi, lineer veya non-lineer olma özelliklerini belirleyiniz, mertebesini ve derecesini bulunuz.

1) $\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$

2) $(x^2+y^2)\,dx+2xy\,dy=0$

3) $yy''=x$

4) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$

5) $\frac{dy}{dx}=1-xy+y^2$

6) $\frac{\partial^2w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2w}{\partial x^2}$

7) $x(y'')^3+(y')^4-y=0$

8) $\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)^2-2\left(\frac{dw}{dx}\right)^4+yw=0$

Fonksiyon Aileleri ve Bunların Diferansiyel Denklemi

Bir aralıkta diferansiyellenebilen fonksiyonların ailesi:

$$y = f(x, c)$$

şeklinde olsun. Burada c parametresi belirli bir aralıkta değişmektedir. Yukarıda verilen aile denkleminde türev alırsak:

$$y' = \frac{\partial}{\partial x} f(x, c)$$

bulunur. Bu iki denklemde c parametresi yok edilerek x, y ve y' arasında $\varphi(x, y, y') = 0$ şeklinde bir diferansiyel denklem bulunur.

ÖRNEK: Merkezi Ox ekseni üzerinde bulunan R yarıçaplı dairelerin diferansiyel denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM: Verilen dairelerin denklemi:

$$(x-c)^2 + y^2 = R^2$$

biçimindedir. Denklemden türev alalım:

$$2(x-c) + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow \boxed{x - c = -yy'} \Rightarrow x + yy' = c$$

bulunur. Bu iki denklemi kullanarak c sabitini yok edelim:

$$(x - x - yy')^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{(y \cdot y')^2 + y^2 = R^2}$$ dif. denklemi elde edilir.

ADI SOYADI:		NUMARASI:		BÖLÜM ADI:		İMZA:	

ÖRNEK: Genel ikinci derecede eğrilerin diferansiyel denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM: Bu tip eğrilerin denklemi:

$$y = c_1x^2 + c_2x + c_3$$

biçimindedir. Denklem üç sabit (c_1, c_2, c_3) içerdiğinden denklemden ard arda üç kez türev alalım:

$$y' = 2c_1x + c_2 \quad , \quad y'' = 2c_1 \quad , \quad y''' = 0$$

elde edilir. Böylece:

$\boxed{y''' = 0}$ diferansiyel denklemi elde edilir.

ÖRNEK: $x = c_1 \sin(y + c_2)$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM: Verilen denklemde iki sabit (c_1, c_2) olduğundan denklemden ard arda iki kez türev alalım:

$$1 = c_1 \cos(y+c_2) \cdot y'$$

$$0 = -c_1 \sin(y+c_2) \cdot y' \cdot y' + c_1 y'' \cos(y+c_2)$$

$$0 = c_1 y'' \cos(y+c_2) - c_1(y')^2 \sin(y+c_2)$$

bulunur. Bu denklemlerde c_1 ve c_2 sabitlerini yok edelim:

$$x = c_1 \sin(y+c_2) \Rightarrow c_1 = \frac{x}{\sin(y+c_2)}$$

$$1 = c_1 y' \cos(y+c_2) \Rightarrow 1 = \frac{xy'}{\sin(y+c_2)} \cdot \cos(y+c_2)$$

$$0 = c_1 y'' \cos(y+c_2) - c_1 (y')^2 \sin(y+c_2) \Rightarrow y'' \cos(y+c_2) = (y')^2 \sin(y+c_2)$$

$$\frac{\cos(y+c_2)}{\sin(y+c_2)} = \frac{(y')^2}{y''} \Rightarrow \frac{1}{xy'} = \frac{(y')^2}{y''} \Rightarrow \boxed{y'' - x(y')^3 = 0}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

ÖRNEK: $\ln y = c_1 x^2 + c_2$ ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemde ard arda iki kez türev alalım;

$$\frac{y'}{y} = 2c_1 x \Rightarrow \frac{y'' \cdot y - y' \cdot y'}{y^2} = 2c_1 .$$

elde edilir. c_1 sabitini yok edelim:

$$\frac{y'' \cdot y - (y')^2}{y^2} = \frac{y'}{xy} \Rightarrow x \cdot y \cdot y'' - x(y')^2 = y \cdot y'$$

yani: $\boxed{x \cdot y \cdot y'' - y \cdot y' - x(y')^2 = 0}$ diferansiyel denklem elde edilir.

DERS NOTU (9)

MUNZUR ÜNİVERSİTESİ 2008

SINAV CEVAP KAĞIDI

MUNZUR ÜNİVERSİTESİ 2008

ADI SOYADI:		NUMARASI:		BÖLÜM ADI:		İMZA:	

SORULAR: Aşağıdaki eğri ailelerinin diferansiyel denklemini bulunuz.

1) $y = \sin x + C e^{-\sin x}$.

2) $y = \dfrac{2x}{2C - x^2}$.

3) $y = (\ln x + C)\, x$.