Inhaltsverzeichnis

2 Finanzmathematik 2

2.1 Folgen 2

2.2 Reihen 14

2.3 Renten- und Tilgungsrechnung 20

2 Finanzmathematik

2.1 Folgen

Unter einer **Folge** versteht man eine gewisse Anzahl von geordneten Zahlen, die oftmals einem bestimmten Bildungsgesetz gehorchen: $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \quad (n \in \mathbb{N})$ * ← hängt von der Aufgabe ab ob man von 0 oder 1 anfängt.

2.1.1 Arithmetische Folge

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt **arithmetisch**, wenn es eine Konstante $d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$a_{n+1} - a_n = d$ (Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder ist immer gleich)

Beispiel:

$$\{a_n\} = \{6, 11, 16, 21, \ldots\}$$

$a_{n+1} - a_n = d = 5$ Differenz immer 5 hier

$$a_1 = 6, \quad a_2 = 6 + 1 \cdot 5, \quad a_3 = 6 + 2 \cdot 5, \ldots \quad a_n = 6 + (n-1) \cdot 5$$

Beispiel: arithmetische Folge (fallend): **Lineare Abschreibung**:

Wertminderung von Maschinen bei jährlich gleichbleibenden Abschreibungsbeträgen

Anfangswert R_0 = 50000 €, Nutzungsdauer: $n = 8$ Jahre, Restwert (Schrott) R_n = 2000 €

(2.1) Wertminderung in 8 Jahren

verteilt auf n Jahren $d = \frac{-(R_0 - R_n)}{t} = \frac{-50000 - 2000}{8} = -6000$

Restwert nach 1 Jahr: $R_1 = R_0 + 1 \cdot d = 50000 - 6000 = 44000$

2 Jahr: $R_2 = R_1 + 1 \cdot d = R_0 + 2d = 38000$

n Jahr: $R_n = R_0 + nd = 50000 - 6000 \cdot n$

Bildungsgesetz

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\} = \{44000, 38000, \ldots, 8000, 2000\}$

2.1.2 Geometrische Folge

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt **geometrisch**, wenn es eine Konstante $q \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$ (Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder ist immer gleich)

Beispiel:

$$\{a_n\} = \{5, 15, 45, 135, \ldots\}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 3$$

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 5 \cdot 3, \quad a_3 = 5 \cdot 3^2, \ldots \quad a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$$

Beispiel: geometrische Folge (steigend): Wertsteigerung

Kapitalaufbau: Anfangskapital K_0 wird jährlich mit $i = \frac{p}{100} = p\,\%$ verzinst

Frage: Wie hoch ist der Kapitalwert nach n Jahren? Welche Zinsbeträge werden ausgezahlt?

(2.2) Start K_0

nach 1 Jahr: $K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{q} = K_0 \cdot q$

Einsetzen

nach 2 Jahr: $K_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_1 \cdot q = K_0 \cdot q^2$

$\vdots$

nach n Jahr: $K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot \frac{p}{100} = K_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_{n-1} \cdot q = K_0 \cdot q^n$

Die jährlichen Kapitalwerte bilden eine geometrische Folge mit $q = 1 + \frac{p}{100} = 1 + i$

$$\{K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}, K_n\} = \{K_0, K_0 \cdot q, \ldots, K_0 \cdot q^{n-1}, K_0 \cdot q^n\}$$

Zinsen werden am ende jeden Jahres ausgezahlt:

Zins nach 1 Jahr: $Z_1 = K_0 \cdot \frac{p}{100}$

Zins nach 2 Jahr: $Z_2 = K_1 \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot q \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot q = Z_1 \cdot q$

Zins nach n Jahr: $Z_n = K_{n+1} \cdot \frac{p}{100} = K_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot q^{n-1} = Z_1 \cdot q^{n-1}$

Zinsbeträge sind auch geometrische Folge

$$\{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_1 \cdot q^{n-1}\}$$

Beispiel: geometrische Folge (fallend): Wertminderung

Geometrisch-degressive Abschreibung: Anfangswert R_0 wird jährlich mit $p\,\%$ abgeschrieben.

Frage: Wie hoch ist der Restwert R_n nach n Jahren? Welche Abschreibungswerte werden verbucht?

(2.3) Start: R_0

nach 1 Jahr: $R_1 = R_0 - R_0 \cdot \frac{p}{100} = R_0 \cdot \underbrace{\left(\frac{p}{100}\right)}_{q} = R_0 \cdot q$

↓ Einsetzen

nach 2 Jahr: $R_2 = R_1 - R_1 \cdot \frac{p}{100} = R_1 \cdot \left(\frac{p}{100}\right) = R_1 \cdot q = R_0 \cdot q^2$

nach n Jahr $R_n = \dots = R_0 \cdot q^n$

die jährlichen Restwerte bilden eine geom. Folge mit $q = 1 - \frac{p}{100} = 1 - i$

$\{R_1, R_2, \dots R_n\} = \{$

Abschreibungsbeträge werden am Ende jeden Jahres verbucht

Abschreibung nach 1. Jahr: $A_1 = R_0 \cdot \frac{p}{100}$

nach 2. Jahr: $A_2 = R_1 \cdot \frac{p}{100} = R_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot q = A_1 \cdot q$

nach 3. Jahr: $A_3 = R_2 \cdot \frac{p}{100} = R_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot q$

Beispiel: Geometrisch-degressive Abschreibung: Eine Maschine mit dem Anschaffungswert von R_0 =200.000 € soll jährlich mit 8% vom Vorjahresrestwert abgeschrieben werden.

a) Wie groß ist die Abschreibung A_1 im 1. Jahr?

b) Wie groß ist die Abschreibung A_{10} im 10. Jahr?

c) Wie groß ist der Restwert R_{15} nach 15 Jahren?

(2.4) a) $200000 \cdot \frac{8}{100} = 16000$ $\qquad q = 1 - \frac{p}{100}$

$A_1 = R_0 \cdot \frac{p}{100}$

b)

$A_{10} = A_1 \cdot q^{n-1} = 16000 \cdot 0{,}92^{10-1} = 7554{,}58$

c)

$R_n = R_0 \cdot q^n = 200000 \cdot 0{,}92^{15} = 57259{,}48$

2.1.3 Unterjährige und stetige Verzinsung

Stetige Verzinsung tritt auf in Spezialgebieten der Finanzmathematik, z.B. bei Optionspreistheorie; ebenfalls Anwendungen in der Physik und Biologie.

Unterjährige Verzinsung

Frage: Auf welches Kapital wachsen 1.500 € bei $i = \frac{p}{100} = 3\% = 0{,}03$ Jahreszins in 10 Jahren an, wenn das Kapital jährlich bzw. monatlich verzinst wird?

(2.5)

a) bei jährlicher Verzinsung: $i = 0{,}03$

$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})$

$K_n = K_0 \cdot q^n$

$K_{10} = 1500 \cdot (1+0{,}03)^{10} = 1500 \cdot 1{,}03^{10} = 2015{,}87$

b) $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12 \cdot n}$

Stetige Verzinsung

Übergang von wöchentlicher zu täglicher dann zu stündlicher und somit zu stetiger Verzinsung: $m \to \infty$
es wird unendlich oft innerhalb eines Jahres verzinst.

Frage: Auf welches Kapitel wachsen 1.500 € bei $i = \frac{p}{100} = 3\% = 0{,}03$ Jahreszins in 10 Jahren an, wenn das Kapital stetig verzinst wird?

$$K_{n,stetig} = \lim_{m\to\infty} K_{n,m} = K_0 \cdot \left[\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \right]^n$$

(2.6) die Eulersche Zahl ist der Grenzwert der Folge

$e = 2{,}71828\ldots$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e = 2{,}71828$$

$$\lim_{m\to\infty} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty} \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m \cdot i}{i}} = \left[\lim_{m\to\infty} \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^i$$

Substitut $= \frac{m}{i} = k$

$$\left[\underbrace{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}_{*}\right]^{i} = e^{i}$$

* = Wenn man die erkenntnis hat reicht das.

bei stetiger Verzinsung ergibt sich:

$$K_{n,\text{stetig}} = \lim_{m\to\infty} K_{n,m} = K_0 \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = K_0\cdot\left[e^{i}\right]^{n} = K_0\cdot e^{i\cdot n}$$

$$K_{10,\text{stetig}} = 1500\cdot e^{0{,}03\cdot 10} = 2024{,}79$$

2.2 Reihen

Verknüpft man die ersten n Glieder einer Folge additiv, so entsteht die $n-$te **Partialsumme**.

Die Folge der Partialsummen $\{s_n\}$ heißt **endliche Reihe**; falls $n \to \infty$ **unendliche Reihe**.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k
\end{aligned}
$$

Anmerkungen:

- Der Laufindex k der Summe kann bei Null oder einer anderen natürlichen Zahl beginnen.
- In diesem Kapitel werden nur endliche Reihen betrachtet.

2.2.1 Bestimmung der Partialsumme einer arithmetischen Reihe

(2.7)

Beispiel: **Arithmetisch-degressive Abschreibung** (digitale Abschreibung)

Anfangswert R_0 wird mit kleiner werdenden Beträgen abgeschrieben bis zum Restwert R_n (Schrott).

(2.8)

2.2.2 Bestimmung der Partialsumme einer geometrischen Reihe

(2.9)

2.3 Renten- und Tilgungsrechnung

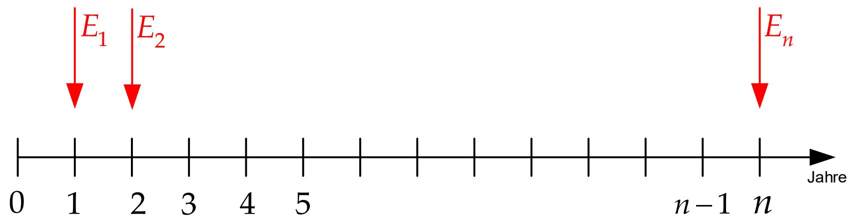
Rente ist eine laufende Zahlung in regelmäßigen Zeitabständen (meistens) in gleicher Höhe

$$\text{Unterscheidung in } \begin{Bmatrix}\text{vorschüssiger}\\ \text{nachschüssiger}\end{Bmatrix} \text{ Rente, also Zahlung } \begin{Bmatrix}\text{zu Beginn}\\ \text{am Ende}\end{Bmatrix} \text{ des Zeitintervalls}$$

2.3.1 Kapitalaufbau (Sparvertrag)

a) Nachschüssige Zahlung:

Die Einzahlung E erfolgt jeweils am Ende einer Periode (z.B. Jahresende) mit Jahreszins $i = \frac{p}{100} = p\%$ über n Zeitintervalle (z.B. Jahre).



Kontostand nach n Jahren:

E_1 wird $(n-1)$ Jahre verzinst: Endwert dieser Einzahlung: $E_1 \cdot (1+i)^{n-1} = E_1 \cdot q^{n-1} = E \cdot q^{n-1}$

E_2 wird $(n-2)$ Jahre verzinst: Endwert dieser Einzahlung: $E_2 \cdot q^{n-2} = E \cdot q^{n-2}$

E_{n-1} wird ein Jahr verzinst: Endwert dieser Einzahlung: $E_{n-1} \cdot q = E \cdot q$

E_n wird nicht mehr verzinst: Endwert dieser Einzahlung: $E_n = E$

Endwerte der einzelnen Einzahlungen bilden eine geometrische Folge

→ Gesamtwert K_n nach n Jahren = $n-$te Partialsumme: $K_n = E \cdot q^{n-1} + E \cdot q^{n-2} + \ldots + E \cdot q + E$

$$= E \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = E \cdot \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$$

Kapitalaufbau bei nachschüssiger Einzahlung: $K_n = E \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

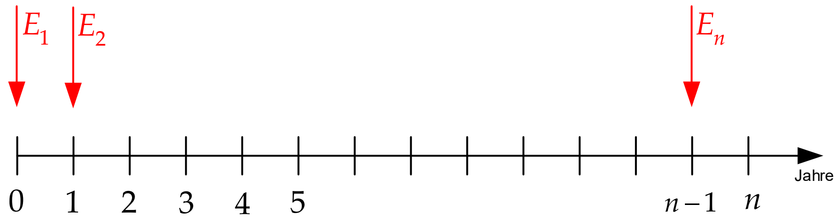
Beispiel: Nachschüssige jährliche Einzahlung von 2000 € mit Jahreszins $i = 3\% = 0{,}03$ auf Sparvertrag.

Welcher Kapitelwert ergibt sich zum Ende der Laufzeit von $n = 10$ Jahren?

(2.10)

b) Vorschüssige Zahlung:

Die Einzahlung E erfolgt jeweils am Anfang einer Periode (z.B. Jahresende) mit Jahreszins $i = \frac{p}{100} = p\%$ über n Zeitintervalle (z.B. Jahre).



Kontostand nach n Jahren:

E_1 wird n Jahre verzinst: Endwert dieser Einzahlung: $E_1 \cdot (1+i)^{n-1} = E_1 \cdot q^n = E \cdot q^n$

E_2 wird $(n-1)$ Jahre verzinst: Endwert dieser Einzahlung: $E_2 \cdot q^{n-1} = E \cdot q^{n-1}$

E_n wird ein Jahr verzinst: Endwert dieser Einzahlung: $E_n = E \cdot q$

Endwerte der einzelnen Einzahlungen bilden eine geometrische Folge

→ Gesamtwert K_n nach n Jahren = $n-$te Partialsumme:

$$\begin{aligned} K_n &= E\cdot q^n + E\cdot q^{n-1} + \ldots + E\cdot q \\ &= E\cdot(q+q^2+\ldots+q^n) \\ &= E\cdot q\cdot(1+q+\ldots+q^{n-1}) = E\cdot q\cdot\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \end{aligned}$$

Kapitalaufbau bei vorschüssiger Einzahlung: $$K_n = E\cdot q\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

Beispiel: Vorschüssige jährliche Einzahlung von 2000 € mit Jahreszins $i = 3\% = 0{,}03$ auf Sparvertrag.

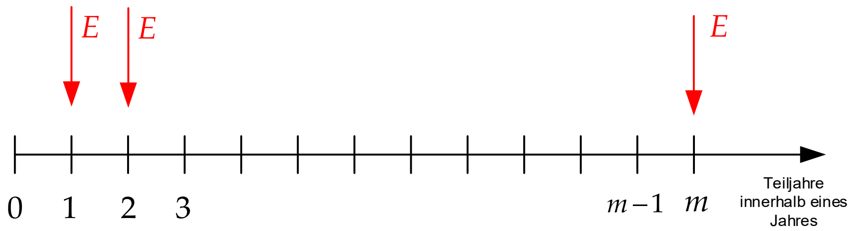
Welcher Kapitelwert ergibt sich zum Ende der Laufzeit von $n = 10$ Jahren?

(2.11)

$$\Rightarrow \quad K_n^{vor} = q\cdot K_n^{nach}$$

c) Unterjährige nachschüssige Einzahlungen bei jährlicher Verzinsung:

- pro Jahr wird $m-$mal unterjährig der gleiche Betrag E nachschüssig eingezahlt,
  $m=4$ entspricht vierteljährliche Einzahlung, $m=12$ entspricht monatliche Einzahlung
- die Verzinsung erfolgt jeweils am Jahresende anteilig (lineare Verzinsung innerhalb des Jahres), d.h. der Betrag, der ein $m-$tel Teiljahr auf dem Konto war, wird für dieses Teiljahr mit $\frac{i}{m}$ verzinst.



Innerhalb eines Jahres ergeben sich folgende Zinsen:

Zins für 1. $m-$tel Teiljahr: $z_1 = 0$ da Einzahlung nachschüssig

Zins für 2. $m-$tel Teiljahr: $z_2 = E \cdot \frac{i}{m}$

Zins für 3. $m-$tel Teiljahr: $z_3 = 2E \cdot \frac{i}{m}$

Zins für m. $m-$tel Teiljahr: $z_m = (m-1)E \cdot \frac{i}{m}$

Die m Einzelzinsen bilden eine arithmetische Folge:

→ Gesamtzins für ein Jahr: $Z_{ges} = E \cdot \frac{i}{m} \cdot \left(1+2+\ldots+(m-1)\right) = E \cdot \frac{i}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} k = E \cdot \frac{i}{m} \cdot \frac{1}{2} m \cdot (m-1) = E \cdot \frac{i}{2} \cdot (m-1)$

Kapitalwert nach dem 1. Jahr: $K_1 = m \cdot E + Z_{ges} = m \cdot E + E \cdot \frac{i}{2}(m-1) = E \cdot \left(m + \frac{i}{2}(m-1) \right) = E_{jährl}^{eff}$

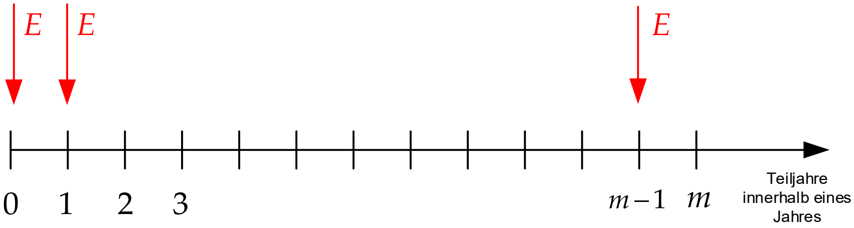
Einzahlungsvorgänge wiederholen sich in den folgenden Jahren: (2.12)

Kapitalaufbau bei nachschüssiger unterjähriger Einzahlung:

$$K_n = E_{jährl}^{eff} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = E \cdot \left(m + \frac{i}{2} \cdot (m-1) \right) \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

d) Unterjährige vorschüssige Einzahlungen bei jährlicher Verzinsung:

- pro Jahr wird $m-$mal unterjährig der gleiche Betrag E vorschüssig eingezahlt,
- die Verzinsung erfolge jeweils am Jahresende anteilig (lineare Verzinsung innerhalb des Jahres)



Innerhalb eines Jahres ergeben sich folgende Zinsen:

Zins für 1. $m-$tel Teiljahr: $z_1 = E \cdot \frac{i}{m}$

Zins für 2. $m-$tel Teiljahr: $z_2 = 2E \cdot \frac{i}{m}$

Zins für m. $m-$tel Teiljahr: $z_m = mE \cdot \frac{i}{m}$

Die m Einzelzinsen bilden eine arithmetische Folge:

→ Gesamtzins für ein Jahr:
$$Z_{ges} = E \cdot \frac{i}{m}[1+2+\ldots+m] = E \cdot \frac{i}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} k$$
$$= E \cdot \frac{i}{m} \cdot \frac{1}{2} m \cdot (m+1) = E \cdot \frac{i}{2} \cdot (m+1)$$

Kapitalwert nach dem 1. Jahr:
$$K_1 = m \cdot E + Z_{ges} = m \cdot E + E \cdot \frac{i}{2} \cdot (m+1)$$
$$= E \cdot \left(m + \frac{i}{2} \cdot (m+1) \right)$$

Einzahlungsvorgänge wiederholen sich in den folgenden Jahren:

am Ende jeden Jahres den konformen Jahresbetrag $E_{jährl}^{eff}$ (effektive Jahreseinzahlung) verzinsen:

Kapitalaufbau bei vorschüssiger unterjähriger Einzahlung:

$$K_n = E_{jährl}^{eff} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = E \cdot \left(m + \frac{i}{2} \cdot (m+1) \right) \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

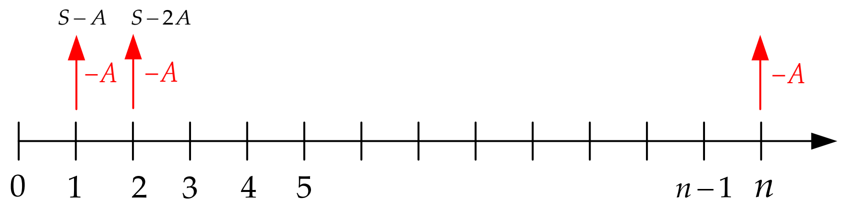
Beispiel: $i = \frac{p}{100} = 2\% = 0,02, \quad m = 12\,Monate, \quad E = 100\,€, \quad n = 5\,Jahre$

(2.13)

2.3.2 Annuitätentilgung und Rente

a) Tilgung einer Schuld S mit gleichbleibendem jährlichem nachschüssigem Betrag A (Annuität)

Der Schuldenabtrag erfolgt jeweils am Ende der Zinsperiode (z.B. Jahresende) mit Jahreszins $i = p\%$



Für die Restschuld S_n nach n Jahren ergibt sich:

$$S_1 = S_0 \cdot q - A$$
$$S_2 = S_1 \cdot q - A = S_0 \cdot q^2 - A \cdot q - A = S_0 \cdot q^2 - A \cdot (q+1)$$
$$S_3 = S_2 \cdot q - A = S_0 \cdot q^3 - A \cdot q^2 - A \cdot q - A = S_0 \cdot q^3 - A \cdot (1 + q + q^2)$$
$$S_n = S_0 \cdot q^n - A \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = S_0 \cdot q^n - A \cdot \sum_{k=1}^{n} q^{k-1}$$

Schuldabbau bei nachschüssiger Annuitätenzahlung: $S_n = S_0 \cdot q^n - A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Anmerkungen:

1) $S_1 = S_0 \cdot q - A$ Schulden werden nur kleiner, wenn $S_1 < S_0$

$$\Rightarrow \quad S_0 \cdot q - A < S_0 \quad \Rightarrow \quad S_0(q-1) < A \quad \Rightarrow \quad S_0 \cdot i < A$$

2) Bei vorschüssiger Rückzahlung wird A ersetzt durch $A \cdot q$ und man erhält $S_n = S_0 \cdot q^n - A \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}$

3) Neben der Annuitätentilgung (jährliche Zahlungen sind konstant) gibt es die Ratentilgung (alle Tilgungsraten sind konstant).

Hinweis:

Rentenberechnung erfolgt analog mit den gleichen Formeln, wobei der Rentengeber der Schuldner ist.

Beispiel: Schuld $S_0 = 200\,000\,€$, Zinssatz $i = \frac{p}{100} = 8\,\% = 0{,}08$, Annuität $A = 20\,000\,€$ nachschüssige

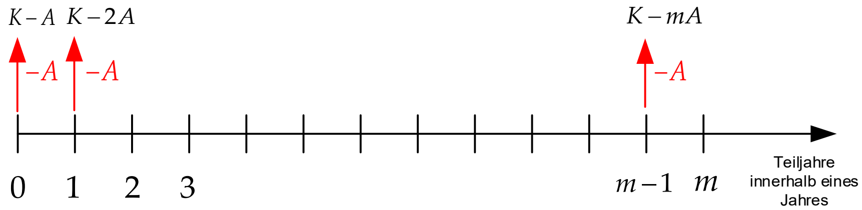
Frage: a) Wie groß ist die Restschuld nach 1, 2 und 10 Jahren? b) Wann ist die Schuld getilgt?

(2.14)

b) Rente: unterjährige vorschüssige gleichbleibende Auszahlung

Kapital K wird jährlich mit $i = p\%$ nominell verzinst. Jeweils zu Beginn der m Teiljahre (also vorschüssig) wird der gleiche Betrag A abgehoben. Die Verzinsung erfolgt am Jahresende anteilig (lineare Verzinsung innerhalb des Jahres), d.h. der Betrag, der ein $m-$tel Teiljahr auf dem Konto war, wird für dieses Teiljahr mit $\frac{i}{m}$ verzinst.

Dann ergeben sich während des Jahres folgende Kontostände:



Innerhalb eines Jahres ergeben sich folgende Zinsen:

Zins für 1. $m-$tel Teiljahr: $z_1 = (K-A)\cdot\frac{i}{m} = K\cdot\frac{i}{m} - A\cdot\frac{i}{m}$

Zins für 2. $m-$tel Teiljahr: $z_2 = (K-2A)\cdot\frac{i}{m} = K\cdot\frac{i}{m} - 2A\cdot\frac{i}{m}$

Zins für m. $m-$tel Teiljahr: $z_m = (K-mA)\cdot\frac{i}{m} = K\cdot\frac{i}{m} - mA\cdot\frac{i}{m}$

Die m Einzelzinsen bilden eine arithmetische Folge:

→ Gesamtzins für ein Jahr:
$$Z_{ges} = m \cdot K \cdot \frac{i}{m} - A \cdot \frac{i}{m}[1+2+\ldots+m] = K \cdot i - A \cdot \frac{i}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} k$$
$$= K \cdot i - A \cdot \frac{i}{m} \cdot \frac{1}{2} m(m+1) = K \cdot i - A \cdot \frac{i}{2}(m+1)$$

Abgehoben wird im 1. Jahr der Betrag $m \cdot A$, damit ergibt sich ein Kontostand (Restguthaben) nach 1 Jahr:

$$R_1 = K - m \cdot A + Z_{ges} = K - m \cdot A + K \cdot i - A \cdot \frac{i}{2}(m+1) = K \cdot (1+i) - A \cdot \left[m + \frac{i}{2}(m+1) \right] = K \cdot q - \underbrace{A \cdot \left[m + \frac{i}{2}(m+1) \right]}_{A_{eff}}$$

Abbuchungsvorgänge wiederholen sich in den folgenden Jahren:

am Ende jeden Jahres den konformen Jahresbetrag A_{eff} (effektive Jahresabbuchung) verzinsen:

Damit ergibt sich nach n-Jahren analog zum vorschüssigem unterjährigem Kapitalaufbau (d):

Kapitalabbau bei vorschüssiger unterjähriger Auszahlung:

$$R_n = K \cdot q^n - A \cdot \left[m + \frac{i}{2}(m+1) \right] \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Anmerkung:

Falls $R_1 = K$ findet kein Kapitalabbau statt, d.h. Kontostand bleibt immer gleich.

Zugehöriger Wert $A = A_{ewig}$ heißt **ewige Rente**:

$$R_1 = K = K \cdot q - A_{ewig} \cdot \left[m + \frac{i}{2}(m+1) \right] \cdot \frac{q-1}{q-1}$$

$$\Rightarrow A_{ewig} \cdot \left[m + \frac{i}{2}(m+1) \right] = K \cdot q - K = K \cdot i$$

$$\Rightarrow \quad A_{ewig} = \frac{K \cdot i}{m + \frac{i}{2}(m+1)}$$

Beispiel: Kapital: $K = 100\,000\,€,\quad i = \frac{p}{100} = 6\% = 0{,}06$. Gesucht: monatliche vorschüssige ewige Rente

(2.15)

Beispiel: Hypothekendarlehen mit Kreditsumme S_0, Laufzeit n Jahre, Zinssatz i, Tilgungssatz t

a) Berechnung der anfallenden Zinsen und b) der Laufzeit

(2.16)