

# 基于卡尔曼滤波的一级倒立摆 LQR 控制研究

孙大卫<sup>1</sup>, 曾 静<sup>1</sup>, 张国良<sup>1,2</sup>

(1. 第二炮兵工程学院 自动控制系, 陕西 西安 710025; 2. 西安理工大学 自动化系, 陕西 西安 710048)

**摘 要:** 倒立摆系统的输出不可避免地受到系统噪声和量测噪声的影响, 应用卡尔曼滤波对系统输出作最优估计, 可以有效地提高系统的鲁棒性。文中给出了卡尔曼滤波应用条件, 对单一 LQR 调节器系统和前置卡尔曼滤波的 LQR 调节器系统作了仿真对比。并应用前置卡尔曼滤波的 LQR 调节器成功稳定了一级倒立摆系统。

**关键词:** 卡尔曼滤波; 倒立摆; 仿真

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** B      **文章编号:** 1002-4956(2007)02-0037-04

## Control to inverted pendulum based on kalman filter

SUN Da-wei, ZENG Jing, ZHANG Guo-liang

(1. The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025 China; 2. Xi'an University of Technology, Xi'an 710048 China)

**Abstract:** The output of inverted pendulum system is inevitably disturbed by system noise and measure noise. Kalman filter is applied to make an optional estimation for the system output, which can improve the system robust. The Kalman filter application condition is given in this paper and makes an emulation contrast between the single LQR adjuster with forehead kalman filter system. Applying the LQR adjuster with forehead kalman filter stabilized single inverted pendulum system successfully.

**Key words:** kalman filter; inverted pendulum; simulation

### 1 问题的提出

倒立摆系统是一个非线性、不稳定的快速系统, 其控制方式与直立行走的机器人、飞行中的静不稳定导弹有许多相似之处。倒立摆系统是控制理论实验的典型装置, 也是控制理论研究中常用的验证对象。

线性二次型调节器 (LQR) 是倒立摆系统的典型控制方法。系统控制量  $u$  为

$$u = -Kx \quad (1)$$

式 (1)  $K$  为卡尔曼增益,  $x$  为系统状态量。由于 LQR 调节器在本质上实现了对控制系统的最优极点配置, 因而在最优控制设计中有广泛的应用。但是, 在 LQR 调节器的实现过程中, 由于控制系统的系统噪声与状态反馈过程中观测噪声的影响, 状

态量  $x$  常常是不准确的。因而依据式 (1) 得到的控制量  $u$  也是不准确的, 难于实现对系统的最优控制。

为了解决状态量不准确对 LQR 调节器带来的影响, 本文中在 LQR 调节器前端引入卡尔曼滤波, 得到关于状态量  $x$  的最优状态估计  $\hat{x}$ , 将最优估计量  $\hat{x}$  输入 LQR 调节器, 从而完成对系统的最优控制, 并有效地提高一级倒立摆系统控制的鲁棒性。

### 2 一级倒立摆系统的数学模型

在忽略了空气阻力和各种摩擦之后, 可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统, 如图 1 所示。

假设直线一级倒立摆各项参数的符号、意义与数据如表 1 所示, 分析小车水平方向、摆杆垂直方向上所受的合力, 建立力和力矩的平衡方程。

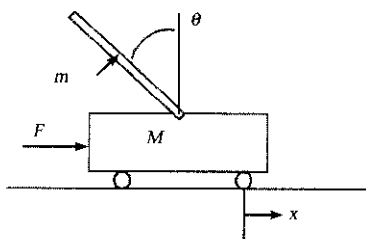


图 1 直线一级倒立摆示意图

表 1 直线一级倒立摆参数

字母	意义	实际数值
$M$	小车质量	1.096 kg
$m$	摆杆质量	0.109 kg
$b$	小车摩擦力	0.1 N/m/sec
$l$	摆杆转动轴心到杆质心的长度	0.25 m
$I$	摆杆转动惯量	0.0034 kg · m <sup>2</sup>
$F$	加在小车上的力	
$x$	小车位置	
$\theta$	摆杆与垂直向上方向的夹角	

设  $\varphi = \pi + \theta$  ( $\theta$  是摆杆与垂直向上方向之间的夹角), 假设  $\theta$  与 1 弧度相比很小, 即  $\theta \ll 1$ , 则可以进行近似处理:  $\cos\phi = -1$ ,  $\sin\phi = -\theta$ ,  $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 0$ 。用  $u$  来表示被控对象的输入力  $F$ , 线性化后两个运动方程为

$$\begin{cases} (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta = ml\ddot{x} \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\theta} = u \end{cases} \quad (2)$$

对  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\theta}$  解代数方程, 代入实际数据, 可得到系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0883 & 0.6293 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2357 & 27.8285 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8832 \\ 0 \\ 2.3566 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (4)$$

直线一级倒立摆是一个单输入二输出的 4 阶系统, 其内部的 4 个状态量分别是小车的位移  $x$ 、小车的速度  $\dot{x}$ 、摆杆的角度  $\theta$ 、摆杆的角速度  $\dot{\theta}$ 。系统输出的观测量为小车的位移  $x$ 、摆杆的角度  $\theta$ 。

通常通过对小车位移和摆杆角度作差商得到小车速度和摆杆角速度, 再对 4 个状态量应用相关控

制策略, 如 LQR 控制使小车、摆杆稳定, 这种近似不可避免地造成了状态量  $x$  的不准确。

3 一级倒立摆系统最优状态估计

当工程实际中有用信号被噪声信号污染时, 卡尔曼滤波可以对系统的状态向量作最优估计, 并且估计量与实际状态量尽量接近。

设线性离散系统的模型为

$$\begin{cases} X_{k+1} = \Phi_{k+1,k} X_k + G_{k+1,k} U_k + \Gamma_{k+1,k} W_k \\ Z_k = H_k X_k + V_k \end{cases} \quad (5)$$

上式中,  $U_k$  为已知的非随机控制序列,  $W_k$  和  $V_k$  为零均值的白噪声序列, 且相互独立,  $W_k$  和  $V_k$  的统计特性为  $E\{W_k\} = 0$ ,  $E\{W_k W_j^T\} = Q_k \delta_{kj}$ ,  $E\{V_k\} = 0$ ,  $E\{V_k V_j^T\} = R_k \delta_{kj}$ ,  $E\{W_k V_j^T\} = 0$ 。  $\Gamma_{k+1,k}$  为单位阵。则卡尔曼滤波方程组为

$$\hat{X}_{k|k} = \hat{X}_{k|k-1} + K_k [Z_k - H_k \hat{X}_{k|k-1}] \quad (6)$$

$$\hat{X}_{k+1|k} = \Phi_{k+1,k} \hat{X}_{k|k} + G_{k+1,k} U_k \quad (7)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T [H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k]^{-1} \quad (8)$$

$$P_{k+1|k} = \Phi_{k+1,k} P_{k|k-1} \Phi_{k+1,k}^T + \Gamma_{k+1,k} \Gamma_{k+1,k}^T \quad (9)$$

$$P_{k|k} = [I - K_k H_k] P_{k|k-1} \quad (10)$$

式 (5) 中,  $X_{k+1}$  为式 (3) 经离散化后第  $k+1$  步系统状态量,  $Z_k$  为第  $k$  步系统的观测量输出。

通过反复仿真验证, 选定各参数值。其中增益矩阵  $K_k$  只与滤波误差方差阵  $P_{k|k}$  和预测误差方差阵  $P_{k+1|k}$  和  $Q$ 、 $R$  阵有关, 所以可离线算出。在经过一定步骤的运算后, 增益矩阵和滤波误差方差阵均收敛。所以对系统的滤波误差方差阵初始值  $P_{0|0}$  确定, 初始可取为较大值的对角阵, 经过仿真选取收敛矩阵为  $P_{0|0}$ , 再次仿真选取收敛矩阵为  $P_{0|0}$ , 并对比增益矩阵的变化, 直至  $P_{0|0}$  阵的选择对增益矩阵收敛已无影响, 即选择该阵为  $P_{0|0}$ 。

由滤波误差方差阵上界定理: 如果离散系统如式 (5) 所示, 是一致完全可控和一致完全可观测的, 即存在  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$  和正整数  $n$ , 假定  $P_{0|0} \geq 0$ , 使得对所有  $K \geq n$ , 有

$$P_{k|k} \leq \frac{1 + N^2 \beta_1 \beta_2}{\alpha_1} I \quad (11)$$

$Q$ 、 $R$  阵为对角阵, 根据  $P_{0|0}$  阵的对角元素选定, 可以这样考虑, 由于白噪声干扰的影响, 导致状态向量滤波误差的产生, 为减少干扰对滤波误差的影响, 若  $P_{0|0}$  阵的对角元素值较大, 则相应要减少  $Q$ 、 $R$  阵中相关元素值。

4 基于卡尔曼滤波的一级直线倒立摆 LQR 控制仿真

直线一级倒立摆的 LQR 控制过程如图 2 所示。

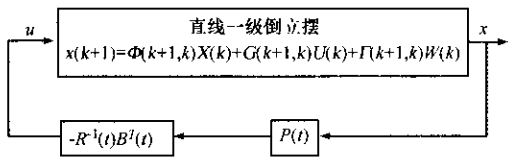


图 2 直线一级倒立摆的 LQR 控制过程

根据最优控制理论，如图 2 所示的直线一级倒立摆 LQR 控制过程，实质上完成了对控制系统的最优极点配置。最后得到的控制策略为

u(t) = - R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) . (12)

但是，由于式 (5) 中系统噪声 W(t)与观测噪声 V(t)的影响，式 (12) 中的状态量 x(t)并非系统的真实值，而是含有噪声的状态量。因而需要应用卡尔曼滤波，得到关于x(t)的最近估计x-hat(t)。

基于卡尔曼滤波的直线一级倒立摆 LQR 控制过程如图 3 所示。

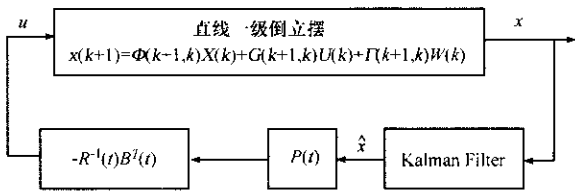


图 3 直线一级倒立摆前置卡尔曼滤波的 LQR 控制过程

对上述 2 个系统，当采用 LQR 求得的 K = - 22.3607 , - 16.0646 , 67.6570 , 13.0760 时，在 Matlab 下研究施加 0.2 N 阶跃输入时系统的阶跃响应。图 2 所示系统的仿真图如图 4 所示。图 3 所示系统的仿真图如图 5 所示。图 4 和图 5 中，Cart 小车位移，V<sub>Cart</sub> 为小车速度，Single 为摆杆角度，Vs 为摆杆角速度。

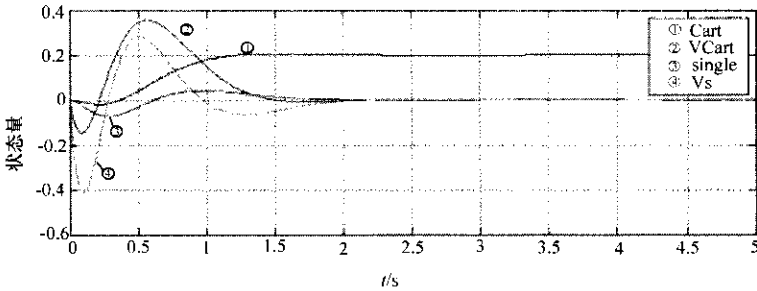


图 4 LQR 控制

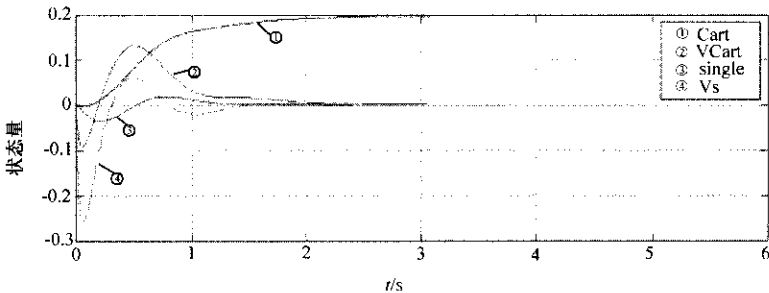


图 5 前置卡尔曼滤波的 LQR 控制

卡尔曼滤波的初值设置如下：

当取

万方数据

$$P(0|0) = \begin{bmatrix} 0.0199 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0001 & 6.8181 & 0.0008 & 8.3178 \\ 0.0000 & 0.0008 & 0.0770 & 0.0001 \\ 0.0001 & 8.3178 & 0.0001 & 10.1990 \end{bmatrix},$$

$k_r = 8$  时

$$Q = \begin{bmatrix} k_r \times 0.09 \times 0.09 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r \times 0.0001 \times 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_r \times 0.005 \times 0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_r \times 0.0001 \times 0.0001 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} k_r \times 0.005 \times 0.005 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_r \times 0.001 \times 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_r \times 0.005 \times 0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_r \times 0.001 \times 0.001 \end{bmatrix}.$$

从图 5 中可以看出，约经过 2 s 小车稳定于距导轨中心 0.2 m 处；小车速度、摆杆角度、摆杆角速度的振幅比图 4 小。如表 2 所示，系统采用前置

卡尔曼滤波与 LQR 控制比单独的 LQR 控制具有较强的鲁棒性。

表 2 仿真结果的性能指标对比表

		单一 LQR 系统	前置卡尔曼滤波的 LQR 系统
小车位移	调节时间/s	1.1	1.765
	负向振荡最大值/m	-0.02	-0.0013
小车速度	负向振荡最大值/( m/s )	-0.14757	-0.092391
	负向振荡最大值的时间/s	0.09	0.06
	正向振荡最大值/( m/s )	0.35535 秒	0.132
	正向振荡最大值的时间/s	0.57	0.5
摆杆角度	负向振荡最大值/rad	-0.073081	-0.03534
	负向振荡最大值的时间/s	0.285	0.21
	正向振荡最大值/rad	0.040235	0.018386
	正向振荡最大值的时间/s	0.975	0.785
摆杆角速度	负向振荡最大值/( rad/s )	-0.41746	-0.25612
	负向振荡最大值的时间/s	0.1	0.06
	正向振荡最大值/( rad/s )	0.28020	0.06175
	正向振荡最大值的时间/s	0.52	0.49

5 结论

卡尔曼滤波可以有效地估计系统状态，当采用相同的控制策略后，能显著提高控制系统的鲁棒性，不仅用于一级摆，而且用于二级摆和多级摆的状态估计。笔者对深圳固高公司的直线一级倒立摆在 Matlab 的 Simu；ink 下编写了卡尔曼滤波模块，采用上述前置卡尔曼滤波的 LQR 调节器成功稳定了系统。

参考文献（References）：

[ 1 ] 郑大钟. 线性系统理论 [ M ]. 北京：清华大学出版社，2002.

[ 2 ] 王志贤. 最优状态估计与系统辨识 [ M ]. 西安：西北工业大学出版社，2004.

[ 3 ] 崔平，翁正新. 基于状态空间极点配置的倒立摆平衡控制 [ J ]. 实验室研究与探索，2003，22（2）：70- 72.

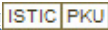
[ 4 ] 郭钊侠，方建安，苗清影. 倒立摆系统及其智能控制研究 [ J ]. 华东大学学报，2003，29（2）：122- 125.

[ 5 ] 高岩，雍容. 倒立摆控制实验系统的算法研究 [ J ]. 实验技术与管理，2005，22（5）：20- 24.

# 基于卡尔曼滤波的一级倒立摆LQR控制研究

作者：[孙大卫](#), [曾静](#), [张国良](#), [SUN Da-wei](#), [ZENG Jing](#), [ZHANG Guo-liang](#)

作者单位：[孙大卫, 曾静, SUN Da-wei, ZENG Jing\(第二炮兵工程学院, 自动控制系, 陕西, 西安, 710025\)](#)  
[, 张国良, ZHANG Guo-liang\(第二炮兵工程学院, 自动控制系, 陕西, 西安, 710025; 西安理工大学, 自动化系, 陕西, 西安, 710048\)](#)

刊名：[实验技术与管理](#) 

英文刊名：[EXPERIMENTAL TECHNOLOGY AND MANAGEMENT](#)

年, 卷(期): 2007, 24(2)

被引用次数: 3次

## 参考文献(5条)

1. [高岩; 雍容](#) 倒立摆控制实验系统的算法研究[期刊论文]-[实验技术与管理](#) 2005(05)

2. [郭钊侠; 方建安; 苗清影](#) 倒立摆系统及其智能控制研究[期刊论文]-[华东大学学报](#) 2003(02)

3. [崔平; 翁正新](#) 基于状态空间极点配置的倒立摆平衡控制[期刊论文]-[实验室研究与探索](#) 2003(02)

4. [王志贤](#) 最优状态估计与系统辨识 2004

5. [郑大钟](#) 线性系统理论 2002

## 引证文献(3条)

1. [段云龙](#), [韩保红](#), [闫庆华](#) 基于卡尔曼滤波的液压主动悬架控制研究[期刊论文]-[计算机与数字工程](#) 2010(10)

2. [孙灵芳](#), [孔辉](#), [刘长国](#), [毕磊](#) 倒立摆系统及研究现状[期刊论文]-[机床与液压](#) 2008(7)

3. [陈雯柏](#), [湛力](#), [高翔宇](#), [李昊](#) 基于倒立摆系统前馈型神经网络实验的开发[期刊论文]-[实验技术与管理](#) 2007(7)

本文链接: [http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_syjsygl200702012.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_syjsygl200702012.aspx)