

## 滑模控制在两轮机器人平衡控制中的应用

孙 亮, 孙启兵

(北京工业大学 电子信息与控制工程学院, 北京 100124)

**摘要:** 针对两轮机器人平衡控制中鲁棒性要求较高的问题, 设计了基于趋近律的滑模变结构控制器; 首先对机器人的非线性模型进行线性化处理, 再根据线性模型设计滑模控制器, 并使用饱和函数的方法抑制系统的抖振, 最后在 MATLAB/Simulink 上进行了仿真实验, 并与状态反馈控制器进行了比较; 结果表明在参数扰动存在情况下, 滑模控制器优于状态反馈控制器。

**关键词:** 两轮机器人; 滑模控制; 反馈控制

## Application of Sliding Mode Control for Two-wheeled Robot Balancing

Sun Liang, Sun Qibing

(College of Electronic Information and Control Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** Aiming to satisfy the robust of two-wheeled robot balancing control, a sliding mode controller is designed. First linearizing the Two-wheeled robot model, then design the sliding mode controller, and the saturation function is used to Restraining. Finally, Simulation were given and comparison with the State Feedback Control is made, the results show the a sliding mode controller performs better than the State Feedback Controller on the condition of Parameter Perturbation.

**Key words:** two-wheeled robot; sliding mode control; feedback control

## 0 引言

两轮机器人是一个非线性本征不稳定系统, 其平衡控制一直是研究的重点。目前所提出的算法有经典 PID 控制、状态反馈控制和模糊控制。其中经典 PID 控制及状态反馈控制的鲁棒性欠佳; 模糊控制虽然不依赖于数学模型, 但其控制规则的制定, 模糊论域的选取, 隶属度函数的选择等都会对控制效果产生影响。

滑模变结构控制对系统的不确定性因素具有较强的稳定性、鲁棒性和抗干扰能力, 利用这种方法控制的系统的动态品质良好, 此方法控制简单且易于实现, 因此, 越来越受到人们的重视。

首先对两轮机器人模型进行分析和建立数学模型, 然后利用滑模变结构控制对两轮机器人平衡控制进行详细的研究。从仿真结果可以看出这种控制方法是非常可行的和有效的。

## 1 两轮机器人的描述

## 1.1 模型的建立

建立模型的常用方法有拉格朗日法<sup>[1]</sup>和牛顿欧拉法<sup>[2]</sup>, 此处采用牛顿欧拉法。在以下假设的情况下建立机器人的动力学非线性方程: (1) 车轮、机器人身为刚体; (2) 不考虑机器人受到的外界干扰力; (3) 不考虑机器人上身与轮子之间的滑动摩擦力; (4) 车轮与地面不打滑。

$$\ddot{x}(M + 2m + 2J_{\omega}/R^2) + (\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)ML = (C_r + C_l)/R \quad (1)$$

$$\ddot{\theta}J_{\theta} = M[g - L\dot{\theta}\sin\theta - L\cos\theta\dot{\theta}^2]L\sin\theta -$$

$$[\ddot{x}M + (\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)ML]L\cos\theta - (C_r + C_l) \quad (2)$$

式中,  $x$  为小车两电机轴中心的位移;  $\theta$  为摆杆与竖直向上方向的夹角;  $m = 2$  为车轮的质量;  $M = 15$  为机器人除车体外的质量;  $L = 0.2$  为摆杆的中心到转轴的长度;  $J_{\theta} = 0.2$  为摆杆对电机轴的转动惯量;  $J_{\omega} = 0.028$  为车轮的转动惯量; 各参数均取国际标准单位。

考虑到两轮自平衡机器人以电机电压作为控制量, 需要把式 (1) 和式 (2) 中的转矩转换为电机电压。为此需要引入直流电机转矩和控制电压的关系。电机转速不高时, 可以忽略电枢电感, 粘性阻尼系数, 其动态特性可由下面方程组给出:

$$\begin{cases} U = R_a i + E \\ E = K_e \omega_m \\ T = K_m i \end{cases} \quad (3)$$

当存在减速器时有:

$$\begin{cases} C = NT \\ \omega = \omega_m / N \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $U$  为电机两端电压,  $R_a = 0.317$  为电机定子绕组等效电阻,  $E$  为反电动势,  $i$  为流经定子绕组的电流,  $K_e = 0.0301$  为反电动势系数,  $\omega_m$  为转子减速前转速,  $\omega$  为减速后的转速。  $T$  为电机转子减速前的转矩,  $C$  为减速后的转矩。  $K_e = 0.0302$  为转矩常数, 各参数均取国际标准单位。

根据式 (3) 和式 (4) 可得到电机转矩和电压的关系为

$$C_l = \frac{K_m K_e N^2 \omega_l}{R_a} + \frac{N K_m U_l}{R_a} \quad (5)$$

$$C_r = -\frac{K_m K_e N^2 \omega_r}{R_a} + \frac{N K_m U_r}{R_a} \quad (6)$$

并考虑到  $\dot{x} = R\omega$

将式 (5) 和式 (6) 两式带入式 (1) 和式 (2) 经过整理, 可得如下方程:

收稿日期: 2010-01-10; 修回日期: 2010-02-28。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60774077); 国家“863”计划资助项目(2007AA04Z226)。

作者简介: 孙 亮(1951-), 男, 山东招远人, 副教授, 主要从学习控制、智能系统的等方向的研究。

$$\ddot{x}(M + 2m + 2J\omega/R^2) + \ddot{\theta}ML \cos\theta = \theta^2 ML \sin\theta - \frac{2N^2 K_m K_e}{R^2 R_a} \dot{x} + \frac{N K_m}{R R_a} (U_l + U_r) \quad (7)$$

$$\ddot{x}ML \cos\theta + \ddot{\theta}(J_p + ML^2) = \frac{2N^2 K_m K_e}{R R_a} \dot{x} + MgL \sin\theta - \frac{N K_m}{R_a} (U_l + U_r) \quad (8)$$

式 (7) 和式 (8) 就是两轮机器人的非线性模型。

## 1.2 模型线性化

在  $|\theta| \leq 10^\circ$  条件下, 有  $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos\theta \approx 1$ , 且忽略去与  $\theta$  相关的高次项的影响, 简化式 (7) 和式 (8) 可得到如下方程组:

$$\ddot{x}(M + 2m + 2J\omega/R^2) + \ddot{\theta}ML = -\frac{2N^2 K_m K_e}{R^2 R_a} \dot{x} + \frac{N K_m}{R R_a} (U_l + U_r)$$

$$\ddot{x}ML + \ddot{\theta}(J_p + ML^2) = \frac{2N^2 K_m K_e}{R R_a} \dot{x} + MgL\theta - \frac{N K_m}{R_a} (U_l + U_r)$$

整理上述方程, 并考虑到由于平衡时可以认为  $U_l = U_r = U$  可得到系统的状态空间表达式:

$$\dot{x} = AX + bU = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ x \\ \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix} [U] \quad (9)$$

式中,  $a_{31}$ ,  $a_{34}$ ,  $a_{41}$ ,  $a_{44}$ ,  $b_{31}$ ,  $b_{41}$  为两轮机器人相关参数表达式。

## 2 滑模控制器的设计

滑模变结构控制器的设计主要包括切换函数和控制规律两部分的设计。

### 2.1 切换函数的设计

切换函数的设计。一般来说, 应当根据期望的控制目标, 合理地选择切换函数, 配置正确的系数以保证滑动模式的渐进稳定性和良好的动态品质。

此处切换函数设计采用的方法是: 首先给定切换函数期望的特征值, 然后借助 Ackermann 公式求出切换函数的参数向量。即:

$$s = CX$$

式中,  $C = e^T p(A)$ ,  $e^T = [b, Ab, A^2b, A^3b]$ ,

$$p(A) =$$

$$(A - eye(4)\lambda_1)(A - eye(4)\lambda_2)(A - eye(4)\lambda_3)(A - eye(4)\lambda_4)$$

式中,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  是系统期望的极点。选取期望极点为  $[-20, -20, -3 + \sqrt{3}, -3 - \sqrt{3}]$ 。

### 2.2 控制律的确定

控制律的确定使得闭路系统中存在滑动模式。具体地说是在  $s$  上存在滑动模式。

控制律的确定此处采用指数趋近律<sup>[3]</sup>的方法,

$$\dot{s} = -\varepsilon \operatorname{sgn}s - ks, k > 0 \quad (10)$$

式中, 有两个参数可调  $k$  和  $s$ 。参数  $\varepsilon$  是系统设计来克服扰动及外干扰的主要参数,  $\varepsilon$  越大, 系统克服参数扰动和外干扰的能力就越强。但是, 过大的增益将会导致系统抖振的加大。趋近速度参数  $k$  主要影响切换函数的动态过渡过程, 适当调整该参数能够改变系统向滑模面的趋近速度, 可以更好的改善系统动态品质。

对式  $s = CX$  两边进行微分同时考虑系统模型可得:

$$\dot{s} = CX = CA X + CbU = -\varepsilon \operatorname{sgn}s - ks$$

解出控制规律为:

$$U = (Cb)^{-1}(-CAx - \varepsilon \operatorname{sgn}s - ks)$$

### 2.3 系统抖振的抑制

滑模变结构控制中控制结构的切换具有理想开关特性, 能在切换面上生成滑动模式, 渐进趋向原点。但是, 实际情况往往由于各种原因而不能达到理想开关的境界, 这样就会在滑模面上产生抖振。此处利用饱和函数连续函数<sup>[4]</sup>  $\theta(s)$  代替符号函数  $\operatorname{sgn}s$  来达到抑制抖振的目的。

$$\theta(s) = \frac{s}{|s| + \delta}$$

式中,  $\delta$  为很小的正数。于是控制律变为:

$$U = (Cb)^{-1}(-CAx - \varepsilon \frac{s}{|s| + \delta} - ks) \quad (11)$$

## 3 仿真研究

将两轮机器人各项参数带入式 (9) 和式 (11), 在 MATLAB/Simulink 下建立系统的仿真模型。设计机器人的初始状态为  $[0.17, 0, 0, 0]$ 。取  $\varepsilon$  为 50,  $k$  为 50,  $\delta$  为 1。两轮机器人响应如图 1 所示。

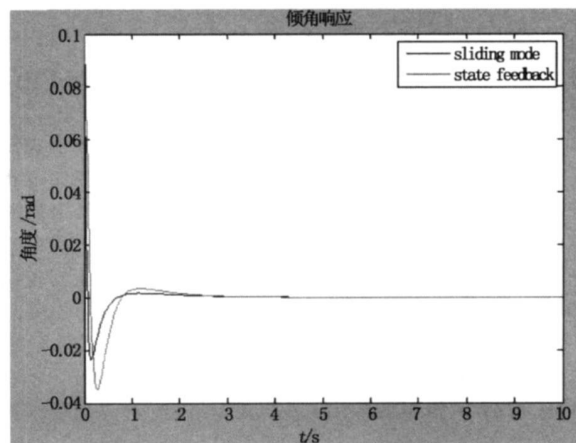


图 1 无参数扰动时滑模控制与状态反馈控制响应

由图 1 看出在滑模控制作用下, 在过渡时间差别基本不大的情况下, 系统的震荡幅值比状态反馈控制要小。

两轮机器人参数存在扰动时系统的响应如图 2 所示。

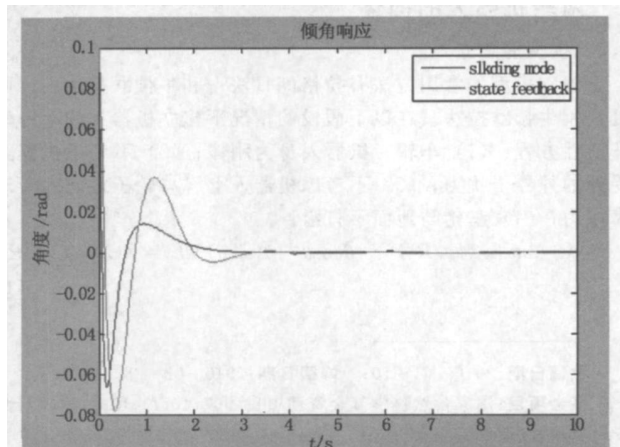


图 2 参数扰动时滑模控制与状态反馈控制响应

(下转第 1568 页)

了光隔离处理<sup>[5]</sup>，其基本电路如图 3 所示。电路工作方式是通过数字 IO 控制三极管  $Q_1$  的通断来实现  $U_2$  光敏管的导通与截止。

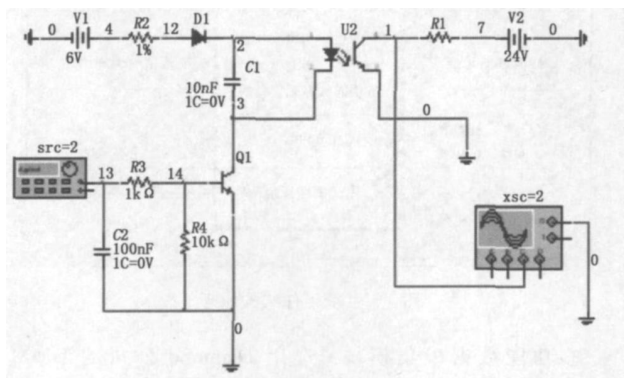


图 3 光隔离电路

### 3 软件设计

测试软件主要由自检模块、报表模块、数据储存模块、直流测试模块、交流测试模块、电缆完整性测试模块和点火信号时序测试模块 7 个模块组成。在点火时序测试模块中又包含触点时序和中继点时序测试两个子模块。测试软件使用 LabVIEW 编写。

为便于现场快速进行点火系统技术性能测试，整个软件采用向导方式设计，内部设计了一个测试逻辑状态机，如图 4 所示。通过状态机引导用户测试并排出故障，状态机技术的应用不但节省大量测试时间，而且简化了测试复杂度，有效地保证了装备维修测试保障任务的迅速完成。

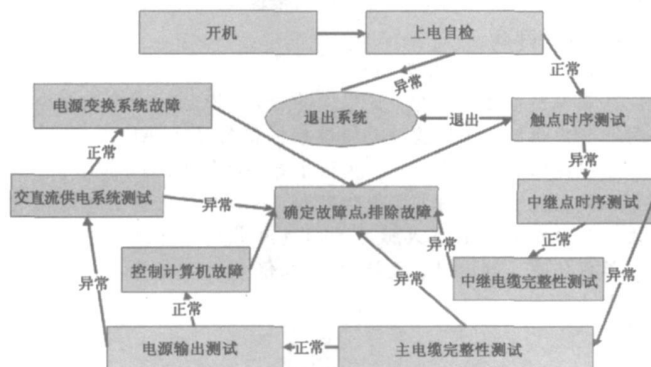


图 4 测试状态机

系统设计完成后，进行实装测试实验，图 5 是点火时序采集结果。应用关于时序分析的算法，经计算知被测装备各触点的点火脉冲正常，符合电点火具点火要求。

### 4 结论

某装备点火系统参数测试设备以嵌入式计算机模块为核心，结合专用的信号调理电路，利用点火参数分析算法、电缆完整性定性与定量分析算法、数据库、虚拟仪器和状态机等技术，解决外场条件下对点火系统性能参数进行快速测试与故障诊断的难题。系统具有便于携带、环境适应性强、操作方便、性能稳定、可靠性高等优点。目前该测试系统已应用到装备的外场维修保障中，取得了良好的效果。

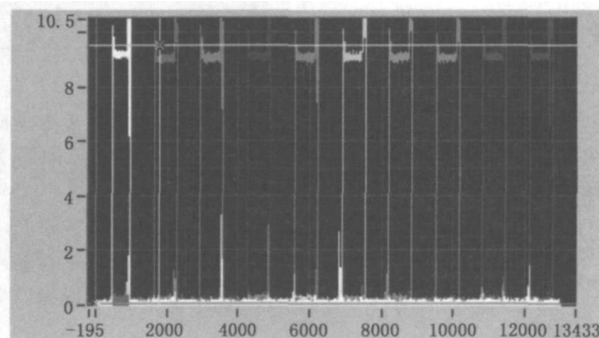


图 5 时序测试结果

#### 参考文献:

- [1] 王浩, 许化龙. 基于 PC104 的测试系统抗干扰设计 [J]. 弹射与制导学报, 2009, (2): 293-302.
- [2] 计长安, 张秀彬, 等. 基于 PC104 的实时工业图像检测 [J]. 嵌入式计算机应用, 2006, (10-2): 212-214.
- [3] Mardia H K. New techniques for the deinterleaving of repetitive sequences [J]. IEEE Proceedings, Pt F, 136, 4, 1989, 136 (4): 149-154.
- [4] 梁睿海, 吴叶楠, 等. 常用脉冲重复间隔估计算法 [J]. 航空计算技术, 2005, 35 (2).
- [5] 李光升, 谢永成, 等. 装甲车辆起动电动机自动测试系统的设计 [J]. 计算机测量与控制, 2006, 14 (2): 225-232.

(上接第 1544 页)

由图 2 看出在参数扰动相同的情况下滑模控制的震荡幅值要明显比状态反馈小。且过渡时间减小。

由图 1~2 可以看出滑模控制与状态反馈控制相比具有较强的鲁棒性。

### 4 结语

本文将滑模变结构控制方法应用到两轮机器人的平衡控制中，取得了良好的效果。滑模变结构控制方法设计简单，而且用其设计的控制系统响应快、超调小，对于一些复杂的非线性、存在参数扰动和外部扰动的系统来说，滑模变结构控制方法是一种有效的解决途径，具有一定的广泛实用性。

#### 参考文献:

- [1] Kaustubh Pathak, Jaume Franch, et al. Velocity and Position Control of a Wheeled Inverted Pendulum by Partial Feedback Linearization [J]. IEEE Transaction On Robotics 2005, 21 (3): 505-513.
- [2] Tsai Jiun Ren, Tien Chi Chen, et al. Motion control for a two-wheeled vehicle using a self-tuning PID controller [J]. Control Engineering Practice, 2008, 16: 365-375.
- [3] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [4] 康宇. 滑模变结构理论的研究与运用 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2002.
- [5] 李光升, 谢永成, 等. 装甲车辆起动电动机自动测试系统的设计 [J]. 计算机测量与控制, 2006, 14 (2): 225-232.