

文章编号: 1002-0640(2007) 03-0082-03

## 基于自校正卡尔曼滤波器的信息融合算法\*

李俊<sup>1</sup>, 王雪平<sup>1,2</sup>, 张福斌<sup>1</sup>

(1. 西北工业大学, 陕西 西安 710072, 2. 91100 部队, 浙江 宁波 315040)

**摘要:** 设计了一种新的基于 ARMA 模型自校正卡尔曼滤波器及其信息融合的方法, 从而避免了经典卡尔曼滤波器需要精确知道系统的模型参数和噪声统计特性的缺点。仿真结果表明, 在未知部分模型参数和噪声统计特性的情况下, 自校正卡尔曼滤波器的滤波性能非常接近稳态最优卡尔曼滤波器; 基于自校正卡尔曼滤波器的信息融合滤波性能接近基于稳态最优卡尔曼滤波器的信息融合滤波性能。

**关键词:** 时间序列分析, ARMA 模型, 卡尔曼滤波器, 自校正滤波器, 信息融合

中图分类号: O211.64

文献标识码: A

## Information Fusion based on the Self-Tuning Kalman Filter

LI Jun<sup>1</sup>, WANG Xue-ping<sup>1,2</sup>, ZHANG Fu-bin<sup>1</sup>

(1. Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China, 2. Military Unit 91100 of PLA, Ningbo 315040, China)

**Abstract:** A new self-tuning Kalman filter based on ARMA model has been designed to avoid the flaw of classical Kalman filter which needs to accurately know the model parameter and statistical characteristic of noise in system. The simulation results show that the filtering performance of the self-tuning Kalman filter is very close to the classical Kalman filter. Information fusion based on the self-tuning Kalman filter is close to information fusion based on the classical Kalman filter.

**Key words:** time series analysis, ARMA, Kalman filter, self-tuning filter, information fusion

## 引言

经典的卡尔曼滤波理论的基本工具是 Riccati<sup>[2]</sup> 方程, 基于它可以得到滤波增益阵, 滤波误差方差阵。经典的卡尔曼滤波理论的缺点和局限是它要求精确已知系统的数学模型和噪声统计特性, 但在实际应用中, 系统模型和噪声统计一般不是完全已知的, 如果直接应用经典卡尔曼滤波方法, 将会引起滤波性能变坏, 甚至滤波发散。对于定常系统滤波增益阵和滤波误差方差阵收敛于定值, 若能在滤波之前对各种噪声进行统计分析并建立模型, 得到噪声的均值和方差, 进而得到固定滤波增益阵和滤波误差方差阵, 即自校正滤波器。

## 1 时间序列分析法的 ARMA 模型

时间序列分析就是对有序的随机数据进行分析、研究, 即现在时刻的值可以用过去时刻的值表示, 并预测系统的未来的值。时间序列分析方法的基本模型是自回归滑动平均模型(简称为 ARMA 模型), ARMA 模型的一般形式为:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) \dots - a_{n_a} y(t-n_a) + d_1 \epsilon(t-1) + \dots + d_{n_d} \epsilon(t-n_d) + \epsilon(t)$$

其中,  $y(t)$  为信号时间序列,  $n_a, n_d$  为模型阶次,  $a_i, d_i$  为模型系数,  $\epsilon(i)$  为白噪声序列。

令  $q^{-i} y(t) = y(t-i)$ ,  $q^{-i} \epsilon(t) = \epsilon(t-i)$ ,  $i = 1 \dots n_a(n_d)$ , 则上式可写成:

$$A(q^{-1}) y(t) = D(q^{-1}) \epsilon(t) \quad (1)$$

式(1)中:  $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + a_3 q^{-3} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2} + d_3 q^{-3} + \dots +$$

收稿日期: 2006-05-25 修回日期: 2006-08-14

\* 基金项目: 教育部新世纪优秀人才基金资助项目

作者简介: 李俊(1971-), 男, 湖北石首人, 教授, 主要研究方向为水下航行器导航与控制技术等。

式(1)为自回归滑动平均模型(ARMA( $n_a, n_d$ )模型)。若加入控制相 $u(t)$ ,则式(1)为:

$$\begin{aligned} A(q^{-1})y(t) &= B(q^{-1})u(t) + D(q^{-1})\epsilon(t) \\ B(q^{-1}) &= 1 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + b_3q^{-3} + \dots + b_{n_b}q^{-n_b} \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)为受控的自回归滑动平均模型(CARMA( $n_a, n_u, n_d$ )模型)。

## 2 基于CARMA模型的自校正卡尔曼滤波器

### 2.1 从状态方程到CARMA模型的转化

利用时间序列CARMA模型与状态空间模型的相互转化来解决问题是现代时间序列分析方法的核心思想之一。将状态空间模型转化为CARMA模型可将状态估计问题转化为信号估值问题。

$$x(t+1) = \Phi x(t) + Bu(t) + \Gamma w(t) \quad (3)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t) \quad (4)$$

系统(3)和系统(4)是完全可观的,  $x(t) \in R^n$ ,  $y(t) \in R^m$ 。为简单说明问题设系统为单输入单输出定长系统,  $u(t)$ 为输入控制相,  $w(t)$ 和 $v(t)$ 为独立的高斯白噪声。用Fadeeva公式可将状态空间模型转化为CARMA模型,其递推算为:

$$F_0 = I_n, a_0 = 1$$

$$a_i = - (1/i) \text{trace}(\Phi F_{i-1}), i = 1, \dots, n, F_i = \Phi F_{i-1} + a_i I_n, i = 1, \dots, n-1$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n}, F(q^{-1}) = I_n + F_1q^{-1} + F_2q^{-2} + \dots + F_{n-1}q^{1-n}$$

$$B(q^{-1}) = HF(q^{-1})Bq^{-1}, C(q^{-1}) = HF(q^{-1})\Gamma q^{-1}$$

则CARMA模型为:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + D(q^{-1})\epsilon(t) \quad (5)$$

$$\text{其中: } D(q^{-1})\epsilon(t) = C(q^{-1})w(t) + A(q^{-1})v(t) \quad (6)$$

式(5)就是从状态方程(3)和状态方程(4)到CARMA模型的转化。需要指出的是若 $A(q^{-1})$ 和 $F(q^{-1})$ 有最大的标量多项式公因式,需同时去掉,否则结果会出现错误。CARMA模型的参数估计方法有很多,这里采用最小二乘法。MATLAB的系统辨识工具箱里带有基于最小二乘法的CARMA参数估计函数:  $th = \text{armax}([y, u], [n_a, n_u, n_d, n_k])$ , 其中 $y$ 为时间序列,  $[n_a, n_d]$ 为模型阶数。

### 2.2 获取自校正卡尔曼滤波器的固定滤波增益及滤波误差方差阵

式(6)中 $D(q^{-1})$ ,  $C(q^{-1})$ ,  $A(q^{-1})$ 的系数和 $\epsilon(t)$ 的方差 $Q_\epsilon$ 都是已知的。计算式(6)两边的自相关函数可得关于 $w(t)$ 与 $v(t)$ 的方差 $Q_w$ 和 $Q_v$ 的二元方程组,可解得 $Q_w$ 和 $Q_v$ 。

根据文献[1]对于系统(3)和系统(4)有如下自校正卡尔曼滤波器:

$$x(t/t) = \hat{\Psi}x(t-1/t-1) + \hat{K}y(t) + [I_n - \hat{K}fH] \cdot Bu(t-1)$$

其中:  $\hat{\Psi} = (I_n - \hat{K}H)\Phi$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} H \\ HF_1 \\ \vdots \\ HF_{\beta-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_m - Q_v Q_\epsilon^{-1} \\ d_1 - a_1 Q_v Q_\epsilon^{-1} \\ \vdots \\ d_{\beta-1} - a_{\beta-1} Q_v Q_\epsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

其中 $\beta$ 为系统的能观性指数,可以看出对于定长系统滤波增益 $\hat{K}$ 是确定的,从噪声统计的角度来看也是由于定长系统其模型参数和噪声统计特性(均值,方差)是固定不变的。文献[1]已经证明了在理想情况下,其收敛于稳态最优卡尔曼滤波器。对于模型参数和噪声统计特性(均值,方差)缓慢变化的慢时变系统,随着计算机处理能力越来越强大,可采用一边滤波一边建模的方法,使之定长化。

由于实际系统中观测噪声一般是远大于系统噪声, CARMA模型参数估计所引入的误差对系统噪声方差的估值影响也远大于观测噪声方差估值。所以若用基于Riccati方程<sup>[2]</sup>或Laypunov方程<sup>[1]</sup>迭代获取滤波误差方差阵则必须多次无选择的同时使用精度相差很大的 $Q_w$ 和 $Q_v$ ,从而导致滤波误差方差阵严重偏离真值。和求取固定的滤波增益一样,当为定常系统时,滤波误差方差阵和一步预测估计误差方差也收敛于一个确定的值。解离散卡尔曼滤波基本中下列三个方程:

$$K_k = P_k H_k^T R_k^{-1}$$

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k,k-1} P_{k-1} \Phi_{k,k-1}^T + \Gamma_{k-1} Q_{k-1} \Gamma_{k-1}^T$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k/k-1}$$

其中已知:  $K_k = \hat{K}$ ,  $R_k = Q_v$ ,  $Q_{k-1} = Q_w$ ,  $P_k = P_{k-1}$ 。可解出滤波误差方差阵 $P_k$ 。需要注意的是通过求 $P_k$ 中各个元素而得到 $P_k$ ,由于 $Q_w$ 误差较大,应尽量利用 $K_k = P_k H_k^T R_k^{-1}$ 直接得到 $P_k$ 中元素值。

## 3 自校正卡尔曼滤波器两传感器信息融合仿真

文献[1]提出了通过Lyapunov方程求卡尔曼滤波器误差方差阵和协方差阵,文献[2]用“方差上界”技术来消除时间更新引入的滤波误差相关,同样也面临多次使用误差较大的系统噪声方差 $Q_w$ 而使误差协方差阵偏离真值的问题。这里提供两种替代方法:①一般由于两传感器的局部卡尔曼滤波误差相关性很弱,故可近似认为局部卡尔曼滤波误差无关,即次优信息融合;②在①的基础上再进行一次自校正滤波,重新建模。

定常系统(可以是雷达跟踪系统或者卫星定位系统):

$$x(t+1)=\begin{bmatrix}1&T\\0&Y\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0.5T^2\\T\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.5T^2\\T\end{bmatrix}w(t)$$
$$y_1(t)=[1\ 0]x(t)+v_1(t)$$
$$y_2(t)=[1\ 0]x(t)+v_2(t)$$
$$x(t)=[x_1(t),x_2(t)]^T,$$

分别表示目标的位置和速度,上角 $T$ 表示转置符号,模型中 $T=1$ 为采样周期, $w(t)$ 为加速度, $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 为观测噪声,分别为零均值、方差为 $\sigma_w^2=0.01$ , $\sigma_{v_1}^2=9$ 和 $\sigma_{v_2}^2=3$ 的独立高斯白噪声,模型参数 $Y=1$ 。已知输入控制相为 $u(t)$ (雷达跟踪系统无此项)。在未知 $\sigma_w^2$ , $\sigma_{v_1}^2$ , $\sigma_{v_2}^2$ 和 $Y$ 的情况下求信息融合稳态自校正卡尔曼滤波器。

表1 噪声的均值和方差比较

滤波	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
均值	-0.035 4	-0.006 5	-0.027 5	-0.002 5	-0.027 4	-0.002 1	-0.008 5	-0.008 7	-0.004 2	-0.009 8	-0.004 0
方差	9.021 7	3.045 4	2.046 3	0.858 9	2.054 6	0.857 7	0.707 2	0.703 6	0.750 5	1.346 6	0.777 8

取最后500个点(19 500至20 000)对第2个传感器的观测噪声(b),第2个传感器采用经典卡尔曼滤波后的噪声(d),第2个传感器采用自校正滤波后的噪声(f),采用经典卡尔曼滤波后局部滤波误差相关的信息融合(稳态最优)后的噪声(h),采用自校正滤波局部滤波误差相关和不相关的信息融合后的噪声(j)和(i)进行噪声曲线对比。见图1:

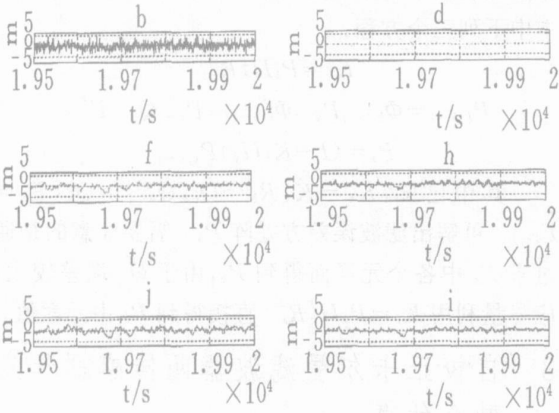


图1 噪声曲线对比图

从表1和图1可以看出:自校正卡尔曼滤波器能有效地过滤噪声,性能几乎等同于经典卡尔曼滤波器。这也证明了其在理想状态下是收敛于 $\sigma_w^2$ , $\sigma_v^2$ 和 $Y$ 已知的经典(最优)稳态最优卡尔曼滤波器。第1个传感器有比第2个传感器大的观测噪声,但是它仍能够提供有用的信息使融合滤波器的精度高于第2个传感器。由于对噪声特性统计存在误差(特别是 $\sigma_w^2$ )在采用自校正滤波局部滤波误差相关的信息融合后,融合滤波器精度不但低于采用局部滤波误差

由于滤波误差方差阵为二维,且是一次性计算,所以采用按矩阵加权的信息融合规则。仿真中首先用3 000个观测数据进行建模,然后用20 000个数据进行滤波仿真。同时采用信息融合稳态经典卡尔曼滤波器(已知 $\sigma_w^2$ , $\sigma_{v_1}^2$ , $\sigma_{v_2}^2$ 和 $Y$ 的值)进行滤波比较分析。

为了清楚地比较与经典卡尔曼滤波器信息融合的差别,分别以滤波后噪声的均值和方差做比较,比较结果见表1。字母a到字母k分别代表两个传感器的观测噪声,采用经典卡尔曼滤波后的噪声,采用自校正滤波后的噪声,采用经典卡尔曼滤波局部滤波误差不相关和相关(稳态最优)的信息融合后的噪声,采用自校正滤波局部滤波误差不相关和相关的信息融合的噪声,采用自校正滤波局部滤波误差无关信息融合后再次进行自校正滤波后的噪声。

不相关的信息融合滤波器,也低于第2个传感器单独采用自校正滤波器的滤波精度,失去了信息融合的意义。而采用自校正滤波局部滤波误差不相关信息融合后再次进行自校正滤波,由于采用局部滤波误差不相关的信息融合滤波器的性能已经非常接近经典卡尔曼滤波后局部滤波误差相关的信息融合滤波器(稳态最优),也是没有意义的。因此在对自校正滤波进行信息融合时,应当看作局部滤波误差无关。

4 结 语

自校正卡尔曼滤波器能够根据观测值自动计算噪声的统计特性,直接应用于滤波计算上,不需要做大量的统计工作,对于噪声统计特性近似时变或者弱时变的系统显得尤为为重要。本方法的关键是ARMA模型的参数估计精度,理论上只要模型参数足够精确,其滤波性能等同于经典卡尔曼滤波器。在实际应用中可以一次建模,可分阶段建模,也可以在线实时建模,多传感器信息融合时局部滤波误差应当看作不相关的。

参考文献:

[1] 邓自立. 最优估计理论及其应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2005.  
[2] 秦永元. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.  
[3] 张志勇. 精通MATLAB6.5版[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2003.