7 (Tarea Original) ## Proba extras ##

Una funcion de densidad f, de una variable aleatoria continua X, esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 < x < 1 \\ x/3 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentra la función de densidad de la variable aleatoria $Y = X^2 - 1$

$Y = x^2 - 1$

$x = \sqrt{Y-1}$ sale de $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y-1}}$

$$f_x(x(y)) = \begin{cases} 1/2 & -1 < y < 0 \\ \frac{\sqrt{y-1}}{3} & 2 \leq y < 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\therefore f(y) = \begin{cases} 1/4 \frac{1}{\sqrt{y-1}} & -1 < y < 0 \\ 1/6 & 2 \leq y < 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

6 (Tarea Original)

Sea F la función dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -1) \\ 1/2 & x \in [-1, 1) \\ 1/16\,(x+11) & x \in [1, 3) \\ 1 & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Demuestra que existe una variable aleatoria, X tal que $F_X = F$ y encuentra la distribución de $Y = X^2$

Por definición si $F_X = F$ una función de distribución entonces existe X una v.a tal que F_X es su distribución

1) $\lim_{x \to (-\infty)} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

2) $F(x_1) \leq F(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ talque $x_1 \leq x_2$

$F(x) = 1/2$ es siempre creciente ya que

$F(x_1) \leq F(x_2) = 1/2$ $x_1, x_2 \in [-1, 1)$

sean $x_1, x_2 \in [1, 3)$ tal que $F(x_1) \leq F(x_2)$

$\Rightarrow \frac{1}{16}(x+11) - \frac{1}{16}(x_2+11) = \frac{1}{16}(x_1 - x_2) = F(x_1) - F(x_2)$

como $x_1 \leq x_2$ $\Rightarrow$ $x_1 - x_2 \leq 0$ entonces

$F(x_1) - F(x_2) = \frac{1}{16}(x_1 - x_2) \leq 0$

$F(x_1) - F(x_2) \leq 0$ $\Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

$\therefore$ $F(x)$ es creciente.

3) $\lim_{x \to -1^+} F(x) = 1/2 = F(-1)$

$\lim_{x \to 1^+} F(x) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = F(1)$

$\lim_{x \to 3^+} F(x) = 1 = F(3)$

$\therefore$ $F(x)$ es continua por la derecha.

$\therefore$ $F(x) = F_x(x)$ una distribucion y X una V.A tal que F_X es su distribucion.

$Y = X^2$ tenemos que $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

$$= P(X^2 \leq y)$$
$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$
$$= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$
$$= F(\sqrt{y})$$

luego $1 < \sqrt{y} < 3 \Rightarrow 1 < y < 9$

entonces

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \in (-\infty, -1) \\ 1/2 & y \in [-1, 1) \\ 1/16(\sqrt{y} + 11) & y \in [1, 9) \\ 1 & y \in [9, \infty) \end{cases}$$