Probabilidad I
César Galindo y Guillermo Garro
Facultad de Ciencias. UNAM
Grupo **9026**. Sem. **2021-1**

Tarea 2: Variables aleatorias

1. Dos bolas se seleccionan al azar de una urna que contiene 8 bolas blancas, 4 bolas negras, y 2 bolas naranjas. Supongamos que ganamos la cantidad de \$2 por cada bola negra seleccionada y perdemos la cantidad de \$1 por cada bola blanca seleccionada. Sea X la variable aleatoria que denota nuestra ganancia. ¿Cuál es la ley de X? Calcula la esperanza y varianza de X.

2. Supongamos que un dado justo se lanza dos veces. Consideremos las siguientes variables aleatorias:

$$\begin{aligned} X &= \text{el valor máximo que aparece en los dos lanzamientos} \\ Y &= \text{el valor mínimo que aparece en los dos lanzamientos} \\ Z &= \text{la suma de los números que aparecen en los dos lanzamientos} \\ W &= \text{la resta de los números que aparecen en los dos lanzamientos} \end{aligned}$$

   Encuentra la ley de estas variables aleatorias. Además, encuentra la esperanza y varianza de cada una de ellas.

3. Consideramos un dado cuyas caras están numeradas del 1 al 6 y denótese por X a la variable aleatoria dada por el número de la cara de la parte superior. Supongamos que el dado está manipulado de manera que la probabilidad de obtener una cara es proporcional al número en esa cara. Determina la ley de X y calcula $\mathbb{E}[X]$. Sea $Y = 1/X$; determina la ley de X y calcula $\mathbb{E}[Y]$.

4. Un jugador dispara a un objetivo de 10 cm de radio, que consiste en coronas concéntricas, delimitadas por círculos de radios $1, 2, \ldots, 10$ cm y numeradas respectivamente de 10 a 1. La probabilidad de alcanzar la corona k es proporcional al área de esta corona, y se supone que el jugador alcanza su objetivo en cada lanzamiento. Sea X la variable aleatoria que en cada ejecución asocia el número del objetivo. ¿Cuál es la ley de probabilidad de X? El jugador gana k pesos si alcanza la corona numerada k para $k \in \{6, \ldots, 10\}$, mientras que pierde 2 pesos si alcanza una de las coronas periféricas numeradas del 1 al 5. ¿Es el juego favorable para el jugador?

5. Cada día el precio de una determinada acción sube o baja una unidad con probabilidades p y $1-p$, respectivamente. Sea X_0 el precio de la acción el día de hoy y X_{2n} su precio dentro de $2n$ días. Suponiendo que $X_0 > 2n$, encuentra la ley de X_{2n}.

6. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes que siguen una ley geométrica con parámetro $p \in (0, 1)$. Calcula la probabilidad de que $X_1 \neq X_2$.

7. Un insecto pone huevos. El número de huevos puestos es una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson de intensidad θ. Cada huevo tiene una probabilidad p de eclosionar, independiente de otros huevos. Sea Z la variable aleatoria que determina la cantidad de huevos que eclosionaron.

   a) Para $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calcula $\mathbb{P}[Z = k \mid X = n]$.

b) Usando la fórmula de la probabilidad total, encuentra la ley de Z.

8. **El problema de la caja de fósforos de Banach** En todo momento, Banach lleva 2 cajas de fósforos: 1 en su bolsillo izquierdo y 1 en su bolsillo derecho. Cada vez que necesita un fósforo, es igualmente probable que lo saque de cualquier bolsillo. Considere el momento en que Banach descubre por primera vez que una de sus cajas de fósforos está vacía. Si se supone que ambas cajas de fósforos inicialmente contenían N fósforos, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente k fósforos, $k = 0, 1, \ldots, N$, en la otra caja?

9. Sea X la variable aleatoria real con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \in [0,1] \\ 1+x & si \quad x \in [-1,0] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Calcular su función de repartición F_x.
   b) Calcular la Esperanza y la Varianza de X.
   c) Calcular $\mathbb{P}[X \leq \frac{1}{4}, X^2 \leq \frac{1}{4}]$.
   d) Detrminar la función de repartición F_Y de la v.a. $Y = X^2$.

10. Sea F la función dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{4} & x \in [0,4) \\ \frac{3}{40}(x+1) & x \in [4,9) \\ 1 & x \in [9,\infty). \end{cases}$$

Demuestra que existe una variable aleatoria, X, tal que $F_X = F$ y encuentra la distribución de $Y = \sqrt{X}$.

11. Sean $X_0, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim \text{unif}[0,1]$.

   a) Sea $0 \leq k \leq n$ y sea $U_k = \text{mín}\{X_0, \ldots, X_k\}$. Demuestra que U_k admite una densidad que determinará.
   b) , Sea $N \sim \text{Bin}(n, 1/2)$. Demostrar que $U = \text{mín}\{X_0, \ldots, X_N\}$ admite una densidad que determinará.

12. (**Simulación**) Sea $U \sim \text{unif}(0,1)$.

   a) Sea F una función que satisface las condiciones

1) es no decreciente;
2) càdlàg
3) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

Sea $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ la inversa generalizada de F:

$$F^{-1}(u) = \min\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}.$$

Demuestra que $X = F^{-1}(U) \sim \mathbb{P}_X$, donde $\mathbb{P}_X$ tiene por función de distribución F.

b) Sea $U \sim \text{unif}(0,1)$ y (U_i) variables aleatorias independientes con $U_i \sim U$. Encuentra la ley de las siguientes variables aleatorias:

1) $Y := a + (b-a)U$, $a < b$.
2) $Y := -\dfrac{\ln U}{\lambda}$, $\lambda > 0$.
3) $Y := a \tan\left(\pi\left(U - \dfrac{1}{2}\right)\right)$, $a > 0$.
4) $Y := \mu + \sigma\sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$.

13. La vida útil de los átomos de radón sigue una ley exponencial. La probabilidad de que un átomo de radón no se desintegre en $40s$ sabiendo que no se desintegra en $12s$ es $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de que no se desintegre antes de los $76s$ sabiendo que no se descompone en $20s$? (**Sugerencia**: Usa la propiedad de pérdida de la variable aleatoria exponenciasl:

$$\mathbb{P}[X > s + t \mid X > t] = \mathbb{P}[X > s].$$

para todo $s, t \geq 0$)

14. Supongamos que $X \sim \exp(1)$. Sea $Y = \lceil \theta X \rceil$, en donde $\lceil \bullet \rceil$ denota la parte entera superior. Demuestra que Y sigue una ley geométrica de parámetro a determinar.

15. Una fábrica, fabrica dispositivos electrónicos que constan de dos componentes A y B cuyas operaciones son independientes entre sí y cuyas vidas (en horas) son variables aleatorias X_1 y X_2 que siguen una ley exponencial de parámetros respectivos θ_1 y θ_2. Un aparato funciona si, y sólo si, las dos componentes funcionan. Denótese por T a la duración de vida de un aparato. Encuentra la ley de T.

16. (**Python**) Realizar una simulación en Python para los siguientes ejercicios:

$$1, 2, 8 \ \text{ y } \ 14b)$$