Probabilidad Tarea 2

López Díaz, Yazmín

Peréz Peréz, Jorge Iván

Muñiz Patiño, Andrea Fernanda

Semestre 2021 - 1

Notas adicionales:
Estamos entregando la tarea modificada y además como extra (ejercicios que dejo el profesor), entregamos en este documento y junto con los archivos *.ipynb* lo siguiente:

a) Las simulaciones de los ejercicios 5 y 7 de la tarea modificada.

b) Los ejercicios 6 y 7 de la tarea "original".

Variables aleatorias discretas.

Ejercicio $\boxed{1}$

Se seleccionan dos bolas, de una urna

8 bolas <u>blancas</u> $\rightarrow$ \$1 perdemos

4 bolas <u>negras</u> $\rightarrow$ \$2 ganancia

2 bolas <u>naranjas</u>

Sea X la variable aleatoria que denota nuestra ganancia ¿Cúal es la ley de X? Calcula la <u>esperanza</u> y <u>varianza</u>

- En total tenemos 14 bolas.
- seleccionamos 2 bolas

$\Omega = \{$elegir 2 bolas de 14 totales$\}$ $\quad \#\Omega = \binom{14}{2} = 91$

$$X : \Omega \rightarrow F = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$$

$P(x=-2) = \dfrac{\binom{8}{2}}{91} =$ equivale a sacar dos bolas blancas.

$P(x=-1) = \dfrac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{91}$ equivale a sacar una bola blanca y una naranja.

$P(x=0) = \dfrac{\binom{2}{2}}{91}$ Sacar dos bolas naranjas.

$P(x=1) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{91}$ Sacar una negra y una blanca

$P(x=2) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{91}$ Sacar una negra y una naranja.

$P(x=4) = \dfrac{\binom{4}{2}}{91}$ Sacar dos bolas negras

$P(x=-2) = 28/91$ $\quad$ $P(x=1) = 32/91$

$P(x=-1) = 16/91$ $\quad$ $P(x=2) = 8/91$

$P(x=0) = 1/91$ $\quad$ $P(x=4) = 6/91$

La suma de todas los probabilidades es $\underline{1}$ ✓

La <u>esperanza</u> se calcula

$$\sum_{w \in \Omega} f(\{w\})\, X(w)$$

entonces

$$E = (-2)\left(\frac{28}{91}\right) + (-1)\left(\frac{16}{91}\right) + (0)\left(\frac{1}{91}\right) + 1\left(\frac{32}{91}\right) + 2\left(\frac{8}{91}\right) + 4\left(\frac{6}{91}\right)$$

$$E = -\frac{56}{91} - \frac{16}{91} + \frac{32}{91} + \frac{16}{91} + \frac{24}{91} = -\frac{72}{91} + \frac{72}{91}$$

$\Rightarrow E[|X|] = 0$ $\therefore$ es un juego equilibrado

La <u>varianza</u> es: $\quad Var(x) = \sum_{x} (x-\mu)^2 f(x)$

entonces
$$Var(x) = (-2-0)^2\left(\frac{28}{91}\right) + (-1-0)^2\left(\frac{16}{91}\right) + (0-0)^2\left(\frac{1}{91}\right) + (1-0)^2\left(\frac{32}{91}\right) + (2-0)^2\left(\frac{8}{91}\right) + (4-0)^2\left(\frac{6}{91}\right)$$

$$Var(x) = 4\left(\frac{28}{91}\right) + 1\left(\frac{16}{91}\right) + 1\left(\frac{32}{91}\right) + 4\left(\frac{8}{91}\right) + 16\left(\frac{6}{91}\right)$$

$$= \frac{112}{91} + \frac{16}{91} + \frac{32}{91} + \frac{32}{91} + \frac{96}{91}$$

$$= \frac{288}{91} \approx 3.1648$$

Ejercicio ②.

Un dado se lanza dos veces.

X = el valor máximo que se puede obtener con lanzar dos dados.

Y = valor mínimo

Z = la suma de los números de ambos dados

W = la resta de los números de ambos dados

Encontrar la ley de las variables aleatorias Esperanza y varianza de cada una.

$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$ $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

Medida de probabilidad esta dada por $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$|\Omega| = 36$

Sobre la variable aleatoria X tenemos lo siguiente

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ y esta definida por la regla

$X(i,j) = \max\{i,j\}$ $(i,j) \in \Omega$

La descripción por extensión esta en el jupyter.

$\text{rango}(X) = \{1,2,3,4,5,6\}$

pues de el lanzamiento $(1,2)$ $X(1,2) = 1$. etc...

por ejemplo tenemos que

$(X=3) = X^{-1}(3) = \{(1,3),(2,3),(3,3),(3,1)(3,2)\}$.

y de esta forma se construye para cada $X=K$

Entonces la ley de X esta dada por

$P(X=1) = \frac{1}{36}$ número de tuplas tales que el máximo elemento es 1

$P(X=2) = \frac{3}{36}$

$P(X=3) = \frac{5}{36}$ $P(X=4) = \frac{7}{36}$ $P(X=5) = \frac{9}{36}$

$P(X=6) = \frac{11}{36}$ La suma de las probabilidades es igual a uno ✓

Calcular la esperanza

$\sum_{w \in \Omega} f(\{w\}) X(\omega)$

$$\mathbb{E}(X) = 1\left(\frac{1}{36}\right) + 2\left(\frac{3}{36}\right) + 3\left(\frac{5}{36}\right) + 4\left(\frac{7}{36}\right) + 5\left(\frac{9}{36}\right) + 6\left(\frac{11}{36}\right) = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36}$$

$$= \frac{161}{36} \approx 4.4 \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{161}{36} \approx 4.472\bar{2}$$

Calcular la varianza $Var(X)$.

$Var(x) = \sum_{x} (x-\mu)^2 f(x)$ donde μ es la esperanza

$$Var(x) = \left(1 - \frac{161}{36}\right)^2\left(\frac{1}{36}\right) + \left(2 - \frac{161}{36}\right)^2\left(\frac{3}{36}\right) + \left(3 - \frac{161}{36}\right)^2\left(\frac{5}{36}\right) + \left(4 - \frac{161}{36}\right)^2\left(\frac{7}{36}\right) + \left(5 - \frac{161}{36}\right)^2\left(\frac{9}{36}\right) + \left(6 - \frac{161}{36}\right)^2\left(\frac{11}{36}\right)$$

- $\left(-\frac{125}{36}\right)^2\left(\frac{1}{36}\right) = \left(\frac{15625}{1296}\right)\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{15625}{46,656}$
- $\left(\frac{72}{36} - \frac{161}{36}\right)^2\left(\frac{3}{36}\right) = \left(\frac{89}{36}\right)^2\left(\frac{3}{36}\right) \ldots$

Al ver que esto es muy engorroso, hicimos una función en python que calcula la varianza y esperanza, con lo cual hemos obtenido los siguientes resultados.

$\mathbb{E}(X) \approx 4.472\bar{2}$

$Var(X) \approx 1.4992$

Continuación del ②.

Ahora la variable aleatoria $Z : \Omega \to \mathbb{R}$

Que esta definida por la regla

$Z(i,j) = i + j$ $(i,j) \in \Omega$

$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$ $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.

El rango de los valores de Z esta dado por $\{2,3,\ldots 12\}$ pues e la mínima suma y la máxima que se puede obtener de sumar los números del lanzamiento de dos dados.

$\Rightarrow \text{Rango}(Z) = \{2,3,4,5,\ldots 12\}$

por ejemplo $P(X=2) = \frac{1}{36}$ pues tenemos solo una posibilidad de que $X=2$ con $(1,1)$ ese es el único lanzamiento.

Habra que calcular para $X=K$ donde K $2 \leq K \leq 12$.

Tenemos entonces:

$P(X=2) = \frac{1}{36}$ $P(X=3) = \frac{2}{36}$ $P(X=4) = \frac{3}{36}$

$P(X=5) = \frac{4}{36}$ $P(X=6) = \frac{5}{36}$ $P(X=7) = \frac{6}{36}$

$P(X=8) = \frac{5}{36}$ $P(X=9) \frac{4}{36}$ $P(X=10) = \frac{3}{36}$

$P(X=11) = \frac{2}{36}$ $P(X=12) = \frac{1}{36}$

Calcular la esperanza de Z

$\sum_{w \in \Omega} f(\{w\}) Z(\omega)$

$$\mathbb{E} = 2\left(\frac{1}{36}\right) + 3\left(\frac{2}{36}\right) + 4\left(\frac{3}{36}\right) + 5\left(\frac{4}{36}\right) + 6\left(\frac{5}{36}\right) + 7\left(\frac{6}{36}\right) + 8\left(\frac{5}{36}\right) + 9\left(\frac{4}{36}\right) + 10\left(\frac{3}{36}\right) + 11\left(\frac{2}{36}\right) + 12\left(\frac{1}{36}\right)$$

$$\frac{2}{36} + \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{42}{36} + \frac{40}{36} + \frac{36}{36} + \frac{30}{36} + \frac{22}{36} + \frac{12}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(Z) = 7$

$\Rightarrow$ Del archivo de jupyter obtuvimos que la varianza de Z es: 3.4453

en otras palabras:

$Var(Z) = 3.4453$

Sobre la Variable Aleatoria Y.

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$ el espacio muestral es el mismo que para la variable X.

$|\Omega| = 36$

$Y(i,j) = \min\{i,j\}$ $(i,j) \in \Omega$

$\text{Rango}(Y) = \{1,2,3,4,5,6\}$

Los lanzamientos $(1,2)(1,1),(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)$ $(2,1)(3,1)(4,1)(5,1)(6,1)$ son $\mathbb{P}(X=1)$

$\mathbb{P}(X=1) = \{(1,2),(1,1),(1,3),(1,4),(1,5)(1,6)\}$. $(2,1),(3,1),(4,1)(5,1)(6,1)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X=1) = \frac{11}{36}$

Los calculos se hicieron en el archivo Jupyter anexado en esta tarea, donde hay mismo obtuvimos $\mathbb{E}(Y)$ y $Var(Y)$ obteniendo

$\mathbb{E}(Y) \approx 2.527\bar{7}$ $Var(Y) \approx 1.705\bar{1}$

Ahora sobre la variable aleatoria W

Que resta de los números que aparecen en los dos lanzamientos.

$W: \Omega \to \mathbb{R}$ definida por la regla.

$W(i,j) = i - j \quad (i,j) \in \Omega$

Para esta v.a el Rango esta definido de la siguiente manera.

$$\text{rango}(W) := \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$$

$$\mathbb{P}(W=K) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } K=-5 \\ \frac{2}{36} & \text{si } K=-4 \\ \vdots & \\ \frac{1}{36} & \text{si } K=5 \end{cases}$$

Todas las probabilidades estan presentes en el Jupyter

$$\mathbb{E}(W) \approx -1.665$$

$$Var(W) = 3.4453125$$

Los calculos y todas las posibles tuplas estan en el jupyter.

Ejercicio [3] Dado $\{1, \dots 6\}$.

Las probabilidades estan definidas proporcionalmente al número de cara que se obtuvo, sea X la v.a que denota dicha probabilidad.

el dado puede tomar las caras $\{1,2,3,4,5,6\}$

$$\Rightarrow n=6 \quad \frac{n(n+1)}{2} = \frac{6(7)}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$\Rightarrow P(X=1) = \frac{1}{21} \qquad P(X=4) = \frac{4}{21}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{21} \qquad P(X=5) = \frac{5}{21}$$

$$P(X=3) = \frac{3}{21} \qquad P(X=6) = \frac{6}{21}$$

- Cumpliendo que la suma de las probabilidades es 1
- Siendo estos los unicos eventos tenemos que $P(\Omega) = 1$
- Ahora bien tenemos que los eventos son ajenos pues, cae el dado en la cara 1, ó 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6 entonces tenemos que

$$P\left(\bigcup_{K=1}^{6} A_K\right) = \sum_{K=1}^{6} P(A_K).$$

La esperanza se calcula como:

$$\sum_{w\in\Omega} f(\{w\})X(w)$$

$$= 1\left(\frac{1}{21}\right) + 2\left(\frac{2}{21}\right) + 3\left(\frac{3}{21}\right) + 4\left(\frac{4}{21}\right) + 5\left(\frac{5}{21}\right) + 6\left(\frac{6}{21}\right)$$

$$\frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} + \frac{16}{21} + \frac{25}{21} + \frac{36}{21} = \frac{88}{21} \approx 4.190$$

entonces tenemos que la esperanza de la v.a X es mayor a cero lo cual significa que el juego no es justo.

Sea $Y = 1/X$ determina la ley de Y y calcula $\mathbb{E}[Y]$

Tenemos.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$1/21$	$2/21$	$3/21$	$4/21$	$5/21$	$6/21$

Usando el teorema de cambio de variable.
La variable aleatoria toma los valores.

$$Y = \frac{1}{1} = 1 \qquad Y = 1/4$$

$$Y = 1/2 \qquad Y = 1/5$$

$$Y = 1/3 \qquad Y = 1/6.$$

$P(Y=1) = 1$; $P(Y=1/2) = 2/21$; $P(Y=1/3) = 3/21$; $P(Y=1/4) = 4/21$; $P(Y=1/5) = 5/21$; $P(Y=1/6) = 6/21$

Ahora calculamos la esperanza de Y

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{w\in\Omega} f'(\{w\})Y(w)$$

$$= 1(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{21}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{21}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{21}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{5}{21}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{6}{21}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{42} + \frac{3}{63} + \frac{4}{84} + \frac{5}{105} + \frac{6}{126}$$

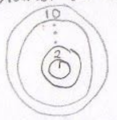
$$= 1 + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} + \frac{6}{126}$$

$$= \frac{21}{21} + \frac{5}{21} = \frac{26}{21} \approx 1.238$$

$$\mathbb{E}[Y] \approx 1.238$$

Ejercicio $\boxed{4}$

tenemos una Diana de la siguiente forma



Lo que quiere decir, junto con el planteamiento que tenemos un circulo "total" de 10 radio

$$\Omega = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 10^2\}$$

y por los axiomas de probabilidad tenemos que $\mathbb{P}(\Omega)=1$ y el área total de nuestro espacio muestral esta dada por

$10^2\pi = \text{Área}$

Denotamos $C(K)$ al área del circulo K-esimo, donde K puede ir de $[1,10]$ pues tenemos 10 circulos entonces el área esta definida por

$$C(K)=\{(x,y)\in\Omega : (10-K)^2 \le x^2+y^2 < (10-(K+1))^2\}$$

$$\Rightarrow \text{Área } C(K) = \pi(10-(K+1))^2 - \pi(10-K)^2$$
$$= \pi\left[(10-(K+1))^2-(10-K)^2\right]$$
$$= \pi(21-2K)$$

La probabilidad de alcanzar la corona K es proporcional al área de esta corona, con esto tenemos entonces que

$$\mathbb{P}(C(K)) = \alpha\cdot \text{Área}(C(K)) = \alpha(\pi(21-2K)) \quad \dots\dots (1)$$

α es la proporcion de la probabilidad segun el área.

Sabemos que las áreas son totalmente ajenas y por ello tenemos

$$\Omega = \bigcup_{K=1}^{10} C(K).$$

Es decir, que nuestro espacio muestral es igual a la union de todas las áreas y por los axiomas, tenemos que $\mathbb{P}(\Omega)=1$ y al saber como se "forma", "construye" Ω tenemos que

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{K=1}^{10} \mathbb{P}(C(K))$$

Y usando (1) obtenemos

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{K=1}^{10} \alpha\cdot \text{Área}(C(K))$$

α es una constante en esta suma al no depender de la variable K por lo que se puede hacer lo siguiente

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \alpha \sum_{K=1}^{10} \text{Área}(C(K))$$

pero la suma de todas esas áreas es el area del total, ya que son ajenas.

$$= \alpha\cdot \text{Area}(\Omega)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \text{Area}(\Omega)$$

$$\frac{1}{\text{area}(\Omega)} = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{10^2\pi}$$

Continuación ejercicio 4.

Tomando de nuevo (1) y al ya haber obtenido

$$\alpha = \frac{1}{10^2\pi} \Rightarrow \mathbb{P}(C(k)) = \alpha(\pi(21-2k))$$
$$= \frac{1}{10^2\cancel{\pi}}(\cancel{\pi}(21-2k))$$
$$= \frac{21-2K}{10^2} = \frac{21-2K}{100}$$

Entonces la ley de X esta dado por.

$$P(X=K) = \mathbb{P}(C(k)) = \frac{21-2K}{100} \quad \text{donde } K = \{1,2,\ldots 10\}$$

$P(X=1) = \frac{21-2}{100} = 0.19$ $\quad P(x=2) = \frac{21-2(2)}{100} = 0.17$

$P(x=3) = \frac{21-2(3)}{100} = 0.15$ $\quad P(x=4) = \frac{21-2(4)}{100} = 0.13$

$P(x=5) = \frac{21-2(5)}{100} = 0.11$ $\quad P(x=6) = \frac{21-2(6)}{100} = 0.09$

$P(x=7) = \frac{21-2(7)}{100} = 0.07$ $\quad P(x=8) = \frac{21-2(8)}{100} = 0.05$

$P(x=9) = \frac{21-2(9)}{100} = 0.03$ $\quad P(x=10) = \frac{21-2(10)}{100} = 0.01$

Ahora el jugador gana K pesos si alcanza la corona numerada del $[6,10]$ y pierde 2 pesos si alcanza una corona en el intervalo $[1,5]$ es decir las centrales.

¿Es favorable el juego para el jugador?

Entonces para concluir esto calcularemos la esperanza.

Entonces necesitamos una v.a que denote las ganancias o perdidas que puede tener el jugador.

Y puede tomar los valores $\{-2, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

$Y = -2$ cuando $x = \{1,2,3,4,5\}$ entonces.

$$\mathbb{P}(Y=-2) = \mathbb{P}((x=1)\cup(x=2)\cup(x=3)\cup(x=4)\cup(x=5))$$

y al ser ajenos es la suma de las probabilidades.

$$= \mathbb{P}(x=1) + \mathbb{P}(x=2) + \ldots + \mathbb{P}(x=5)$$

esto se puede hacer de dos formas usando la formula $\left(\sum_{K=1}^{5} \frac{21-2K}{10^2}\right)\frac{1}{10^2}$

pero anteriormente ya calculamos estas probabilidades por lo que

$$\mathbb{P}(Y=-2) = 0.19 + 0.17 + 0.15 + 0.13 + 0.11 = 0.75$$

entonces 0.25 se repartira para los demas valores posibles de Y

$\mathbb{P}(Y=6) = \mathbb{P}(X=6) = 0.09$

$\mathbb{P}(Y=7) = \mathbb{P}(X=7) = 0.07$

$\mathbb{P}(Y=8) = \mathbb{P}(X=8) = 0.05$

$\mathbb{P}(Y=9) = \mathbb{P}(X=9) = 0.03$

$\mathbb{P}(Y=10) = \mathbb{P}(X=10) = 0.01$

con ello tenemos que

$$\mathbb{P}(Y=-2) + \mathbb{P}(Y=6) + \mathbb{P}(Y=7) + \mathbb{P}(Y=8) + \mathbb{P}(Y=9) + \mathbb{P}(Y=10) = 1$$

Lo que falta por hacer es calcular la esperanza de Y $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(Y) = (-2)\mathbb{P}(Y=-2) + \sum_{6}^{10} K\,\mathbb{P}(Y=K)$

$$= (-2)(0.75) + 6(0.09) + 7(0.07) + 8(0.05) + 9(0.03) + 10(0.01)$$

$$= -1.5 + 0.54 + 0.49 + 0.4 + 0.27 + 0.1$$

$$\mathbb{E}[Y] = 0.3$$

Obtuvimos entonces que la esperanza de la v.a Y es mayor a cero

Esto significa que el juego no es justo, esta un poco a nuestro favor por ser positiva la esperanza.

El calculo tambien podia hacerse sustituyendo los valores en la suma y haciendose algunos despejes, pero ya contabamos con los calculos anteriores.

5.- Cada día el precio de una determinada acción sube o baja una unidad con probabilidades p y $1-p$, respectivamente. Sea X_0 el precio de la acción el día de hoy y X_{2n} su precio dentro de $2n$ días. Suponiendo que $X_0 > 2n$, encuentra la ley de X_{2n}.

Notemos que cada día hay únicamente 2 posibles resultados: que la acción suba/éxito o que la acción baje/fracaso. Así $Y \sim Bernoulli(p)$:

$$\mathbb{P}(Y = \text{éxito}) = p \qquad p \in [0,1]$$
$$\mathbb{P}(Y = \text{fracaso}) = 1-p$$

Sea Y_{2n} el número de éxitos en $2n$ ensayos Bernoulli independientes:

$$Y_{2n} \sim Bin(2n, p)$$

· Sea X_{2n} = Precio en $2n$ días

El rango de X_{2n} esta dado por

· El valor mínimo que puede tomar

$$X_{2n}(\omega) = X_0 - 2n$$

· El valor máximo : $X_{2n}(\omega) = X_0 + 2n$

$$X_{2n} \in [X_0 - 2n, X_0 + 2n]$$

Así:

$$\mathbb{P}(X_{2n} = X_0 - 2n) = (1-p)^{2n} = \binom{2n}{0} p^0 (1-p)^{2n}$$
$$\mathbb{P}(X_{2n} = X_0 + 2n) = p^{2n} = \binom{2n}{2n} p^{2n} (1-p)^0$$
$$\mathbb{P}(X_{2n} = K) = \binom{2n}{2n - X_0 + K} p^{2n - X_0 + K} (1-p)^{2n - 2n - X_0 + K}$$

Siendo $2n$ el número de trayectorías posibles

Para contabilizar únicamente los éxitos consideramos

$$Y_{2n} = \frac{1}{2}(X_{2n} - X_0 + K) \sim Bin(2n, p)$$

$$F_Y(y) = \binom{2n}{y} p^y (1-p)^{2n-y}$$

6.- Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes que sigan una ley geométrica con parámetro $p \in (0,1)$. Calcula la probabilidad de que $X_1 \neq X_2$.

Tenemos que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes que siguen una ley geométrica con parámetro p, que cae entre 0 y 1.

Por lo que tenemos que encontrar:

$$P(X_1 \neq X_2) = 1 - P(X_1 = X_2)$$

Ahora, la función de probabilidad de X_1 y X_2 viene dada por

$$P(X_i = r) = (1-p)^r p$$ donde r puede tomar cualquier valor integral positivo

Entonces podemos decir que

$P(X_1 = X_2)$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} P(X_1 = r) * P(X_2 = r)$$

utilizando la función de probabilidad

$$= \sum_{r=1}^{\infty} (1-p)^{r-1} p * (1-p)^{r-1} p$$

$$= p^2 \sum_{r=1}^{\infty} (1-p)^{2(r-1)}$$

$$= p^2 * [1 + (1-p)^2 + (1-p)^4 + (1-p)^6 + \dots]$$

Ahora tenemos una progresión geométrica infinita

$$= \frac{1}{1-(1-p)^2}$$

Entonces

$$P(X_1 = X_2) = \frac{p^2}{1-(1-p)^2}$$

$$P(X_1 \neq X_2)$$

$$= 1 - P(X_1 = X_2)$$

$$= 1 - \frac{p^2}{1-(1-p)^2}$$

Ejercicio 7

Un insecto pone huevos, el número de huevos puestos es una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson de intensidad Θ.

El huevo tiene una probabilidad p de eclosionar independientemente de otros huevos.

Sea Z la v.a determina la cantidad de huevos que eclosionaron

a) Para $(K,n) \in \mathbb{N}^2$, calcula $\mathbb{P}[Z=K \mid X=n]$

$X = \#$ huevos que pone el insecto.

$X \sim \text{Poisson}(\Theta)$

$Z = \#$ huevos que eclosionan

$$\mathbb{P}[Z=K \mid X=n] = \begin{cases} \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} & n \geq K \\ 0 & n < K \end{cases}$$

$Z \mid X \sim \text{Bin}(n,p)$

Que eclosiones K huevos $\rightarrow \{Z=K\} \cap \Omega$

Siendo omega. $\Omega = \bigcup_{n \in f_X} \{X=n\}$

$\Rightarrow \{Z=K\} \cap \Omega = \bigcup_{n \in f_X} \{Z=K\} \cap \{X=n\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Z=K) = \sum_{n \geq K} \mathbb{P}(Z=K \mid X=n)\, \mathbb{P}(X=n)$

$$\sum_{n \geq K} \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} \cdot e^{-\theta} \frac{\theta^n}{n!}$$

$$\sum_{n \geq K} \left[\frac{n!}{K!(n-K)!}\right] p^K (1-p)^{n-K} \cdot e^{-\theta} \left[\frac{\theta^n}{n!}\right]$$

EXTRA (Anexo en Jupyter con nombre Tarea2Ejer7AFMP.ipynb)

$$P(Z=10) = \sum_{j \leq 10} \mathbb{P}(Z=j)$$

esto nos dice que hay que hacer la acumulación de las probabilidades desde 1 hasta 10 para ello hay que elegir n y K apropiados, entonces siendo K el número de huevos que eclosionan K tendrá valor 10; K=10 y los huevos que se ponen se representan con n entonces hacemos la suma como sigue.

$$\sum_{n \geq 10}^{J} \left[\frac{n!}{10!(n-10)!}\right] p^{10} (1-p)^{n-10} \cdot e^{-\theta} \left[\frac{\theta^n}{n!}\right] . \quad (*)$$

En la simulación se toman como parámetros p y Θ, pues esos pueden cambiar según el tipo de insecto y las condiciones del medio ambiente para la simulación hay que acotar la suma ya que no podemos hacerlo hasta ∞ pues se aclararía el programa.

$$\sum_{n \geq 10}^{J} \left[\frac{n!}{10!(n-10)!}\right] \left[e^{-\theta} \left[\frac{\theta^n}{n!}\right]\right] p^{10} (1-p)^{n-10}$$

$$\sum_{n\geq 10}^{j} \frac{\theta^n}{10!\,(n-10)!} \cdot p^{10}(1-p)^{n-10} \cdot e^{-\theta}$$

Sin embargo, los calculos antes presentados no son para "$\mathbb{P}(z \leq 10)$ si no eclosionan 10 huevos (exactamente), pues hay que acumular las probabilidades de $k = \{1, 2 .. 10\}$ y para ello se tendria que fijar el número de huevos se pondra "fijemos" $n=10$ y con ello veremos cual es la probabilidad de que eclosionen de 1 hasta 10 huevos, esto independiente de los huevos eclosionados. eventualmente la n tambien se podria cambiar, para la simulacion fijamos $n=10$ con la siguiente fórmula.

$$= \sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k} \cdot e^{-\theta} \left[\frac{\theta^{10}}{10!}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{\cancel{10!}}{k!\,(10-k)!} p^k (1-p)^{10-k} e^{-\theta} \cdot \left(\frac{\theta^{10}}{\cancel{10!}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k!\,(10-k)!} p^k (1-p)^{10-k} e^{-\theta} \cdot \theta^{10}$$

con esto tenemos la proba de $\mathbb{P}(z \leq 10)$ cuando se pusieron 10 huevos.

8.- El problema de la caja de fósforos de Banach. En todo momento Banach lleva 2 cajas de fósforos: 1 en su bolsillo izquierdo y 1 en su bolsillo derecho. Cada vez que necesita un fósforo, es igualmente probable que lo saque de cualquier bolsillo. Considere el momento en que Banach descubre por primera vez que una de sus cajas de fósforos está vacía. Si se supone que ambas cajas de fósforos contenían inicialmente N fósforos ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente K fósforos, $K = 0, 1, \dots, N$ en la otra caja?

Consideremos el caso en que una de las cajas tiene un número ilimitado de fósforos s.p.g sea esta caja la derecha. Sea M el número de fósforos que Banach sacó de la caja derecha antes de que la de la izquierda quedará vacía. Cuando la caja de la izquierda se ha quedado vacía Banach ha escogido esa caja $(N+1)$ veces. Entonces M es el número de éxitos $(N+1)$ antes de los fracasos en los ensayos Bernoulli con $p = 1/2$ (ya que escoger un fósforo de alguna caja es igualmente probable) por lo que tiene distribución binomial negativa entonces

$$\mathbb{P}[M=m] = \binom{N+m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1+m} \qquad m \in \mathbb{Z}^+$$

Consideremos ahora que ambas cajas tienen un número limitado de fósforos. Ambas cajas tienen la misma probabilidad de vaciarse primero. Sea X la v.a. que denota el número de fósforos que quedan en la caja no vacía. Para que alguna caja quede vacía deben ocurrir $N-K$ fracasos (elecciones de la caja no vacía) antes de los $N+1$ éxitos. Así

$X \sim BinNeg(N+1, 1/2)$

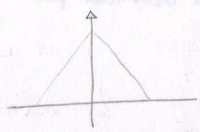
$$\mathbb{P}[X=K] = 2\,\mathbb{P}[X=N-K] = \binom{2N-K}{N-K}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-K}$$

Ejercicio 9.

Sea X la variable aleatoria real con densidad.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1+x & \text{si } x \in [-1,0] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función de densidad que toma valores en el sig intervalo



$F(x)$ función de repartición.

a) Calcular su función de repartición F_X

$F(x) = 0$ si $x < -1$ y $F(x) = 0$ si $x \geq 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Falta ver

Si $x \in [-1, 0)$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} (1+t)\,dt = t + \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{x}$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \left[-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right]$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \left[-1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \left[-\frac{1}{2}\right] = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}$$

Si $x \in [0,1)$ tenemos que:

$$F(x) = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} (1-t)\,dt = \int_{-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{0}^{x} (1-t)\,dt$$

$$= t + \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \int_0^x (1-t)\,dt = -1 + \frac{(-1)^2}{2} + \int_0^x (1-t)\,dt$$

$$= -\left[-1 + \frac{1}{2}\right] + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]\Big|_0^x = \frac{1}{2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}$$

Teniendo esto en cuenta la función de repartición se define de la siguiente manera.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) Calcular la Esperanza y Varianza de X

Para el caso continuo la esperanza se calcula como $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

$$\Rightarrow E(X) = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x + x^2\,dx + \int_0^1 x - x^2\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

$$= 0 - \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= 0 - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} = 0$$ La esperanza de X es cero.

Para una variable aleatoria continua tenemos que

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx.$$

donde μ es la esperanza de X

$$\Rightarrow Var(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx.$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2+x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^2-x^3\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1}$$

$$= -\left[\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^4}{4}\right] + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= -\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow Var[X] = \frac{1}{6}$$

ⓒ Calcular $\mathbb{P}[X \leq \frac{1}{4}, X^2 \leq \frac{1}{4}]$

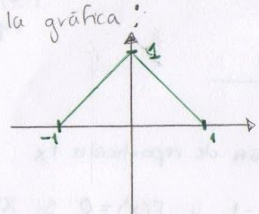
para esto ocuparemos probabilidad geometrica para ver de que forma se puede obtener la probabilidad

Para que pase que $X^2 \leq \frac{1}{4}$ tenemos que

$-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}$ y tenemos ademas que $X \leq \frac{1}{4}$.

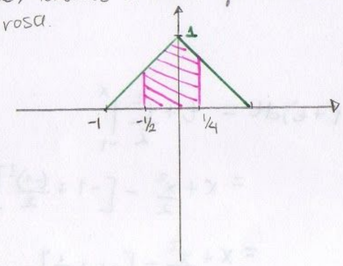
$\therefore -\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}$

la funcion de densidad esta definida por "cachos" recordando la gráfica:



la funcion de densidad esta definida de $[-1,0]$ y $[0,1]$ además, $\mathbb{P}[X \leq \frac{1}{4}, X^2 \leq \frac{1}{4}] = \mathbb{P}[-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}]$

por lo que, tenemos entonces que calcular la siguente área en rosa.



Por ello calculamos lo siguiente:

$$\int_{-1/2}^{0} 1+x\,dx + \int_{0}^{1/4} 1-x\,dx = \mathbb{P}[-\tfrac{1}{2} \leq X \leq \tfrac{1}{4}]$$

$$= x + \frac{x^2}{2} \Big|_{-1/2}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2} \right] \Big|_{0}^{1/4}$$

$$= -\left[\frac{1}{2} + \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2} \right] + \left[\frac{1}{4} - \frac{(1/4)^2}{2} \right]$$

$$= +\frac{1}{2} \quad \frac{1/4}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1/16}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{19}{32} \quad \Rightarrow \mathbb{P}[-1/2 \le X \le 1/4] = \frac{19}{32} \approx 0.593$$

d) Determinar la función de repartición F_Y de la v.a $Y = X^2$ al ser de esta forma tenemos que

$Y(\Omega) = [0,1]$, $\mathbb{P}[Y \le y] = \mathbb{P}[X^2 \le y]$

Vamos a acotar según el cambio y valor de x^2

$\mathbb{P}[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}]$

Una forma de obtener la función de distribución es:

$F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = F_Y(y)$, $y \ge 0$

Sustituimos y derivamos

$$\Rightarrow F'_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(1-\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}(1-\sqrt{y})$$

$$= \frac{2(1-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} = \frac{1-\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \quad y \in [0,1]$$

Ahora recordemos que:

$y \in [0,1]$

Para $y < 0$ tenemos que $F_Y(y) = 0$

Para $y \in [0,1)$ Para $y \ge 1$ $F_Y(y) = 1$

$$F_Y(y) = \int_0^y f(u)\,du = \int_0^y \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{y} - y$$

Por lo tanto:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{Si } y < 0 \\ 1 & \text{Si } y \ge 1 \\ 2\sqrt{y} - y & 0 \le y < 1 \end{cases}$$

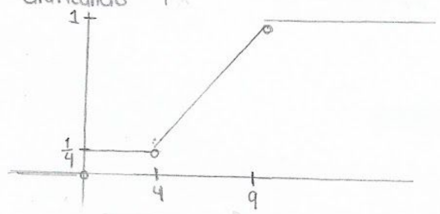
$\boxtimes$

10- Sea F la función dada por:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\in(-\infty,0) \\ 1/4 & x\in[0,4) \\ 3/40(x+1) & x\in[4,9) \\ 1 & x\in[9,\infty) \end{cases}$$

Demuestra que existe una variable X, tal que $F_X=F$ y encuentra la distribución de $Y=\sqrt{X}$

Graficando F_X



•) A partir de la gráfica sabemos que F verifica:

i) ser no decreciente

ii) es continua por la derecho

iii) $\lim_{x\downarrow-\infty} F_X(x)=0.$

Por un teorema visto en clase sabemos que F es la función de repartición de una v.a.

$\therefore\ \exists\ X$ v.a. tq $F_X=F$.

•) Para $Y=\sqrt{X}$, el rango de Y está dado por:

$Y: X \longrightarrow \sqrt{X}$

$(-\infty,0) \longrightarrow (-\infty,0)$

$[0,4) \longrightarrow [0,2)$

$[4,9) \longrightarrow [2,3)$

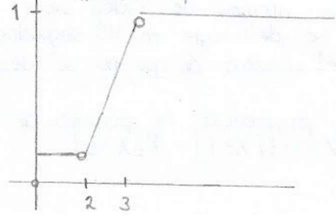
$[9,\infty) \longrightarrow [3,\infty)$

$\mathbb{P}(Y\le y)=\mathbb{P}(X\le y^2)=F_X(y^2)$

Así

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y\in(-\infty,0) \\ 1/4 & y\in[0,2) \\ \frac{3}{40}(y^2+1) & y\in[2,3) \\ 1 & y\in[3,\infty) \end{cases}$$

Gráfica F_Y



Ejercicio 11

$X_0, \dots X_n$ v.a independientes $X_i \sim unif[0,1]$

a) $0 \le K \le n$ $U_K = \min\{X_0, \dots X_n\}$.

hay que ver que tenga una densidad U_K.

Calculando la función de distribución de U_K.

$\mathbb{P}(U_K \le x)$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Lo veremos con el complemento.

$$\mathbb{P}(U_K \le x) = 1 - \mathbb{P}(U_K > x) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_0 > x \cap X_1 > x \cap \dots \cap X_K > x)$$

Y como son independientes.

$$= 1 - \prod_{i=0}^{K} \mathbb{P}(X_i > x)$$

$$= 1 - \prod_{i=0}^{K} (1 - \mathbb{P}(X_i \le x))$$

Y sabemos que $X_i \sim unif[0,1]$

$x \in [0,1]$ donde $a=0$; $b=1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \ge b \end{cases}$$

$X \sim unif[a,b]$

$$\Rightarrow \frac{x-0}{1-0} = \frac{x}{1}$$

$$= 1 - \prod_{i=0}^{K} \left(1 - \frac{x}{1}\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=0}^{K} (1-(x-1)) = 1 - (1-x)^{K+1}$$

esto cuando $x \in [0,1]$ falta ver par $x<0$

y como es uniforme:

Si $x<0$ $F_{U_K}(x) = 0$ por que es uniforme.

Si $x>1$ $F_{U_K}(x) = 1$

$$\Rightarrow F_{U_K}(x) = \begin{cases} 1-(1-x)^{K+1} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

y F_{U_K} es derivable, menos en los puntos 1 y 0. ➡ la función de densidad es la derivada de F_{U_K}'.

$$f_{U_K}(x) = (K+1)[-(1-x)]^K = (K+1)(x-1)^K$$

en el intervalo $[0,1]$ de x.

Sea $\underline{N \sim Bin(n, 1/2)}$ Dem. $U = \min\{X_0, \dots, X_N\}$ admite una densidad.

b Hay que calcular la función de distribución U

$$\mathbb{P}(U \le x) = \bigcup_{K=0}^{n} \{U \le x, N = K\}$$

$x \in \mathbb{R}$

$$\{U \le x\} \cap \Omega = \{U \le x\} \cap \bigcup_{K \in F_X} \{X = K\}$$

Por propiedades tenemos que

$$\mathbb{P}(U \le x) = \sum_{K=0}^{n} \mathbb{P}(N=K)\mathbb{P}(U \le x \mid N=K)$$

por definición de la probabilidad condicional.

$$= \sum_{K=0}^{n} \mathbb{P}(N=K)\mathbb{P}(U_K \le x).$$

esto es por $\mathbb{P}(U \le x \mid N=K)$ pues ya tienes que resulto K y eso equivale a $\mathbb{P}(U_K \le x)$

$$= \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} \frac{1}{2^n} \left(1 - (1-x)^{K+1}\right)$$

■

Ejercicio 12. (b)

Sea $U \sim unif(0,1)$ y U_i v.a independientes con $U_i \sim U$ Encuentra la ley de las sigientes v.a.

1) $Y := a + (b-a)U \quad a < b$

$U_i \overset{ind.}{\sim} unif(0,1)$

Nota

Si F_X es estrictamente creciente y continua y la inversa generalizada del inciso (a) es la inversa

(a)

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(a+(b-a)U \leq x)$$
$$= \mathbb{P}(U(b-a) \leq x-a)$$
$$= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{x-a}{b-a}\right) = \frac{x-a}{b-a}.$$

$Y \sim uniforme(a,b).$

(2) $Y = -\frac{Ln U}{\lambda} \quad \lambda > 0$

$U \in (0,1)$

$$y = \frac{-Ln U}{\lambda} \Rightarrow y\lambda = -Ln U$$

$$\Rightarrow -\lambda y = Ln U$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda y} = U.$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\lambda y} = 1 - U$$

$1-U \sim unif(0,1)$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

funcion de distribucion exponencial.

$Y \sim exp(\lambda).$

(3) $Y = a\tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)$ como la funcion de distribucion de U es creciente. entonces basta con despejar U se la sig. ecuacion. $a > 0$

$$y = a\tan\left(\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$y/a = \tan\left(\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\arctan\left(\frac{y}{a}\right) = \pi\left(u - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y}{a}\right) = u - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{1}{2} = u.$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y}{a}\right) + \frac{1}{2}$$

y para calcular la función de densidad. se deriva $F_Y(y)$ entonces

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1 + \frac{y^2}{a^2}}\right)$$

Y si $a=1$ entonces es una funcion de densidad Cauchy $(a>0)$.

13: La vida útil de los atomos de radón sigue una ley exponencial. La probabilidad de que un átomo de radón no se desintegre en 40 segundos sabiendo que no se desintegra en 12 s es $\sqrt{2}/2$ ¿Cuál es la probabilidad de que no se desintegre antes de los 76s sabiendo que no se descompone en 20?

(Sugerencia: Usa la propiedad de pérdida de la variable aleatoria exponencial:

$$\mathbb{P}[X > s+t \mid X > t] = \mathbb{P}[X > s]$$

para todo $s, t \geq 0$)

Sea

$X =$ La vida útil de los átomos de radón.

Sabemos que $\mathbb{P}[X > 40] = \sqrt{2}/2$ se da únicamente si $(X > 12)$. Utilizando la propiedad de perdida de la v.a. exponencial podemos escribirlo como

$$\mathbb{P}[X > 40 \mid X > 12] = \frac{\sqrt{2}}{2} = \mathbb{P}[X > 28]$$

Queremos obtener:

$$\mathbb{P}[X > 76 \mid X > 20] = \mathbb{P}[X > 56]$$

Como X tiene una distribución exponencial con parametro $\lambda > 0$, $X \sim exp(\lambda)$, su función de distribución es

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$

Buscamos el complemento, la función de sobrevivencia

$$\mathbb{P}[X > 56] = 1 - \mathbb{P}[X \leq 56]$$
$$= 1 - (1 - e^{-\lambda 56})$$
$$= e^{-\lambda 56}$$

Así

$$\mathbb{P}[X > 76 \mid X > 20] = (e^{-\lambda 28})^2$$

15.- Una fábrica, fabrica dispositivos electrónicos que constan de dos componentes A y B cuyas operaciones son independientes entre sí y cuyas vidas (en horas) son variables aleatorias X_1 y X_2 que siguen una ley exponencial de parámetros respectivos θ_1 y θ_2. Un aparato funciona si y solo si las dos componentes funcionan. Denótese por T a la duración de vida de un aparato. Encuentra la ley de T.

Tenemos lo siguiente

$$X_1 \sim Exp(\theta_1)$$
$$X_2 \sim Exp(\theta_2)$$

y sabemos que un dispositivo funciona si y solo si los 2 componentes funcionan y T denota la duración de vida. entonces tenemos:

$$T = \min(X_1, X_2)$$

Ahora

$$P(T < t) = P(\min(X_1, X_2) < t)$$

$$= 1 - P(\min(X_1, X_2) > t)$$

$$= 1 - P(X_1 > t) \cdot P(X_2 > t)$$

como X_1 y X_2 son independientes

$$= 1 - e^{t\theta_1} e^{t\theta_2}$$

$$P(T<t) = 1 - e^{(\theta_1+\theta_2)t}$$

$\therefore$ Por la funcion de distribución, $T \sim Exp(\theta_1+\theta_2)$

el promedio de vida del dispositivo es $\dfrac{1}{\theta_1+\theta_2}$