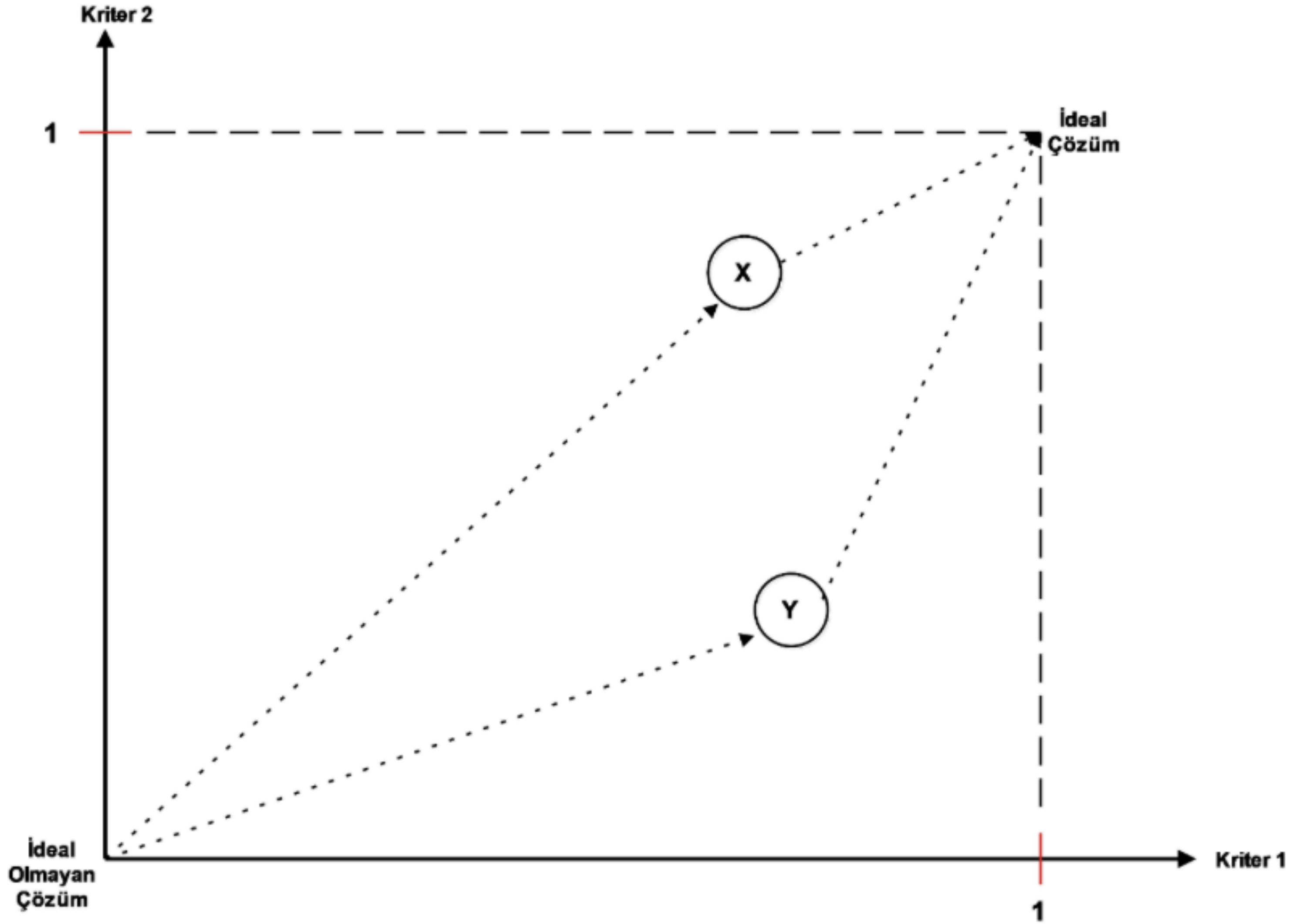
Karar Verme Yöntemleri – TOPSIS Yöntemi

- TOPSIS – Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution
- 1981 yılında Hwang ve Yoon tarafından geliştirilmiş çok amaçlı karar verme yöntemlerinden birisidir.
- Karar verme için kullanılan birçok yöntemden bir tanesidir ve pek çoğuna göre daha basittir.
- Yöntemin temeli alternatiflerin belirli kriterler doğrultusunda sıralanması üzerine dayanır.

Karar Verme Yöntemleri – TOPSIS Yöntemi

- Bu yöntem kullanılarak karar verirken seçilen bir alternatifin ideal çözüme yakın olması ve ideal olmayan çözüme(negatif ideal) de uzak olması beklenir.
  - Amaç kar elde etmek - getirinin maksimize edilmesi ideal çözüme yakınlık anlamına gelir.
  - Amaç maliyet – maliyetin minimize edilmesi negatif ideal çözüme uzaklık anlamına gelir.
- Yani ulaşılmak istene hedef için ideal çözüme yakınlık bekleniyorsa, negatif ideal çözüme en uzak olan seçilir.

Karar Verme Yöntemleri – TOPSIS Yöntemi



Topsis yönteminin adımları

1. Karar matrisinin oluşturulması
2. Normalize matrisin oluşturulması
3. Ağırlıklandırılmış normalize matrisi oluşturulması
4. İdeal ve Negatif İdeal çözüm değerlerinin belirlenmesi
5. İdeal ve Negatif İdeal noktalara olan uzaklık değerlerinin belirlenmesi
6. İdeal Çözüme göre yakınlığın hesaplanması

1. Adım – Karar matrisinin oluşturulması

- Karar vericiler tarafından oluşturulur.
- mxn boyutundadır.
  - m – alternatifler (karar noktaları)
  - n - faktörler

$$A_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Adım – Normalize matrisin oluşturulması

- Önce her bir a_{ij} değerlerinin $(w_{11}, w_{21}, w_{31} \ldots w_{m1})$ kareleri alınarak bu değerlerin toplamından oluşan sütun toplamları elde edilir.

- Sonra her a_{ij} değeri ait olduğu sütun toplamının kareköküne bölünerek normalizasyon işlemi tamamlanır.

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^2}}$$

2. Adım – Normalize matrisin oluşturulması

$$R_{ij}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

3. Adım – Ağırlıklandırılmış Normalize matrisin oluşturulması

- Normalize edilmiş matrise ait her r_{ij} değeri ağırlıklandırılarak w_{ij} ağırlık değerleri kullanılarak ağırlıklandırılır. Ağırlık değerleri faktörlerin karar vericiye göre olan önem derecesine göre yapıldığından göreceli (subjektif) değerlerdir.

- Normalize matris ile elde edilen r_{ij} değerleri w_{ij} ağırlıkları ile çarpılarak ağırlıklandırılmış normalize matris (V matrisi) elde edilir.

- w_{ij} değer toplamlarının 1'e eşit olmalıdır.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

3. Adım – Ağırlıklandırılmış Normalize matrisin oluşturulması

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1j} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{i1} & v_{i2} & & v_{ij} & & v_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mj} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 r_{11} & w_2 r_{12} & \cdots & w_j r_{ij} & \cdots & w_n r_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_1 r_{i1} & w_2 r_{i2} & & w_j r_{ij} & & w_n r_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_1 r_{m1} & w_2 r_{m2} & \cdots & w_j r_{mj} & \cdots & w_n r_{mn} \end{bmatrix}$$

4. Adım - İdeal ve Negatif İdeal çözüm değerlerinin belirlenmesi

Problemin yapısına bağlı kalmak koşuluyla yani amacımız maksimizasyon ise her bir kolona ait maksimum değerler tespit edilir. Bunlar aranan ideal çözüm değerleridir.

Maksimum değerlerin ardından, her kolona ait minimum değerler belirlenmelidir. Bu değerler negatif ideal çözüm değerleridir.

Eğer amacımız minimizasyon ise elde edilen değerler tam tersi olacaktır.

4. Adım - İdeal ve Negatif İdeal çözüm değerlerinin belirlenmesi

- İdeal ve negatif ideal çözüm değerlerine ait notasyon:

$$A^{+} = \{(\max_{i} v_{ij} \mid j \in J), (\min_{i} v_{ij} \mid j \in J^{'}) \mid i = 1,2,\dots m\}$$

$$= \{v_1^{+}, v_2^{+}, \dots, v_j^{+}, \dots, v_n^{+}\} \leftarrow$$ **Her kolona ait maksimum değerler**

$$A^{-} = \{(\min_{i} v_{ij} \mid j \in J), (\max_{i} v_{ij} \mid j \in J^{'}) \mid i = 1,2,\dots m\}$$

$$= \{v_1^{-}, v_2^{-}, \dots, v_j^{-}, \dots, v_n^{-}\} \leftarrow$$ **Her kolona ait minimum değerler**

5. Adım - İdeal ve Negatif İdeal noktalara olan uzaklık değerlerinin belirlenmesi

- İdeal ve ideal olmayan noktalara olan uzaklık değerleri hesaplanırken, koordinat düzleminde x ve y koordinatları bilinen iki nokta arasındaki mesafenin bulunmasında kullanılan yöntem kullanılır.

- İdeal uzaklık:

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^+)^2} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

Negatif ideal uzaklık:

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_{ij} - v_j^-)^2} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

- Karar sayısı kadar S_i^+ ve S_i^- olmalıdır.

6. Adım - İdeal Çözüme göre yakınlığın hesaplanması

- Son adım göreli yakınlığın hesaplanmasıdır (relative closeness).
- Bunun için ideal ve ideal olmayan noktalara uzaklıklardan yararlanılır.
- İdeal çözüme göreli yakınlık ile C_i^* ile gösterilir.

$$0 <= C_i^* <= 1$$

6. Adım - İdeal Çözüme göre yakınlığın hesaplanması

- İlgili karar noktasının ideal çözüme mutlak çözüm yakınlığını gösterirken, ise ilgili karar noktasının negatif ideal çözüme mutlak yakınlığını gösterir.
  - $C_i^* = 1$ ise ilgili karar noktasının ideal çözüme mutlak çözüm yakınlığını gösterir
  - $C_i^* = 0$ ise ilgili karar noktasının negatif ideal çözüme mutlak çözüm yakınlığını gösterir

$$c_i^* = \frac{S_i^-}{(S_i^+ + S_i^-)}, \quad 0 < c_i^+ < 1, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$c_i^* = 1 \quad if \quad A_i = A^+$$

$$c_i^* = 0 \quad if \quad A_i = A^-$$

Örnek: Ofis yeri seçimi

1. Adım – Karar matrisinin oluşturulması

Ağırlıklar	0.1	0.4	0.3	0.2
	Lokasyon	Hukuki konular	Mevcut altyapi	Arsa bedeli
O1	7	9	9	8
O2	8	7	8	7
O3	9	6	8	9
O4	6	7	8	6

Örnek: Ofis yeri seçimi

2. Adım – Normalize matrisin oluşturulması

Ağırlıklar	0.1	0.4	0.3	0.2
	Lokasyon	**Hukuki konular**	**Mevcut altyapi**	**Arsa bedeli**
O1	$7/\sqrt{(7^2+8^2+9^2+6^2)}$	$9/\sqrt{(9^2+7^2+6^2+7^2)}$	$9/\sqrt{(9^2+8^2+8^2+8^2)}$	$8/\sqrt{(8^2+7^2+9^2+6^2)}$
O2	$8/\sqrt{(7^2+8^2+9^2+6^2)}$	$7/\sqrt{(9^2+7^2+6^2+7^2)}$	$8/\sqrt{(9^2+8^2+8^2+8^2)}$	$7/\sqrt{(8^2+7^2+9^2+6^2)}$
O3	$9/\sqrt{(7^2+8^2+9^2+6^2)}$	$6/\sqrt{(9^2+7^2+6^2+7^2)}$	$8/\sqrt{(9^2+8^2+8^2+8^2)}$	$9/\sqrt{(8^2+7^2+9^2+6^2)}$
O4	$6/\sqrt{(7^2+8^2+9^2+6^2)}$	$7/\sqrt{(9^2+7^2+6^2+7^2)}$	$8/\sqrt{(9^2+8^2+8^2+8^2)}$	$6/\sqrt{(8^2+7^2+9^2+6^2)}$

Örnek: Ofis yeri seçimi

3. Adım – Ağırlıklandırılmış normalize matrisi oluşturulması

Ağırlıklar	0.1	0.4	0.3	0.2
	Lokasyon	Hukuki konular	Mevcut altyapi	Arsa bedeli
O1	0.1*0.46=0.046	0.4*0.61=0.244	0.3*0.54=0.162	0.2*0.53=0.106
O2	0.1*0.53=0.053	0.4*0.48=0.192	0.3*0.48=0.144	0.2*0.46=0.092
O3	0.1*0.59=0.059	0.4*0.41=0.164	0.3*0.48=0.144	0.2*0.59=0.118
O4	0.1*0.40=0.040	0.4*0.48=0.192	0.3*0.48=0.144	0.2*0.40=0.080

Örnek: Ofis yeri seçimi

3. Adım – Ağırlıklandırılmış normalize matrisi oluşturulması

V=

Ağırlıklar	0.1	0.4	0.3	0.2
	Lokasyon	Hukuki konular	Mevcut altyapi	Arsa bedeli
O1	0.046	0.244	0.162	0.106
O2	0.053	0.192	0.144	0.092
O3	0.059	0.164	0.144	0.118
O4	0.040	0.192	0.144	0.080

Örnek: Ofis yeri seçimi

İdeal / Negatif İdeal çözüm değerlerinin belirlenmesi

A*=

Ağırlıklar	0.1	0.4	0.3	0.2
	Lokasyon	Hukuki konular	Mevcut altyapi	Arsa bedeli
O1	0.046	0.244	0.162	0.106
O2	0.053	0.192	0.144	0.092
O3	0.059	0.164	0.144	0.118
O4	0.040	0.192	0.144	0.080

Örnek: Ofis yeri seçimi

İdeal çözüm değerlerinin belirlenmesi

Ağırlıklar	0.1	0.4	0.3	0.2
	Lokasyon	Hukuki konular	Mevcut altyapi	Arsa bedeli
O1	0.046	0.244 ↑	0.162 ↑	0.106
O2	0.053	0.192	0.144	0.092
O3	0.059 ↑	0.164	0.144	0.118
O4	0.040	0.192	0.144	0.080 ↓

$A^{+}=$

$A^{*} = \{ \quad 0.059, 0.244, 0.162, 0.080 \quad \}$

Örnek: Ofis yeri seçimi

Negatif İdeal çözüm değerlerinin belirlenmesi

$A^{-}=$

Ağırlıklar	0.1	0.4	0.3	0.2
	Lokasyon	Hukuki konular	Mevcut altyapi	Arsa bedeli
O1	0.046	0.244	0.162	0.106
O2	0.053	0.192	0.144	0.092
O3	0.059	0.164	0.144	0.118
O4	0.040	0.192	0.144	0.080

$$A^{-} = \{ 0.040, 0.164, 0.144, 0.118 \}$$

Örnek: Ofis yeri seçimi

- Ideal çözümden uzaklık

$$A^{*} = \{ \quad 0.059, 0.244, 0.162, 0.080 \quad \}$$

$$S^{*} = \left[\quad \Sigma\, (v^{*}_{j} - v_{ij})^{2} \quad \right]^{1/2}$$

Örnek: Ofis yeri seçimi

- Ideal çözümden uzaklık

$$A^+ = \{ \quad 0.059,\ 0.244,\ 0.162,\ 0.080 \quad \}$$

$$S^+ = \left[\quad \Sigma\, (v^+_j - v_{ij})^2 \quad \right]^{1/2}$$

Ağırlıklar	**0.1**	**0.4**	**0.3**	**0.2**
	Lokasyon	**Hukuki konular**	**Mevcut altyapi**	**Arsa bedeli**
O1	$(0.046-0.059)^2$	$(0.244-0.244)^2$	$(0.162-0.162)^2$	$(0.106-0.080)^2$
O2	$(0.053-0.059)^2$	$(0.192-0.244)^2$	$(0.144-0.162)^2$	$(0.092-0.080)^2$
O3	$(0.059-0.059)^2$	$(0.644-0.244)^2$	$(0.144-0.162)^2$	$(0.118-0.080)^2$
O4	$(0.040-0.059)^2$	$(0.192-0.244)^2$	$(0.144-0.162)^2$	$(0.080-0.080)^2$

Örnek: Ofis yeri seçimi

- Ideal çözümden uzaklık

$$A^{+} = \{ \quad 0.059, 0.244, 0.162, 0.080 \quad \}$$

$$S^{+} = \left[\sum (v^{+}_{j} - v_{ij})^2 \right]^{1/2}$$

Ağırlıklar	0.1	0.4	0.3	0.2
	Lokasyon	Hukuki konular	Mevcut altyapi	Arsa bedeli
O1	$(0.046-0.059)^2$	$(0.244-0.244)^2$	$(0.162-0.162)^2$	$(0.106-0.080)^2$
O2	$(0.053-0.059)^2$	$(0.192-0.244)^2$	$(0.144-0.162)^2$	$(0.092-0.080)^2$
O3	$(0.059-0.059)^2$	$(0.644-0.244)^2$	$(0.144-0.162)^2$	$(0.118-0.080)^2$
O4	$(0.040-0.059)^2$	$(0.192-0.244)^2$	$(0.144-0.162)^2$	$(0.080-0.080)^2$

Her alternatif için satırlari topla

Örnek: Ofis yeri seçimi

Ideal çözümden uzaklık

$$A^{+} = \{ \quad 0.059,\ 0.244,\ 0.162,\ 0.080 \quad \}$$

$$S^{+} = \left[\sum (v^{+}_{j} - v_{ij})^{2} \right]^{1/2}$$

	$\sum (v^{+}_{j} - v_{ij})^{2}$	$S^{*} = \left[\sum (v^{+}_{j} - v_{ij})^{2} \right]^{1/2}$
O1	0.000845	0.029
O2	0.003208	0.057
O3	0.008186	0.090
O4	0.003389	0.058

Örnek: Ofis yeri seçimi

İdeal ve Negatif İdeal çözüm değerlerinin belirlenmesi

Negatif Ideal çözümden uzaklık

$$A^- = \{ 0.040, 0.164, 0.144, 0.118 \}$$

$$S^- = \left[\sum (v^-_j - v_{ij})^2 \right]^{1/2}$$

	$\sum (v^-_j - v_{ij})^2$	$S^- = \left[\sum (v^-_j - v_{ij})^2 \right]^{1/2}$
O1	0.006904	0.083
O2	0.001629	0.040
O3	0.000361	0.019
O4	0.002228	0.047

Örnek: Ofis yeri seçimi

$$c_i^* = \frac{S_i^-}{(S_i^+ + S_i^-)}, \quad 0 < c_i^+ < 1, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$c_i^* = 1 \quad \text{if} \quad A_i = A^+$$

$$c_i^* = 0 \quad \text{if} \quad A_i = A^-$$

İdeal çözüme yakınlığın hesaplanması

S^-_I

	$S^-_I = (S^+_I + S^-_I)$	C^*_i
O1	0.083/0.112	0.74 en iyi
O2	0.040/0.097	0.41
O3	0.019/0.109	0.17 en kötü
O4	0.047/0.105	0.45