ПОРОЖДАЮЩАЯ МАТРИЦА

Порождающая матрица G_N полярного кода – квадратная матрица порядка N, которая является произведением перестановочной матрицы B_N на n-ю степень кронекерова произведения матрицы

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

то есть $G_N = B_N F^{\otimes n}$, где значок $\otimes$ обозначает кронекерово произведение матриц.

Кронекеровым произведением квадратной матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ порядка m на квадратную матрицу $D = \left(d_{ij}\right)$ порядка k (обозначается, как $A \otimes D$) называется квадратная матрица C порядка mn вида

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}D & \cdots & a_{1n}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}D & \cdots & a_{mn}D \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Матрица B_N вычисляет по формуле

$$B_N = R_N \cdot \left(E_2 \otimes R_{N/2}\right) \cdot \left(E_4 \otimes R_{N/4}\right) \dots (E_{N/2} \otimes R_2), \tag{3}$$

где R_N $(i = 1, 2, \dots)$ есть подстановочная матрица такая, что

$$\left(s_1, s_2, \dots, s_{2^i}\right) R_{2^i} = \left(s_1, s_3, \dots, s_{2^i-1}, s_2, s_4, \dots, s_{2^i}\right), \tag{4}$$

а E_{2^i} – единичная матрица порядка 2^i.

Пример. Построим порождающую матрицу кода длины $N = 2^3$. Найдём матрицу F (вычисление произведения проводим справа налево):

$$F^{\otimes} \quad = F \otimes F \otimes F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Матрица R_8 удовлетворяет условию

$$(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8)R_8 = (s_1, s_3, s_5, s_7, s_2, s_4, s_6, s_8). \qquad (6)$$

Чтобы её построить, запишем постановку α, поместив в её первую строку индексы перестановки $(s_1, s_3, s_5, s_7, s_2, s_4, s_6, s_8)$, а во вторую – индексы перестановки $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8)$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

В матрице R_8 единицы будут стоять на позициях $(1,1)$, $(3,2)$, $(5,3)$, $(7,4)$, $(2,5)$, $(4,6)$, $(6,7)$, $(8,8)$, а на остальных местах – нули:

$$R_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Аналогично, вычислим матрицы R_4 и R_2:

$$R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Следовательно,

$$B_8 = R_8 \cdot (E_2 \otimes R_4) \cdot (E_4 \otimes R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Порождающая матрица будет равна

$$G_8 = B_8 F^{\otimes 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$