

ПАРАМЕТРЫ БХАТТАЧАРЬИ

Параметры Бхаттачарьи необходимы для определения информационных и замороженных бит кодируемого вектора.

Пусть W – канал с двоичным входным алфавитом $X = \{0, 1\}$, конечным выходным алфавитом $Y = \{y_1, \dots, y_s\}$ и переходными вероятностями $W(y_j|x_i)$, $1 \leq j \leq s$, $1 \leq i \leq 2$. Тогда выражение

$$Z(W) = \sum_{y \in Y} \sqrt{W(y|0)W(y|1)} \quad (1)$$

называется параметром Бхаттачарьи канала W . Число $Z(W)$ определяет верхнюю границу вероятности принятия ошибочного решения по методу максимального правдоподобия. В теории полярных кодов предполагается, что i -й бит каждого сообщения $N = 2^n$, где $n \in \mathbb{N}$, передаётся по координатному каналу $W_N^{(i)} : X \rightarrow Y^N \times X^{i-1}$, $1 \leq i \leq N$, с переходными вероятностями

$$W_N^{(i)}(y, u'|u_i) = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{u'' \in X^{N-i}} W^N(y|uG_N), \quad (2)$$

где $u = u'(u_i)u''$ – конкатенация векторов u' , (u_i) и u'' , G_N – поляризационная матрица с ядром Арикана, W^N – декартова степень канала W .

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, причём $m < n$ и $p \in [0, 1]$. Тогда значения параметра Бхаттачарьи от канала $W_N^{(i)}$ рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} Z(W_{2^n}^{(2^m+1)}) &= (1-p)^{-2^m}((A+B)^{2^m} - B^{2^m}) + \\ &+ \sqrt{\left(\frac{1+(1-2p)^{2^{n-m}}}{2}\right)^{2^{m+1}} - ((1-p)^2 - p^2)^{2^n}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$A = \frac{p(1-p)}{2}(1+(1-2p)^{2^{n-m}-1}) + \frac{(1-p)^2}{2}(1+(1-2p)^{2^{n-m}-1}), \quad (4)$$

$$B = \frac{1-p}{2}(1+(1-2p)^{2^{n-m}}). \quad (5)$$

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ЗАМОРОЖЕННЫЕ БИТЫ

Зафиксируем целое число k ($1 \leq k \leq N$) и разобьём множество $\{1, 2, \dots, N\}$ на два непересекающихся подмножества A и A' мощности k и $N-k$ соответственно следующим образом: для каждого $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ вычислим параметр

Бхаттачарьи $W_N^{(i)}$ (см. п. 1). Упорядочим числа $W_N^{(i)}$ по возрастанию (неубыванию):

$$W_N^{(i_1)} \leq W_N^{(i_2)} \leq \dots \leq W_N^{(i_k)} \leq \dots \leq W_N^{(i_N)}. \quad (6)$$

В множество A включим числа i_1, i_2, \dots, i_k , в множество A' включим числа $i_{k+1}, i_{k+2}, \dots, i_n$.

Рассмотрим произвольный вектор $u = (u_1, \dots, u_N)$. Координаты (позиции) $u_{i_{k+1}}, \dots, u_{i_N}$ вектора u будем называть замороженными и приписывать им определённые значения: 0 и 1. Координат (позиции) $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}$ будем называть информационными и записывать в них биты передаваемого сообщения. Отношение

$$\frac{k}{N} \quad (7)$$

называется скоростью кода и обозначается через R .

Пример. Пусть $k = 4$. Значения параметров Бхаттачарьи приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры Бхаттачарьи для $k = 4$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$W_N^{(i)}$	0,9858	0,8322	0,7843	0,3486	0,7393	0,2850	0,2221	0,0168

Упорядочим параметры по возрастанию:

$$W_N^{(8)} < W_N^{(7)} < W_N^{(6)} < W_N^{(4)} < W_N^{(5)} < W_N^{(3)} < W_N^{(2)} < W_N^{(1)}. \quad (8)$$

Значит $A = \{4, 6, 7, 8\}$, $A' = \{1, 2, 3, 5\}$.