Suites récurrentes, limites

UnSavantFou

1 Introduction

Les suites récurrentes sont des suites dont une valeur s'exprime à partir de la précédente. On les définit avec un premier terme et une relation de récurrence. Elles ont la particularité que, pour calculer un terme, on doive connaître le terme précédent. Ainsi pour avoir le 6e terme de la suite, on doit connaître le 5e ; mais pour connaître le 5e on doit connaître le 4e. En continuant de même on doit donc pour connaître le 6e terme connaître les termes 5,4,3,2 et 1.

1.1 Exemple

Soit u_n la suite telle que :

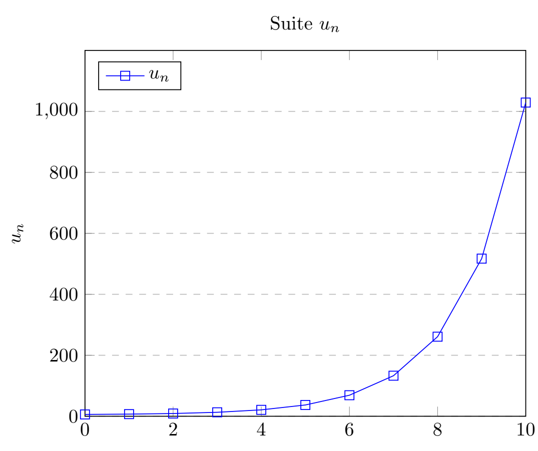
$$\begin{cases} u_n = 2u_n - 5 & \text{définition de récurrence} \\ u_0 = 6 & \text{définition du premier terme} \end{cases}$$

On peut calculer les 10 premières valeurs de u_n en fonction de n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	6	7	9	13	21	37	69	133	261	517	1029

On observe que la suite semble croissante.

Puis on peut tracer les 10 premières valeurs de la suite u_n en fonction de n :



On peut confirmer avec des tests que la suite semble croissante sur l'infini.

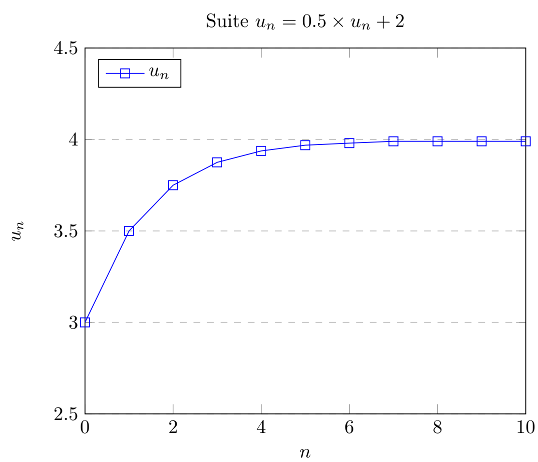
2 Limite d'une suite récurrente

2.1 Présentation

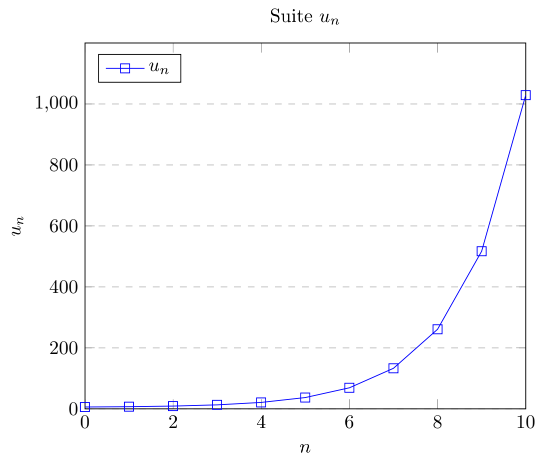
La limite d'une suite est la valeur que la suite prend en une valeur qui peut être finie comme infinie. On note $\lim_{n\to a} u_n$ la valeur que prend u_n quand n tend vers a. Cette limite peut être finie en un ou plusieurs points, infinie, comme indéfinie. Pour les suites, globalement on s'intéressera aux limites en l'infini soit : $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Ici nous verrons deux types de suites : les convergentes (ont au moins une limite finie) et les divergentes (tendent vers $+\infty$ et/ou $-\infty$).

Un exemple de suite convergente :



On observe que la suite semble converger en 4. Un exemple de suite divergente pourrait être la suite présenté dans l'**Exemple 1** :



Le but de ce dossier est de calculer la limite d'une suite récurrente convergente en un seul point. Nous allons déjà étudier à un type de suite récurrente spécifique, puis nous généraliserons.

2.2 Étude de cas

Dans ce chapitre, nous allons étudier les suites de type :

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{u_n + a} \\ u_0 = \sqrt{a} \qquad \text{avec } a \geq 1 \end{cases}$$

2.2.1 Définition d'une suite

Prenons par exemple $a = 20$. On obtient :

$$\begin{cases} u_n = \sqrt{u_n + 20} \\ u_0 = \sqrt{20} \end{cases}$$

2.2.2 Décortication

Maintenant, nous allons développer la suite pour calculer le 4e terme (pour illustrer la forme de la suite).

$$u_0 = \sqrt{20}$$
$$u_1 = \sqrt{u_0 + 20} = \sqrt{20 + \sqrt{20}}$$
$$u_2 = \sqrt{u_1 + 20} = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}$$
$$u_3 = \sqrt{u_2 + 20} = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}}$$
$$u_4 = \sqrt{u_3 + 20} = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}}}$$

On voit qu'à chaque fois, on "englobe" le terme d'avant, en y ajoutant 20. Faisons un petit détour et essayons de créer une poupée russe avec cette suite en tenant compte qu'une suite récurrente n'est qu'une suite imbriquée dans elle-même : on pose p une variable définie telle que : $p = \sqrt{20 + p}$. Au premier coup d'oeuil, on peut se dire qu'il n'y a aucun rapport avec la définition de la suite u_n précédente, mais si on développe ce terme on obtient ça :

$$p = \sqrt{20 + p}$$
$$p = \sqrt{20 + \sqrt{20 + p}} \qquad \text{On remplace le } p \text{ de la racine par } \sqrt{20 + p}$$
$$p = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + p}}} \qquad \text{On réitère}$$
$$p = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + p}}}} \qquad \text{Ce terme est très semblable à } u_4$$

On voit ici, qu'avec une simple définition, on peut créer une poupée russe très proche d'une suite récurrente. Il n'y a qu'une différence : on ne pourra jamais écrire cette formule en entier car elle est infinie. Et c'est là où on trouve l'intérêt de cette écriture : comme cette écriture suit l'expression de u_n et qu'elle est infinie, alors on peut l'exploiter pour calculer une limite à l'infinie. On s'occupe de la forme la plus simple de cette nouvelle expression en poupée russe : $p = \sqrt{20 + p}$.

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{20+p} \\ p^2 &= 20+p && \text{(il faut retenir que l'expression } 20+p \text{ doit être positive)} \\ p^2 - p - 20 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 81$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-(-1)+\sqrt{81}}{2 \times 1} = 5 \\ x_2 &= \frac{-(-1)-\sqrt{81}}{2 \times 1} = -4 && \text{On ne prend pas la solution négative} \end{aligned}$$

Et donc théoriquement la limite de la suite u_n est 5 d'après notre écriture en poupée russe car l'équation représente la relation entre le terme précédent et le suivant. En revérifiant graphiquement, on a bien $\lim_{n\to\infty} u_n = 5$.

2.2.3 Généralisation des expressions de forme $p = \sqrt{p+a}$

Soit v_n une suite telle que :

$$\begin{cases} v_n = \sqrt{v_n + a} \\ v_0 = \sqrt{a} \qquad \text{avec } a \geq 1 \end{cases}$$

En redéfinissant la suite v_n sous forme de poupée russe, on a :

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{p+a} \\ p^2 &= p+a \\ p^2 - p - a &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-a) = 1 + 4 \times a \\ x_1 &= \frac{-(-1)+\sqrt{1+4\times a}}{2\times 1} = \frac{1+\sqrt{1+4\times a}}{2} \\ x_2 &= \frac{-(-1)-\sqrt{1+4\times a}}{2\times 1} = \frac{1-\sqrt{1+4\times a}}{2} \end{aligned}$$

On ne prend pas x_2, car $\sqrt{1+4\times a} \geq 1$, or la solution doit être positive (si $\sqrt{1+4\times a} \geq 1$, alors $1-\sqrt{1+4\times a} \leq 0$). Donc si on a une suite de type $\sqrt{u_n+a}$, on peut calculer sa limite à partir de la formule $\frac{1+\sqrt{1+4\times a}}{2}$. On peut alors se demander si on peut trouver la valeur de a pour une suite w_n telle que $\lim_{n\to\infty} w_n = r$ avec r un réel. On a :

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} w_n \\ r &= \frac{1-\sqrt{1+4\times a}}{2} \\ 2r &= 1-\sqrt{1+4\times a} \\ (2r-1)^2 &= 1+4\times a \\ 4r^2-4r+1-1 &= 4\times a \\ r^2-r &= a \\ r(r-1) &= a \end{aligned}$$

Donc, ce que nous dit cette nouvelle formule ($r(r-1)=a$), c'est que l'on peut donner à n'importe quel nombre réel $r \geq 1$ une définition qui a la forme suivante : $r = \sqrt{a+\sqrt{a+....}}$ Mais ici il faut corriger une chose : ce n'est pas à **n'importe quel** nombre réel, mais seulement ceux supérieurs à 1 car sinon on a $a < 0$, et donc on a $\sqrt{-1\times|a|}$ qui appartient aux complexes.

En essayant par exemple pour $r = 5$, on obtient $a = 5(5-1) = 20$, et on retombe bien sur une suite qui converge vers 5 (cf **2.2.2**).

2.2.4 Valeur remarquable, ϕ :

Petit arrêt sur une valeur remarquable qui est ϕ alias le nombre d'or. Exprimé par la formule suivante : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (solution de l'équation $x^2 = x+1$). On cherche le nombre a tel que $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{...}}} = \phi$. On applique la formule :

$$\phi(\phi-1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1\right) = 1$$

Donc pour $a = 1$ on obtient ϕ (le nombre d'or). Cela le rend encore plus spécial : il est si "simplement" défini qu'il en devient quasiement magique. Le rapport ϕ est donc aussi défini de façon élégante sous forme d'une racine composée de raison 1.

2.3 Généralisation des suites récurrentes convergentes dans l'ensemble $\mathbb{R}$

2.3.1 Généralisation

Nous avons donc vu comment calculer la limite d'une racine continue simple. Mais on peut tout à fait l'étendre à n'importe quel degré (en admettant que la suite converge en un point unique). En effet, une suite récurrente qu'importe son degré peut être exprimé comme une poupée russe.

$$u_{n+1} = (au_n + b)^c$$
$$\Leftrightarrow p = (ap + b)^c$$

$p^{\frac{1}{c}} - ap - b = 0$ Maintenant il ne reste plus qu'à résoudre l'équation

Ainsi, on peut résoudre des suites récurrentes avec des limites appartenant à l'ensemble des réels de n'importe quel degré (en admettant que la suite soit convergente et que l'on ai les compétences pour résoudre les équations de degré $\frac{1}{c}$).

2.3.2 Remarque I (cas particulié)

Si dans $u_{n+1} = (au_n + b)^c$ on a $b = 0$, alors on a :

$$u_{n+1} = (au_n)^c$$
$$p = (ap)^c$$
$$p^{\frac{1}{c}} - ap = 0$$
$$p(p^{\frac{1}{c}-1} - a) = 0$$
$$p = \sqrt[\frac{1}{c}-1]{a}$$

On ne garde pas $p = 0$

Ainsi, par exemple avec $c = \frac{1}{2}$ (et $b = 0$), soit $u_{n+1} = \sqrt{au_n}$ on a d'après le calcul $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt[2-1]{a} = a$. Inversement, on a : $a = p^{\frac{1}{c}-1}$.

2.3.3 Remarque II (particularité)

Une particularité qui provient de la résolution même de ces suites récurrentes, c'est que peu importe le terme u_0 choisis, on a la limite qui est toujours la même. C'est à dire que deux suites dont une suite commence avec 1 et une commence avec 9412 auront **la même** limite, et ce car dans la calcul de la limite on ne fait pas intervenir le terme u_0.

2.3.4 Remarque III (conjecture)

En fesant de même cette fois-ci avec $a < 0$ et $c = \frac{1}{2}$, on obtient une limite complexe. Et on remarque que $|S_p| = lim_{n\to\infty} u_n$ avec S_p la solution de l'équation obtenue ($p^2 = p - a$) avec $Re(S_p) = 0.5$. On a donc l'égalité suivante déduite de la valeur absolue de S_p : $L = \sqrt{0.5^2 + Im(S_p)}$ soit $L^2 = 0.5^2 + Im(S_p)$ avec L la limite à l'infinie de u_n (égalité de pythagore).