計算物理第一回レポート

21B00361　海上幹太

2025 年 1 月 19 日

本レポートでは 2 重振り子の運動方程式を導出し、数値計算を行う。この際、数値計算手法は 4 次のルンゲクッタ法とオイラー法を用いて、それぞれの手法の精度を力学的エネルギー保存の観点から比較する。

1　2 重振り子

1.1　運動方程式

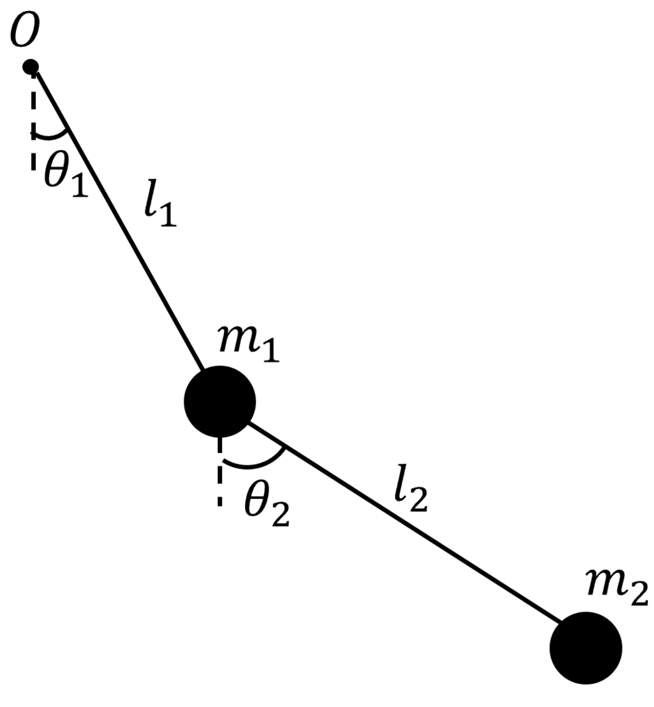

図 1　二重振り子の概略図。おもり 1 の重さを m_1、原点とおもり 1 の間の長さを l_1、原点とおもり 1 のなす角を θ_1 とする。また、おもり 2 の重さを m_2、おもり 1 とおもり 2 の間の長さを l_2、おもり 1 とおもり 2 のなす角を θ_2 とする。

2 重振り子のモデルを図 1 で定義する。なお、空気抵抗や振り子のひもの伸びちぢみは考えない。重力加速度を g とする。原点を O として、水平右方向を x 軸正、垂直上方向を y 軸正とする。

このときのおもり 1 の位置座標 $\boldsymbol{x_1}$、おもり 2 の位置座標 $\boldsymbol{x_2}$ とする。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x_1} &= (l_1 \sin\theta_1, \quad l_1 \cos\theta_1) \\
\boldsymbol{x_2} &= (l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2, \quad l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)
\end{aligned}
$$

また速度は

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x_1}} &= (l_1\dot{\theta_1}\cos\theta_1, \quad -l_1\dot{\theta_1}\sin\theta_1) \\
\dot{\boldsymbol{x_2}} &= (l_1\dot{\theta_1}\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta_2}\cos\theta_2, \quad -l_1\dot{\theta_1}\sin\theta_1 - l_2\dot{\theta_2}\sin\theta_2)
\end{aligned}
$$

このとき、モデル全体の運動エネルギーの総和 K は

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{x_1}}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{x_2}}^2 \\
&= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}\{l_1^2\dot{\theta_1}^2 + l_2^2\dot{\theta_2}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}\cos(\theta_1-\theta_2)\}
\end{aligned}
$$

で求められる。また、原点を基準としたポテンシャル V は

$$
V = -m_1gl_1\cos\theta_1 - m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)
$$

である。したがってラグランジアン $L = K - V$ は

$$
L = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}\{l_1^2\dot{\theta_1}^2 + l_2^2\dot{\theta_2}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta_1}\dot{\theta_2}\cos(\theta_1-\theta_2)\} + m_1gl_1\cos\theta_1 + m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)
$$

である。
θ_1 に関する運動方程式は

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial\theta_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta_1}}\right) = 0 \\
&(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta_1} + (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1 + m_2l_1l_2\{\ddot{\theta_2}\cos(\theta_1-\theta_2) + \dot{\theta_2}^2\sin(\theta_1-\theta_2)\} = 0
\end{aligned}
$$

である。同様に θ_2 に関する運動方程式は

$$
m_2l_2^2\ddot{\theta_2} + m_2gl_2\sin\theta_2 + m_2l_1l_2\{\ddot{\theta_1}\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta_1}^2\sin(\theta_1-\theta_2)\} = 0
$$

となる。この連立微分方程式について数値計算するために常微分方程式に変形する。
簡単のため $M = m_1 + m_2$、$C = \cos(\theta_1-\theta_2)$、$S = \sin(\theta_1-\theta_2)$、$\omega_1 = \dot{\theta_1}$、$\omega_2 = \dot{\theta_2}$ とする。このように変形することで $\boldsymbol{y} = (\theta_1, \omega_1, \theta_2, \omega_2)$ としたとき、

$$
\frac{d}{dt}\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{y})
$$

という連立微分方程式を作成する。

$$
\begin{aligned}
&\dot{\theta_1} = \omega_1 \\
&\dot{\omega_1} = (l_1M/m_2 - C^2)^{-1}\{g(C\sin\theta_2 - M\sin\theta_1/m_2) - (l_1C\omega_1^2 + l_2\omega_2^2)S\} \\
&\dot{\theta_2} = \omega_2 \\
&\dot{\omega_2} = \{l_2(M/m_2 - C^2)\}^{-1}\{gM/m_2(C\sin\theta_1 - \sin\theta_2) + (M/ml_1\omega_1^2 + l_2\omega_2^2C)S\}
\end{aligned}
$$

したがって、連立方程式は上記のように変形できる。

1.2 誤差評価

このモデルの誤差を評価する際、力学的エネルギー保存則を用いて評価する。力学的エネルギーは初期条件から計算することができ、U とする。数値計算的に求めた力学的エネルギーを $U_{\mathrm{calc}}(t)$ としたとき、誤差は

$$\Delta U(t) = |U - U_{\mathrm{calc}}(t)|$$

で計算することができる。

2 数値計算手法

具体例として以下の常微分方程式を計算する。

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

2.1 オイラー法

オイラー法では (x_n, y_n) から

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n) + O(\Delta x^2)$$

と計算することで数値計算的に解くことができる。

2.2 4 次ルンゲクッタ法

(x_n, y_n) から以下のパラメータを計算する。

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n)\Delta x \\
k_2 &= \Delta x f(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\
k_3 &= \Delta x f(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\
k_4 &= \Delta x f(x_n + \Delta x, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(\Delta x^5)
\end{aligned}$$

このように、まずオイラー法と同様に y の変化分を計算する。次に y の変化分の中点をとり、更にその変化分を計算し、さらに中点の両端を計算し、各パラメータを重み付けして足し合わせる。このように計算することで微分方程式を解くことができる。

3 プログラムの説明

本レポートのシュミレーションは fortrun ではなく julia を使用した。プログラムは以下の手順で動く。

1. パッケージをインポート

2. g, m_1, m_2, l_1, l_2 のパラメータを定義
3. 力学的エネルギーを計算する関数を定義 ($y = 0$ 基準)
4. 1.1 で求めた連立微分方程式を定義
5. オイラー法を定義
6. 初期条件を定義
7. シミュレーションを実行
8. 誤差を評価
9. 誤差をプロット

4 結果

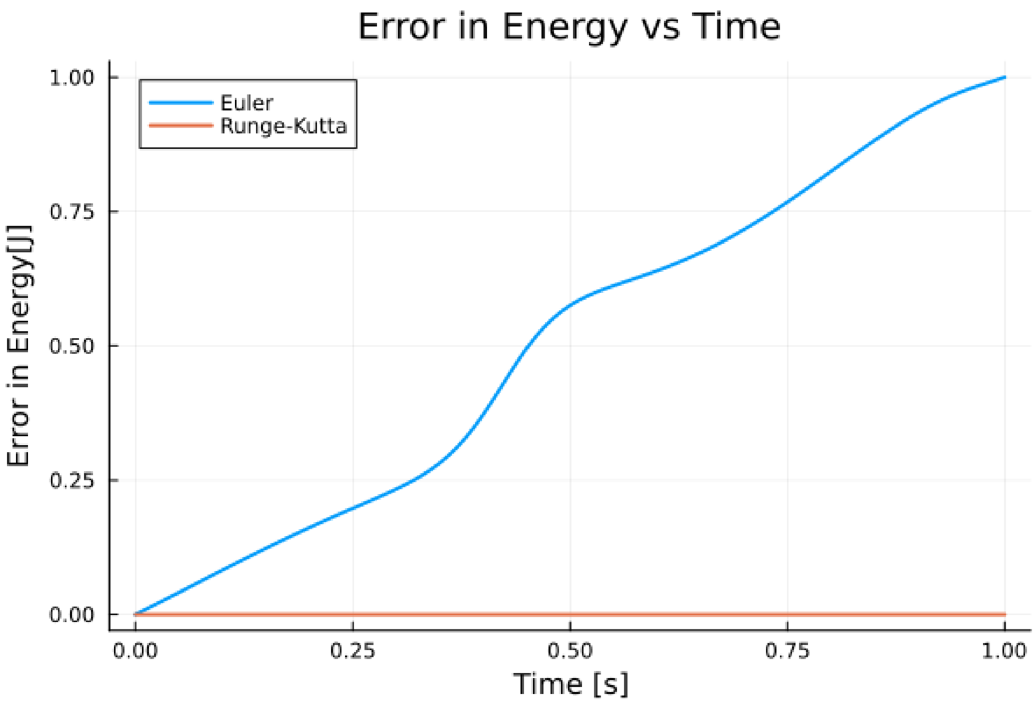

図 2　オイラー法とルンゲクッタ法の誤差を比較した。縦軸が力学的エネルギー誤差、横軸が時間を表す。

5 考察

オイラー法とルンゲクッタ法の 2 つの数値計算手法を用いて計算し比較した結果、2 つの計算手法には大きく精度に差があることがわかった。オイラー法では一次のテイラー展開までしか行われないため、精度があまり出ず、更に誤差が繰り返すごとに累積していくため、時間に比例するような形で誤差が増えていくことがわかる。一方ルンゲクッタ法は 4 次で展開するためオイラー法と比べると精度が遥かに良いことがわかる。

6 参考文献

日野原　伸生, 計算物理学 2 第 11 回：微分方程式の解法, 2018