Mathematik der Oberstufe

Thomas Dost

Inhaltsverzeichnis

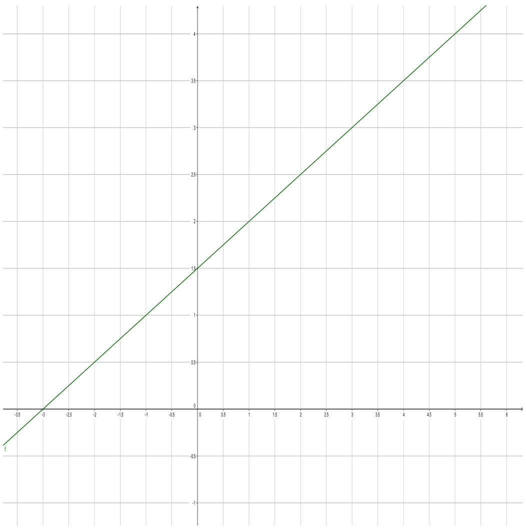
1 Analysis

1.1 Lineare Funktionen

Eine lineare Funktionen ist eine Funktion der Form $f(x) = mx + b$.

1.1.1 Eigenschaften einer linearen Funktionen

Bei einer Linearen Funktion stellt m die Steigung und b die Verschiebung auf der Y-Achsen dar. Die **Steigung** m einer linearen Funktion $f(x) = mx + b$ berechnet sich durch $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



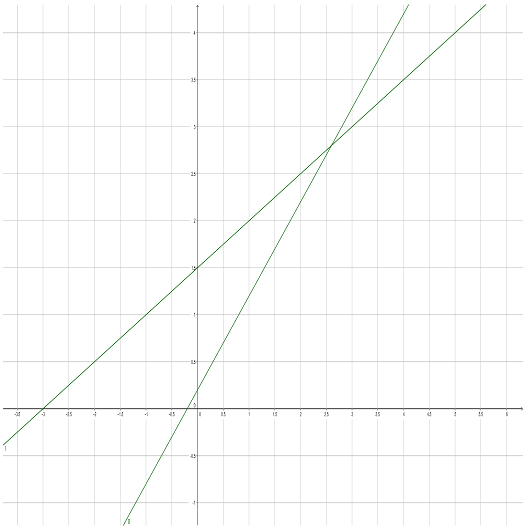
$f(x) = 0,5x + 1,5$

Beispiel:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$\leftrightarrows \frac{3,5 - 1,5}{4 - 0} = 0,5$$

1.1.2 Schnittpunkt zweier linearer Funktionen

Der **Schnittpunkt** x zweier linearer Funktonen berechnet sich durch das Gleichsetzen zweier lineare Funktionen:
$f(x) = 0,5x + 1,5$
$g(x) = 1x + 0,2$



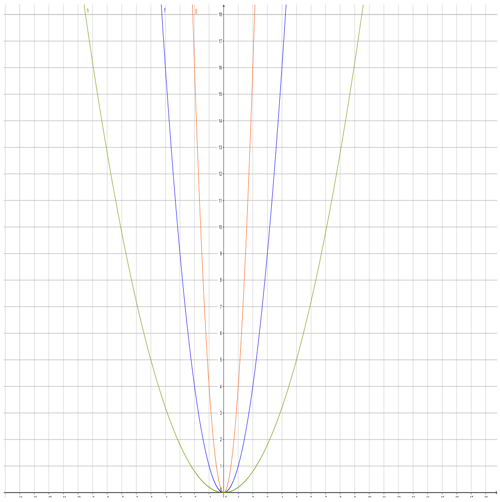
Beispiel:

$$\begin{aligned} 0,5x + 1,5 &= 1 \quad x + 0,2 | -0,5x \\ 1,5 &= 0,5x + 0,2 | -0,2 \\ 1,3 &= 0,5x \qquad | * 2 \\ 2,6 &= \qquad x \end{aligned}$$

Jetzt kann das Ergebnis ($x = 2,6$) in die Gleichungen eingesetzt werden um das Ergebnis zu ueberpruefen.
$f(2,6) = 2,8$
$g(2,6) = 2,8$
Da die beiden Werte gleich sind heisst das, dass die Rechnung korrekt ist.

1.2 Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktionen ist eine Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ in der Normal -und $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ in der Scheitelpunktform.



Gestreckte Parabel:
$h(x) = 0,2x^2 + 0x + 0; \quad 0,2(x-0)^2 + 0$
Normale Parabel:
$f(x) = 1x^2 + 0x + 0; \quad 1(x-0)^2 + 0$
Gespreizte Parabel
$g(x) = 4x^2 + 0x + 0; \quad 4(x-0)^2 + 0$

1.2.1 Eigenschaften einer quadratischen Funktionen

Die Verschiedenen Koeffinzienten einer quadratichen Funktion, haben verchiedene Auswirkungen auf das Aussehen einer quadratischen Funktion.

Normalform:
Der **Koeffizient** a gibt sowohl die Oeffnungsrichtung als auch die Steigung einer Parabel wieder, ist $a < 0$ ist die Parabel nach unten geoeffnet, ist $a > 0$ ist sie nach oben geoeffnet. Ist $a = 0$ ensteht eine lineare Funktion.
Ueber die Steigung kann man folgene Aussagen treffen: Ist $a > 1$ ist die Parabel gestreckt, ist $a < 1$ ist sie gespreitzt, $a = 1$ stellt die Normalparabel da.

> Der **Parameter** b gibt die Steigung der Parabel im Schnittpunkt mit der y-Achse an. Insbesondere kann man am Vorzeichen von b erkennen, ob die y-Achse mit dem fallenden oder dem ansteigenden Ast der Parabel geschnitten wird. Hieraus lassen sich wiederum Rückschlüsse über die Zahl und die mögliche Lage von Nullstellen ziehen. Eine Veränderung des Parameters b bewirkt eine Verschiebung sowohl in x- als auch in y-Richtung. Wird b um eins erhöht, dann wird der Graph um 1/2a Einheiten nach links und (2b+1)/4a nach unten verschoben. Wird b um eins verringert, wird der Graph dagegen um 1/2a Einheiten nach rechts und (2b-1)/4a nach oben verschoben.
> Wikipedia

Der **Koeffizient** c bestimmt wie die Funktion auf der Y-Achse verschoben ist.

1.2.2 Umwandlung der Normalform in die Scheitelpunktform

Es sei $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$, um diese Funktion in die Scheitelpunktform zu ueberfuehren muessen folgende Schritte vollzogen werden.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (ax^2 + bx) && + c \quad |a\ ausklammern \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) && + c \quad |q.\text{E.} \\
&= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] && + c \quad |bin.\text{Form}\ rueckwaerts \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] && + c \quad |\text{K}lammer\ aufloesen \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} && + c \quad |a\ kuerzen \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) && \quad |\text{SPF}\ der\text{F}unktion
\end{aligned}$$

Hier kann man nun den Scheitelpunkt ablesen:

$$\text{S} = \left(-\tfrac{b}{2a} | c - \tfrac{b^2}{4a}\right) = \left(-0,5|4,5\right)$$

1.2.3 Schnittpunkt zweier quadratischer Funktionen

$f(x) = 5x^2 - 10x + 2$
$g(x) = x^2 + 2x + 0$

$$\begin{aligned}
5x^2 - 10x + 2 &= x^2 + 2x + 0 && | - 2x \\
5x^2 - 12x + 2 &= x^2 && | - x^2 \\
4x^2 - 12x + 2 &= 0 && | : 4 \\
x^2 - 3x + 0.5 &= 0
\end{aligned}$$

Nun kann die Gleichung mit der P-Q-Formel geloest werden.

1.3 Funtionen mit dem Grad groesser 2

1.3.1 Substitution

1.3.2 Polynomdivision

1.4 Trigonometrische Funktionen

1.5 Exponentialfunktionen

1.5.1 Natuerliche Expoentialfunktion

Als natuerliche Exponentialfunktion bezeichnet man Variationen der Funtion $f(x) = e^x$.

1.6 Herleitung

1.6.1 Trigonometrische Funktionen

1.6.2 Quadratische Ergaenzung

1.6.3 P-Q-Formel

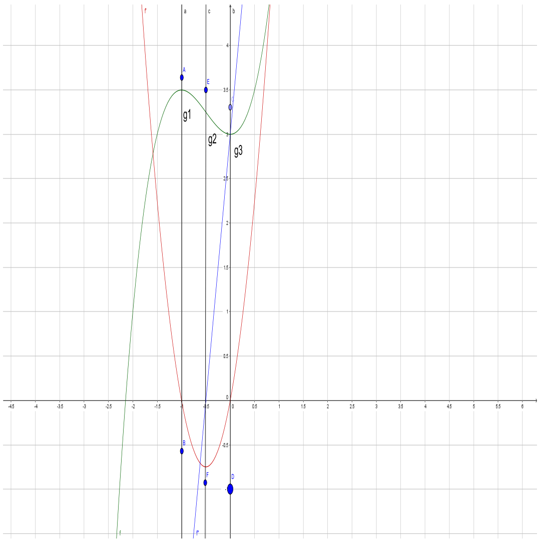
1.6.4 Polynomdivision

1.6.5 Horner Schema

2 Differentialrechnung

2.1 Ableitung

2.2 Visualisierung



Hier zu sehen ist der Graph $f(x)$, mit seinen Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$. Hier kann man sehr gut erkennen wie die Nullstellen der 1. Ableitung $f'(x)$, genau an der Position liegen an der auch die Steigung von $f(x)$ gleich 0 ist. Schaut man sich nun die 2. Ableitung an, kann man erkennen das sich Nullstelle der 2. Ableitung an der Stelle befinden wo $f(x)$ einen Wendepunkt hat.

2.3 Bedeutung der 1. Ableitung

Muss Ueberarbeitete werden
Die 1. Ableitung gibt die Steigung der Originalfunktion wieder, d.h wenn die 1. Ableitung 0 ist hat die Originalfunktion an diesem Punkt eine Steigung von 0 und damit einen moeglichen Extrempunkt.

2.4 Bedeutung der 2. Ableitung

Muss Ueberarbeitete werden
Die 2. Ableitung gibt die Steigung der 1. Ableitung wieder, d.h wenn die 2. Ableitung 0 ist
hat die 1. Ableitung an diesem Punkt eine Steigung von 0. und damit hat die Originalfunktion an diesem Punkt einen Steigunswechsel

2.5 Kurzform des Ableitens

Das Ableiten besitzt eine Kurzform, ohne jedes mal den Limes benutzen zu muessen, dabei muss man die Ableitungsregeln sowie die Tatsache dass ein konstanten Summand beim Ableiten wegfaellt beachten(Summenregel).
Beispiel:
$f(x) = 5x^2 + 3x^1 - 5x^0$
$f'(x) = 2 * 5x^{2-1} + 1 * 3x^{1-1} = 10x^1 + 3x^0$
In Worte gefasst bedeutet dass, das der Originalexponent vor den Koeffizenten gezogen und mit diesem multipliziert wird, danach wird der Exponent um 1 dekrementiert.

2.6 Ableitungsregeln

2.6.1 Summenregel

Summen von Funktionen werden getrennt abgeleitet.
Beispiel:

$$f(x) = 5x^2 + 8x$$
$$f'(x) = 10x + 8$$

2.6.2 Faktorregel

Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.
Beispiel:

$$f(x) = 5 * x^2$$
$$f'(x) = 5 * 2x$$

2.6.3 Produktregel

$$f(x) = u(x) * v(x)$$
$$f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = 5x^2 * 8x - 1$$
$$f'(x) = 10x * 8x + 5x^2 * 8$$

2.6.4 Kettenregel

Äuesere mal innere Ableitung".
Ist eine Funktion das Ergebnis der Vekettungs von 2 anderen Funktionen dann gilt:

$$f(x) = (u \circ v)(x)$$
$$f'(x) = u'(v(x)) * v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = e^{5x}$$
$$f'(x) = 5e^{5x}$$

$$f(x) = sin(5x)$$
$$f'(x) = 5 * cos(5x)$$

2.6.5 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel:

2.7 Ableitung der e-Funktion

Die Ableitung der Funktion $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x$
Beispiel:

$$f(x) = 5e^x$$
$$f'(x) = 5e^x$$

2.8 Ableitung trigonometrischer Funktionen

2.9 Herleitungen

2.9.1 Herleitung der Ableitung mithilfe des Limes

2.9.2 Herleitung der Potenzregeln in der Menge der natuerliche Zaheln

2.9.3 Herleitung der eFunktion in der Menge der natuerliche Zaheln

2.9.4 Herleitung der Trigofunktion mithilfe des Limes

2.9.5 Herleitung der Ableitungsregeln

3 Integralrechnung

TEST

3.1 Rotationskoerper

HALLO GITHUB

3.2 Herleitungen

4 Kurvendiskussion

4.1 Symmetrie

4.2 Verhalten im Unendlichen

4.3 Schnittpunkt mit der y-Achse

4.4 Nullstellen

4.5 Ableitungen

4.6 Extrema berechnen

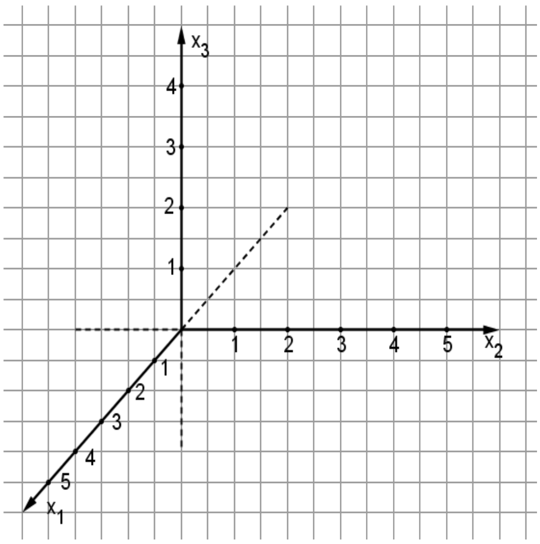
4.7 Wendepunkte berechnen

5 Analytische Geometrie

5.1 Was ist ein Vektor

Ein Vektor ist eine Menge von Pfeilen der Form $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, die parallel untereinander verschoben sind. Eine anderen Notation fuer diesen Vektor waere $\vec{a} = \left(a_1 \dots a_n\right)^{\mathrm{T}}$

5.2 Koordinatensystem



3D Koordinatensystem

5.3 Besondere Vektoren

5.3.1 Nullvektor

Der Nullvektor ist ein Vektor der Form $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, zudem ist er das neutrale Element der Vektoraddition d.h. $\vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}$.

5.3.2 Gegenvektor

Der Gegenvektor ist das inverse Element der Vektoraddtion d.h $\vec{a} + -\vec{a} = 0$, wobei - 0 den Nullvektor bezeichnet.

5.3.3 Ortsvektor

Ein Ortsvektor beziehcnet einen Vektor der vom Koordinatenursprung aus geht d.h. er hat die Form $\vec{OP}$, wobei P ein beliebiger Punkt im Raum ist.

5.3.4 Normalenvektor

Ein Normalenvektor ist ein Vektor der orthogonal zu seinem Bezugsobjekt z.B. einer Gerade ist.

5.3.5 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor der Laenge 1, d.h. dass sein Betrag = 1 ist($|\vec{a}| = 1$).

5.4 Rechnen mit Vektoren

5.4.1 Linearkombination

5.4.2 Laenge eines Vektors

5.4.3 Skalarprodukt

5.4.4 Kreuzprodukt

5.4.4.1 Berechnung mithilfe Determinante

5.4.5 Spatprodukt

5.5 Geraden

5.5.1 Was sind Geraden

5.5.2 Lage von zwei Geraden im Raum

5.5.2.1 Parallel

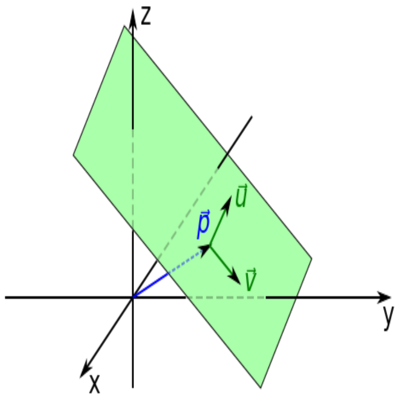
5.5.2.2 Windschief

5.5.2.3 Schnittpunkt

5.5.2.4 Winkel zwischen Gerade

5.6 Ebenen

Eine Ebene im 3-Dimensionalen Raum ist eine uendliche Ausdehnung in zwei Richtungen.



[5]

Ebene im 3-Dimensionalen Raum

5.6.1 Ebenenformen

5.6.1.1 Parameterform

Paramterform einer Ebene: $E : \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u} + s * \vec{v}$
In der Paramterform wird eine Ebene mithilfe eines Stuetzvektors(Ortsvektors) und zwei Richtungsvektoren beschrieben. Es gibt zwei Moeglichkeiten wie diese Richtungsvektoren zueiander liegen duerfen um eine Ebene zu beschreiben.

Geschitten
Falls sich die gegebenen Richtugnsvektoren schneiden, kann die Ebene direkt zwischen ihnen aufgespannt werden.

Beispiel

Parallel
Falls die gegeben Richtungsvektoren jedoch Parallel sind, muss ein Verbindungsvektor zwischen ihen hergestellt werden.

Beispiel

5.6.1.2 Normalenform

5.6.1.3 Koordinatenform

5.6.1.4 Hess'che Normalenform

5.6.2 Lage Ebene Gerade

5.6.2.1 Parallel

5.6.2.2 Schnittpunkt

5.6.2.3 Winkel zwischen Gerade und Ebene

5.6.3 Lage Ebene Ebene

5.6.3.1 Parallel

5.6.3.2 Schnittpunkt

5.6.3.3 Winkel zwischen Ebenen

5.6.4 Abstandsberechnung im Raum

5.7 Kugeln

5.7.1 Was ist eine Kugel

Eine Kugel ist eine Menge von Punkten im 3-Dimensionalen Raum, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben, der Punkt M wird dabei als Mittelpunkt und der Abstand r als Radius bezeichnet.

5.7.2 Kugelgleichung

Eine Kugel in der Analytischen Geometrie wird mit der Gleichung
$|\vec{p} - \vec{\mathrm{M}}|^2 = r^2$ oder $(p_1 - \mathrm{M}_1)^2 + (p_2 - \mathrm{M}_2)^2 + (p_3 - \mathrm{M}_3)^2 = r^2$ beschrieben, wo M den Mittelpunkt als Vektor, p einen beliebigen Punkt als Vektor, und r den Radius als reele Zahl darstellt.

5.7.3 Lage Kugel Punkt

5.7.4 Lage Kugel Gerade

5.7.4.1 Schnittpunkt

5.7.5 Lage Kugel Ebene

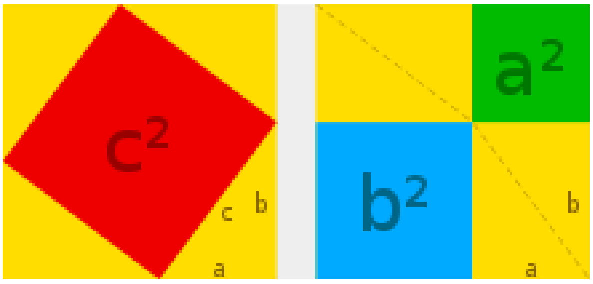
5.7.5.1 Schnittebene

5.7.6 Lage Kugel Kugel

5.7.6.1 Schnittvolumen

5.8 Herleitungen

5.8.1 Satz des Pythagoras



Links = $c^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b)$
Rechts = $a^2 - b^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b)$

$$c^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b) = a^2 + b^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b) \qquad | - 4 * (\frac{1}{2} a * b)$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

5.8.2 Pythagoras im Raum

5.8.3 Kosinussatz

5.8.4 Skalarprodukt

5.8.5 Kreutzprodukt

5.8.6 Spatprodukt

5.8.7 Hess'sche Normalform

6 Lineare Algebra

6.1 Loesungsverfahren fuer LGS

6.1.1 Treppenstuffen Verfahren

6.1.2 Koeffizienten Matrix

6.1.3 Determinante

6.2 Matrizen

Eine Matrix vom Typ $M_{m,n}$ ist eine Zusammenfassung von Werten der Form $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

mit m Zeilen und n Spalten

6.2.1 Besondere Matrizen

6.2.1.1 Nullmatrix

Die Nullmatrix ist eine Matrix in der alle Elemente Null sind, sie ist damit das neutrale Element der Matrixaddition.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6.2.1.2 Stochastische Matrix

Eine Stochastische Matrix ist eine quadratische Matrix deren Elemente zweischen 0 und 1 liegen, und der Spalten bzw. Zeilensumme 1 ist.

6.2.1.3 Inverse

Seien M und I beliebige quadratische Matrizen und E die Einheitsmatrix, dann nennt man die Matrix I die, die Gleichung $M * I = I * M = E$ erfuellt, Inverse der Matrix M. Sie wird mit M^{-1} dargestellt.

Beispiel:
Eine Matrix mit einer Inversen nennt man regluaere Matrix.

6.2.1.4 Einheitsmatrix

Eine Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonale gleich 1 sind.
Sie ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation d.h. $M * E = E * M = M$ wobei M eine beliebige regulaere Matrix ist, und E ihre Einheitsmatrix ist.
Sie ist symmetrisch, d.h $E^t = E$.
Sie ist selbstinvers, d.h $E^{-1} = E$
Ihre determinante ist 1 d.h $det(E) = 1$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

6.2.1.5 Fixvektor

Sei V_f ein Vektor, und M eine beliebige Matrix, dann nennt man den Vektor der die Gleichung $M * V_f = V_f$ erfuellt Fixvektor der Matrix M.

Beispiel:

6.2.1.6 Grenzmatrix

Sei M eine beliebige Matrix, dann nennt man eine Matrix die Gleichung $M * M = M$ erfuellt Grenzmatrix der Matrix M.

Beispiel:

6.2.2 Rechenregeln

Addition

Die Summe zweier Matrizen, berechnet man in dem man sie komponentenweise addiert.

$$\mathrm{M} = \mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrixaddition ist sowohl **kommutativ**($\mathrm{A}+\mathrm{B} = \mathrm{B}+\mathrm{A}$),
als auch **assoziativ**($(\mathrm{A}+\mathrm{B})+\mathrm{C} = \mathrm{A}+(\mathrm{B}+\mathrm{C})$).
Es koennen nur Matrizen der gleiche Dimension addiert werden.

Skalarmultiplikation

$$r * \mathrm{M} = r * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r*a_{11} & r*a_{12} & \dots & r*a_{1n} \\ r*a_{21} & r*a_{22} & \dots & r*a_{2n} \\ \vdots & & & \\ r*a_{m1} & r*a_{m2} & \dots & r*a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen werden multipliziert indem man das Skalaprodukt von den Zeilenvektoren der erstem Matrix
Es koennen nur Matrizen multipliziert wenn die **Spaltenanzahl** der 1. Matrix mit der **Zeilenanzahl** der 2. Matrix uebereinstimmt.
Die Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen **nicht** kommutativ($\mathrm{A} * \mathrm{B} \neq \mathrm{B} * \mathrm{A}$), daraus folgt dass beim **Distributivgesetz** die Richtung eine Rolle spielt($\mathrm{A} * (\mathrm{B}+\mathrm{C}) \neq (\mathrm{B}+\mathrm{C}) * \mathrm{A}$).

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{2,3} * \mathrm{B}_{3,4} = \mathrm{C}_{2,4} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} \end{array}$$

$c_{11} = b_{11} * a_{11} + b_{12} * a_{21} + b_{13} * a_{31}$

$c_{12} = b_{11} * a_{12} + b_{12} * a_{22} + b_{13} * a_{32}$

$c_{13} = b_{11} * a_{13} + b_{12} * a_{23} + b_{13} * a_{33}$

$c_{14} = b_{11} * a_{14} + b_{12} * a_{24} + b_{13} * a_{34}$

$c_{21} = b_{21} * a_{11} + b_{22} * a_{21} + b_{23} * a_{31}$

$c_{22} = b_{21} * a_{12} + b_{22} * a_{22} + b_{23} * a_{32}$

$c_{23} = b_{21} * a_{13} + b_{22} * a_{23} + b_{23} * a_{33}$

$c_{24} = b_{21} * a_{14} + b_{22} * a_{24} + b_{23} * a_{34}$

6.2.3 Matrizengleichungen

6.2.4 Einstufige Prozesse

6.2.5 Mehrstufige Prozesse

6.2.5.1 Markov-Ketten

6.2.6 Lineare Optimierung

6.2.6.1 Maximierungsprobleme

6.2.6.2 Minimierungsprobleme

6.2.6.3 Sonderfaelle und Loesbarkeit

6.2.6.4 Simplex-Verfahren

6.2.6.5 Simplex-Algorithmus

7 Taschenrechner

8 Beispielaufgaben

9 Vielleicht falls bock

logarithmus-(funktion), verschiedene beweise/herleitung quar ergaenzung sekante tangene normale Begriffserklaerung

10 Quellen

[5]. „Plane equation qtl1“ von Quartl - Wikipedia