

Mathematik der Oberstufe

Thomas Dost

Inhaltsverzeichnis

1	Analysis	1
1.1	Lineare Funktionen	1
1.1.1	Eigenschaften einer linearen Funktionen	1
1.1.2	Schnittpunkt zweier linearer Funktionen	2
1.2	Quadratische Funktionen	3
1.2.1	Eigenschaften einer quadratischen Funktionen	3
1.2.2	Umwandlung der Normalform in die Scheitelpunktform	4
1.2.3	Schnittpunkt zweier quadratischer Funktionen	4
1.3	Funktionen mit dem Grad > 2	5
1.4	Trigonometrische Funktionen	5
1.4.1	Eigenschaften Trigonometrische Funktionen	5
1.5	Tangente und Normale	5
1.6	Exponentialfunktionen	6
1.6.1	Natuerliche Exponentialfunktion	6
1.6.1.1	Eigenschaften der Natuerlichen Exponentialfunktion	6
1.7	Funktionenschaeren	8
2	Differentialrechnung	9
2.1	Visualisierung	9
2.2	Bedeutung der 1. Ableitung	9
2.3	Bedeutung der 2. Ableitung	9
2.4	Kurzform des Ableitens	9
2.5	Ableitungsregeln	10
2.5.1	Summenregel	10
2.5.2	Faktorregel	10
2.5.3	Produktregel	10
2.5.4	Kettenregel	10
2.5.5	Quotientenregel	11
2.6	Ableitung der e -Funktion	11

2.6.1	Ableiten komplizierter e -Funktionen	11
2.7	Ableitung trigonometrischer Funktionen	11
2.7.1	Ableitung komplizierter trigonometrischer Funktionen	11
3	Integralrechnung	12
3.1	Unbestimmtes Integral	12
3.2	Bestimmtes Integral	12
3.3	Integrationsregeln	12
3.3.1	Summenregel"der Integration	12
3.3.2	Faktorregel	13
3.3.3	Kettenregel der Integration	13
3.4	Flaechenberechnung	13
3.4.1	Flaeche unter Kurve	13
3.4.2	Gemischte Flaechen	14
3.4.3	Flaeche zwischen Kurven	14
3.5	Mittelwert einer Funktion	15
3.6	Rotationskoerper	15
4	Kurvendiskussion	15
4.1	Symmetrie	15
4.2	Verhalten im Unendlichen	15
4.3	Schnittpunkt mit der y-Achse	16
4.4	Nullstellen	16
4.5	Ableitungen	16
4.6	Extrema berechnen	16
4.7	Wendepunkte berechnen	16
5	Analytische Geometrie	18
5.1	Was ist ein Vektor	18
5.2	Koordinatensystem	18
5.3	Besondere Vektoren	18
5.3.1	Nullvektor	18

5.3.2	Gegenvektor	18
5.3.3	Ortsvektor	19
5.3.4	Normalenvektor	19
5.3.5	Einheitsvektor	19
5.4	Rechnen mit Vektoren	19
5.4.1	Addition	19
5.4.2	s-Multilipkation	19
5.4.3	Linearkombination	19
5.4.4	Laenge eines Vektors	19
5.4.5	Lineare Abhaengigkeit	20
5.4.6	Skalarprodukt	20
5.4.7	Kreuzprodukt	20
5.4.7.1	Berechnung mithilfe der Determinante	20
5.5	Geraden	20
5.5.1	Was sind Geraden	20
5.5.2	Lage von zwei Geraden im Raum	20
5.5.2.1	Abstand Punkt Gerade	21
5.5.2.2	Abstand Gerade Gerade	21
5.5.2.3	Winkel zwischen Geraden	21
5.6	Ebenen	21
5.6.1	Ebenenformen	22
5.6.1.1	Parameterform	22
5.6.1.2	Normalenform	22
5.6.1.3	Koordinatenform	22
5.6.1.4	Hessesche Normalenform(HNF)	22
5.6.2	Lage Ebene Gerade	23
5.6.2.1	Schnittpunkt	23
5.6.2.2	Abstand Gerade Ebene	23
5.6.2.3	Winkel zwischen Gerade und Ebene	23
5.6.3	Lage Ebene Ebene	23
5.6.3.1	Identisch	24

5.6.3.2	Schnittgerade	24
5.6.3.3	Abstand Ebene Ebene	24
5.6.3.4	Winkel zwischen Ebenen	24
5.7	Kugeln	24
5.7.1	Was ist eine Kugel	24
5.7.2	Kugelgleichung	24
5.7.3	Lage Kugel Gerade	25
5.7.3.1	Abstand	25
5.7.4	Lage Kugel Ebene	25
5.7.4.1	Abstand	25
5.7.4.2	Flaeche der Schnitkreis	25
5.7.5	Lage Kugel Kugel	25
5.7.5.1	Abstand	25
5.8	Herleitungen	26
5.8.1	Satz des Pythagoras	26
6	Lineare Algebra	26
6.1	Loesungsverfahren fuer LGS	26
6.1.1	Treppenstufen Verfahren	26
6.1.2	Koeffizienten Matrix	26
6.1.3	Determinante	27
6.2	Matrizen	27
6.2.1	Besondere Matrizen	27
6.2.1.1	Nullmatrix	27
6.2.1.2	Stochastische Matrix	27
6.2.1.3	Inverse	27
6.2.1.4	Einheitsmatrix	28
6.2.1.5	Fixvektor	29
6.2.1.6	Grenzmatrix	29
6.2.2	Rechenregeln	29
6.2.3	Matrizengleichungen	30

6.2.4	Einstufige Prozesse	30
6.2.5	Mehrstufige Prozesse	30
6.2.5.1	Markov-Ketten	30
6.2.6	Lineare Optimierung	30
6.2.6.1	Maximierungsprobleme	30
6.2.6.2	Minimierungsprobleme	30
6.2.6.3	Sonderfalle und Loesbarkeit	30
6.2.6.4	Simplex-Verfahren	30
6.2.6.5	Simplex-Algorithmus	30
7	Taschenrechner	30
8	Beispielaufgaben	30
9	Körper-Axiome	32
10	Ordnungs-Axiome	32
11	Peano-Axiome	32
12	Naive Mengenlehre	32
12.1	Angabe von Mengen	32
12.2	Mengenbeziehungen	33
12.2.1	Elementbeziehung	33
12.2.2	Teilmenge:	33
12.2.3	Potenzmenge	33
12.2.4	Leere Menge	33
12.2.5	Gleichheit	34
12.2.6	Disjunktion(Vereinigung)	34
12.2.6.1	Disjunktion unendlich vieler Menge	34
12.2.7	Konjunktion(Durchschnitt)	34
12.2.7.1	Konjunktion unendlich vieler Menge	34
12.2.8	Komplement	35
12.2.9	Differenz	35

13 Beweise	36
13.1 Morganschen Komplementierungsregeln	36

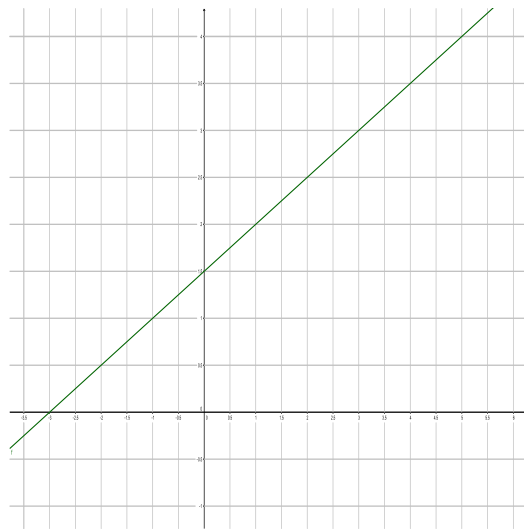
1 Analysis

1.1 Lineare Funktionen

Eine lineare Funktionen ist eine Funktion der Form $f(x) = mx + b$.

1.1.1 Eigenschaften einer linearen Funktionen

Bei einer Linearen Funktion stellt m die Steigung und b die Verschiebung auf der Y-Achsen dar. Die **Steigung** m einer linearen Funktion $f(x) = mx + b$ berechnet sich durch $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



$$f(x) = 0,5x + 1,5$$

Beispiel:

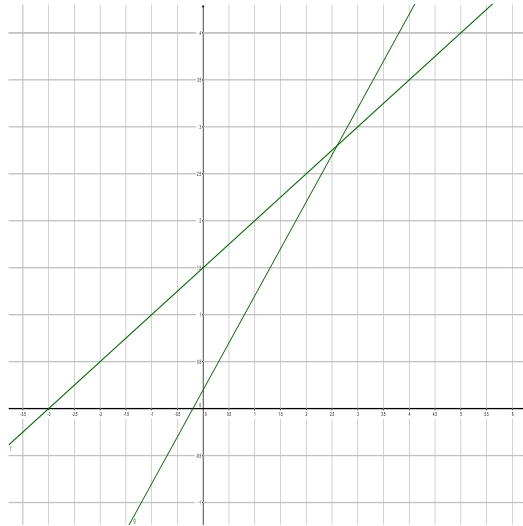
$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &\Leftrightarrow \frac{3,5 - 1,5}{4 - 0} = 0,5 \end{aligned}$$

1.1.2 Schnittpunkt zweier linearer Funktionen

Der **Schnittpunkt** x zweier linearer Funktionen berechnet sich durch das Gleichsetzen zweier linearer Funktionen:

$$f(x) = 0,5x + 1,5$$

$$g(x) = 1x + 0,2$$



Beispiel:

$$0,5x + 1,5 = 1x + 0,2 \quad | -0,5x$$

$$1,5 = 0,5x + 0,2 \quad | -0,2$$

$$1,3 = 0,5x \quad | * 2$$

$$2,6 = x$$

Jetzt kann das Ergebnis

$(x = 2,6)$ in die Gleichungen eingesetzt werden um das Ergebnis zu ueberpruefen.

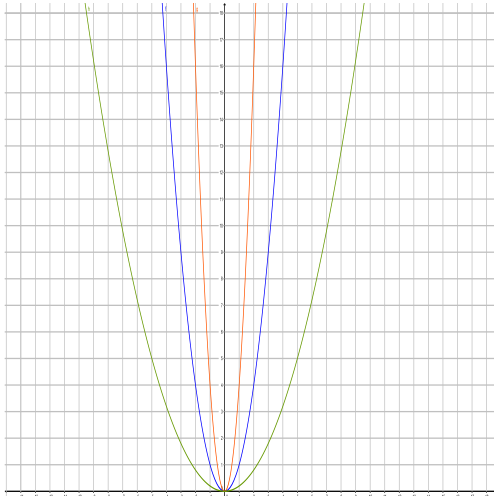
$$f(2,6) = 2,8$$

$$g(2,6) = 2,8$$

Da die beiden Werte gleich sind heisst das, dass die Rechnung korrekt ist.

1.2 Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktion ist eine Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ in der Normalform und $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ in der Scheitelpunktform.



Gestreckte Parabel:

$$h(x) = 0,2x^2 + 0x + 0; \quad 0,2(x - 0)^2 + 0$$

Normale Parabel:

$$f(x) = 1x^2 + 0x + 0; \quad 1(x - 0)^2 + 0$$

Gespreizte Parabel

$$g(x) = 4x^2 + 0x + 0; \quad 4(x - 0)^2 + 0$$

1.2.1 Eigenschaften einer quadratischen Funktionen

Die Verschiedenen Koeffizienten einer quadratischen Funktion, haben verschiedene Auswirkungen auf das Aussehen einer quadratischen Funktion.

Normalform:

Der **Koeffizient** a gibt sowohl die Öffnungsrichtung als auch die Steigung einer Parabel wieder, ist $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet, ist $a > 0$ ist sie nach oben geöffnet. Ist $a = 0$ entsteht eine lineare Funktion.

Über die Steigung kann man folgende Aussagen treffen: Ist $a > 1$ ist die Parabel gestreckt, ist $a < 1$ ist sie gespreizt, $a = 1$ stellt die Normalparabel da.

Der **Koeffizienten** b gibt die Steigung der Parabel im Schnittpunkt mit der Ordinate an, zusätzlich lässt sich am Vorzeichen ablesen ob die Parabel die Ordinate, mit dem fallenden Ast der Parabel geschnitten wird oder mit dem Steigenden. Ist $b < 0$, scheidet der fallende Ast die Ordinate, sonst der Andere. Eine Veränderung des Koeffizienten b bewirkt eine Verschiebung sowohl in x- als auch in y-Richtung. Wird b um eins erhöht, dann wird der Graph um $\frac{1}{2a}$ Einheiten nach links und $\frac{2b+1}{4a}$ nach unten verschoben. Wird b um eins verringert, wird der Graph dagegen um $\frac{1}{2a}$ Einheiten nach rechts und $\frac{2b-1}{4a}$ nach oben verschoben.

Der **Koeffizient** c bestimmt wie die Funktion auf der Ordinatennachse verschoben ist.

1.2.2 Umwandlung der Normalform in die Scheitelpunktform

Es sei $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$, um diese Funktion in die Scheitelpunktform zu ueberfuehren muessen folgende Schritte vollzogen werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax^2 + bx) && + c \quad |a \text{ ausklammern} \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) && + c \quad |q.E. \\ &= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c && |bin.Form \text{ rueckwaerts} \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c && |Klammer aufloesen \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} && + c \quad |a \text{ kuerzen} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) && |SPF \text{ der Funktion} \end{aligned}$$

Hier kann man nun den Scheitelpunkt ablesen:

$$S = \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right) = (-0,5 \mid 4,5)$$

1.2.3 Schnittpunkt zweier quadratischer Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 10x + 2 \\ g(x) &= x^2 + 2x + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x^2 - 10x + 2 &= x^2 + 2x + 0 && | -2x \\ 5x^2 - 12x + 2 &= x^2 && | -x^2 \\ 4x^2 - 12x + 2 &= 0 && | :4 \\ x^2 - 3x + 0.5 &= 0 \end{aligned}$$

Nun kann die Gleichung mit der P-Q-Formel geloest werden.

1.3 Funktionen mit dem Grad > 2

1.4 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen sind Funktionen der Form $a * \langle trig \rangle (b * x + c) + d$, wobei $\langle trig \rangle$ fuer einen Ausdruck wie die Sinus- oder Kosinusfunktion stehen kann z.B. ist $a * \sin(x + 5)$ eine trigonometrische Funktion.

1.4.1 Eigenschaften Trigonometrische Funktionen

Funktionen der Form $a * \langle trig \rangle (x)$

Der Parameter **a** bestimmt die Auslenkung in Ordinateenrichtung, d.h. die Funktionswerte einer trigonometrischen Funktion gehen von $-a$ bis a .

Funktionen der Form $a * \langle trig \rangle (x) + d$

Der Parameter **d** bestimmt die Verschiebung in Ordinateenrichtung d.h. die Funktionswerte gehen von $-a$ bis a aber um d verschoben.

Funktionen der Form $a * \langle trig \rangle (b * x) + d$

Der Parameter **b** bestimmt die Periodizität der Funktion d.h. $f(x) = \sin(x)$ hat eine Periode von 0 bis 2π $g(x) = \sin(2x)$ von 0 bis π , die anderen Parameter haben keinen Einfluss auf die Periodizität.

Funktionen der Form $a * \langle trig \rangle (c + b * x) + d$

Der Parameter **c** bestimmt die Verschiebung der Funktion auf der Abszisse z.B. ist die Funktion $f(x) = \sin(0.5 + x)$ um 0.5π nach links verschoben

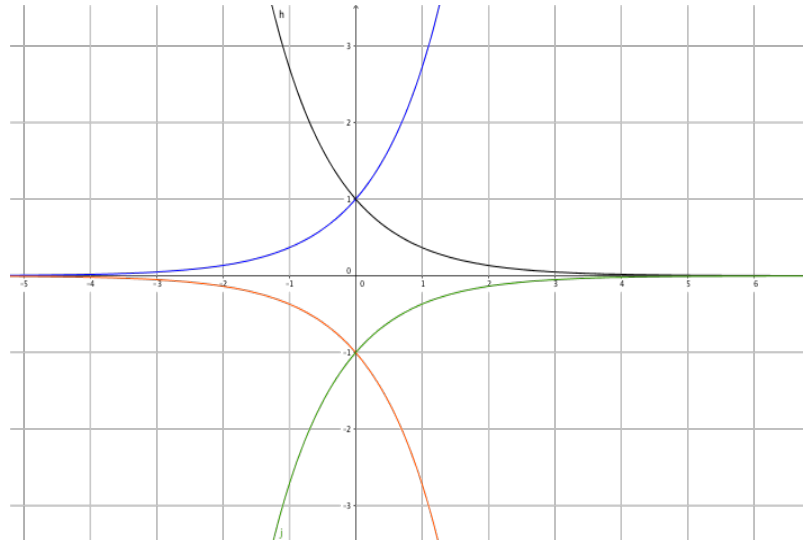
1.5 Tangente und Normale

1.6 Exponentialfunktionen

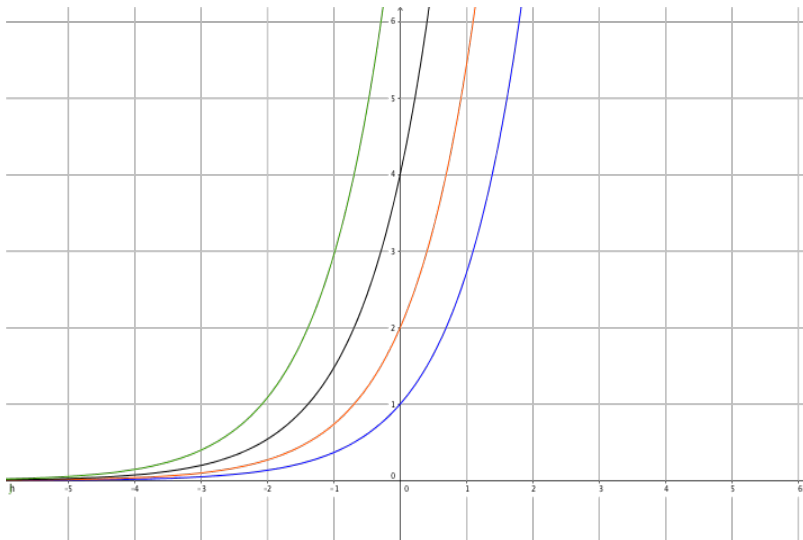
1.6.1 Natuerliche Exponentialfunktion

Als natuerliche Exponentialfunktion bezeichnet man Variationen der Funtion $f(x) = e^x$.

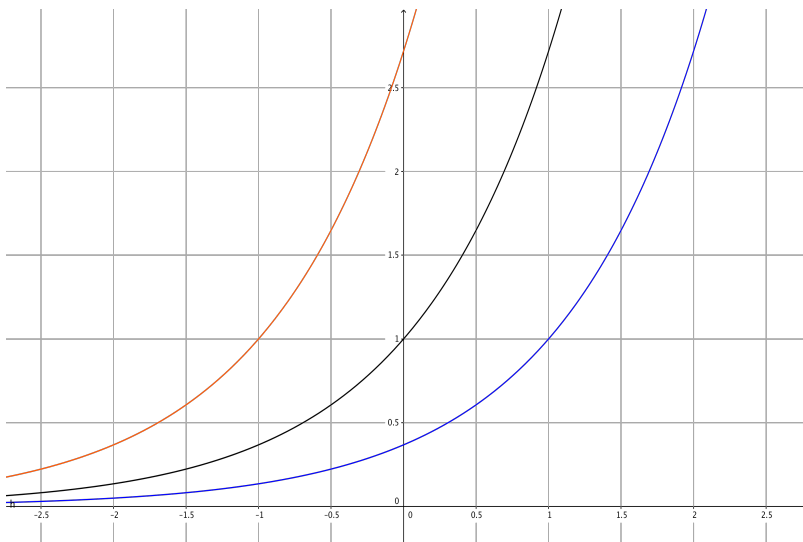
1.6.1.1 Eigenschaften der Natuerlichen Exponentialfunktion



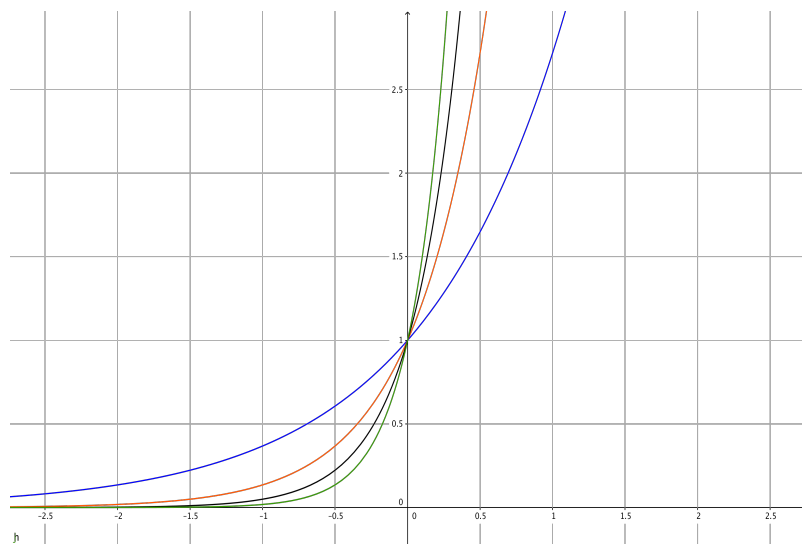
$$\begin{aligned} &e^x \\ &-e^x \\ &e^{-x} \\ &-e^{-x} \end{aligned}$$



e^x
 $2e^x$
 $4e^x$
 $8e^x$



e^{x-1}
 e^{x+1}
 e^x

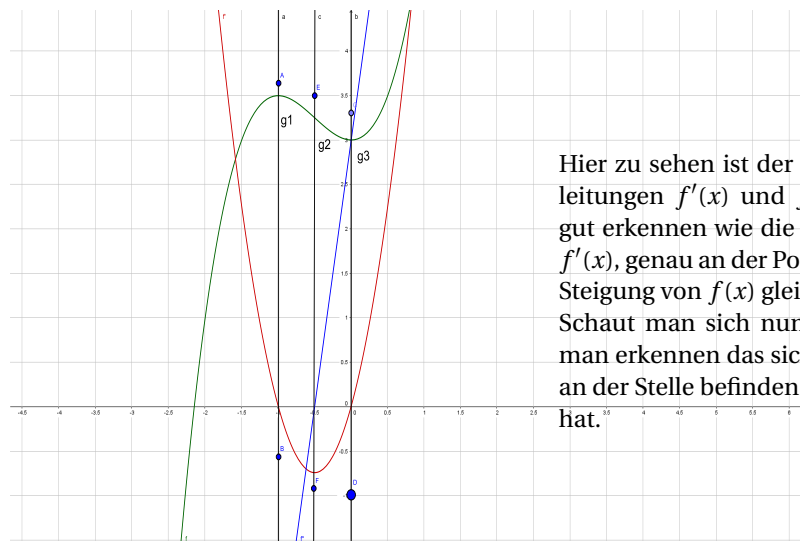


e^x
 e^{2x}
 e^{3x}
 e^{3x}

1.7 Funktionenscharen

2 Differentialrechnung

2.1 Visualisierung



Hier zu sehen ist der Graph $f(x)$, mit seinen Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$. Hier kann man sehr gut erkennen wie die Nullstellen der 1. Ableitung $f'(x)$, genau an der Position liegen an der auch die Steigung von $f(x)$ gleich 0 ist.

Schaut man sich nun die 2. Ableitung an, kann man erkennen das sich Nullstelle der 2. Ableitung an der Stelle befinden wo $f(x)$ einen Wendepunkt hat.

Abbildung 21

2.2 Bedeutung der 1. Ableitung

Die 1. Ableitung gibt die Steigung der Originalfunktion wieder, d.h wenn die 1. Ableitung 0 ist hat die Originalfunktion an diesem Punkt eine Steigung von 0 und damit einen möglichen Extrempunkt.

2.3 Bedeutung der 2. Ableitung

Die 2. Ableitung gibt die Steigung der 1. Ableitung wieder, d.h wenn die 2. Ableitung 0 ist hat die 1. Ableitung an diesem Punkt eine Steigung von 0. und damit hat die Originalfunktion an diesem Punkt meistens einen Steigungswechsel.

2.4 Kurzform des Ableitens

Das Ableiten besitzt eine Kurzform, ohne jedes mal den Limes benutzen zu müssen, dabei muss man die Ableitungsregeln sowie die Tatsache dass ein konstanten Summand beim Ableiten wegfällt beachten (Summenregel).

Beispiel:

$$f(x) = 5x^2 + 3x^1 - 5x^0$$
$$f'(x) = 2 * 5x^{2-1} + 1 * 3x^{1-1} = 10x^1 + 3x^0$$

In Worte gefasst bedeutet das, dass der Original exponent vor den Koeffizienten gezogen und mit diesem multipliziert wird, danach wird der Exponent um 1 dekrementiert.

2.5 Ableitungsregeln

2.5.1 Summenregel

Summen von Funktionen werden getrennt abgeleitet.

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= 5x^2 + 8x \\f'(x) &= 10x + 8\end{aligned}$$

2.5.2 Faktorregel

Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= 5 * x^2 \\f'(x) &= 5 * 2x\end{aligned}$$

2.5.3 Produktregel

$$\begin{aligned}f(x) &= u(x) * v(x) \\f'(x) &= u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= 5x^2 * 8x - 1 \\f'(x) &= 10x * 8x + 5x^2 * 8\end{aligned}$$

2.5.4 Kettenregel

”Auessere mal innere Ableitung.”

Ist eine Funktion das Ergebnis der Verkettung von 2 anderen Funktionen dann gilt:

$$\begin{aligned}f(x) &= (u \circ v)(x) \\f'(x) &= u'(v(x)) * v'(x)\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{5x} \\f'(x) &= 5e^{5x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(5x) \\f'(x) &= 5 * \cos(5x)\end{aligned}$$

2.5.5 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel:

2.6 Ableitung der e -Funktion

Die Ableitung der Funktion $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x$

Beispiel:

$$f(x) = 5e^x$$
$$f'(x) = 5e^x$$

2.6.1 Ableiten komplizierter e -Funktionen

Beim Ableiten der e -Funktion ist zu beachten, dass aufgrund der Position der Variable die **Kettenregel** beachtet werden muss.

Beispiel

$$f(x) = 5e^{4x-2}$$
$$f'(x) = 4 * 5e^{4x-2}$$

2.7 Ableitung trigonometrischer Funktionen

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$
$$f''(x) = -\sin(x)$$
$$f'''(x) = -\cos(x)$$
$$f''''(x) = \sin(x)$$

2.7.1 Ableitung komplizierter trigonometrischer Funktionen

3 Integralrechnung

3.1 Unbestimmtes Integral

Unbestimmte Integrale haben die Form,

$$\int f(x) = F(x) + C$$

sie existieren auf Grund der Eigenschaft dass beim Ableiten Informationen verloren gehen.

Beispiel

$$f(x) = x^2 + 5$$

$$f'(x) = 2x$$

Wenn man nun $f'(x)$ integriert erhält man $F(x) = x^2$, +5 ist also verloren gegangen. Um dies darzustellen wird eine Integrationskonstante an $F(x)$ angehängt, die korrekte Stammfunktion wäre also $F(x) = x^2 + C$.

3.2 Bestimmtes Integral

Um das bestimmte Integral einer Funktion zu berechnen muss, muss ein Wertepaar der Funktion gegeben sein, zum Beispiel das Wertepaar (2; 4,667) und die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ oder ihre Ableitung.

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$4,667 = \frac{1}{3} * 8 + C$$

$$4,667 = \frac{8}{3} + C$$

$$2 = C$$

Die Funktion lautet also $F(x) = \frac{1}{3} * x^3 + 2$

3.3 Integrationsregeln

3.3.1 Summenregel" der Integration

$$h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow H(x) = F(x) + G(x)$$

3.3.2 Faktorregel

Konstante Faktoren bleiben beim Integrieren erhalten.

$$h(x) = r * f(x) \Rightarrow H(x) = r * F(x)$$

3.3.3 Kettenregel der Integration

$$f(x) = u(ax + b) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} U(ax + b)$$

3.4 Flaechenberechnung

3.4.1 Flaechen unter Kurve

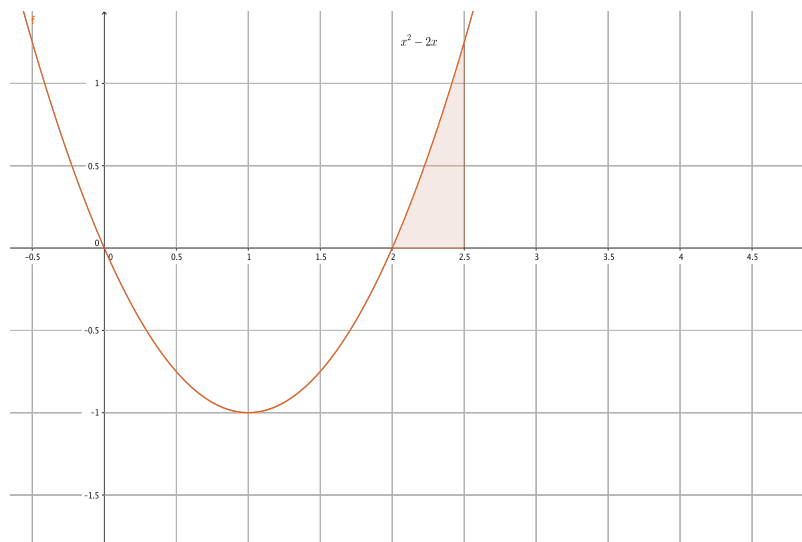


Abbildung 22

Die Flaechen ueber der Abszisse und unter einer Kurve laesst sich mit Hilfe des Integrals leicht berechnen.

Beispiel

Um die Flaechen der Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ im Intervall $[2; 2,5]$ zu berechnen muss zuert das Integral gebildet werden, dieses lautet $\int f(x) = F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1x^2 + c$, nun setzen wir die Intervallgrenzen ein um die Flaechen zu berechnen.

$$F(2,5) - F(2) = \frac{1}{3} * 2,5^3 - 1 * 2,5^2 - \frac{1}{3} * 2^3 - 1 * 2^2 = 0,29FE$$

3.4.2 Gemischte Flaechen

Falls die zu berechnende Flaechе sich jedoch zum Teil unter der Abszisse befindet, muss man beachte das man nicht ueber Abszissenschittpunkte integrieren darf d.h. befindet sich in dem zu bestimmenden Intervall eine Nullstelle der Funktion muss man diese als Integrationsgrenze benutzen.

Beispiel

Flaechе der Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ im Intervall $[0; 2,5]$.

Nun berechnet man die Nullstellen um herauszufinden ob sie im Intervall liegen.

$$0 = x^2 - 2x$$

$$0 = x(x - 2)$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

Da 2 im Intervall liegt muss sie als Integrationsgrenze benutzt werden d.h. fuer die Flaechе gilt $A = -\int f(x) + \int f(x) = -(F(2) - F(0)) + F(2,5) - F(2) = 1,6375$, da die Flaechе unter der Abszisse negativ ist muss man hier das Vorzeichen beachten.

3.4.3 Flaechе zwischen Kurven

Falls man die Flaechе zwischen zwei Funktionen berechnen soll, muss man falls sich Schittpunkte der Graphen im Intervall befinden diese als Integrationsgrenzen benutzen.

Beispiel

Flaechе zwischen den Funktionen $f(x) = 0,25x^2$ und $g(x) = 0,3x$ im Intervall $[0; 1,6]$

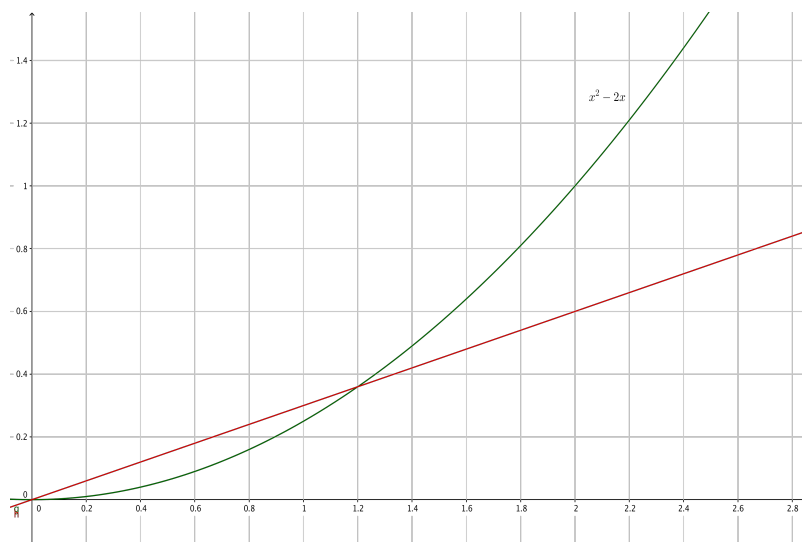


Abbildung 23

Nun muss man herausfinden ob sich die Graphen im Intervall schneiden.

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
0,25x^2 &= 0,3x - 0,3x \\
0,25x^2 - 0,3x &= 0 \quad | \cdot 4 \\
x^2 - 1,2x &= 0 \\
x(x - 1,2) &= 0 \\
x_1 = 0, x_2 &= 1,2
\end{aligned}$$

Da sich 1,2 im Intervall liegt muss sie als Integrationsgrenze benutzt werden.

$$A = \int (g(x) - f(x)) + \int (f(x) - g(x)) = ((G(1,2) - G(0)) - (F(1,2) - F(0))) + ((F(1,6) - F(1,2)) - (G(1,6) - G(1,2))) =$$

Falls die Funktion zusätzlich noch die Abszisse schneidet muss auch dieser Schnittpunkt eine Integrationsgrenze sein.

3.5 Mittelwert einer Funktion

Um den Mittelwert der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a; b]$ mit Hilfe des Integrals zu bestimmen, muss

man die Formel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ benutzen.

3.6 Rotationskoerper

Fuer das Rotationsvolumen eines Graphen um die Abszisse gilt die Formel $V = \pi * \int_a^b (f(x))^2 dx$

Beachte fuer das Volumen zwischen zwei Graphen gilt **nicht** die Formel $V = \pi * \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$

sondern $V = \pi * \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$

4 Kurvendiskussion

4.1 Symmetrie

Um herauszufinden ob eine Funktion Y-Achsensymmetrisch oder Ursprungspunktsymmetrisch ist, muss man die Exponenten einer Funktion betrachen, falls alle Exponenten einer Funktion gerade sind ist sie Achsensymmetrisch, sonst ist die Funktion Ursprungspunktsymmetrisch. Trifft keiner der beiden Bedingungen auf die Funktion zu laesst sich ihre Symmetrie nicht bestimmen.

$$\begin{array}{ll}
\text{Achsensymmetrie:} & f(x) = f(-x) \\
\text{Ursprungspunktsymmetrie:} & f(x) = -f(x)
\end{array}$$

4.2 Verhalten im Unendlichen

Das Verhalten in Unendlichen haengt vom hoechsten Exponenten und dem zugehoerigen Koeffizienten der Funktion ab, ist der Exponent gerade und der Koeffizient positiv, verlaeuft die Funktion

vom 2. zum 1. Quadranten, also von positiv unendlich nach positiv unendlich, ist der Koeffizient jedoch negativ, verläuft die Funktion vom 3. zum 4. Quadranten, also von negativ unendlich nach negativ unendlich.

Ist der Exponent ungerade und der Koeffizient positiv verläuft die Funktion vom 3. zum 1. Quadranten also negativ unendlich nach positiv unendlich, ist der Koeffizient jedoch negativ verläuft sie von 2. zum 4. Quadranten also von positiv unendlich nach negativ unendlich.

Formal:

Falls der höchste Exponent ungerade und positiv ist gilt fuer $x \rightarrow \infty+ = f(x) \rightarrow \infty+$
 $x \rightarrow \infty- = f(x) \rightarrow \infty-$

Falls der höchste Exponent gerade und positiv ist gilt fuer $x \rightarrow \infty+ = f(x) \rightarrow \infty+$
 $x \rightarrow \infty- = f(x) \rightarrow \infty+$

Beachte den Koeffizienten vor dem höchsten Exponenten!

4.3 Schnittpunkt mit der y-Achse

Um den Schnittpunkt mit der Y-Achsen herauszufinden, muss man die Variable der Funktion 0 setzen.

4.4 Nullstellen

Um die Nullstellen einer Funktion zu berechnen muss man die Funktion = 0 setzen und die dadurch entstandene Gleichung nach der Variable auflösen.

4.5 Ableitungen

4.6 Extrema berechnen

Um die Extrema einer Funktion zu erhalten muss ihre erste Ableitung 0 gesetzt werden, nun muss man die Punkte in die 2. Ableitung einsetzen um herauszufinden ob es um einen Hoch(Maximum) -oder Tiefpunkt(Minimum) handelt. Ist das Ergebnis des letzten Schrittes grösser 0 handelt es sich um ein lokales Minimum, andernfalls handelt es sich um ein lokales Maximum. Besitzt die Funktion jedoch keine 2. Ableitung muessen die Umgebungswerte der Steigung der Punkte betrachtet werden, wechselt die Steigung von negativ zu positiv hat man ein lokales Minimum, sonst ein lokales Maximum, um nun herauszufinden ob ein globales Extrema vorliegt muessen alle loaklen Extrema verglichen werden.

Notwendige Bedingung

$$f'(x_0) = 0$$

Hinreichende Bedingung Hochpunkt

$$f''(x_0) < 0 \vee f'(x_0)+ \rightarrow f'(x_0)-$$

Hinreichende Bedingung Tiefpunkt

$$f''(x_0) > 0 \vee f'(x_0)+ \rightarrow f'(x_0)-$$

4.7 Wendepunkte berechnen

Um die Wendepunkte einer Funktion zu berechnen muss die 2. Ableitung 0 gesetzt werden, um nun zu ueberpruefen ob der Punkt ein Sattelpunkt ist muss falls die Funktion eine 3. Ableitung besitzt diese an dem vorher berechneten Punkt $\neq 0$ sein, ist die 3. Ableitung nicht vorhanden muss an diesem

Punkt ein Vorzeichenwechsel stattfinden.

Notwendige Bedingung

$$f''(x_0) = 0$$

Hinreichende Bedingung Wendepunkt

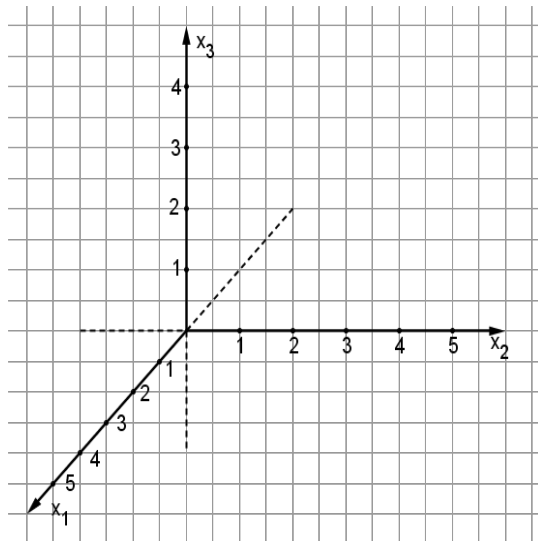
$$f'''(x_0) \neq 0 \vee f''(x_0) \pm \rightarrow f''(x_0) \mp$$

5 Analytische Geometrie

5.1 Was ist ein Vektor

Ein Vektor ist eine Menge von Pfeilen der Form $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, die parallel untereinander verschoben sind. Eine andere Notation für diesen Vektor wäre $\vec{a} = (a_1 \dots a_n)^T$

5.2 Koordinatensystem



3D Koordinatensystem

5.3 Besondere Vektoren

5.3.1 Nullvektor

Der Nullvektor ist ein Vektor der Form $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, zudem ist er das neutrale Element der Vektoraddition

$$\text{d.h. } \vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}.$$

5.3.2 Gegenvektor

Der Gegenvektor ist das inverse Element der Vektoraddition d.h. $\vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$, wobei $\vec{0}$ den Nullvektor bezeichnet.

5.3.3 Ortsvektor

Ein Ortsvektor bezeichnet einen Vektor der vom Koordinatenursprung aus geht d.h. er hat die Form \vec{OP} , wobei P ein beliebiger Punkt im Raum ist.

5.3.4 Normalenvektor

Ein Normalenvektor ist ein Vektor der orthogonal zu seinem Bezugsobjekt z.B. einer Gerade ist.

5.3.5 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor der Länge 1, d.h. dass sein Betrag = 1 ist ($|\vec{a}| = 1$).

Beispiel

Der Einheitsvektor \vec{e}_a des Vektors \vec{a} wird berechnet indem man $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ rechnet.

5.4 Rechnen mit Vektoren

5.4.1 Addition

Zwei Vektoren in \mathbb{R}^3 \vec{a}, \vec{b} werden addiert, indem man ihre Komponenten addiert.
Beispiel

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

5.4.2 s-Multiplikation

Ein Vektor \vec{a} aus \mathbb{R}^3 wird mit einer Zahl s aus \mathbb{R} multipliziert, indem seine Komponenten mit s multipliziert werden.
Beispiel

$$s * \vec{a} = s * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s * a_1 \\ s * a_2 \\ s * a_3 \end{pmatrix}$$

5.4.3 Linearkombination

Einen Ausdruck der Form $r_1 * \vec{a}_1 + r_2 * \vec{a}_2 + \dots + r_n * \vec{a}_n$ nennt man Linearkombination der Vektoren \vec{a}_1 bis \vec{a}_n . Beachte dass a_1 bis a_n keine Vektorkomponenten sondern Vektoren sind.

5.4.4 Länge eines Vektors

Der Betrag eines Vektors \vec{a} stellt seine Länge da, d.h. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ist die Länge eines Vektors.

5.4.5 Lineare Abhaengigkeit

Die Lineare Anhaengigkeit beschreibt die Eigenschaft eines Vektors \vec{v} sich mit Hilfe der s-Multiplikation und eines beliebigen Vektors \vec{b} herstellen zu lassen.

Beispiel:

$$\vec{v} = s * \vec{b}$$

Falls es ein s in \mathbb{R} gibt das die Gleichung erfuehlt ist \vec{v} linear Abhaengig von \vec{b} .

5.4.6 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ordnet je zwei Vektoren \vec{a}, \vec{b} ein Skalar zu, ist dieses Skalar 0 sind die Vektoren orthogonal zueinander.

Beispiel

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3.$$

5.4.7 Kreuzprodukt

5.4.7.1 Berechnung mithilfe der Determinante

Das Kreuzprodukt lässt sich auch mithilfe der Determinante berechnen indem man, eine quadr. Matrix mit der Standardbasis und zwei sich schneidende Vektoren bildet.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} &= e_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= e_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + e_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= e_1(a_2 * b_3 - a_3 * b_2) + e_2(a_3 * b_1 - a_1 * b_3) + e_3(a_1 * b_2 - a_2 * b_1) \\ &= \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 * b_3 - a_3 * b_2 \\ a_3 * b_1 - a_1 * b_3 \\ a_1 * b_2 - a_2 * b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der hintere Teil entspricht nun dem Kreuzprodukt.

5.5 Geraden

5.5.1 Was sind Geraden

Eine Gerade im 3-Dimensionalen Raum ist eine unendliche Ausdehnung in eine Koordinatenrichtungen.

5.5.2 Lage von zwei Geraden im Raum

Um die Lage zweier Gerade zueinander zu bestimmen muss zuert auf lineare Anhaengigkeit geprueft werden. Sind die Richtungsvektoren linear Abhaengig, sind die Gerade entweder Parallel oder Identisch, sind sie jedoch linear Unabhaengig muss geprueft werden ob sie einen Schnittpunkt besitzen

oder windschief sind.

Beispiel **Parallel**

Fall wir herausgefunden haben dass die Richtungsvektoren linear Abhaengig sind, muessen wir als naechstes schauen ob der Ortsvektor einer beteiligten Gerade auf der anderen Gerade liegt um zu pruefen ob die Gerade Identisch sind.

Beispiel **Windschief**

Hat sich jedoch ergeben dass die Richtungsvektoren linear Unabhaengig sind, muess wird als naechstes schauen die Geraden einen Schnittpunkt besitzen um zu pruefen ob sie windschief sind.

5.5.2.1 Abstand Punkt Gerade

Um den Abstand von einem Punkt(\vec{p}) zu einer Geraden($g : \vec{x} = \vec{o} + r * \vec{s}$) berechnen, bilden wir einen Vektor von einem beliebigen Punkt auf der Gerade zu dem Punkt zu dem wir den Abstand berechnen wollen. Nun berechnen wir den Betrag von Kreuzprodukt dieses Vektors und dem Richtungsvektor von g , dies stellt die Flaeche des Parallelogramms dar das sie aufspannen, da die Flaecheformdel des Parallelogramms $A = g * h$ ist berechnen wir nun den Betrag des Richtungsvektors von g und stellen die Flaechenformel nach h um, dann setzen wir die Werte ein die wir eben berechnet haben ein.

5.5.2.2 Abstand Gerade Gerade

Windschief

Der Abstand von zwei windschiefen Geraden laesst sich mit Hilfe einer Hilfsebene berechnen, indem man zuerst den Normaleneinheitsvektor der beiden Richtungsvektoren berechnet, nun kann man die Hessesche Normalenform verwenden um den Abstand zu berechnen.

Beispiel

Parallel

Siehe Abstand Gerade Punkt, wobei der Punkt ein beliebiger Punkt der 2. Gerade ist.

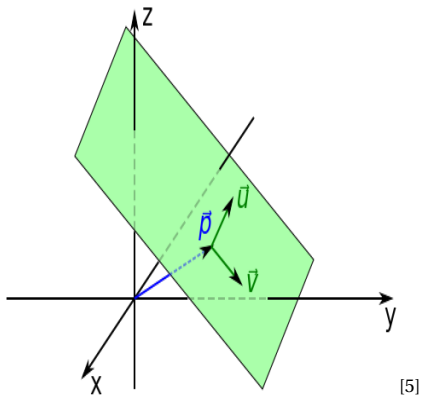
5.5.2.3 Winkel zwischen Geraden

Seien die Gerade $g_1 : \vec{x} = \vec{o}_1 + r * \vec{a}$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{o}_2 + s * \vec{b}$ geschnitten, dann berechnet sich der Winkel zwischen ihnen folgendermassen:

$$\cos(\phi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

5.6 Ebenen

Eine Ebene im 3-Dimensionalen Raum ist eine unendliche Ausdehnung in zwei Vektorrichtungen.



Ebene im 3-Dimensionalen Raum

5.6.1 Ebenenformen

5.6.1.1 Parameterform

Parameterform einer Ebene: $E: \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u} + s * \vec{v}$

In der Parameterform wird eine Ebene mithilfe eines Stützvektors (Ortsvektors) und zwei Richtungsvektoren beschrieben. Es gibt zwei Möglichkeiten wie diese Richtungsvektoren zueinander liegen dürfen, um eine Ebene zu beschreiben, nämlich parallel und geschnitten. Falls sich die gegebenen Richtungsvektoren schneiden, kann die Ebene direkt zwischen ihnen aufgespannt werden. Falls die gegebenen Richtungsvektoren jedoch echt parallel sind, muss ein Verbindungsvektor zwischen ihnen hergestellt werden, wobei einer der beiden echt parallelen Richtungsvektoren ausgetauscht werden muss.

Beispiel

Für die Prüfung, ob die Geraden parallel sind, siehe Lage Gerade Gerade.

Seien die Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{o}_1 + r * \vec{a}$ und $g_2: \vec{x} = \vec{o}_2 + s * \vec{b}$ echt parallel, dann kann die Ebene mit Hilfe des Richtungsvektors von einer der Geraden und eines beliebigen Verbindungsvektors der zwei Geraden gebildet werden.

5.6.1.2 Normalenform

Normalenform einer Ebene $E: 0 = \vec{n} \circ [(\vec{x} - \vec{p})]$

In der Normalenform wird eine Ebene mit Hilfe ihrer Normale (\vec{n}) und der Differenz eines Punktes aus der Ebene mit einem beliebigen anderen Punkt beschrieben ($\vec{x} - \vec{p}$), wobei \vec{p} einen beliebigen Punkt in der Ebene, und \vec{x} einen beliebigen anderen Punkt darstellt. Alle Differenzen, die orthogonal zum Normalenvektor der Ebene liegen, beschreiben daher Vektoren, die in der Ebene liegen.

5.6.1.3 Koordinatenform

Koordinatenform der Ebene: $E: n_1 * x_1 + n_2 * x_2 + n_3 * x_3 = c$

Die Koordinatenform der Ebene ist die ausmultiplizierte Normalenform einer Ebene.

Beispiel

5.6.1.4 Hessesche Normalenform (HNF)

HNF einer Ebene $E: d = \vec{n}_0 \circ [(\vec{x} - \vec{p})]$

Die HNF ist eine abgewandelte Form der Normalenform, sie unterscheidet sich dadurch dass ihr Normalenvektor(\vec{n}_0) normiert ist, d.h er hat die Länge 1, dadurch kann der Abstand von einer mit ihr beschriebenen Ebene zu einem anderen Objekt sehr einfach durch das einsetzen dieses Objekts berechnet werden(Vektorprojektion).

5.6.2 Lage Ebene Gerade

Um die Lage einer Gerade zu Ebene zu bestimmen, muss man zuerst überprüfen ob die Gerade echt parallel ist, dies kann man mit Hilfe der Normale der Ebene und des Richtungsvektors der Gerade überprüfen indem man überprüft ob die Normale orthogonal zum Richtungsvektor der Gerade liegt. Falls die Gerade parallel zur Ebene liegt, kann man nun den Ortsvektor der Gerade in die Ebene einsetzen um zu überprüfen ob sie identisch sind. Falls die Gerade sich jedoch nicht parallel zur Ebene verhält hat sie garantiert einen Schnittpunkt mit der Ebene.

5.6.2.1 Schnittpunkt

Um den Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene zu berechnen, bringt man die Ebene in Koordinatenform und setzt die Gerade dann in diese ein.

Beispiel

5.6.2.2 Abstand Gerade Ebene

Damit eine Gerade und eine Ebene überhaupt einen Abstand haben, müssen sie selbstverständlich echt parallel sein, um dies festzustellen überprüft man den Normalenvektor der Ebene und den Richtungsvektor der Gerade auf Orthogonalität. Falls die Orthogonalitätsbedingung erfüllt ist, wählt man nun einen beliebigen Punkt auf der Ebene und bildet mit der Hilfe von diesem Punkt und der Normale der Ebene eine Gerade, nun berechnet man den Schnittpunkt von dieser Gerade mit der Ebene. Nun bildet man den Vektor zwischen dem Ortsvektor der neuen Gerade und dem Schnittpunkt der Ebene, der Betrag dieses Vektors ist dann der Abstand von der Gerade zur Ebene.

Abstand ohne die HNF

Abstand mit Hilfe der HNF

Siehe Abstand Ebene Ebene, wobei der Punkt ein beliebiger der Geraden sein kann.

5.6.2.3 Winkel zwischen Gerade und Ebene

Sei die Gerade $g_1: \vec{x} = \vec{o}_1 + r * \vec{a}$ nicht parallel zu $E: \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u} + s * \vec{v}$, dann existiert ein Winkel(ϕ) zwischen ihnen, der sich mit Hilfe der Normalenvektors der Ebene(\vec{n}) folgendermassen berechnen lässt:

$$\sin(\phi) = \frac{|\vec{a} \circ \vec{n}|}{|\vec{a}| * |\vec{n}|}$$

Bemerkung: Ergibt sich $\sin(\phi) = 0$, ist die Gerade parallel oder identisch zu der Ebene.

5.6.3 Lage Ebene Ebene

Um die Lage einer Ebene zu einer anderen Ebene stellt man zuerst fest ob sie parallel zueinander liegen, dies kann man überprüfen indem man die beiden Normalen der Ebene auf lineare Abhängigkeit überprüft.

5.6.3.1 Identisch

Um nun zu ueberpruefen ob die Ebenen identisch sind, setzt einen beliebigen Punkt der einen Ebene in die andere Ebene ein. (Koennte Schnittgerade sein, Loesung 3 Punkte einsetzen die zusammen keine Gerade bilden koennen)

5.6.3.2 Schnittgerade Um die Schnittgerade zweier Ebenen zu berechnen, bietet es sich an eine der Ebene in die Kooridantenform umzuwandeln, nun kann man einfach x_1 bis x_3 in die Koordinatenform einsetzen und solange umstellen bis sich eien Variable durch die anderen ersetzen laesst, nun setzt man die berechnete Gleichung in die Ebene in Parameterform ein und erhaelt so eine Schnittgerade.

5.6.3.3 Abstand Ebene Ebene

Abstand ohne die HNF

Um den Abstand zweier Ebenen zu berechnen muessen diese selbstverstaendlich parallel zueinander liegen, nun berechnet man von einer der Ebenen die Normale und stellt mit ihrer Hilfe eine Gerade auf, dann berechnet man den Schnittpunkt dieser Gerade mit der anderen Ebene.

Nun berechnet man den Vektor zwischen dem Ortsvektor der Normale und dem Schnittpunkt, der Betrag dieses Vektors ist der Abstand zwischen den beiden Ebenen.

Abstand mit Hilfe der HNF

Da zwei Ebene parallel zueinander liegen muessen um einen Abstand zu haben, kann man um den Abstand von zwei Ebenen einfach berechnen indem man einen beliebigen Punkt der einen Ebene in die HNF der anderen einsetzt.

5.6.3.4 Winkel zwischen Ebenen

Seien E_1 und E_2 zwei Ebenen, dann gilt fuer ihren Schnittwinkel:

$$\cos(\phi) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| * |\vec{n}_2|}$$

Bermerkung: Ergibt sich $\cos(\phi) = 1$, sind die Ebenen parallel oder identisch.

5.7 Kugeln

5.7.1 Was ist eine Kugel

Eine Kugel ist eine Menge von Punkten im 3-Dimensionalen Raum, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben, der Punkt M wird dabei als Mittelpunkt und der Abstand r als Radius bezeichnet.

5.7.2 Kugelgleichung

Eine Kugel in der Analytischen Geometrie wird mit der Gleichung

$|\vec{p} - \vec{M}|^2 = r^2$ oder $(p_1 - M_1)^2 + (p_2 - M_2)^2 + (p_3 - M_3)^2 = r^2$ beschrieben, wo M den Mittelpunkt als Vektor, p einen beliebigen Punkt als Vektor, und r den Radius als reele Zahl darstellt.

5.7.3 Lage Kugel Gerade

Im \mathbb{R}^3 gibt es zwei Moeglichkeiten wie eine Gerade zu einer Kugel liegen kann, ersten wenn ie Kugel von der Geraden geschnitten wird und zweitens wenn ebendies nicht zutrifft. Dies kann man feststellen indem man den Abstand der Gerade zum Kugelmittelpunkt berechnet, ist dieser Abstand groesser als der Kugelradius haben die Gerade und die Kugel keine gemeinsamen Punkte, ist er jedoch kleiner entstehen zwei Schnittpunkte.

5.7.3.1 Abstand

Siehe Abstand Punkt Gerade, wobei der Punkt den Kugelmittelpunkt darstellt.

5.7.4 Lage Kugel Ebene

Im \mathbb{R}^3 gibt es zwei Moeglichkeiten wie eine Ebene zu einer Kugel liegen kann, erstens wenn die Kugel von der Ebene geschnitten wird und zweitens wenn ebendies nicht zutrifft. Dies kann man feststellen indem man den Abstand der Ebene zum Kugelmittelpunkt berechnet, ist dieser Abstand groesser als der Kugelradius haben die Ebene und die Kugel keine gemeinsamen Punkte, ist er jedoch kleiner entsteht ein Schnittkreis.

5.7.4.1 Abstand

Siehe Abstand Punkt Ebene, wobei die Normale den Richtungsvektor und der Kugelmittelpunkt den Ortsvektor der Ebene darstellt.

Beispiel

5.7.4.2 Flaechen des Schnittkreises

Um die Flaechen des Schnittkreises zu berechnen muss zunaechste der Radius des Kreises berechnet werden, diesen kann man mit Hilfe der Entfernung der Ebene zum Mittelpunkt und des Kugelradius berechnen. Es gilt:

$$r_{Kreis}^2 = r_{Kugel}^2 - (\text{Abstand Kugelmittelpunkt Ebene})^2$$
$$A_{Kreis} = \pi * r_{Kreis}^2$$

5.7.5 Lage Kugel Kugel

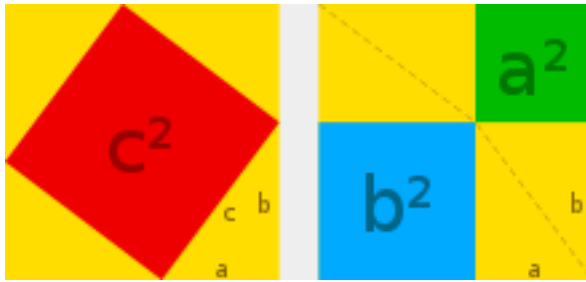
Im \mathbb{R}^3 gibt zwei Moeglichkeiten wie eine Kugel zu einer anderen Kugel liegen kann, ersten wenn die eine Kugel die andere schneidet und zweitens wenn ebendies nicht zutrifft. Dies kann man feststellen indem man den Abstand der beiden Mittelpunkte berechnet, ist dieser groesser als die Summe der beiden Kugelradien haben die Kugeln keine gemeinsamen Punkte, ist er jedoch kleiner entsteht ein Schnittkoeper.

5.7.5.1 Abstand

Trivial (Abstand Punkt Punkt).

5.8 Herleitungen

5.8.1 Satz des Pythagoras



$$\text{Links} = c^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b)$$

$$\text{Rechts} = a^2 + b^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b)$$

$$c^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b) = a^2 + b^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b) \quad | - 4 * (\frac{1}{2} a * b)$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

6 Lineare Algebra

6.1 Lösungsverfahren fuer LGS

6.1.1 Treppenstufen Verfahren

6.1.2 Koeffizienten Matrix

6.1.3 Determinante

Die Determinante einer Matrix lässt sich mit Hilfe des Laplacescher Entwicklungssatz in zwei ...Richtungsentwickeln.

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} * a_{ij} * \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} * a_{ij} * \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)}$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix von A ist, um diese zu Erhalten muss jeweil die i -te Zeile und die j -te Spalten gestrichen werden.

Beispiel

6.2 Matrizen

Eine Matrix vom Typ $M_{m,n}$ ist eine Zusammenfassung von Werten der Form $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

mit m Zeilen und n Spalten

6.2.1 Besondere Matrizen

6.2.1.1 Nullmatrix

Die Nullmatrix ist eine Matrix in der alle Elemente Null sind, sie ist damit das neutrale Element der Matrixaddition.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6.2.1.2 Stochastische Matrix

Eine Stochastische Matrix ist eine quadratische Matrix deren Elemente zwischen 0 und 1 liegen, und der Spalten bzw. Zeilensumme 1 ist.

6.2.1.3 Inverse

Seien M und I beliebige quadratische Matrizen und E die Einheitsmatrix, dann nennt man die Matrix I die, die Gleichung $M * I = I * M = E$ erfüllt, Inverse der Matrix M . Sie wird mit M^{-1} dargestellt. Eine Matrix mit einer Inversen nennt man reguläre Matrix.

Inverse mit Hilfe der Determinante

Inverse mit Hilfe der Einheitsmatrix

6.2.1.4 Einheitsmatrix

Eine Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonale gleich 1 sind. Sie ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation d.h. $M * E = E * M = M$ wobei M eine beliebige reguläre Matrix ist, und E ihre Einheitsmatrix ist.

Sie ist symmetrisch, d.h. $E^t = E$.

Sie ist selbstinvers, d.h. $E^{-1} = E$

Ihre Determinante ist 1 d.h. $\det(E) = 1$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

6.2.1.5 Fixvektor

Sei V_f ein Vektor, und M eine beliebige Matrix, dann nennt man den Vektor der die Gleichung $M * V_f = V_f$ erfüllt Fixvektor der Matrix M .

Beispiel:

6.2.1.6 Grenzmatrix

Sei M eine beliebige Matrix, dann nennt man eine Matrix die Gleichung $M * M = M$ erfüllt Grenzmatrix der Matrix M .

Beispiel:

6.2.2 Rechenregeln

Addition

Die Summe zweier Matrizen, berechnet man in dem man sie komponentenweise addiert.

$$M = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrixaddition ist sowohl **kommutativ** ($A + B = B + A$),

als auch **assoziativ** ($(A + B) + C = A + (B + C)$).

Es koennen nur Matrizen der gleiche Dimension addiert werden.

Skalarmultiplikation

$$r * M = r * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * a_{11} & r * a_{12} & \dots & r * a_{1n} \\ r * a_{21} & r * a_{22} & \dots & r * a_{2n} \\ \vdots & & & \\ r * a_{m1} & r * a_{m2} & \dots & r * a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen werden multipliziert indem man das Skalaprodukt von den Zeilenvektoren der erstem Matrix

Es koennen nur Matrizen multipliziert wenn die **Spaltenanzahl** der 1. Matrix mit der **Zeilenanzahl** der 2. Matrix uebereinstimmt.

Die Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen **nicht** kommutativ ($A * B \neq B * A$), daraus folgt dass beim **Distributivgesetz** die Richtung eine Rolle spielt ($A * (B + C) \neq (B + C) * A$).

$$\begin{array}{c|c} A_{2,3} * B_{3,4} = C_{2,4} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$c_{11} = b_{11} * a_{11} + b_{12} * a_{21} + b_{13} * a_{31}$$

$$c_{12} = b_{11} * a_{12} + b_{12} * a_{22} + b_{13} * a_{32}$$

$$c_{13} = b_{11} * a_{13} + b_{12} * a_{23} + b_{13} * a_{33}$$

$$c_{14} = b_{11} * a_{14} + b_{12} * a_{24} + b_{13} * a_{34}$$

$$c_{21} = b_{21} * a_{11} + b_{22} * a_{21} + b_{23} * a_{31}$$

$$c_{22} = b_{21} * a_{12} + b_{22} * a_{22} + b_{23} * a_{32}$$

$$c_{23} = b_{21} * a_{13} + b_{22} * a_{23} + b_{23} * a_{33}$$

$$c_{24} = b_{21} * a_{14} + b_{22} * a_{24} + b_{23} * a_{34}$$

6.2.3 Matrizenungleichungen

6.2.4 Einstufige Prozesse

6.2.5 Mehrstufige Prozesse

6.2.5.1 Markov-Ketten

6.2.6 Lineare Optimierung

6.2.6.1 Maximierungsprobleme

6.2.6.2 Minimierungsprobleme

6.2.6.3 Sonderfaelle und Loesbarkeit

6.2.6.4 Simplex-Verfahren

6.2.6.5 Simplex-Algorithmus

7 Taschenrechner

8 Beispielaufgaben

Hochschulmathematik

Thomas Dost

9 Körper-Axiome

Diese Axiome muss eine Menge erfüllen um als **Körper** bezeichnet werden zu dürfen.

- | | |
|---|---|
| K1. <i>Kommutativgesetz.</i> | $a + b = b + a, a * b = b * a.$ |
| K2. <i>Assoziativgesetz.</i> | $a + (b + c) = (a + b) + c, a * (b * c) = (a * b) * c.$ |
| K3. <i>Distributivgesetz.</i> | $a(b + c) = ab + ac.$ |
| K4. <i>Existenz neutraler Elemente.</i> | $a + 0 = a, a * 1 = a.$ |
| K5. <i>Existenz inverser Elemente.</i> | $a + (-a) = 0, a * a^{-1} = 1, 1 \neq 0.$ |

10 Ordnungs-Axiome

Diese Axiome muss eine Körper erfüllen um als **geordneter Körper** bezeichnet werden zu dürfen.

was

11 Peano-Axiome

Die Peano-Axiome dienen zur Definition der natürlichen Zahlen.

- P1. 0 ist eine ganze Zahl.
P2. Wenn n eine ganze Zahl ist, ist $n++$ es auch.
P3. Es existiert kein n für das gilt $n++ = 0$
P4. Wenn $n' = m'$ folgt daraus $n = m$.
P5. Enthält X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n
auch deren Nachfolger n' , so bilden die **natürlichen Zahlen** eine Teilmenge von X .

12 Naive Mengenlehre

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen Elemente.

12.1 Angabe von Mengen

Aufzählung:

Eine endliche Menge kann durch Aufzählung aller ihrer Elemente angegeben werden z.B. stellt

$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, die Menge aller natuerliche Zahlen < 6 dar.

Bildungsgesetz:

Eine unedliche Menge kann mit Hilfe eines Bildungsgesetzes angegeben werden z.B.

$$M = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$$

Eigenschaft:

Eine Teilmenge M einer Menger N kann mit Hilfe einer Eingenschaft E die alle Elemente der Menge entweder besitzen oder nicht angegeben werden $M = \{x \in N | E(x)\}$

12.2 Mengenbeziehungen

12.2.1 Elementbeziehung

Definition: Sei M eine beliebiege Menge dann bedeutet, $x \in M$, das wir ein beliebiges x der Menge M auswachlen.

12.2.2 Teilmenge:

Definition: Sei M eine Menge. Dann heisst eine weitere Menge N Teilmenge von M wenn gilt:

$$x \in N \Rightarrow x \in M$$

Notation:

$$N \subseteq M$$

12.2.3 Potenzmenge

Defintion: Sei M eine Menge, dann nennt die Menge all ihrer Teilmengen \mathcal{U} Potenzmenge der Menge M .

$$\mathcal{P}(M) := \{U | U \subseteq M\}$$

Beispiel:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

12.2.4 Leere Menge

Definition: Eine Menge M die keine Elemente enhaelt nennt man leere Menge.

$$\emptyset := \{\forall x : x \notin M\}$$

Eigenschaften:

- ist Teilmenge jeder Menge.

12.2.5 Gleichheit

Definition: Seien A, B Mengen, dann nennt man diese Mengen gleich wenn alle Elemente aus A in B und alle Elemente aus B in A liegen.

$$A = B := A \subseteq B \wedge B \subseteq A = \{x | x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$$

12.2.6 Disjunktion(Vereinigung)

Definition: Seien $N_1, N_2 \subseteq M$, dann nennt man die Menge X disjunktion(vereinigung) von N_1 und N_2 wenn fuer alle $x \in X$ gilt, das $x \in N_1$ oder $x \in N_2$.

$$N_1 \cup N_2 := \{x \in M | x \in N_1 \vee x \in N_2\}$$

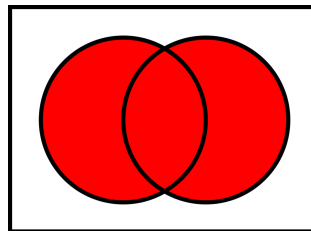
12.2.6.1 Disjunktion unendlich vieler Menge

Sei \mathfrak{S} ein endliches oder unendliches System von Mengen, dann besteht $\bigcup_{M \in \mathfrak{S}} M$ aus den Elementen die in mindesten einem $M \in \mathfrak{S}$ liegen.

Notation:

$$\bigcup_{k=1}^n M_k \text{ bzw } \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

Venn-Diagramm



12.2.7 Konjunktion(Durchschnitt)

Definition: Seien $N_1, N_2 \subseteq M$, dann nennt man die Menge X konjunktion(schnittmengen) von N_1 und N_2 wenn fuer alle $x \in X$ gilt, das $x \in N_1$ und $x \in N_2$.

$$N_1 \cap N_2 := \{x \in M | x \in N_1 \wedge x \in N_2\}$$

12.2.7.1 Konjunktion unendlich vieler Menge

Sei \mathfrak{S} ein endliches oder unendliches System von Mengen, dann besteht $\bigcap_{M \in \mathfrak{S}} M$ aus den Elementen die in jedem $M \in \mathfrak{S}$ liegen.

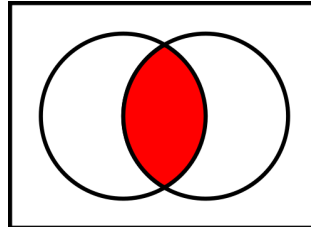
Notation:

$$\bigcap_{k=1}^n M_k \text{ bzw. } \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$$

Eigenschaft:

- zwei Mengen heissen disjunkt falls $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Venn-Diagramm

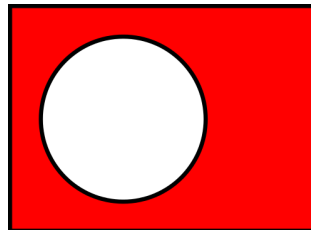


12.2.8 Komplement

Definition: Sei $B \subseteq M$, dann nennt man die Menge aller x die in M aber nicht in B sind komplement von B im Bezug auf M . Es wird mit B^c notiert.

$$B^c := \{x | x \notin B\}$$

Venn-Diagramm

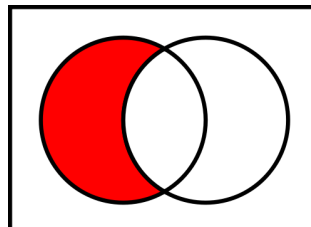


12.2.9 Differenz

Definition: Seien A, B Mengen, dann nennt man alle x die in A aber nicht in B sind Differenz von A und B .

$$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Venn-Diagramm



$A=B$ Hat man eine solche Gleichung zu beweisen, so muß man also zeigen, daß aus $x \in M$ stets $x \in N$ und umgekehrt aus $x \in N$ auch immer $x \in M$ folgt. bzw $M \subseteq N$ und umgekehrt \Leftrightarrow

13 Beweise

13.1 Morganschen Komplementierungsregeln

Sind alle Mengen $M \in \mathfrak{S}$ Teilmengen einer festen Universalmenge U und bezeichnen wir das Komplement U ohne N einer Teilmenge N von U der Kürze halber mit N^c .

1. Das Komplement der Vereinigung ist gleich dem Durchschnitt der Komplemente.

$$\left(\bigcup_{M \in \mathfrak{S}} M \right)^c = \bigcap_{M \in \mathfrak{S}} (M^c)$$

Da klar ist das $M \in \mathfrak{S}$ wird dies beim folgenden Beweis nicht weiter angegeben.

Beweis:

A \Rightarrow B

$$x \in (\cup M)^c \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cup M) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cup M \forall M \in \mathfrak{S}) \Rightarrow x \in M^c \forall M \Rightarrow x \in \cap (M^c)$$

■

B \Rightarrow A

$$x \in \cap (M^c) \Rightarrow (x \in M^c \forall M^c) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin M \forall M) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cup M) \Rightarrow x \in (\cup M)^c$$

■

A \Leftrightarrow B

2. Das Komplement des Durchschnitts ist gleich der Vereinigung der Komplemente.

$$\left(\bigcap_{M \in \mathfrak{S}} M \right)^c = \bigcup_{M \in \mathfrak{S}} (M^c)$$

Beweis:

A \Rightarrow B

$$x \in (\cap M)^c \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cap M) \Rightarrow (x \in U \wedge \exists M : x \notin M) \Rightarrow (\exists M : x \in M^c) \Rightarrow (x \in \cup (M^c))$$

■

B \Rightarrow A

$$x \in \cup (M^c) \Rightarrow (x \in U \wedge \exists M : x \in M^c) \Rightarrow (\exists M : x \notin M) \Rightarrow (x \notin \cap M) \Rightarrow (x \in (\cap M)^c)$$

■