# Mathematik der Oberstufe

**Thomas Dost** 

## Inhaltsverzeichnis

1	Ana	lysis 1					
	1.1	Lineare Funktionen					
		1.1.1 Eigenschafte	en einer linearen Funktionen		1		
		1.1.2 Schnittpunk	ct zweier linearer Funktionen		2		
	1.2	Quadratische Funkti	ionen		3		
		1.2.1 Eigenschafte	en einer quadratischen Funktionen		3		
		1.2.2 Umwandlun	ng der Normalform in die Scheitelpunktform		4		
		1.2.3 Schnittpunk	ct zweier quadratischer Funktionen		4		
	1.3	Funtionen mit dem	Grad groesser 2		5		
		1.3.1 Substitution	1		5		
		1.3.2 Polynomdivi	ision		5		
	1.4	Trigonometrische Fu	unktionen		5		
	1.5	Exponentialfunktion	nen		5		
		1.5.1 Natuerliche	Expoentialfunktion		5		
	1.6	Herleitung			5		
		1.6.1 Trigonometr	rische Funktionen		5		
		1.6.2 Quadratisch	ne Ergaenzung		5		
		1.6.3 P-Q-Formel			5		
		1.6.4 Polynomdivi	ision		5		
		1.6.5 Horner Sche	ema		5		
2	Diffe	erentialrechnung			6		
_	2.1				6		
	2.2	· ·			6		
	2.3				6		
	2.4				6		
	2.5				6		
	2.6				7		
	2.0		gel		7		
		runt0110501			•		

		2.6.3	Produktregel	7
		2.6.4	Kettenregel	7
		2.6.5	Quotientenregel	8
	2.7	Ableit	ung der <i>e</i> -Funktion	8
	2.8	Ableit	ung trigonometrischer Funktionen	9
	2.9	Herlei	tungen	9
		2.9.1	Herleitung der Ableitung mithilfe des Limes	9
		2.9.2	Herleitung der Potenzregeln in der Menge der natuerliche Zaheln	9
		2.9.3	Herleitung der eFunktion in der Menge der natuerliche Zaheln	9
		2.9.4	Herleitung der Trigofunktion mithilfe des Limes	9
		2.9.5	Herleitung der Ableitungsregeln	9
3	Inte	gralrech	nung	9
	3.1	Rotati	onskoerper	9
	3.2	Herlei	tungen	9
4	Kurv	vendiskı	ussion	9
5	Anal	lytische	Geometrie	9
	5.1	Was is	t ein Vektor	9
	5.2	Koord	inatensystem	10
	5.3	Beson	dere Vektoren	10
		5.3.1	Gegenvektor	10
		5.3.2	Nullvektor	10
		5.3.3	Ortsvektor	10
		5.3.4	Normalenvektor	10
		5.3.5	Einheitsvektor	10
	5.4	Rechn	en mit Vektoren	10
		5.4.1	Linearkombination	10
		5.4.2	Laenge eines Vektors	10
		5.4.3	Skalarprodukt	10
		5.4.4	Kreuzprodukt	10

		5.4.4.1	Berechnung mithilfe Determinante	10
	5.4.5	Spatprod	lukt	11
5.5	Gerade	en		11
	5.5.1	Was sind	Geraden	11
	5.5.2	Lage von	zwei Geraden im Raum	11
		5.5.2.1	Parallel	11
		5.5.2.2	Windschief	11
		5.5.2.3	Schnittpunkt	11
		5.5.2.4	Winkel zwischen Gerade	11
5.6	Ebenei	n		11
	5.6.1	Ebenenfo	ormen	11
		5.6.1.1	Parameterform	11
		5.6.1.2	Koordinatenform	12
		5.6.1.3	Normalenform	12
		5.6.1.4	Hess'che Normalenform	12
	5.6.2	Lage Ebe	ne Gerade	12
		5.6.2.1	Parallel	12
		5.6.2.2	Schnittpunkt	12
		5.6.2.3	Winkel zwischen Gerade und Ebene	12
	5.6.3	Lage Ebe	ne Ebene	12
		5.6.3.1	Parallel	12
		5.6.3.2	Schnittpunkt	12
		5.6.3.3	Winkel zwischen Ebenen	12
	5.6.4	Abstands	sberechnung im Raum	12
5.7	Kugeln			12
	5.7.1	Was ist e	ine Kugel	12
	5.7.2	Kugelglei	ichung	12
	5.7.3	Lage Kug	gel Punkt	12
	5.7.4	Lage Kug	gel Gerade	12
		5.7.4.1	Schnittpunkt	12
	575	Lage Kug	rel Ehene	13

			5.7.5.1 Schnittebene	13
		5.7.6	Lage Kugel Kugel	13
			5.7.6.1 Schnittvolumen	13
	5.8	Herlei	tungen	13
		5.8.1	Satz des Pythagoras	13
		5.8.2	Pythagoras im Raum	13
		5.8.3	Kosinussatz	13
		5.8.4	Skalarprodukt	13
		5.8.5	Kreutzprodukt	13
		5.8.6	Spatprodukt	13
		5.8.7	Hess'sche Normalform	13
6	Line	are Alge	ebra	13
	6.1		ngsverfahren fuer LGS	
		6.1.1	Treppenstuffen Verfahren	
		6.1.2	Koeffizienten Matrix	
		6.1.3	Determinante	
	6.2	Matriz	en	
		6.2.1	Besondere Matrizen	
			6.2.1.1 Nullmatrix	
			6.2.1.2 Stochastische Matrix	
			6.2.1.3 Inverse	14
			6.2.1.4 Einheitsmatrix	
			6.2.1.5 Fixvektor	
			6.2.1.6 Grenzmatrix	
		6.2.2	Rechenregeln	16
		6.2.3	TODO: Matrizengleichungen	17
		6.2.4	TODO: Einstufige Prozesse	
		6.2.5	TODO: Mehrstufige Prozesse	
			6.2.5.1 Markov-Ketten	
		626	Lineare Ontimierung	17

	6.2.6.1	Maximierungsprobleme	17
	6.2.6.2	Minimierungsprobleme	17
	6.2.6.3	Sonderfaelle und Loesbarkeit	17
	6.2.6.4	Simplex-Verfahren	17
	6.2.6.5	Simplex-Algorithmus	17
7	Taschenrechner		17
8	Beispielaufgaben		17
9	Vielleicht falls bock		17
10	Quellen		17

## 1 Analysis

## 1.1 Lineare Funktionen

Eine lineare Funktionen ist eine Funktion der Form f(x) = mx + b.

## 1.1.1 Eigenschaften einer linearen Funktionen

Bei einer Linearen Funktion stellt m die Steigung und b die Verschiebung auf der Y-Achsen dar. Die **Steigung** m einer linearen Funktion f(x) = mx + b berechnet sich durch  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 



Beispiel:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\iff \frac{3, 5 - 1, 5}{4 - 0} = 0, 5$$

## 1.1.2 Schnittpunkt zweier linearer Funktionen

Der **Schnittpunkt** x zweier linearer Funktonen berechnet sich durch das Gleichsetzen zweier lineare Funktionen:

$$f(x) = 0.5x + 1.5$$

$$g(x) = 1x + 0,2$$



Beispiel:

$$0.5x + 1.5 = 1$$
  $x + 0.2| - 0.5x$   
 $1.5 = 0.5x + 0.2| - 0.2$   
 $1.3 = 0.5x$   $| *2$   
 $2.6 = x$ 

Jetzt kann das Ergebnis

(x = 2,6) in die Gleichungen eingesetzt werden um das Ergebnis zu ueberpruefen.

$$f(2,6) = 2,8$$

$$g(2,6) = 2,8$$

Da die beiden Werte gleich sind heisst das, dass die Rechnung korrekt ist.

## 1.2 Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktionen ist eine Funktion der Form  $f(x) = ax^2 + bx + c$  in der Normal -und  $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$  in der Scheitelpunktform.



Gestreckte Parabel:

 $h(x) = 0,2x^2 + 0x + 0;$   $0,2(x-0)^2 + 0$ 

Normale Parabel:

 $f(x) = 1x^2 + 0x + 0;$   $1(x-0)^2 + 0$ 

Gespreizte Parabel

 $g(x) = 4x^2 + 0x + 0;$   $4(x-0)^2 + 0$ 

#### 1.2.1 Eigenschaften einer quadratischen Funktionen

Die Verschiedenen Koeffinzienten einer quadratichen Funktion, haben verchiedene Auswirkungen auf das Aussehen einer quadratischen Funktion.

#### **Normalform:**

Der **Koeffizient** a gibt sowohl die Oeffnungsrichtung als auch die Steigung einer Parabel wieder, ist a < 0 ist die Parabel nach unten geoeffnet, ist a > 0 ist sie nach oben geoeffnet. Ist a = 0 ensteht eine lineare Funktion.

Ueber die Steigung kann man folgene Aussagen treffen: Ist a > 1 ist die Parabel gestreckt, ist a < 1 ist sie gespreitzt, a = 1 stellt die Normalparabel da.

Der **Parameter** b gibt die Steigung der Parabel im Schnittpunkt mit der y-Achse an. Insbesondere kann man am Vorzeichen von b erkennen, ob die y-Achse mit dem fallenden oder dem ansteigenden Ast der Parabel geschnitten wird. Hieraus lassen sich wiederum Rückschlüsse über die Zahl und die mögliche Lage von Nullstellen ziehen. Eine Veränderung des Parameters b bewirkt eine Verschiebung sowohl in x- als auch in y-Richtung. Wird b um eins erhöht, dann wird der Graph um 1/2a Einheiten nach links und (2b+1)/4a nach unten verschoben. Wird b um eins verringert, wird der Graph dagegen um 1/2a Einheiten nach rechts und (2b-1)/4a nach oben verschoben.

3

Wikipedia

Der **Koeffizient** c bestimmt wie die Funktion auf der Y-Achse verschoben ist.

#### 1.2.2 Umwandlung der Normalform in die Scheitelpunktform

Es sei  $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ , um diese Funktion in die Scheitelpunktform zu ueberfuehren muessen folgende Schritte vollzogen werden.

$$f(x) = (ax^{2} + bx) + c \quad |a \text{ ausklammer } n$$

$$= a\left(x^{2} + \frac{b}{a}x\right) + c \quad |a \text{ e.e.}$$

$$= a\left[x^{2} + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^{2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^{2}\right] + c \quad |b \text{ in. For } m \text{ rueckwaerts}$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^{2}\right] + c \quad |K \text{ lammer } a \text{ uf loesen}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2} - \frac{ab^{2}}{4a^{2}} + c \quad |a \text{ kuerzen}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^{2} + \left(c - \frac{b^{2}}{4a}\right) \quad |SPF \text{ der Funktion}|$$

Hier kann man nun den Scheitelpunkt ablesen:

$$S = \left(-\frac{b}{2a}|c - \frac{b^2}{4a}\right) = \left(-0, 5|4, 5\right)$$

#### 1.2.3 Schnittpunkt zweier quadratischer Funktionen

$$f(x) = 5x^2 - 10x + 2$$
$$g(x) = x^2 + 2x + 0$$

$$5x^{2} - 10x + 2 = x^{2} + 2x + 0$$

$$5x^{2} - 12x + 2 = x^{2}$$

$$4x^{2} - 12x + 2 = 0$$

$$x^{2} - 3x + 0.5 = 0$$
|-2x
|-x<sup>2</sup>

Nun kann die Gleichung mit der P-Q-Formel geloest werden.

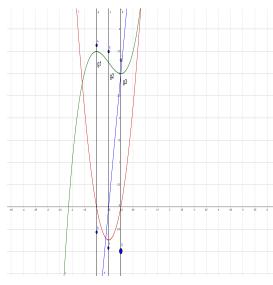
## 1.3 Funtionen mit dem Grad groesser 2

- 1.3.1 Substitution
- 1.3.2 Polynomdivision
- 1.4 Trigonometrische Funktionen
- 1.5 Exponentialfunktionen
- 1.5.1 Natuerliche Expoentialfunktion
- 1.6 Herleitung
- 1.6.1 Trigonometrische Funktionen
- 1.6.2 Quadratische Ergaenzung
- 1.6.3 P-Q-Formel
- 1.6.4 Polynomdivision
- 1.6.5 Horner Schema

## 2 Differentialrechnung

## 2.1 Ableitung

## 2.2 Visualisierung



Hier zu sehen ist der Graph f(x), mit seinen Ableitungen f'(x) und f''(x). Hier kann man sehr gut erkennen wie die Nullstellen der 1. Ableitung f'(x), genau an der Position liegen an der auch die Steigung von f(x) gleich 0 ist. Schaut man sich nun die 2. Ableitung an, kann man erkennen das sich Nullstelle der 2. Ableitung an der Stelle befinden wo f(x) einen Wendepunkt hat.

## 2.3 Bedeutung der 1. Ableitung

Muss Ueberarbeitete werden

Die 1. Ableitung gibt die Steigung der Originalfunktion wieder, d.h wenn die 1. Ableitung 0 ist hat die Originalfunktion an diesem Punkt eine Steigung von 0 und damit einen moeglichen Extrempunkt.

## 2.4 Bedeutung der 2. Ableitung

Muss Ueberarbeitete werden

Die 2. Ableitung gibt die Steigung der 1. Ableitung wieder, d.h wenn die 2. Ableitung 0 ist hat die 1. Ableitung an diesem Punkt eine Steigung von 0. und damit hat die Originalfunktion an diesem Punkt einen Steigunswechsel

## 2.5 Kurzform des Ableitens

Das Ableiten besitzt eine Kurzform, ohne jedes mal den Limes benutzen zu muessen, dabei muss man die Ableitungsregeln sowie die Tatsache dass ein konstanten Summand beim Ableiten wegfaellt beachten (Summenregel).

Beispiel:

$$f(x) = 5x^{2} + 3x^{1} - 5x^{0}$$
  
$$f'(x) = 2 * 5x^{2-1} + 1 * 3x^{1-1} = 10x^{1} + 3x^{0}$$

In Worte gefasst bedeutet dass, das der Originalexponent vor den Koeffizenten gezogen und mit diesem multipliziert wird, danach wird der Exponent um 1 dekrementiert.

## 2.6 Ableitungsregeln

### 2.6.1 Summenregel

Summen von Funktionen werden getrennt abgeleitet. Beispiel:

$$f(x) = 5x^2 + 8x$$
$$f'(x) = 10x + 8$$

## 2.6.2 Faktorregel

Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten. Beispiel:

$$f(x) = 5 * x^2$$
$$f'(x) = 5 * 2x$$

#### 2.6.3 Produktregel

$$f(x) = u(x) * v(x)$$
  
 $f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$ 

Beispiel:

$$f(x) = 5x^{2} * 8x - 1$$
$$f'(x) = 10x * 8x + 5x^{2} * 8$$

## 2.6.4 Kettenregel

Äuesere mal innere Ableitung".

Ist eine Funktion das Ergebnis der Vekettungs von 2 anderen Funktionen dann gilt:

$$f(x) = (u \circ v)(x)$$
  
$$f'(x) = u'(v(x)) * v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = e^{5x}$$
$$f'(x) = 5e^{5x}$$

$$f(x) = \sin(5x)$$
$$f'(x) = 5 * \cos(5x)$$

## 2.6.5 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel:

## 2.7 Ableitung der e-Funktion

Die Ableitung der Funktion  $f(x) = e^x$  ist  $f'(x) = e^x$  Beispiel:

$$f(x) = 5e^x$$
$$f'(x) = 5e^x$$

## 2.8 Ableitung trigonometrischer Funktionen

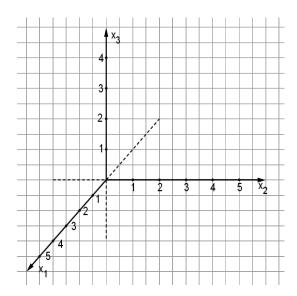
- 2.9 Herleitungen
- 2.9.1 Herleitung der Ableitung mithilfe des Limes
- 2.9.2 Herleitung der Potenzregeln in der Menge der natuerliche Zaheln
- 2.9.3 Herleitung der eFunktion in der Menge der natuerliche Zaheln
- 2.9.4 Herleitung der Trigofunktion mithilfe des Limes
- 2.9.5 Herleitung der Ableitungsregeln

## 3 Integralrechnung

- 3.1 Rotationskoerper
- 3.2 Herleitungen
- 4 Kurvendiskussion
- 5 Analytische Geometrie
- 5.1 Was ist ein Vektor

Ein Vektor ist eine Menge von Pfeilen der Form  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ , die parallel untereinander verschoben sind. Eine anderen Notation fuer diesen Vektor waere  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 

## 5.2 Koordinatensystem



3D Koordinatensystem

## 5.3 Besondere Vektoren

- 5.3.1 Gegenvektor
- 5.3.2 Nullvektor
- 5.3.3 Ortsvektor
- 5.3.4 Normalenvektor
- 5.3.5 Einheitsvektor

## 5.4 Rechnen mit Vektoren

- 5.4.1 Linearkombination
- 5.4.2 Laenge eines Vektors
- 5.4.3 Skalarprodukt
- 5.4.4 Kreuzprodukt

## **5.4.4.1** Berechnung mithilfe Determinante

#### 5.4.5 Spatprodukt

### 5.5 Geraden

#### 5.5.1 Was sind Geraden

#### 5.5.2 Lage von zwei Geraden im Raum

#### **5.5.2.1** Parallel

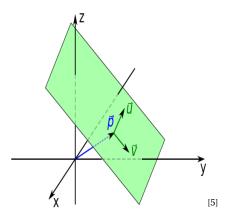
#### 5.5.2.2 Windschief

#### 5.5.2.3 Schnittpunkt

#### 5.5.2.4 Winkel zwischen Gerade

#### 5.6 Ebenen

Eine Ebene im 3-Dimensionalen Raum ist eine uendliche Ausdehnung in zwei Richtungen.



Ebene im 3-Dimensionalen Raum

#### 5.6.1 Ebenenformen

#### 5.6.1.1 Parameterform

Paramterform einer Ebene: E :  $\vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u} + s * \vec{v}$ 

In der Paramterform wird eine Ebene mithilfe eines Stuetzvektors(Ortsvektors) und zwei Richtungsvektoren beschrieben. Es gibt zwei Moeglichkeiten wie diese Richtungsvektoren zueiander liegen duerfen um eine Ebene zu beschreiben.

**Geschitten** Falls sich die beiden Richtugnsvektoren schneiden, kann die Ebene direkt zwischen ihnen aufgespannt werden.

#### Parallel

#### 5.6.1.2 Koordinatenform

#### 5.6.1.3 Normalenform

#### 5.6.1.4 Hess'che Normalenform

#### 5.6.2 Lage Ebene Gerade

- **5.6.2.1** Parallel
- 5.6.2.2 Schnittpunkt

#### 5.6.2.3 Winkel zwischen Gerade und Ebene

#### 5.6.3 Lage Ebene Ebene

**5.6.3.1** Parallel

#### 5.6.3.2 Schnittpunkt

#### 5.6.3.3 Winkel zwischen Ebenen

#### 5.6.4 Abstandsberechnung im Raum

## 5.7 Kugeln

#### 5.7.1 Was ist eine Kugel

Eine Kugel ist eine Menge von Punkten im  $\mathbb{R}^3$ , die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben, der Punkt M wird dabei als Mittelpunkt und der Abstand r als Radius bezeichnet.

#### 5.7.2 Kugelgleichung

Eine Kugel in der Analytischen Geometrie wird mit der Gleichung  $(M_1-p_1)^2+(M_2-p_2)^2+(M_3-p_3)^2=r^2$  beschrieben, wo M den Mittelpunkt als Vektor, p einen beliebigen Punkt als Vektor, und r den Radius als reele Zahl darstellt.

#### 5.7.3 Lage Kugel Punkt

### 5.7.4 Lage Kugel Gerade

#### 5.7.4.1 Schnittpunkt

- 5.7.5 Lage Kugel Ebene
- 5.7.5.1 Schnittebene
- 5.7.6 Lage Kugel Kugel
- 5.7.6.1 Schnittvolumen
- 5.8 Herleitungen
- **5.8.1** Satz des Pythagoras
- 5.8.2 Pythagoras im Raum
- 5.8.3 Kosinussatz
- 5.8.4 Skalarprodukt
- 5.8.5 Kreutzprodukt
- 5.8.6 Spatprodukt
- 5.8.7 Hess'sche Normalform

## 6 Lineare Algebra

- 6.1 Loesungsverfahren fuer LGS
- **6.1.1** Treppenstuffen Verfahren
- 6.1.2 Koeffizienten Matrix
- 6.1.3 Determinante

#### 6.2 Matrizen

Eine Matrix vom Typ  $\mathbf{M}_{m,n}$  ist eine Zusammenfassung von Werten der Form  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 

 $\min m$  Zeilen und n Spalten

#### 6.2.1 Besondere Matrizen

#### 6.2.1.1 Nullmatrix

Die Nullmatrix ist eine Matrix in der alle Elemente Null sind, sie ist damit das neutrale Element der Matrixaddition.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

#### 6.2.1.2 Stochastische Matrix

Eine Stochastische Matrix ist eine quadratische Matrix deren Elemente zweischen 0 und 1 liegen, und der Spalten bzw. Zeilensumme 1 ist.

#### 6.2.1.3 Inverse

Seien M und I beliebige quadratische Matrizen und E die Einheitsmatrix, dann nennt man die Matrix I die, die Gleichung M \* I = I \* M = E erfuellt, Inverse der Matrix M. Sie wird mit  $M^{-1}$  dargestellt.

#### Beispiel:

Eine Matrix mit einer Inversen nennt man regluaere Matrix.

#### 6.2.1.4 Einheitsmatrix

Eine Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonale gleich 1 sind.

Sie ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation d.h. M \* E = E \* M = M wobei M eine beliebige regulaere Matrix ist, und E ihre Einheitsmatrix ist.

14

Sie ist symmetrisch, d.h  $E^t = E$ .

Sie ist selbstinvers, d.h  $E^{-1} = E$ 

Ihre determinante ist 1 d.h det(E) = 1

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

### 6.2.1.5 Fixvektor

Sei  $V_f$  ein Vektor, und M eine beliebige Matrix, dann nennt man den Vektor der die Gleichung  $M*V_f=V_f$  erfuellt Fixvektor der Matrix M.

Beispiel:

#### 6.2.1.6 Grenzmatrix

Sei M eine beliebige Matrix, dann nennt man eine Matrix die Gleichung M\*M=M erfuellt Grenzmatrix der Matrix M.

Beispiel:

#### 6.2.2 Rechenregeln

#### Addition

Die Summe zweier Matrizen, berechnet man in dem man sie komponentenweise addiert.

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrixaddition ist sowohl **kommutativ**(A + B = B + A),

als auch **assoziativ**((A + B) + C = A + (B + C)).

Es koennen nur Matrizen der gleiche Dimension addiert werden.

#### Skalarmultiplikation

$$r*\mathbf{M} = r* \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r*a_{11} & r*a_{12} & \dots & r*a_{1n} \\ r*a_{21} & r*a_{22} & \dots & r*a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ r*a_{m1} & r*a_{m2} & \dots & r*a_{mn} \end{pmatrix}$$

#### Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen werden multipliziert indem man das Skalaprodukt von den Zeilenvektoren der erstem Matrix Es koennen nur Matrizen multipliziert wenn die **Spaltenanzahl** der 1. Matrix mit der **Zeilenanzahl** der 2. Matrix uebereinstimmt.

Die Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen **nicht** kommutativ( $A * B \neq B * A$ ), daraus folgt dass beim **Distributivgesetz** die Richtung eine Rolle spielt( $A * (B + C) \neq (B + C) * A$ ).

$$c_{11} = b_{11} * a_{11} + b_{12} * a_{21} + b_{13} * a_{31}$$

$$c_{12} = b_{11} * a_{12} + b_{12} * a_{22} + b_{13} * a_{32}$$

$$c_{13} = b_{11} * a_{13} + b_{12} * a_{23} + b_{13} * a_{33}$$

$$c_{14} = b_{11} * a_{14} + b_{12} * a_{24} + b_{13} * a_{34}$$

$$c_{21} = b_{21} * a_{11} + b_{22} * a_{21} + b_{23} * a_{31}$$

$$c_{22} = b_{21} * a_{12} + b_{22} * a_{22} + b_{23} * a_{32}$$

$$c_{23} = b_{21} * a_{13} + b_{22} * a_{23} + b_{23} * a_{33}$$

$$c_{24} = b_{21} * a_{14} + b_{22} * a_{24} + b_{23} * a_{34}$$

6.2.4 TODO: Einstufige Prozesse
6.2.5 TODO: Mehrstufige Prozesse
6.2.5.1 Markov-Ketten
6.2.6 Lineare Optimierung
6.2.6.1 Maximierungsprobleme
6.2.6.2 Minimierungsprobleme
6.2.6.3 Sonderfaelle und Loesbarkeit
6.2.6.4 Simplex-Verfahren
6.2.6.5 Simplex-Algorithmus
7 Taschenrechner
8 Beispielaufgaben
9 Vielleicht falls bock
logarithmus-(funktion), verschiedene beweise/herleitung quar ergaenzung sekante tangene normale
10 Quellen

6.2.3 TODO: Matrizengleichungen

[5]. "Plane equation qtl1" von Quartl - Wikipedia