Mathematik der Oberstufe

Thomas Dost

Inhaltsverzeichnis

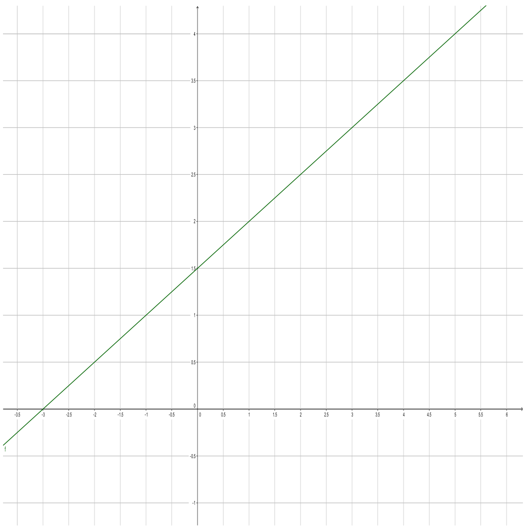
1 Analysis

1.1 Lineare Funktionen

Eine lineare Funktionen ist eine Funktion der Form $f(x) = mx + b$.

1.1.1 Eigenschaften einer linearen Funktionen

Bei einer Linearen Funktion stellt m die Steigung und b die Verschiebung auf der Y-Achsen dar. Die **Steigung** m einer linearen Funktion $f(x) = mx + b$ berechnet sich durch $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



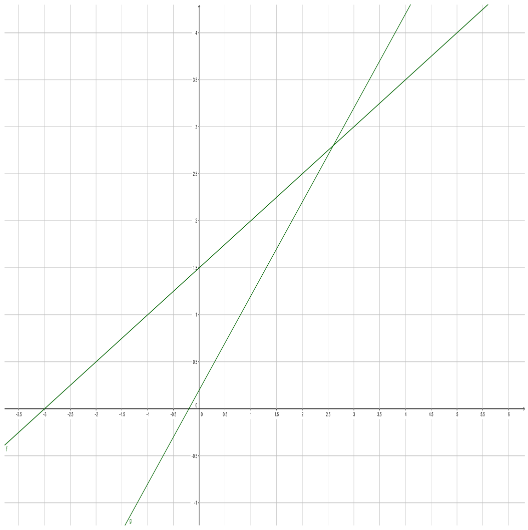
Beispiel:

$$\begin{aligned} m = \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \leftrightarrows \frac{3,5 - 1,5}{4 - 0} &= 0,5 \end{aligned}$$

$f(x) = 0,5x + 1,5$

1.1.2 Schnittpunkt zweier linearer Funktionen

Der **Schnittpunkt** x zweier linearer Funktonen berechnet sich durch das Gleichsetzen zweier lineare Funktionen:
$f(x) = 0,5x + 1,5$
$g(x) = 1x + 0,2$



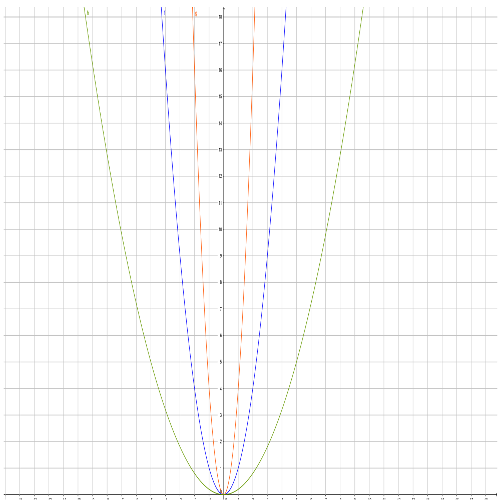
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
0,5x + 1,5 &= 1 \quad x + 0,2 | - 0,5x \\
1,5 &= 0,5x + 0,2 | - 0,2 \\
1,3 &= 0,5x \qquad | * 2 \\
2,6 &= \quad x
\end{aligned}
$$

Jetzt kann das Ergebnis ($x = 2,6$) in die Gleichungen eingesetzt werden um das Ergebnis zu ueberpruefen.
$f(2,6) = 2,8$
$g(2,6) = 2,8$
Da die beiden Werte gleich sind heisst das, dass die Rechnung korrekt ist.

1.2 Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktionen ist eine Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ in der Normal -und $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ in der Scheitelpunktform.



Gestreckte Parabel:
$h(x) = 0,2x^2 + 0x + 0; \quad 0,2(x-0)^2 + 0$
Normale Parabel:
$f(x) = 1x^2 + 0x + 0; \quad 1(x-0)^2 + 0$
Gespreizte Parabel
$g(x) = 4x^2 + 0x + 0; \quad 4(x-0)^2 + 0$

1.2.1 Eigenschaften einer quadratischen Funktionen

Die Verschiedenen Koeffinzienten einer quadratichen Funktion, haben verchiedene Auswirkungen auf das Aussehen einer quadratischen Funktion.

Normalform:
Der **Koeffizient** a gibt sowohl die Oeffnungsrichtung als auch die Steigung einer Parabel wieder, ist $a < 0$ ist die Parabel nach unten geoeffnet, ist $a > 0$ ist sie nach oben geoeffnet. Ist $a = 0$ ensteht eine lineare Funktion.
Ueber die Steigung kann man folgene Aussagen treffen: Ist $a > 1$ ist die Parabel gestreckt, ist $a < 1$ ist sie gespreitzt, $a = 1$ stellt die Normalparabel da.

Der **Koeffinzienten** b gibt die Steigung der Parabel im Schnittpunkt mit der y-Achse an, zusaetlich laesst sich am Vorzeichen ablesen ob die Parabel die Y-Achse(Ordinatenachse), mit dem fallenden Ast der Parbel geschnitten wird oder mit dem Steigenden. Ist $b < 0$, scheidet der fallende Ast die Ordinatenachse, sonst der Andere. Eine Veraenderung des Koeffinzienten b bewirkt eine Verschiebung sowohl in x- als auch in y-Richtung. Wird b um eins eroeht, dann wird der Graph um 1/2a Einheiten nach links und (2b+1)/4a nach unten verschoben. Wird b um eins verringert, wird der Graph dagegen um 1/2a Einheiten nach rechts und (2b-1)/4a nach oben verschoben.

Der **Koeffizient** c bestimmt wie die Funktion auf der Ordinatenachse verschoben ist.

1.2.2 Umwandlung der Normalform in die Scheitelpunktform

Es sei $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$, um diese Funktion in die Scheitelpunktform zu ueberfuehren muessen folgende Schritte vollzogen werden.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (ax^2 + bx) & +c \quad & |a\ ausklammern \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) & +c \quad & |q.\text{E.} \\
&= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] & +c \quad & |bin.\text{F}orm\ rueckwaerts \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] & +c \quad & |\text{K}lammer\ aufloesen \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} & +c \quad & |a\ kuerzen \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) & & |\text{SPF}\ der\text{F}unktion
\end{aligned}$$

Hier kann man nun den Scheitelpunkt ablesen:

$$\text{S} = \left(-\tfrac{b}{2a} | c - \tfrac{b^2}{4a}\right) = \left(-0,5 | 4,5\right)$$

1.2.3 Schnittpunkt zweier quadratischer Funktionen

$f(x) = 5x^2 - 10x + 2$
$g(x) = x^2 + 2x + 0$

$$\begin{aligned}
5x^2 - 10x + 2 &= x^2 + 2x + 0 & & | - 2x \\
5x^2 - 12x + 2 &= x^2 & & | - x^2 \\
4x^2 - 12x + 2 &= 0 & & | : 4 \\
x^2 - 3x + 0.5 &= 0
\end{aligned}$$

Nun kann die Gleichung mit der P-Q-Formel geloest werden.

1.3 Funtionen mit dem Grad groesser 2

1.3.1 Substitution

1.3.2 Polynomdivision

1.4 Trigonometrische Funktionen

1.5 Tangente und Normale

1.6 Exponentialfunktionen

1.6.1 Natuerliche Expoentialfunktion

Als natuerliche Exponentialfunktion bezeichnet man Variationen der Funtion $f(x) = e^x$.

1.7 Umkehrfunktion

1.8 Funktionenscharen

1.9 Herleitung

1.9.1 Trigonometrische Funktionen

1.9.2 Quadratische Ergaenzung

1.9.3 P-Q-Formel

1.9.4 Polynomdivision

1.9.5 Horner Schema

2 Differentialrechnung

2.1 Ableitung

2.2 Visualisierung

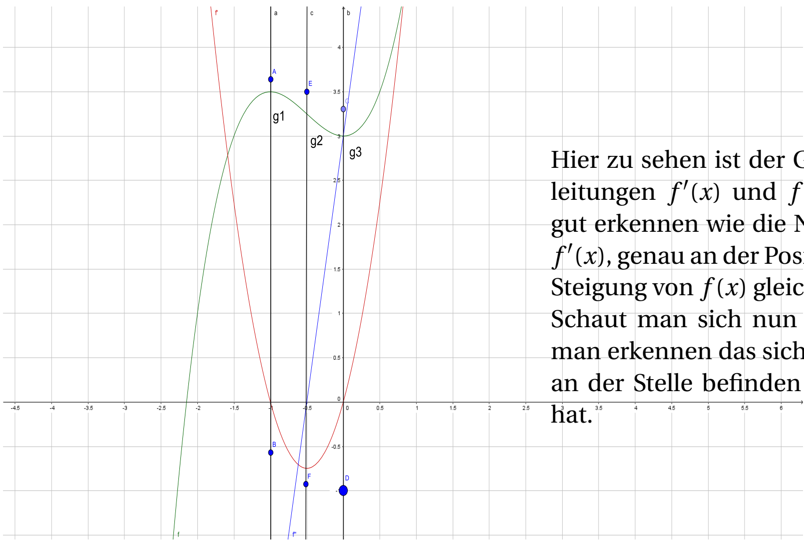


Abbildung 6: Rectangle

Hier zu sehen ist der Graph $f(x)$, mit seinen Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$. Hier kann man sehr gut erkennen wie die Nullstellen der 1. Ableitung $f'(x)$, genau an der Position liegen an der auch die Steigung von $f(x)$ gleich 0 ist.
Schaut man sich nun die 2. Ableitung an, kann man erkennen das sich Nullstelle der 2. Ableitung an der Stelle befinden wo $f(x)$ eineWendepunkt hat.

2.3 Bedeutung der 1. Ableitung

Die 1. Ableitung gibt die Steigung der Originalfunktion wieder, d.h wenn die 1. Ableitung 0 ist hat die Originalfunktion an diesem Punkt eine Steigung von 0 und damit einen moeglichen Extrempunkt.

2.4 Bedeutung der 2. Ableitung

Muss Ueberarbeitete werden
Die 2. Ableitung gibt die Steigung der 1. Ableitung wieder, d.h wenn die 2. Ableitung 0 ist
hat die 1. Ableitung an diesem Punkt eine Steigung von 0. und damit hat die Originalfunktion an diesem Punkt einen Steigunswechsel

2.5 Kurzform des Ableitens

Das Ableiten besitzt eine Kurzform, ohne jedes mal den Limes benutzen zu muessen, dabei muss man die Ableitungsregeln sowie die Tatsache dass ein konstanten Summand beim Ableiten wegfaellt beachten(Summenregel).
Beispiel:
$f(x) = 5x^2 + 3x^1 - 5x^0$
$f'(x) = 2 * 5x^{2-1} + 1 * 3x^{1-1} = 10x^1 + 3x^0$
In Worte gefasst bedeutet dass, das der Originalexponent vor den Koeffizenten gezogen und mit diesem multipliziert wird, danach wird der Exponent um 1 dekrementiert.

2.6 Ableitungsregeln

2.6.1 Summenregel

Summen von Funktionen werden getrennt abgeleitet.
Beispiel:

$$f(x) = 5x^2 + 8x$$
$$f'(x) = 10x + 8$$

2.6.2 Faktorregel

Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.
Beispiel:

$$f(x) = 5 * x^2$$
$$f'(x) = 5 * 2x$$

2.6.3 Produktregel

$$f(x) = u(x) * v(x)$$
$$f'(x) = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = 5x^2 * 8x - 1$$
$$f'(x) = 10x * 8x + 5x^2 * 8$$

2.6.4 Kettenregel

Äuesere mal innere Ableitung".
Ist eine Funktion das Ergebnis der Vekettungs von 2 anderen Funktionen dann gilt:

$$f(x) = (u \circ v)(x)$$
$$f'(x) = u'(v(x)) * v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = e^{5x}$$
$$f'(x) = 5e^{5x}$$

$$f(x) = sin(5x)$$
$$f'(x) = 5 * cos(5x)$$

2.6.5 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel:

2.7 Ableitung der e-Funktion

Die Ableitung der Funktion $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x$
Beispiel:

$$f(x) = 5e^x$$
$$f'(x) = 5e^x$$

2.8 Ableitung trigonometrischer Funktionen

2.9 Herleitungen

2.9.1 Herleitung der Ableitung mithilfe des Limes

2.9.2 Herleitung der Potenzregeln in $\mathbb{N}$

2.9.3 Herleitung der e-Funktion in der Menge der natuerliche Exponenten

2.9.4 Herleitung der Trigofunktion mithilfe des Limes

2.9.5 Herleitung der Ableitungsregeln

3 Integralrechnung

TEST

3.1 Rotationskoerper

HALLO GITHUB

3.2 Herleitungen

4 Kurvendiskussion

4.1 Symmetrie

4.2 Verhalten im Unendlichen

4.3 Schnittpunkt mit der y-Achse

4.4 Nullstellen

4.5 Ableitungen

4.6 Extrema berechnen

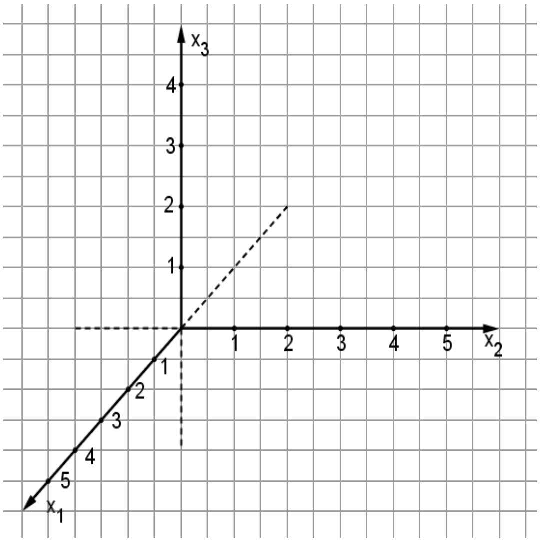
4.7 Wendepunkte berechnen

5 Analytische Geometrie

5.1 Was ist ein Vektor

Ein Vektor ist eine Menge von Pfeilen der Form $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, die parallel untereinander verschoben sind. Eine anderen Notation fuer diesen Vektor waere $\vec{a} = \left(a_1 \dots a_n\right)^{\mathrm{T}}$

5.2 Koordinatensystem



3D Koordinatensystem

5.3 Besondere Vektoren

5.3.1 Nullvektor

Der Nullvektor ist ein Vektor der Form $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, zudem ist er das neutrale Element der Vektoraddition d.h. $\vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}$.

5.3.2 Gegenvektor

Der Gegenvektor ist das inverse Element der Vektoraddtion d.h $\vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$, wobei $\vec{0}$ den Nullvektor bezeichnet.

5.3.3 Ortsvektor

Ein Ortsvektor bezeichnet einen Vektor der vom Koordinatenursprung aus geht d.h. er hat die Form $\vec{OP}$, wobei P ein beliebiger Punkt im Raum ist.

5.3.4 Normalenvektor

Ein Normalenvektor ist ein Vektor der orthogonal zu seinem Bezugsobjekt z.B. einer Gerade ist.

5.3.5 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor der Laenge 1, d.h. dass sein Betrag = 1 ist($|\vec{a}| = 1$).

Beispiel
Der Einheitsvektor $\vec{e_a}$ des Vektors $\vec{a}$ wird berechnet indem man $\frac{1}{|a|} * \vec{a}$ rechnet.

5.4 Rechnen mit Vektoren

5.4.1 Addition

Zwei Vekotren in $\mathbb{R}^3$ $\vec{a}, \vec{b}$ werden addiert, idem man ihre Komponenten addiert.
Beipsiel

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

5.4.2 s-Multilipkation

Ein Vektor $\vec{a}$ aus $\mathbb{R}^3$ wird mit einer Zahl s aus $\mathbb{R}$ multipliziert, in dem seine Komponenten mit s multipliziert werden.
Beispiel

$$s * \vec{a} = s * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s * a_1 \\ s * a_2 \\ s * a_3 \end{pmatrix}$$

5.4.3 Linearkombination

Einen Ausdruck der Form $r_1 * \vec{a}_1 + r_2 * \vec{a}_2 + \ldots + r_n * \vec{a}_n$ nennt man Linearekombination der Vektoren a_1 bis a_n. Beachte das a_1 bis a_n Vektoren keine Vektorkomponenten sind.

5.4.4 Laenge eines Vektors

Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ stellt seine Laege da, d.h. $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ist die Laenge eines Vektors.

5.4.5 Lineare Abhaengigkeit

Die Lineare Anhaenigkeit beschreibt die Eigenschaft eines Vektors $\vec{v}$ sich mit Hilfe der s-Multiplikation und eines beliebigen Vektors $\vec{b}$ herstellen zu lassen.

Beispiel:

$$\vec{v} = s * \vec{b}$$

Falls es ein s in $\mathbb{R}$ gibt das die Gleichung erfuellt ist $\vec{v}$ linear Abhaengig von $\vec{b}$.

5.4.6 Skalarprodukt

Das Sklalarprodukt ordnet je zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ ein Sklalar zu, ist dieses Skalar 0 sind die Vektoren orthogonal zueinander.

Beispiel

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3.$$

5.4.7 Kreuzprodukt

5.4.7.1 Berechnung mithilfe der Determinante

Das Kreuzprodukt leasst sich auch mithilfe der Determinante berechnen indem man, eine quadr. Matrix mit der Standardbasis und zwei sich schneidende Vektoren bildet.

$$\vec{a} x \vec{b} = det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \qquad = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= e_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + e_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= e_1(a_2 * b_3 - a_3 * b_2) + e_2(a_3 * b_1 - a_1 * b_3) + e_3(a_1 * b_2 - a_2 * b_1)$$

$$= \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 * b_3 - a_3 * b_2 \\ a_3 * b_1 - a_1 * b_3 \\ a_1 * b_2 - a_2 * b_1 \end{pmatrix}$$

5.4.8 Spatprodukt

5.5 Geraden

5.5.1 Was sind Geraden

Eine Gerade im 3-Dimensionalen Raum ist eine unendliche Ausdehnung in eine Koordinatenrichtungen.

5.5.2 Lage von zwei Geraden im Raum

Um die Lage zweier Gerade zueiander zu bestimmen muss zuert auf lineare Anhaengigkeit geprueft werden. Sind die Richtungsvektoren linear Abhaengig, sind die Gerade etweder Parallel oder Identisch, sind sie jedoch linear Unabhaengig muss geprueft werden ob sie einen Schnittpunkt besitzen oder windschief sind.

Beispiel **Parallel**
Fall wir herrausgefunden haben dass die Richtungsvektoren lineare Abhaengig sind, muessen wir als naechstes schauen ob der Ortsvektor eine beteiligten Gerade auf der anderen Gerade liegt um zu pruefen ob die Gerade Identisch sind.

Beispiel **Windschief**
Hat sich jedoch ergeben dass die Richtungsvektoren linear Unabhaengig sind, muess wird als naechstes schauen die Geraden einen Schnittpunkt besitzen um zu pruefen ob sie windschief sind.

5.5.2.1 Abstand Gerade Gerade

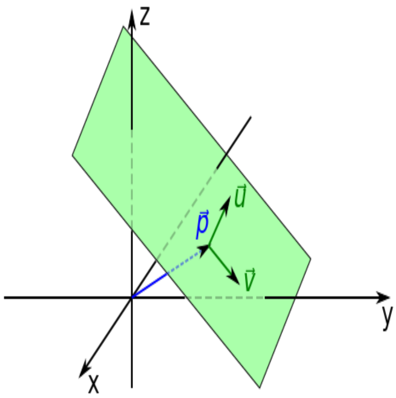
Windschief

Parallel

5.5.2.2 Winkel zwischen Gerade

5.6 Ebenen

Eine Ebene im 3-Dimensionalen Raum ist eine unendliche Ausdehnung in zwei Koordinatenrichtungen.



[5]

Ebene im 3-Dimensionalen Raum

5.6.1 Ebenenformen

5.6.1.1 Parameterform

Paramterform einer Ebene: E : $\vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u} + s * \vec{v}$
In der Paramterform wird eine Ebene mithilfe eines Stuetzvektors(Ortsvektors) und zwei Richtungsvektoren beschrieben. Es gibt zwei Moeglichkeiten wie diese Richtungsvektoren zueiander liegen duerfen um eine Ebene zu beschreiben.

Beispiel **Parallel**
Falls die gegeben Richtungsvektoren jedoch Parallel sind, muss ein Verbindungsvektor zwischen ihen hergestellt werden.
Beispiel
Fuer die Pruefung ob die Gerade Parallel sind siehe Lage Gerade Gerade.
Seien die Gerade $g_1 : \vec{x} = \vec{o_1} + r * \vec{a}$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{o_2} + s * \vec{b}$ parallel.
Dann kann die Ebene mit Hilfe des Richtungsvektors von einer der Geraden und und eines beliebigen Verbindungsvektors der zwei Geraden gebildet werden.

Beispiel **Geschitten**
Falls sich die gegebenen Richtugnsvektoren schneiden, kann die Ebene direkt zwischen ihnen aufgespannt werden.

5.6.1.2 Normalenform

Normalenform einer Ebene $\text{E} : \vec{x} = \vec{n} \circ \left[(\vec{x} - \vec{p}) \right]$
In der Normalenform wird eine Ebene mit Hilfe ihrer Normale($\vec{n}$) und der Differenz eines Punktes aus der Ebene mit einem beliebigen anderen Punkt beschrieben($\vec{x} - \vec{p}$) wobei $\vec{p}$ einen beliebigen Punkt in der Ebene, und $\vec{x}$ einen beliebigen anderen Punkt darstellt. Alle Differenzen die orthogonal zum Normalenvektor der Ebene liegen beschreiben daher Vektoren die in der Ebene liegen.

5.6.1.3 Koordinatenform

Koordinatenform der Ebene: $\text{E} : n_1 * x_1 + n_2 * x_2 + n_3 * x_3 = c$
Die Koordinatenform der Ebene ist die ausmultiplizierte Normalenform einer Ebene.

Beispiel

5.6.1.4 Hess'che Normalenform

5.6.2 Lage Ebene Gerade

Um die Lage einer Gerade zu Ebene zu bestimment, muss man zuert ueberpruefen ob die Gerade echt parallel, dies kann man mit Hilfe der Normale der Ebene und des Richtungsvektors der Gerade ueberpruefen indem man ueberprueft ob die Normale orthogonal zum Richtungsvektor der Gerade liegt. Fall die Gerade parallel zur Ebene liegt, kann man nun den Ortsvektor der Gerade in die Ebene einsetzen um zu ueberpruefen ob sie identisch sind. Falls die Gerade sich jedoch nicht parallel zur Ebene verhaelt hat sie garantiert einen Schnittpunkt mit der Ebene.

5.6.2.1 Schnittpunkt

Um den Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene zu berechnen, bringt man die Ebene in Koordinatenform und setzt die Gerade dann in diese ein.

Beispiel

5.6.2.2 Abstand Gerade Ebene

5.6.2.3 Winkel zwischen Gerade und Ebene

5.6.3 Lage Ebene Ebene

Um die Lage einer Ebene zu einer anderen Ebene stellt man zuerst fest ob sie parallel zueiander liegen, die kann man ueberprufen indem man die beiden Normalen der Ebene auf lineare Abhaengigkeit ueberprueft.

5.6.3.1 Identisch

Um nun zu ueberpruefen ob die Ebenen identisch sind, setzt einen belibigen Punkt der einen Ebene in die andere Ebene ein.

5.6.3.2 Schnittgerade

5.6.3.3 Abstand Ebene Ebene

Um den Abstand zweier Ebenen zu berechnen muessen diese selbstverstaendlich parallel zueiandern liegen, nun berechnet man von einer der Ebenen die Normale und stellt mit ihrer Hilfe eine Gerade auf, dann berechnet man den Schnittpunkt dieser Gerade mit der anderen Ebene.
Nun berechnet man den Vektor zwischen dem Ortsvektor der Normale und dem Schnittpunkt, der Betrag dieses Vektors ist der Abstand zwischen den beiden Ebenen.

5.6.3.4 Winkel zwischen Ebenen

5.7 Kugeln

5.7.1 Was ist eine Kugel

Eine Kugel ist eine Menge von Punkten im 3-Dimensionalen Raum, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben, der Punkt M wird dabei als Mittelpunkt und der Abstand r als Radius bezeichnet.

5.7.2 Kugelgleichung

Eine Kugel in der Analytischen Geometrie wird mit der Gleichung
$|\vec{p} - \vec{\mathrm{M}}|^2 = r^2$ oder $(p_1 - \mathrm{M}_1)^2 + (p_2 - \mathrm{M}_2)^2 + (p_3 - \mathrm{M}_3)^2 = r^2$ beschrieben, wo M den Mittelpunkt als Vektor, p einen beliebigen Punkt als Vektor, und r den Radius als reele Zahl darstellt.

5.7.3 Lage Kugel Punkt

5.7.3.1 Abstand

5.7.4 Lage Kugel Gerade

5.7.4.1 Abstand

5.7.4.2 Schnittpunkt

5.7.5 Lage Kugel Ebene

5.7.5.1 Abstand

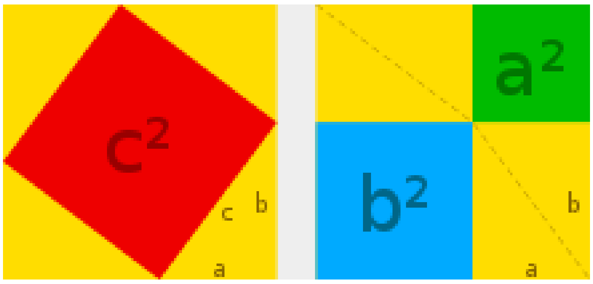
5.7.5.2 Schnittebene

5.7.6 Lage Kugel Kugel

5.7.6.1 Abstand

5.8 Herleitungen

5.8.1 Satz des Pythagoras



Links = $c^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b)$
Rechts = $a^2 + b^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b)$

$$
\begin{aligned}
c^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b) = a^2 + b^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b) \quad & | - 4 * (\frac{1}{2} a * b) \\
c^2 = a^2 + b^2 &
\end{aligned}
$$

5.8.2 Pythagoras im Raum

5.8.3 Kosinussatz

5.8.4 Skalarprodukt

5.8.5 Kreutzprodukt

5.8.6 Spatprodukt

5.8.7 Hesse'sche Normalform

6 Lineare Algebra

6.1 Loesungsverfahren fuer LGS

6.1.1 Treppenstuffen Verfahren

6.1.2 Koeffizienten Matrix

6.1.3 Determinante

6.2 Matrizen

Eine Matrix vom Typ $M_{m,n}$ ist eine Zusammenfassung von Werten der Form $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

mit m Zeilen und n Spalten

6.2.1 Besondere Matrizen

6.2.1.1 Nullmatrix

Die Nullmatrix ist eine Matrix in der alle Elemente Null sind, sie ist damit das neutrale Element der Matrixaddition.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6.2.1.2 Stochastische Matrix

Eine Stochastische Matrix ist eine quadratische Matrix deren Elemente zweischen 0 und 1 liegen, und der Spalten bzw. Zeilensumme 1 ist.

6.2.1.3 Inverse

Seien M und I beliebige quadratische Matrizen und E die Einheitsmatrix, dann nennt man die Matrix I die, die Gleichung $M * I = I * M = E$ erfuellt, Inverse der Matrix M. Sie wird mit M^{-1} dargestellt.
Eine Matrix mit einer Inversen nennt man regluaere Matrix.
GAUSS UND ADJUNKTE

6.2.1.4 Einheitsmatrix

Eine Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonale gleich 1 sind.
Sie ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation d.h. $M * E = E * M = M$ wobei M eine beliebige regulaere Matrix ist, und E ihre Einheitsmatrix ist.
Sie ist symmetrisch, d.h $E^t = E$.
Sie ist selbstinvers, d.h $E^{-1} = E$
Ihre determinante ist 1 d.h $det(E) = 1$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

6.2.1.5 Fixvektor

Sei V_f ein Vektor, und M eine beliebige Matrix, dann nennt man den Vektor der die Gleichung $M * V_f = V_f$ erfuellt Fixvektor der Matrix M.

Beispiel:

6.2.1.6 Grenzmatrix

Sei M eine beliebige Matrix, dann nennt man eine Matrix die Gleichung $M * M = M$ erfuellt Grenzmatrix der Matrix M.

Beispiel:

6.2.2 Rechenregeln

Addition

Die Summe zweier Matrizen, berechnet man in dem man sie komponentenweise addiert.

$$\mathrm{M} = \mathrm{A+B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrixaddition ist sowohl **kommutativ**($\mathrm{A+B=B+A}$),
als auch **assoziativ**($\mathrm{(A+B)+C=A+(B+C)}$).
Es koennen nur Matrizen der gleiche Dimension addiert werden.

Skalarmultiplikation

$$r * \mathrm{M} = r * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r*a_{11} & r*a_{12} & \dots & r*a_{1n} \\ r*a_{21} & r*a_{22} & \dots & r*a_{2n} \\ \vdots & & & \\ r*a_{m1} & r*a_{m2} & \dots & r*a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen werden multipliziert indem man das Skalaprodukt von den Zeilenvektoren der erstem Matrix
Es koennen nur Matrizen multipliziert wenn die **Spaltenanzahl** der 1. Matrix mit der **Zeilenanzahl** der 2. Matrix uebereinstimmt.
Die Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen **nicht** kommutativ($\mathrm{A*B \neq B*A}$), daraus folgt dass beim **Distributivgesetz** die Richtung eine Rolle spielt($\mathrm{A*(B+C) \neq (B+C)*A}$).

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{A}_{2,3} * \mathrm{B}_{3,4} = \mathrm{C}_{2,4} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} \end{array}$$

$c_{11} = b_{11} * a_{11} + b_{12} * a_{21} + b_{13} * a_{31}$

$c_{12} = b_{11} * a_{12} + b_{12} * a_{22} + b_{13} * a_{32}$

$c_{13} = b_{11} * a_{13} + b_{12} * a_{23} + b_{13} * a_{33}$

$c_{14} = b_{11} * a_{14} + b_{12} * a_{24} + b_{13} * a_{34}$

$c_{21} = b_{21} * a_{11} + b_{22} * a_{21} + b_{23} * a_{31}$

$c_{22} = b_{21} * a_{12} + b_{22} * a_{22} + b_{23} * a_{32}$

$c_{23} = b_{21} * a_{13} + b_{22} * a_{23} + b_{23} * a_{33}$

$c_{24} = b_{21} * a_{14} + b_{22} * a_{24} + b_{23} * a_{34}$

6.2.3 Matrizengleichungen

6.2.4 Einstufige Prozesse

6.2.5 Mehrstufige Prozesse

6.2.5.1 Markov-Ketten

6.2.6 Lineare Optimierung

6.2.6.1 Maximierungsprobleme

6.2.6.2 Minimierungsprobleme

6.2.6.3 Sonderfaelle und Loesbarkeit

6.2.6.4 Simplex-Verfahren

6.2.6.5 Simplex-Algorithmus

7 Taschenrechner

8 Beispielaufgaben

9 Vielleicht falls bock

logarithmus-(funktion), verschiedene beweise/herleitung quar ergaenzung sekante tangene normale Begriffserklaerung

10 Quellen

[5]. „Plane equation qtl1“ von Quartl - Wikipedia

Hochschulmathematik

Thomas Dost

Inhaltsverzeichnis