

# 1 Naive Mengenlehre

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte heissen Elemente.

## 1.1 Angabe von Mengen

### Aufzählung:

Eine endliche Menge kann durch aufzählung all ihrer Elemente angegeben werde z.B. stellt  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , die Menge aller natuerliche Zahlen  $< 6$  dar.

### Bildungsgesetz:

Eine unedliche Menge kann mit Hilfe eines Bildungsgesetzes angegeben werden z.B.  
 $M = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$

### Eigenschaft:

Eine Teilmenge  $M$  einer Menger  $N$  kann mit Hilfe einer Eingenschaft  $E$  die alle Elemente der Menge entweder besitzen oder nicht angegeben werden  $M = \{x \in N | E(x)\}$

## 1.2 Mengenbeziehungen

### 1.2.1 Elementbeziehung

**Definition:** Sei  $M$  eine beliebiege Menge dann bedeutet,  $x \in M$ , das wir ein beliebiges  $x$  der Menge  $M$  auswaehlen.

### 1.2.2 Teilmenge:

**Definition:** Sei  $M$  eine Menge. Dann heisst eine weitere Menge  $N$  Teilmenge von  $M$  wenn gilt:

$$x \in N \Rightarrow x \in M$$

**Notation:**

$$N \subseteq M$$

### 1.2.3 Potenzmenge

**Defintion:** Sei  $M$  eine Menge, dann nennt die Menge all ihrer Teilmengen  $\mathcal{U}$  Potenzmenge der Menge  $M$ .

$$\mathcal{P}(M) := \{U | U \subseteq M\}$$

**Beispiel:**

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

### 1.2.4 Leere Menge

**Definition:** Eine Menge  $M$  die keine Elemente enthält nennt man leere Menge.

$$\emptyset := \{\forall x : x \notin M\}$$

**Eigenschaften:**

- ist Teilmenge jeder Menge.

### 1.2.5 Gleichheit

**Definition:** Seien  $A, B$  Mengen, dann nennt man diese Mengen gleich wenn alle Elemente aus  $A$  in  $B$  und alle Elemente aus  $B$  in  $A$  liegen.

$$A = B := A \subseteq B \wedge B \subseteq A = \{x | x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$$

### 1.2.6 Disjunktion (Vereinigung)

**Definition:** Seien  $N_1, N_2 \subseteq M$ , dann nennt man die Menge  $X$  Disjunktion (Vereinigung) von  $N_1$  und  $N_2$  wenn für alle  $x \in X$  gilt, dass  $x \in N_1$  oder  $x \in N_2$ .

$$N_1 \cup N_2 := \{x \in M | x \in N_1 \vee x \in N_2\}$$

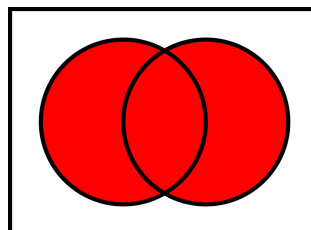
#### 1.2.6.1 Disjunktion unendlich vieler Menge

Sei  $\mathfrak{S}$  ein endliches oder unendliches System von Mengen, dann besteht  $\bigcup_{M \in \mathfrak{S}} M$  aus den Elementen die in mindestens einem  $M \in \mathfrak{S}$  liegen.

**Notation:**

$$\bigcup_{k=1}^n M_k \text{ bzw. } \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

**Venn-Diagramm**



### 1.2.7 Konjunktion(Durchschnitt)

**Definition:** Seien  $N_1, N_2 \subseteq M$ , dann nennt man die Menge  $X$  konjunktion(schnittmengen) von  $N_1$  und  $N_2$  wenn fuer alle  $x \in X$  gilt, das  $x \in N_1$  und  $x \in N_2$ .

$$N_1 \cap N_2 := \{x \in M | x \in N_1 \wedge x \in N_2\}$$

#### 1.2.7.1 Konjunktion unendlich vieler Menge

Sei  $\mathfrak{S}$  ein endliches oder unendliches System von Mengen, dann besteht  $\bigcap_{M \in \mathfrak{S}} M$  aus den Elementen die in jedem  $M \in \mathfrak{S}$  liegen.

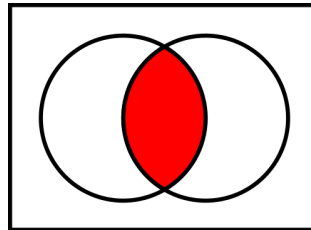
**Notation:**

$$\bigcap_{k=1}^n M_k \text{ bzw } \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$$

**Eigenschaft:**

- zwei Mengen heissen disjunkt falls  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ .

**Venn-Diagramm**

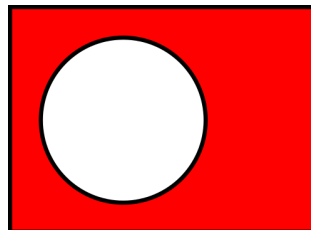


### 1.2.8 Komplement

**Definition:** Sei  $B \subsetneq M$ , dann nennt man die Menge aller  $x$  die in  $M$  aber nicht in  $B$  sind komplement von  $B$  im Bezug auf  $M$ . Es wird mit  $B^c$  notiert.

$$B^c := \{x | x \notin B\}$$

**Venn-Diagramm**

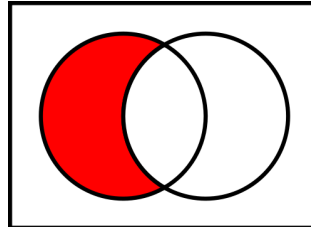


### 1.2.9 Differenz

**Definition:** Seien A, B Mengen, dann nennt man alle  $x$  die in A aber nicht in B sind Differenz von A und B.

$$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

### Venn-Diagramm



$A=B$  Hat man eine solche Gleichung zu beweisen, so muß man also zeigen, daß aus  $x \in M$  stets  $x \in N$  und umgekehrt aus  $x \in N$  auch immer  $x \in M$  folgt. bzw  $M \subseteq N$  und umgekehrt  $\S$

## 2 Beweise

### 2.1 Morganschen Komplementierungsregeln

Sind alle Mengen  $M \in \S$  Teilmengen einer festen Universalmenge  $U$  und bezeichnen wir das Komplement  $U$  ohne  $N$  einer Teilmenge  $N$  von  $U$  der Kürze halber mit  $N^c$ .

1. Das Komplement der Vereinigung ist gleich dem Durchschnitt der Komplemente.

$$\left( \bigcup_{M \in \S} M \right)^c = \bigcap_{M \in \S} (M^c)$$

Da klar ist das  $M \in \S$  wird dies beim folgenden Beweis nicht weiter angegeben.

**Beweis:**

**$A \Rightarrow B$**

$$x \in (\cup M)^c \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cup M) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cup M \forall M \in \S) \Rightarrow x \in M^c \forall M \Rightarrow x \in \cap (M^c)$$

■

**$B \Rightarrow A$**

$$x \in \cap (M^c) \Rightarrow (x \in M^c \forall M^c) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin M \forall M) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cup M) \Rightarrow x \in (\cup M)^c$$

■

**$A \Leftrightarrow B$**

2. Das Komplement des Durchschnitts ist gleich der Vereinigung der Komplemente.

$$\left( \bigcap_{M \in \S} M \right)^c = \bigcup_{M \in \S} (M^c)$$

**Beweis:**

**A  $\Rightarrow$  B**

$$x \in (\cap M)^c \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cap M) \Rightarrow (x \in U \wedge \exists M : x \notin M) \Rightarrow (\exists M : x \in M^c) \Rightarrow (x \in \cup (M^c))$$

■

**B  $\Rightarrow$  A**

$$x \in \cup (M^c) \Rightarrow (x \in U \wedge \exists M : x \in M^c) \Rightarrow (\exists M : x \notin M) \Rightarrow (x \notin \cap M) \Rightarrow (x \in (\cap M)^c)$$

■