1 Naive Mengenlehre

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte heissen Elemente.

1.1 Angabe von Mengen

Aufzaehlung:
Eine endliche Menge kann durch aufzaehlung all ihrer Elemente angegeben werde z.B. stellt $\mathrm{M} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, die Menge aller natuerliche Zahlen < 6 dar.

Bildungsgesetz:
Eine unedliche Menge kann mit Hilfe eines Bildungsgesetzes angegeben werden z.B. $\mathrm{M} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$

Eigenschaft:
Eine Teilmenge M einer Menger N kann mit Hilfe einer Eingenschaft E die alle Elemente der Menge entweder besitzen oder nicht angegeben werden $\mathrm{M} = \{x \in \mathrm{N} | \mathrm{E}(x)\}$

1.2 Mengenbeziehungen

1.2.1 Elementbeziehung

Definition: Sei M eine beliebiege Menge dann bedeutet, $x \in \mathrm{M}$, das wir ein beliebiges x der Menge M auswaehlen.

1.2.2 Teilmenge:

Definition: Sei M eine Menge. Dann heisst eine weitere Menge N Teilmenge von M wenn gilt:

$$x \in \mathrm{N} \Rightarrow x \in \mathrm{M}$$

Notation:

$$\mathrm{N} \subseteq \mathrm{M}$$

1.2.3 Potenzmenge

Defintion: Sei M eine Menge, dann nennt die Menge all ihrer Teilmengen U Potenzmenge der Menge M.

$$\mathscr{P}(\mathrm{M}) := \{\mathrm{U} | \mathrm{U} \subseteq \mathrm{M}\}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \\
&\mathscr{P}(\{a\}) = \big\{\emptyset, \{a\}\big\} \\
&\mathscr{P}(\{a, b\}) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}
\end{aligned}$$

1.2.4 Leere Menge

Definition: Eine Menge M die keine Elemente enhaelt nennt man leere Menge.

$$\emptyset := \{\forall x : x \notin \mathrm{M}\}$$

Eigenschaften:

- ist Teilmenge jeder Menge.

1.2.5 Gleichheit

Definition: Seien A, B Mengen, dann nennt man diese Mengen gleich wenn alle Elemente aus A in B und alle Elemente aus B in A liegen.

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} := \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \wedge \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A} = \{x | x \in \mathrm{A} \Leftrightarrow x \in \mathrm{B}\}$$

1.2.6 Disjunktion(Vereinigung)

Definition: Seien $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2 \subseteq \mathrm{M}$, dann nennt man die Menge X disjunktion(vereinigung) von N_1 und N_2 wenn fuer alle $x \in \mathrm{X}$ gilt, das $x \in \mathrm{N}_1$ oder $x \in \mathrm{N}_2$.

$$\mathrm{N}_1 \cup \mathrm{N}_2 := \{x \in \mathrm{M} | x \in \mathrm{N}_1 \vee x \in \mathrm{N}_2\}$$

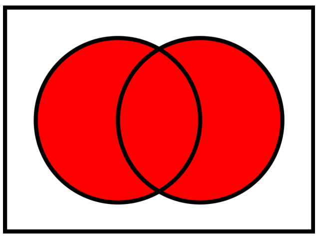
1.2.6.1 Disjunktion undendlich vieler Menge

Sei $\mathfrak{S}$ ein endliches oder unendliches System von Mengen, dann besteht $\bigcup\limits_{\mathrm{M} \in \mathfrak{S}} \mathrm{M}$ aus den Elementen die in mindesten einem $\mathrm{M} \in \mathfrak{S}$ liegen.

Notation:

$$\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{M}_k \ bzw \ \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{M}_k$$

Venn-Diagramm



1.2.7 Konjunktion(Durchschnitt)

Definition: Seien $N_1, N_2 \subseteq M$, dann nennt man die Menge X konjunktion(schnittmengen) von N_1 und N_2 wenn fuer alle $x \in X$ gilt, das $x \in N_1$ und $x \in N_2$.

$$N_1 \cap N_2 := \{x \in M | x \in N_1 \land x \in N_2\}$$

1.2.7.1 Konjunktion undendlich vieler Menge

Sei $\mathfrak{S}$ ein endliches oder unendliches System von Mengen, dann besteht $\bigcap\limits_{M \in \mathfrak{S}} M$ aus den Elementen die in jedem $M \in \mathfrak{S}$ liegen.

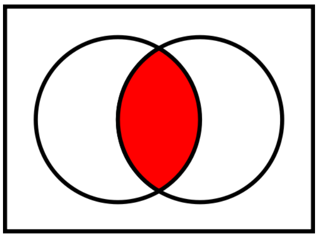
Notation:

$$\bigcap_{k=1}^{n} M_k \ bzw \ \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$$

Eigenschaft:

- zwei Mengen heissen disjunkt falls $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Venn-Diagramm

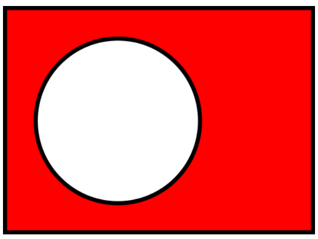


1.2.8 Komplement

Definition: Sei $B \subsetneq M$, dann nennt man die Menge aller x die in M aber nicht in B sind komplement von B im Bezug auf M. Es wird mit B^c notiert.

$$B^c := \{x | x \notin B\}$$

Venn-Diagramm

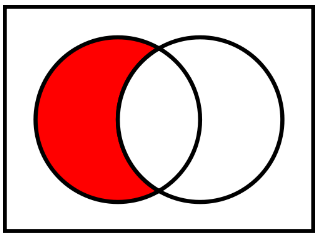


1.2.9 Differenz

Definition: Seien A, B Mengen, dann nennt man alle x die in A aber nicht in B sind Differenz von A und B.

$$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Venn-Diagramm



A=B Hat man eine solche Gleichung zu beweisen, so muß man also zeigen, daß aus x ∈ M stets x ∈ N und umgekehrt aus x ∈ N auch immer x ∈ M folgt. bzw M ⊆ N und umgekehrt $\mathfrak{S}$

2 Beweise

2.1 Morganschen Komplementierungsregeln

Sind alle Mengen M ∈ $\mathfrak{S}$ Teilmengen einer festen Universalmenge U und bezeichnen wir das Komplement U ohne N einer Teilmenge N von U der Kürze halber mit N^c.

1. Das Komplement der Vereinigung ist gleich dem Durchschnitt der Komplemente.

$$(\bigcup_{M \in \mathfrak{S}} M)^c = \bigcap_{M \in \mathfrak{S}} (M^c)$$

Da klar is das M ∈ $\mathfrak{S}$ wird dies beim folgenden Beweis nicht weiter angegeben.
Beweis:

A ⇒ B

$$x \in (\cup M)^c \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cup M) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cup M \; \forall \; M \in \mathfrak{S}) \Rightarrow x \in M^c \; \forall \; M \Rightarrow x \in \cap(M^c)$$

■

B ⇒ A

$$x \in \cap(M^c) \Rightarrow (x \in M^c \; \forall \; M^c) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin M \; \forall \; M) \Rightarrow (x \in U \wedge x \notin \cup M) \Rightarrow x \in (\cup M)^c$$

■

A ⇔ B
2. Das Komplement des Durchschnitts ist gleich der Vereinigung der Komplemente.

$$(\bigcap_{M \in \mathfrak{S}} M)^c = \bigcup_{M \in \mathfrak{S}} (M^c)$$

Beweis:

A ⇒ B

$$x \in (\cap \mathrm{M})^c \Rightarrow (x \in \mathrm{U} \wedge x \notin \cap \mathrm{M}) \Rightarrow (x \in \mathrm{U} \wedge \exists \mathrm{M} : x \notin \mathrm{M}) \Rightarrow (\exists \mathrm{M} : x \in \mathrm{M}^c) \Rightarrow (x \in \cup(\mathrm{M}^c))$$

■

B ⇒ A

$$x \in \cup(\mathrm{M}^c) \Rightarrow (x \in \mathrm{U} \wedge \exists \mathrm{M} : x \in \mathrm{M}^c) \Rightarrow (\exists \mathrm{M} : x \notin \mathrm{M}) \Rightarrow (x \notin \cap \mathrm{M}) \Rightarrow (x \in (\cap \mathrm{M})^c)$$

■