

1 Naive Mengenlehre

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte heissen Elemente.

1.1 Angabe von Mengen

Aufzählung:

Eine endliche Menge kann durch aufzählung all ihrer Elemente angegeben werde z.B. stellt $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, die Menge aller natuerliche Zahlen < 6 dar.

Bildungsgesetz:

Eine unedliche Menge kann mit Hilfe eines Bildungsgesetzes angegeben werden z.B.
 $M = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$

Eigenschaft:

Eine Teilmenge M einer Menger N kann mit Hilfe einer Eingenschaft E die alle Elemente der Menge entweder besitzen oder nicht angegeben werden $M = \{x \in N | E(x)\}$

1.2 Mengenbeziehungen

1.2.1 Elementbeziehung

Definition: Sei M eine beliebiege Menge dann bedeutet, $x \in M$, das wir ein beliebiges x der Menge M auswaehlen.

1.2.2 Teilmenge:

Definition: Sei M eine Menge. Dann heisst eine weitere Menge N Teilmenge von M wenn gilt:

$$x \in N \Rightarrow x \in M$$

Notation:

$$N \subseteq M$$

1.2.3 Potenzmenge

Defintion: Sei M eine Menge, dann nennt die Menge all ihrer Teilmengen \mathcal{U} Potenzmenge der Menge M .

$$\mathcal{P}(M) := \{U | U \subseteq M\}$$

Beispiel:

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

1.2.4 Leere Menge

Definition: Eine Menge M die keine Elemente enthaelt nennt man leere Menge.

$$\emptyset := \{\forall x : x \notin M\}$$

Eigenschaften:

- ist Teilmenge jeder Menge.

1.2.5 Gleichheit

Definition: Seien A, B Mengen, dann nennt man diese Mengen gleich wenn alle Elemente aus A in B und alle Elemente aus B in A liegen.

$$A = B := A \subseteq B \wedge B \subseteq A = \{x | x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$$

1.2.6 Disjunktion(Vereinigung)

Definition: Seien $N_1, N_2 \subseteq M$, dann nennt man die Menge X disjunktion(vereinigung) von N_1 und N_2 wenn fuer alle $x \in X$ gilt, das $x \in N_1$ oder $x \in N_2$.

$$N_1 \cup N_2 := \{x \in M | x \in N_1 \vee x \in N_2\}$$

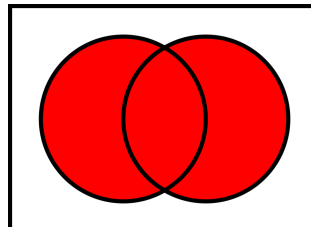
1.2.6.1 Disjunktion unendlich vieler Menge

Sei \mathfrak{S} ein endliches oder unendliches System von Mengen, dann besteht $\bigcup_{M \in \mathfrak{S}} M$ aus den Elementen die in mindesten einem $M \in \mathfrak{S}$ liegen.

Notation:

$$\bigcup_{k=1}^n M_k \text{ bzw } \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$$

Venn-Diagramm



1.2.7 Konjunktion(Durchschnitt)

Definition: Seien $N_1, N_2 \subseteq M$, dann nennt man die Menge X konjunktion(schnittmengen) von N_1 und N_2 wenn fuer alle $x \in X$ gilt, das $x \in N_1$ und $x \in N_2$.

$$N_1 \cap N_2 := \{x \in M | x \in N_1 \wedge x \in N_2\}$$

1.2.7.1 Konjunktion unendlich vieler Menge

Sei \mathfrak{S} ein endliches oder unendliches System von Mengen, dann besteht $\bigcap_{M \in \mathfrak{S}} M$ aus den Elementen die in jedem $M \in \mathfrak{S}$ liegen.

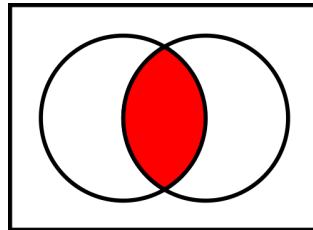
Notation:

$$\bigcap_{k=1}^n M_k \text{ bzw } \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$$

Eigenschaft:

- zwei Mengen heissen disjunkt falls $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Venn-Diagramm

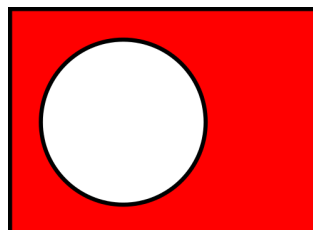


1.2.8 Komplement

Definition: Sei $B \subsetneq M$, dann nennt man die Menge aller x die in M aber nicht in B sind komplement von B im Bezug auf M . Es wird mit B^c notiert.

$$B^c := \{x | x \notin B\}$$

Venn-Diagramm

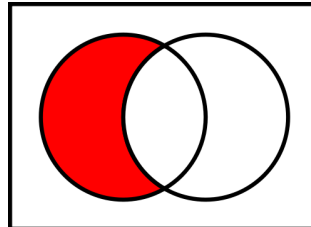


1.2.9 Differenz

Definition: Seien A,B Mengen, dann nennt man alle x die in A aber nicht in B sind Differenz von A und B.

$$A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Venn-Diagramm



$A=B$ Hat man eine solche Gleichung zu beweisen, so muß man also zeigen, daß aus $x \in M$ stets $x \in N$ und umgekehrt aus $x \in N$ auch immer $x \in M$ folgt. bzw $M \subseteq N$ und umgekehrt \subseteq

2 Beweise

2.1 Morganschen Komplementierungsregeln

1. Definition: Das Komplement der Vereinigung ist gleich dem Durchschnitt der Komplemente.

$$\left(\bigcup_{M \in \mathfrak{G}} M \right)^c = \bigcap_{M \in \mathfrak{G}} (M^c)$$

Da klar ist das $M \in \mathfrak{G}$ wird dies beim folgenden Beweis nicht weiter angegeben.

Beweis:

2. Definition: Das Komplement des Durchschnitts ist gleich der Vereinigung der Komplemente.

$$\left(\bigcap_{M \in \mathfrak{G}} M \right)^c = \bigcup_{M \in \mathfrak{G}} (M^c)$$