

Mathematik der Oberstufe

Thomas Dost

Inhaltsverzeichnis

1	Analysis	1
1.1	Lineare Funktionen	1
1.1.1	Eigenschaften einer linearen Funktionen	1
1.1.2	Schnittpunkt zweier linearer Funktionen	2
1.2	Quadratische Funktionen	3
1.2.1	Eigenschaften einer quadratischen Funktionen	3
1.2.2	Umwandlung der Normalform in die Scheitelpunktform	4
1.2.3	Schnittpunkt zweier quadratischer Funktionen	4
1.3	Funtionen mit dem Grad > 2	5
1.3.1	Substitution	5
1.3.2	Polynomdivision	5
1.4	Trigonometrische Funktionen	5
1.4.1	Eigenschaften Trigonometrische Fuktionen	
	5	
1.5	Tangente und Normale	5
1.6	Exponentialfunktionen	5
1.6.1	Natuerliche Exponentialfunktion	5
1.6.1.1	Eigenschaften der Natuerlichen Exponential Fuktion	5
1.7	Umkehrfunktion	5
1.8	Funktionenscharen	5
2	Differentialrechnung	6
2.1	Visualisierung	6
2.2	Bedeutung der 1. Ableitung	6
2.3	Bedeutung der 2. Ableitung	6
2.4	Kurzform des Ableitens	6
2.5	Ableitungsregeln	7
2.5.1	Summenregel	7
2.5.2	Faktorregel	7
2.5.3	Produktregel	7

2.5.4	Kettenregel	7
2.5.5	Quotientenregel	8
2.6	Ableitung der e -Funktion	8
2.6.1	Ableiten komplizierter e -Funktionen	8
2.7	Ableitung trigonometrischer Funktionen	8
2.7.1	Ableitung komplizierter trigonometrischer Funktionen	8
3	Integralrechnung	9
3.1	Integrationsregeln	9
3.2	Unbestimmtes Integral	9
3.3	Bestimmtes Integral	9
3.4	Flächenberechnung	10
3.4.1	Fläche unter Kurve	10
3.4.2	Fläche unter der Abszisse	10
3.4.3	Fläche zwischen Kurven	10
3.5	Mittelwert einer Funktion	10
3.6	Rotationskörper	10
4	Kurvendiskussion	10
4.1	Symmetrie	10
4.2	Verhalten im Unendlichen	10
4.3	Schnittpunkt mit der y -Achse	10
4.4	Nullstellen	11
4.5	Ableitungen	11
4.6	Extrema berechnen	11
4.7	Wendepunkte berechnen	11
5	Analytische Geometrie	12
5.1	Was ist ein Vektor	12
5.2	Koordinatensystem	12
5.3	Besondere Vektoren	12
5.3.1	Nullvektor	12

5.3.2	Gegenvektor	12
5.3.3	Ortsvektor	13
5.3.4	Normalenvektor	13
5.3.5	Einheitsvektor	13
5.4	Rechnen mit Vektoren	13
5.4.1	Addition	13
5.4.2	s-Multilipkation	13
5.4.3	Linearkombination	13
5.4.4	Laenge eines Vektors	13
5.4.5	Lineare Abhaengigkeit	14
5.4.6	Skalarprodukt	14
5.4.7	Kreuzprodukt	14
5.4.7.1	Berechnung mithilfe der Determinante	14
5.5	Geraden	14
5.5.1	Was sind Geraden	14
5.5.2	Lage von zwei Geraden im Raum	14
5.5.2.1	Abstand Punkt Gerade	15
5.5.2.2	Abstand Gerade Gerade	15
5.5.2.3	Winkel zwischen Geraden	15
5.6	Ebenen	15
5.6.1	Ebenenformen	16
5.6.1.1	Parameterform	16
5.6.1.2	Normalenform	16
5.6.1.3	Koordinatenform	16
5.6.1.4	Hessesche Normalenform(HNF)	16
5.6.2	Lage Ebene Gerade	17
5.6.2.1	Schnittpunkt	17
5.6.2.2	Abstand Gerade Ebene	17
5.6.2.3	Winkel zwischen Gerade und Ebene	17
5.6.3	Lage Ebene Ebene	17
5.6.3.1	Identisch	18

5.6.3.2	Schnittgerade	18
5.6.3.3	Abstand Ebene Ebene	18
5.6.3.4	Winkel zwischen Ebenen	18
5.7	Kugeln	18
5.7.1	Was ist eine Kugel	18
5.7.2	Kugelgleichung	18
5.7.3	Lage Kugel Gerade	19
5.7.3.1	Abstand	19
5.7.4	Lage Kugel Ebene	19
5.7.4.1	Abstand	19
5.7.4.2	Flaeche der Schnitkreis	19
5.7.5	Lage Kugel Kugel	19
5.7.5.1	Abstand	19
5.8	Herleitungen	20
5.8.1	Satz des Pythagoras	20
6	Lineare Algebra	20
6.1	Loesungsverfahren fuer LGS	20
6.1.1	Treppenstufen Verfahren	20
6.1.2	Koeffizienten Matrix	20
6.1.3	Determinante	21
6.2	Matrizen	21
6.2.1	Besondere Matrizen	21
6.2.1.1	Nullmatrix	21
6.2.1.2	Stochastische Matrix	21
6.2.1.3	Inverse	21
6.2.1.4	Einheitsmatrix	22
6.2.1.5	Fixvektor	23
6.2.1.6	Grenzmatrix	23
6.2.2	Rechenregeln	23
6.2.3	Matrizengleichungen	24

6.2.4	Einstufige Prozesse	24
6.2.5	Mehrstufige Prozesse	24
6.2.5.1	Markov-Ketten	24
6.2.6	Lineare Optimierung	24
6.2.6.1	Maximierungsprobleme	24
6.2.6.2	Minimierungsprobleme	24
6.2.6.3	Sonderfaelle und Loesbarkeit	24
6.2.6.4	Simplex-Verfahren	24
6.2.6.5	Simplex-Algorithmus	24
7	Taschenrechner	24
8	Beispielaufgaben	24

1 Analysis

1.1 Lineare Funktionen

Eine lineare Funktionen ist eine Funktion der Form $f(x) = mx + b$.

1.1.1 Eigenschaften einer linearen Funktionen

Bei einer Linearen Funktion stellt m die Steigung und b die Verschiebung auf der Y-Achsen dar. Die **Steigung** m einer linearen Funktion $f(x) = mx + b$ berechnet sich durch $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



$$f(x) = 0,5x + 1,5$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &\Leftrightarrow \frac{3,5 - 1,5}{4 - 0} = 0,5 \end{aligned}$$

1.1.2 Schnittpunkt zweier linearer Funktionen

Der **Schnittpunkt** x zweier linearer Funktionen berechnet sich durch das Gleichsetzen zweier linearer Funktionen:

$$f(x) = 0,5x + 1,5$$

$$g(x) = 1x + 0,2$$



Beispiel:

$$0,5x + 1,5 = 1x + 0,2 \quad | -0,5x$$

$$1,5 = 0,5x + 0,2 \quad | -0,2$$

$$1,3 = 0,5x \quad | * 2$$

$$2,6 = x$$

Jetzt kann das Ergebnis

$(x = 2,6)$ in die Gleichungen eingesetzt werden um das Ergebnis zu überprüfen.

$$f(2,6) = 2,8$$

$$g(2,6) = 2,8$$

Da die beiden Werte gleich sind heisst das, dass die Rechnung korrekt ist.

1.2 Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktion ist eine Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ in der Normalform und $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ in der Scheitelpunktform.



Gestreckte Parabel:

$$h(x) = 0,2x^2 + 0x + 0; \quad 0,2(x - 0)^2 + 0$$

Normale Parabel:

$$f(x) = 1x^2 + 0x + 0; \quad 1(x - 0)^2 + 0$$

Gesprenzte Parabel

$$g(x) = 4x^2 + 0x + 0; \quad 4(x - 0)^2 + 0$$

1.2.1 Eigenschaften einer quadratischen Funktionen

Die Verschiedenen Koeffizienten einer quadratischen Funktion, haben verschiedene Auswirkungen auf das Aussehen einer quadratischen Funktion.

Normalform:

Der **Koeffizient** a gibt sowohl die Öffnungsrichtung als auch die Steigung einer Parabel wieder, ist $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet, ist $a > 0$ ist sie nach oben geöffnet. Ist $a = 0$ entsteht eine lineare Funktion.

Über die Steigung kann man folgende Aussagen treffen: Ist $a > 1$ ist die Parabel gestreckt, ist $a < 1$ ist sie gespreizt, $a = 1$ stellt die Normalparabel da.

Der **Koeffizienten** b gibt die Steigung der Parabel im Schnittpunkt mit der Ordinate an, zusätzlich lässt sich am Vorzeichen ablesen ob die Parabel die Ordinate, mit dem fallenden Ast der Parabel geschnitten wird oder mit dem Steigenden. Ist $b < 0$, scheidet der fallende Ast die Ordinate, sonst der Andere. Eine Veränderung des Koeffizienten b bewirkt eine Verschiebung sowohl in x- als auch in y-Richtung. Wird b um eins erhöht, dann wird der Graph um $\frac{1}{2a}$ Einheiten nach links und $\frac{2b+1}{4a}$ nach unten verschoben. Wird b um eins verringert, wird der Graph dagegen um $\frac{1}{2a}$ Einheiten nach rechts und $\frac{2b-1}{4a}$ nach oben verschoben.

Der **Koeffizient** c bestimmt wie die Funktion auf der Ordinatennachse verschoben ist.

1.2.2 Umwandlung der Normalform in die Scheitelpunktform

Es sei $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$, um diese Funktion in die Scheitelpunktform zu ueberfuehren muessen folgende Schritte vollzogen werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax^2 + bx) && + c \quad |a \text{ ausklammern} \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) && + c \quad |q.E. \\ &= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c && |bin.Form \text{ rueckwaerts} \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c && |Klammer \text{ auflösen} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} && + c \quad |a \text{ kuerzen} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) && |SPF \text{ der Funktion} \end{aligned}$$

Hier kann man nun den Scheitelpunkt ablesen:

$$S = \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right) = (-0,5 \mid 4,5)$$

1.2.3 Schnittpunkt zweier quadratischer Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 10x + 2 \\ g(x) &= x^2 + 2x + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x^2 - 10x + 2 &= x^2 + 2x + 0 && | -2x \\ 5x^2 - 12x + 2 &= x^2 && | -x^2 \\ 4x^2 - 12x + 2 &= 0 && |:4 \\ x^2 - 3x + 0.5 &= 0 \end{aligned}$$

Nun kann die Gleichung mit der P-Q-Formel geloest werden.

1.3 Funktionen mit dem Grad > 2

1.3.1 Substitution

1.3.2 Polynomdivision

1.4 Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen sind Funktionen der Form $a * \langle trig \rangle (b * x + c) + d$, wobei $\langle trig \rangle$ fuer einen Ausdruck wie die Sinus- oder Kosinusfunktion stehen kann z.B. ist $a * \sin(x + 5)$ eine trigonometrische Funktion.

1.4.1 Eigenschaften Trigonometrische Funktionen

Funktionen der Form $a * \langle trig \rangle (x)$

Der Parameter **a** bestimmt die Auslenkung in Ordinate-Richtung, d.h. die Funktionswerte einer trigonometrischen Funktion gehen von $-a$ bis a .

Funktionen der Form $a * \langle trig \rangle (x) + d$

Der Parameter **d** bestimmt die Verschiebung in Ordinate-Richtung d.h. die Funktionswerte gehen von $-a$ bis a aber um d verschoben.

Funktionen der Form $a * \langle trig \rangle (b * x) + d$

1.5 Tangente und Normale

1.6 Exponentialfunktionen

1.6.1 Natuerliche Exponentialfunktion

Als natuerliche Exponentialfunktion bezeichnet man Variationen der Funktion $f(x) = e^x$.

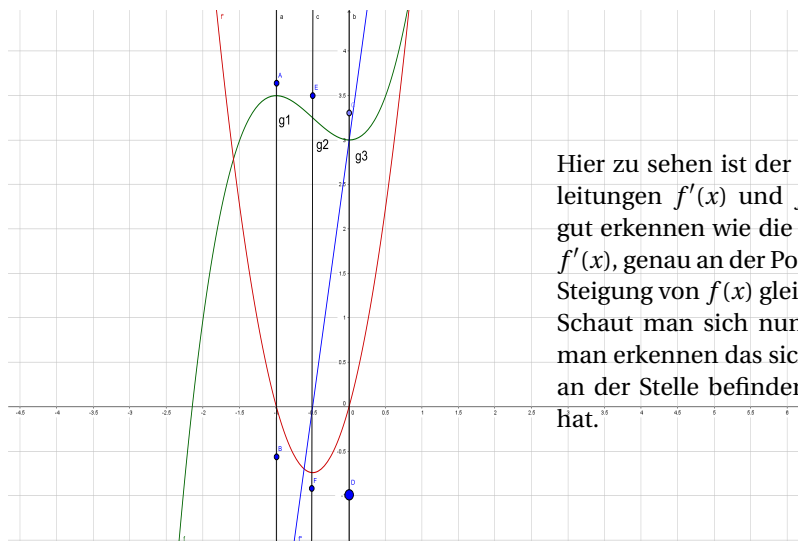
1.6.1.1 Eigenschaften der Natuerlichen Exponential Funktion

1.7 Umkehrfunktion

1.8 Funktionenschaeren

2 Differentialrechnung

2.1 Visualisierung



Hier zu sehen ist der Graph $f(x)$, mit seinen Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$. Hier kann man sehr gut erkennen wie die Nullstellen der 1. Ableitung $f'(x)$, genau an der Position liegen an der auch die Steigung von $f(x)$ gleich 0 ist.

Schaut man sich nun die 2. Ableitung an, kann man erkennen das sich Nullstelle der 2. Ableitung an der Stelle befinden wo $f(x)$ einen Wendepunkt hat.

Abbildung 6

2.2 Bedeutung der 1. Ableitung

Die 1. Ableitung gibt die Steigung der Originalfunktion wieder, d.h wenn die 1. Ableitung 0 ist hat die Originalfunktion an diesem Punkt eine Steigung von 0 und damit einen möglichen Extrempunkt.

2.3 Bedeutung der 2. Ableitung

Die 2. Ableitung gibt die Steigung der 1. Ableitung wieder, d.h wenn die 2. Ableitung 0 ist hat die 1. Ableitung an diesem Punkt eine Steigung von 0. und damit hat die Originalfunktion an diesem Punkt meistens einen Steigungswechsel.

2.4 Kurzform des Ableitens

Das Ableiten besitzt eine Kurzform, ohne jedes mal den Limes benutzen zu müssen, dabei muss man die Ableitungsregeln sowie die Tatsache dass ein konstanter Summand beim Ableiten wegfällt beachten (Summenregel).

Beispiel:

$$f(x) = 5x^2 + 3x^1 - 5x^0$$
$$f'(x) = 2 * 5x^{2-1} + 1 * 3x^{1-1} = 10x^1 + 3x^0$$

In Worte gefasst bedeutet das, dass der Original exponent vor den Koeffizienten gezogen und mit diesem multipliziert wird, danach wird der Exponent um 1 dekrementiert.

2.5 Ableitungsregeln

2.5.1 Summenregel

Summen von Funktionen werden getrennt abgeleitet.

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= 5x^2 + 8x \\f'(x) &= 10x + 8\end{aligned}$$

2.5.2 Faktorregel

Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= 5 * x^2 \\f'(x) &= 5 * 2x\end{aligned}$$

2.5.3 Produktregel

$$\begin{aligned}f(x) &= u(x) * v(x) \\f'(x) &= u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= 5x^2 * 8x - 1 \\f'(x) &= 10x * 8x + 5x^2 * 8\end{aligned}$$

2.5.4 Kettenregel

Äuessere mal innere Ableitung".

Ist eine Funktion das Ergebnis der Verkettung von 2 anderen Funktionen dann gilt:

$$\begin{aligned}f(x) &= (u \circ v)(x) \\f'(x) &= u'(v(x)) * v'(x)\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{5x} \\f'(x) &= 5e^{5x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(5x) \\f'(x) &= 5 * \cos(5x)\end{aligned}$$

2.5.5 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel:

2.6 Ableitung der e -Funktion

Die Ableitung der Funktion $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x$

Beispiel:

$$f(x) = 5e^x$$
$$f'(x) = 5e^x$$

2.6.1 Ableiten komplizierter e -Funktionen

Beim Ableiten der e -Funktion ist zu beachten, dass aufgrund der Position der Variable die **Kettenregel** beachtet werden muss.

Beispiel

$$f(x) = 5e^{4x-2}$$
$$f'(x) = 4 * 5e^{4x-2}$$

2.7 Ableitung trigonometrischer Funktionen

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$
$$f''(x) = -\sin(x)$$
$$f'''(x) = -\cos(x)$$
$$f''''(x) = \sin(x)$$

2.7.1 Ableitung komplizierter trigonometrischer Funktionen

3 Integralrechnung

3.1 Integrationsregeln

3.2 Unbestimmtes Integral

Unbestimmte Integrale haben die Form,

$$\int f(x) = F(x) + C$$

sie existieren auf Grund der Eigenschaft dass beim Ableiten Informationen verloren gehen.

Beispiel

$$f(x) = x^2 + 5$$

$$f'(x) = 2x$$

Wenn man nun $f'(x)$ integriert erhält man $F(x) = x^2$, +5 ist also verloren gegangen. Um dies darzustellen wird eine Integrationskonstante an $F(x)$ angehängt, die korrekte Stammfunktion wäre also $F(x) = x^2 + C$.

3.3 Bestimmtes Integral

Um das bestimmte Integral einer Funktion zu berechnen muss, muss ein Wertepaar der Funktion gegeben sein, zum Beispiel das Wertepaar (2; 4,667) und die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ oder ihre Ableitung.

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$4,667 = \frac{1}{3} * 8 + C$$

$$4,667 = \frac{8}{3} + C$$

$$2 = C$$

Die Funktion lautet also $F(x) = \frac{1}{3} * x^3 + 2$

3.4 Flaechenberechnung

3.4.1 Flaeche unter Kurve

3.4.2 Flaeche unter der Abszisse

3.4.3 Flaeche zwischen Kurven

3.5 Mittelwert einer Funktion

3.6 Rotationskoerper

4 Kurvendiskussion

4.1 Symmetrie

Um herauszufinden ob eine Funktion Y-Achsensymmetrisch oder Ursprungspunktsymmetrisch ist, muss man die Exponenten einer Funktion betrachen, falls alle Exponenten einer Funktion gerade sind ist sie Achsensymmetrisch, sonst ist die Funktion Ursprungspuktsymmetrisch. Trifft keiner der beiden Bedingungen auf die Funktion zu laesst sich ihre Symmetrie nicht bestimmen.

$$\begin{array}{ll} \text{Achsensymmetrie:} & f(x) = f(-x) \\ \text{Ursprungspunktsymmetrie:} & f(x) = -f(x) \end{array}$$

4.2 Verhalten im Unendlichen

Das Verhalten in Unendlichen haengt vom hoechsten Exponenten und dem zugehoerigen Koeffizienten der Funktion ab, ist der Exponent gerade und der Koeffizient positiv, verlaueft die Funktion vom 2. zum 1. Quadranten, also von positiv unendlich nach positiv unendlich, ist der Koeffizient jedoch negativ, verlaueft die Funktion vom 3. zum 4. Quadranten, also von negativ unendlich nach negativ unendlich.

Ist der Exponent ungerade und der Koeffizient positiv verlaueft die Funktion vom 3. zum 1. Quadranten also negativ unendlich nach positiv unendlich, ist der Koeffizient jedoch negativ verlaueft sie von 2. zum 4. Quadranten also von positiv unendlich nach negativ unendlich.

Formal:

Falls der hoechste Exponent ungerade und positiv ist gilt fuer $x \rightarrow \infty+ = f(x) \rightarrow \infty+$
 $x \rightarrow \infty- = f(x) \rightarrow \infty-$

Falls der hoechste Exponent gerade und positiv ist gilt fuer $x \rightarrow \infty+ = f(x) \rightarrow \infty+$
 $x \rightarrow \infty- = f(x) \rightarrow \infty+$

Beachte den Koeffizienten vor dem hoechsten Exponenten!

4.3 Schnittpunkt mit der y-Achse

Um den Schnittpunkt mit der Y-Achsen herauszufinden, muss man die Variable der Funktion 0 setzen.

4.4 Nullstellen

4.5 Ableitungen

4.6 Extrema berechnen

Um die Extrema einer Funktion zu erhalten muss ihre erste Ableitung 0 gesetzt werden, nun muss man die Punkte in die 2. Ableitung einsetzen um herauszufinden ob es um einen Hoch(Maximum) -oder Tiefpunkt(Minimum) handelt. Ist das Ergebnis des letzten Schrittes grösser 0 handelt es sich um ein lokales Minimum, andernfalls handelt es sich um ein lokales Maximum. Besitzt die Funktion jedoch keine 2. Ableitung muessen die Umgebungswerte der Steigung der Punkte betrachtet werden, wechselt die Steigung von negativ zu positiv hat man ein lokales Minimum, sonst ein lokales Maximum, um nun herauszufinden ob ein globales Extrema vorliegt muessen alle lokalen Extrema verglichen werden.

Notwendige Bedingung

$$f'(x_0) = 0$$

Hinreichende Bedingung Hochpunkt

$$f''(x_0) < 0 \vee f'(x_0)+ \rightarrow f'(x_0)-$$

Hinreichende Bedingung Tiefpunkt

$$f''(x_0) > 0 \vee f'(x_0)+ \rightarrow f'(x_0)-$$

4.7 Wendepunkte berechnen

Um die Wendepunkte einer Funktion zu berechnen muss die 2. Ableitung 0 gesetzt werden, um nun zu ueberpruefen ob der Punkt ein Sattelpunkt ist muss falls die Funktion eine 3. Ableitung besitzt diese an dem vorher berechneten Punkt $\neq 0$ sein, ist die 3. Ableitung nicht vorhanden muss an diesem Punkt ein Vorzeichenwechsel stattfinden.

Notwendige Bedingung

$$f''(x_0) = 0$$

Hinreichende Bedingung Wendepunkt

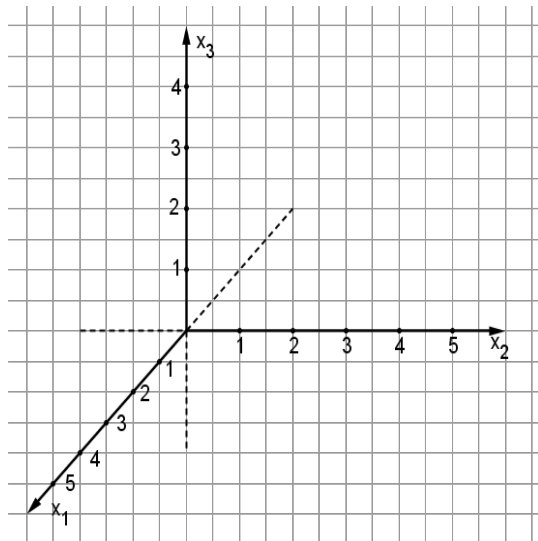
$$f'''(x_0) \neq 0 \vee f''(x_0) \pm \rightarrow f''(x_0) \mp$$

5 Analytische Geometrie

5.1 Was ist ein Vektor

Ein Vektor ist eine Menge von Pfeilen der Form $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, die parallel untereinander verschoben sind. Eine andere Notation für diesen Vektor wäre $\vec{a} = (a_1 \dots a_n)^T$

5.2 Koordinatensystem



3D Koordinatensystem

5.3 Besondere Vektoren

5.3.1 Nullvektor

Der Nullvektor ist ein Vektor der Form $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, zudem ist er das neutrale Element der Vektoraddition

$$\text{d.h. } \vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}.$$

5.3.2 Gegenvektor

Der Gegenvektor ist das inverse Element der Vektoraddition d.h. $\vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$, wobei $\vec{0}$ den Nullvektor bezeichnet.

5.3.3 Ortsvektor

Ein Ortsvektor bezeichnet einen Vektor der vom Koordinatenursprung aus geht d.h. er hat die Form \vec{OP} , wobei P ein beliebiger Punkt im Raum ist.

5.3.4 Normalenvektor

Ein Normalenvektor ist ein Vektor der orthogonal zu seinem Bezugsobjekt z.B. einer Gerade ist.

5.3.5 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor der Laenge 1, d.h. dass sein Betrag = 1 ist ($|\vec{a}| = 1$).

Beispiel

Der Einheitsvektor \vec{e}_a des Vektors \vec{a} wird berechnet indem man $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ rechnet.

5.4 Rechnen mit Vektoren

5.4.1 Addition

Zwei Vektoren in \mathbb{R}^3 \vec{a}, \vec{b} werden addiert, indem man ihre Komponenten addiert.
Beispiel

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

5.4.2 s-Multiplikation

Ein Vektor \vec{a} aus \mathbb{R}^3 wird mit einer Zahl s aus \mathbb{R} multipliziert, indem seine Komponenten mit s multipliziert werden.
Beispiel

$$s * \vec{a} = s * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s * a_1 \\ s * a_2 \\ s * a_3 \end{pmatrix}$$

5.4.3 Linearkombination

Einen Ausdruck der Form $r_1 * \vec{a}_1 + r_2 * \vec{a}_2 + \dots + r_n * \vec{a}_n$ nennt man Linearkombination der Vektoren \vec{a}_1 bis \vec{a}_n . Beachte das a_1 bis a_n Vektoren keine Vektorkomponenten sind.

5.4.4 Laenge eines Vektors

Der Betrag eines Vektors \vec{a} stellt seine Laenge da, d.h. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ist die Laenge eines Vektors.

5.4.5 Lineare Abhaengigkeit

Die Lineare Anhaengigkeit beschreibt die Eigenschaft eines Vektors \vec{v} sich mit Hilfe der s-Multiplikation und eines beliebigen Vektors \vec{b} herstellen zu lassen.

Beispiel:

$$\vec{v} = s * \vec{b}$$

Falls es ein s in \mathbb{R} gibt das die Gleichung erfuehlt ist \vec{v} linear Abhaengig von \vec{b} .

5.4.6 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ordnet je zwei Vektoren \vec{a}, \vec{b} ein Skalar zu, ist dieses Skalar 0 sind die Vektoren orthogonal zueinander.

Beispiel

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3.$$

5.4.7 Kreuzprodukt

5.4.7.1 Berechnung mithilfe der Determinante

Das Kreuzprodukt lässt sich auch mithilfe der Determinante berechnen indem man, eine quadr. Matrix mit der Standardbasis und zwei sich schneidende Vektoren bildet.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} &= e_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= e_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + e_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= e_1(a_2 * b_3 - a_3 * b_2) + e_2(a_3 * b_1 - a_1 * b_3) + e_3(a_1 * b_2 - a_2 * b_1) \\ &= \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 * b_3 - a_3 * b_2 \\ a_3 * b_1 - a_1 * b_3 \\ a_1 * b_2 - a_2 * b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der hintere Teil entspricht nun dem Kreuzprodukt.

5.5 Geraden

5.5.1 Was sind Geraden

Eine Gerade im 3-Dimensionalen Raum ist eine unendliche Ausdehnung in eine Koordinatenrichtungen.

5.5.2 Lage von zwei Geraden im Raum

Um die Lage zweier Gerade zueinander zu bestimmen muss zuert auf lineare Anhaengigkeit geprueft werden. Sind die Richtungsvektoren linear Abhaengig, sind die Gerade entweder Parallel oder Identisch, sind sie jedoch linear Unabhaengig muss geprueft werden ob sie einen Schnittpunkt besitzen

oder windschief sind.

Beispiel **Parallel**

Fall wir herausgefunden haben dass die Richtungsvektoren linear Abhaengig sind, muessen wir als naechstes schauen ob der Ortsvektor einer beteiligten Gerade auf der anderen Gerade liegt um zu pruefen ob die Gerade Identisch sind.

Beispiel **Windschief**

Hat sich jedoch ergeben dass die Richtungsvektoren linear Unabhaengig sind, muess wird als naechstes schauen die Geraden einen Schnittpunkt besitzen um zu pruefen ob sie windschief sind.

5.5.2.1 Abstand Punkt Gerade

Um den Abstand von einem Punkt(\vec{p}) zu einer Geraden($g : \vec{x} = \vec{o} + r * \vec{s}$) berechnen, bilden wir einen Vektor von einem beliebigen Punkt auf der Gerade zu dem Punkt zu dem wir den Abstand berechnen wollen. Nun berechnen wir den Betrag von Kreuzprodukt dieses Vektors und dem Richtungsvektor von g , dies stellt die Flaeche des Parallelogramms dar das sie aufspannen, da die Flaecheformdel des Parallelogramms $A = g * h$ ist berechnen wir nun den Betrag des Richtungsvektors von g und stellen die Flaechenformel nach h um, dann setzen wir die Werte die wir eben berechnet haben ein.

5.5.2.2 Abstand Gerade Gerade

Windschief

Der Abstand von zwei windschiefen Geraden laesst sich mit Hilfe einer Hilfsebene berechnen, indem man zuerst den Normaleneinheitsvektor der beiden Richtungsvektoren berechnet, nun kann man die Hessesche Normalenform verwenden um den Abstand zu berechnen.

Beispiel

Parallel

Siehe Abstand Gerade Punkt, wobei der Punkt ein beliebiger Punkt der 2. Gerade ist.

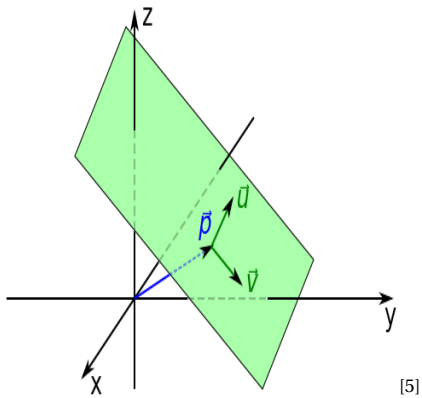
5.5.2.3 Winkel zwischen Geraden

Seien die Gerade $g_1 : \vec{x} = \vec{o}_1 + r * \vec{a}$ und $g_2 : \vec{x} = \vec{o}_2 + s * \vec{b}$ geschnitten, dann berechnet sich der Winkel zwischen ihnen folgendermassen:

$$\cos(\phi) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}$$

5.6 Ebenen

Eine Ebene im 3-Dimensionalen Raum ist eine unendliche Ausdehnung in zwei Vektorrichtungen.



Ebene im 3-Dimensionalen Raum

5.6.1 Ebenenformen

5.6.1.1 Parameterform

Parameterform einer Ebene: $E: \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u} + s * \vec{v}$

In der Parameterform wird eine Ebene mithilfe eines Stützvektors (Ortsvektors) und zwei Richtungsvektoren beschrieben. Es gibt zwei Möglichkeiten wie diese Richtungsvektoren zueinander liegen dürfen, um eine Ebene zu beschreiben, nämlich parallel und geschnitten. Falls sich die gegebenen Richtungsvektoren schneiden, kann die Ebene direkt zwischen ihnen aufgespannt werden. Falls die gegebenen Richtungsvektoren jedoch echt parallel sind, muss ein Verbindungsvektor zwischen ihnen hergestellt werden, wobei einer der beiden echt parallelen Richtungsvektoren ausgetauscht werden muss.

Beispiel

Für die Prüfung, ob die Geraden parallel sind, siehe Lage Gerade Gerade.

Seien die Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{o}_1 + r * \vec{a}$ und $g_2: \vec{x} = \vec{o}_2 + s * \vec{b}$ echt parallel, dann kann die Ebene mit Hilfe des Richtungsvektors von einer der Geraden und eines beliebigen Verbindungsvektors der zwei Geraden gebildet werden.

5.6.1.2 Normalenform

Normalenform einer Ebene $E: 0 = \vec{n} \circ [(\vec{x} - \vec{p})]$

In der Normalenform wird eine Ebene mit Hilfe ihrer Normale (\vec{n}) und der Differenz eines Punktes aus der Ebene mit einem beliebigen anderen Punkt beschrieben ($\vec{x} - \vec{p}$), wobei \vec{p} einen beliebigen Punkt in der Ebene, und \vec{x} einen beliebigen anderen Punkt darstellt. Alle Differenzen, die orthogonal zum Normalenvektor der Ebene liegen, beschreiben daher Vektoren, die in der Ebene liegen.

5.6.1.3 Koordinatenform

Koordinatenform der Ebene: $E: n_1 * x_1 + n_2 * x_2 + n_3 * x_3 = c$

Die Koordinatenform der Ebene ist die ausmultiplizierte Normalenform einer Ebene.

Beispiel

5.6.1.4 Hessesche Normalenform (HNF)

HNF einer Ebene $E: d = \vec{n}_0 \circ [(\vec{x} - \vec{p})]$

Die HNF ist eine abgewandelte Form der Normalenform, sie unterscheidet sich dadurch dass ihr Normalenvektor(\vec{n}_0) normiert ist, d.h er hat die Länge 1, dadurch kann der Abstand von einer mit ihr beschriebenen Ebene zu einem anderen Objekt sehr einfach durch das einsetzen dieses Objekts berechnet werden(Vektorprojektion).

5.6.2 Lage Ebene Gerade

Um die Lage einer Gerade zu Ebene zu bestimmen, muss man zuerst überprüfen ob die Gerade echt parallel ist, dies kann man mit Hilfe der Normale der Ebene und des Richtungsvektors der Gerade überprüfen indem man überprüft ob die Normale orthogonal zum Richtungsvektor der Gerade liegt. Fall die Gerade parallel zur Ebene liegt, kann man nun den Ortsvektor der Gerade in die Ebene einsetzen um zu überprüfen ob sie identisch sind. Falls die Gerade sich jedoch nicht parallel zur Ebene verhält hat sie garantiert einen Schnittpunkt mit der Ebene.

5.6.2.1 Schnittpunkt

Um den Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene zu berechnen, bringt man die Ebene in Koordinatenform und setzt die Gerade dann in diese ein.

Beispiel

5.6.2.2 Abstand Gerade Ebene

Damit eine Gerade und eine Ebene überhaupt einen Abstand haben, müssen sie selbstverständlich echt parallel sein, um dies festzustellen überprüft man den Normalenvektor der Ebene und den Richtungsvektor der Gerade auf Orthogonalität. Falls die Orthogonalitätsbedingung erfüllt ist, wählt man nun einen beliebigen Punkt auf der Ebene und bildet mit der Hilfe von diesem Punkt und der Normale der Ebene eine Gerade, nun berechnet man den Schnittpunkt von dieser Gerade mit der Ebene. Nun bildet man den Vektor zwischen dem Ortsvektor der neuen Gerade und dem Schnittpunkt der Ebene, der Betrag dieses Vektors ist dann der Abstand von der Gerade zur Ebene.

Abstand ohne die HNF

Abstand mit Hilfe der HNF

Siehe Abstand Ebene Ebene, wobei der Punkt ein beliebiger der Geraden sein kann.

5.6.2.3 Winkel zwischen Gerade und Ebene

Sei die Gerade $g_1: \vec{x} = \vec{o}_1 + r * \vec{a}$ nicht parallel zu $E: \vec{x} = \vec{p} + r * \vec{u} + s * \vec{v}$, dann existiert ein Winkel(ϕ) zwischen ihnen, der sich mit Hilfe der Normalenvektors der Ebene(\vec{n}) folgendermassen berechnen lässt:

$$\sin(\phi) = \frac{|\vec{a} \circ \vec{n}|}{|\vec{a}| * |\vec{n}|}$$

Bemerkung: Ergibt sich $\sin(\phi) = 0$, ist die Gerade parallel oder identisch zu der Ebene.

5.6.3 Lage Ebene Ebene

Um die Lage einer Ebene zu einer anderen Ebene stellt man zuerst fest ob sie parallel zueinander liegen, dies kann man überprüfen indem man die beiden Normalen der Ebene auf lineare Abhängigkeit überprüft.

5.6.3.1 Identisch

Um nun zu ueberpruefen ob die Ebenen identisch sind, setzt einen beliebigen Punkt der einen Ebene in die andere Ebene ein. (Koennte Schnittgerade sein, Loesung 3 Punkte einsetzen die zusammen keine Gerade bilden koennen)

5.6.3.2 Schnittgerade Um die Schnittgerade zweier Ebenen zu berechnen, bietet es sich an eine der Ebene in die Kooridantenform umzuwandeln, nun kann man einfach x_1 bis x_3 in die Koordinatenform einsetzen und solange umstellen bis sich eien Variable durch die anderen ersetzen laesst, nun setzt man die berechnete Gleichung in die Ebene in Parameterform ein und erhaelt so eine Schnittgerade.

5.6.3.3 Abstand Ebene Ebene

Abstand ohne die HNF

Um den Abstand zweier Ebenen zu berechnen muessen diese selbstverstaendlich parallel zueinander liegen, nun berechnet man von einer der Ebenen die Normale und stellt mit ihrer Hilfe eine Gerade auf, dann berechnet man den Schnittpunkt dieser Gerade mit der anderen Ebene.

Nun berechnet man den Vektor zwischen dem Ortsvektor der Normale und dem Schnittpunkt, der Betrag dieses Vektors ist der Abstand zwischen den beiden Ebenen.

Abstand mit Hilfe der HNF

Da zwei Ebene parallel zueinander liegen muessen um einen Abstand zu haben, kann man um den Abstand von zwei Ebenen einfach berechnen indem man einen beliebigen Punkt der einen Ebene in die HNF der anderen einsetzt.

5.6.3.4 Winkel zwischen Ebenen

Seien E_1 und E_2 zwei Ebenen, dann gilt fuer ihren Schnittwinkel:

$$\cos(\phi) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| * |\vec{n}_2|}$$

Bermerkung: Ergibt sich $\cos(\phi) = 1$, sind die Ebenen parallel oder identisch.

5.7 Kugeln

5.7.1 Was ist eine Kugel

Eine Kugel ist eine Menge von Punkten im 3-Dimensionalen Raum, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben, der Punkt M wird dabei als Mittelpunkt und der Abstand r als Radius bezeichnet.

5.7.2 Kugelgleichung

Eine Kugel in der Analytischen Geometrie wird mit der Gleichung

$|\vec{p} - \vec{M}|^2 = r^2$ oder $(p_1 - M_1)^2 + (p_2 - M_2)^2 + (p_3 - M_3)^2 = r^2$ beschrieben, wo M den Mittelpunkt als Vektor, p einen beliebigen Punkt als Vektor, und r den Radius als reele Zahl darstellt.

5.7.3 Lage Kugel Gerade

Im \mathbb{R}^3 gibt es zwei Moeglichkeiten wie eine Gerade zu einer Kugel liegen kann, ersten wenn ie Kugel von der Geraden geschnitten wird und zweitens wenn ebendies nicht zutrifft. Dies kann man feststellen indem man den Abstand der Gerade zum Kugelmittelpunkt berechnet, ist dieser Abstand groesser als der Kugelradius haben die Gerade und die Kugel keine gemeinsamen Punkte, ist er jedoch kleiner entstehen zwei Schnittpunkte.

5.7.3.1 Abstand

Siehe Abstand Punkt Gerade, wobei der Punkt den Kugelmittelpunkt darstellt.

5.7.4 Lage Kugel Ebene

Im \mathbb{R}^3 gibt es zwei Moeglichkeiten wie eine Ebene zu einer Kugel liegen kann, erstens wenn die Kugel von der Ebene geschnitten wird und zweitens wenn ebendies nicht zutrifft. Dies kann man feststellen indem man den Abstand der Ebene zum Kugelmittelpunkt berechnet, ist dieser Abstand groesser als der Kugelradius haben die Ebene und die Kugel keine gemeinsamen Punkte, ist er jedoch kleiner entsteht ein Schnittkreis.

5.7.4.1 Abstand

Siehe Abstand Punkt Ebene, wobei die Normale den Richtungsvektor und der Kugelmittelpunkt den Ortsvektor der Ebene darstellt.

Beispiel

5.7.4.2 Flaechen des Schnittkreises

Um die Flaechen des Schnittkreises zu berechnen muss zunaechste der Radius des Kreises berechnet werden, diesen kann man mit Hilfe der Entfernung der Ebene zum Mittelpunkt und des Kugelradius berechnen. Es gilt:

$$r_{Kreis}^2 = r_{Kugel}^2 - (\text{Abstand Kugelmittelpunkt Ebene})^2$$
$$A_{Kreis} = \pi * r_{Kreis}^2$$

5.7.5 Lage Kugel Kugel

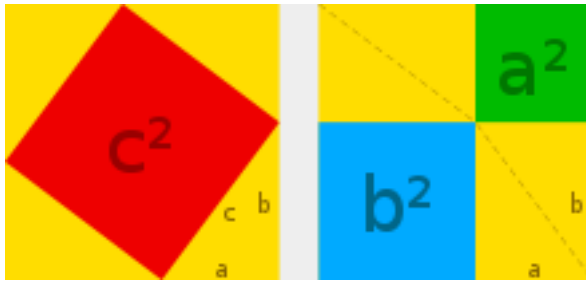
Im \mathbb{R}^3 gibt zwei Moeglichkeiten wie eine Kugel zu einer anderen Kugel liegen kann, ersten wenn die eine Kugel die andere schneidet und zweitens wenn ebendies nicht zutrifft. Dies kann man feststellen indem man den Abstand der beiden Mittelpunkte berechnet, ist dieser groesser als die Summe der beiden Kugelradien haben die Kugeln keine gemeinsamen Punkte, ist er jedoch kleiner entsteht ein Schnittkoeper.

5.7.5.1 Abstand

Trivial (Abstand Punkt Punkt).

5.8 Herleitungen

5.8.1 Satz des Pythagoras



Links = $c^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b)$

Rechts = $a^2 + b^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b)$

$$\begin{aligned} c^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b) &= a^2 + b^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b) & | - 4 * (\frac{1}{2} a * b) \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

6 Lineare Algebra

6.1 Lösungsverfahren fuer LGS

6.1.1 Treppenstufen Verfahren

6.1.2 Koeffizienten Matrix

6.1.3 Determinante

Die Determinante einer Matrix lässt sich mit Hilfe des Laplacescher Entwicklungssatz in zwei ...Richtungsentwickeln.

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} * a_{ij} * \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} * a_{ij} * \det A_{ij} \text{ (Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)}$$

wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix von A ist, um diese zu Erhalten muss jeweil die i -te Zeile und die j -te Spalten gestrichen werden.

Beispiel

6.2 Matrizen

Eine Matrix vom Typ $M_{m,n}$ ist eine Zusammenfassung von Werten der Form $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

mit m Zeilen und n Spalten

6.2.1 Besondere Matrizen

6.2.1.1 Nullmatrix

Die Nullmatrix ist eine Matrix in der alle Elemente Null sind, sie ist damit das neutrale Element der Matrixaddition.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

6.2.1.2 Stochastische Matrix

Eine Stochastische Matrix ist eine quadratische Matrix deren Elemente zwischen 0 und 1 liegen, und der Spalten bzw. Zeilensumme 1 ist.

6.2.1.3 Inverse

Seien M und I beliebige quadratische Matrizen und E die Einheitsmatrix, dann nennt man die Matrix I die, die Gleichung $M * I = I * M = E$ erfüllt, Inverse der Matrix M . Sie wird mit M^{-1} dargestellt. Eine Matrix mit einer Inversen nennt man reguläre Matrix.

Inverse mit Hilfe der Determinante

Inverse mit Hilfe der Einheitsmatrix

6.2.1.4 Einheitsmatrix

Eine Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonale gleich 1 sind. Sie ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation d.h. $M * E = E * M = M$ wobei M eine beliebige reguläre Matrix ist, und E ihre Einheitsmatrix ist.

Sie ist symmetrisch, d.h. $E^t = E$.

Sie ist selbstinvers, d.h. $E^{-1} = E$

Ihre Determinante ist 1 d.h. $\det(E) = 1$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

6.2.1.5 Fixvektor

Sei V_f ein Vektor, und M eine beliebige Matrix, dann nennt man den Vektor der die Gleichung $M * V_f = V_f$ erfüllt Fixvektor der Matrix M .

Beispiel:

6.2.1.6 Grenzmatrix

Sei M eine beliebige Matrix, dann nennt man eine Matrix die Gleichung $M * M = M$ erfüllt Grenzmatrix der Matrix M .

Beispiel:

6.2.2 Rechenregeln

Addition

Die Summe zweier Matrizen, berechnet man in dem man sie komponentenweise addiert.

$$M = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrixaddition ist sowohl **kommutativ** ($A + B = B + A$),

als auch **assoziativ** ($(A + B) + C = A + (B + C)$).

Es koennen nur Matrizen der gleiche Dimension addiert werden.

Skalarmultiplikation

$$r * M = r * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * a_{11} & r * a_{12} & \dots & r * a_{1n} \\ r * a_{21} & r * a_{22} & \dots & r * a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r * a_{m1} & r * a_{m2} & \dots & r * a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen werden multipliziert indem man das Skalaprodukt von den Zeilenvektoren der erstem Matrix

Es koennen nur Matrizen multipliziert wenn die **Spaltenanzahl** der 1. Matrix mit der **Zeilenanzahl** der 2. Matrix uebereinstimmt.

Die Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen **nicht** kommutativ ($A * B \neq B * A$), daraus folgt dass beim **Distri-**
butivgesetz die Richtung eine Rolle spielt ($A * (B + C) \neq (B + C) * A$).

$$\begin{array}{c|c} A_{2,3} * B_{3,4} = C_{2,4} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$c_{11} = b_{11} * a_{11} + b_{12} * a_{21} + b_{13} * a_{31}$$

$$c_{12} = b_{11} * a_{12} + b_{12} * a_{22} + b_{13} * a_{32}$$

$$c_{13} = b_{11} * a_{13} + b_{12} * a_{23} + b_{13} * a_{33}$$

$$c_{14} = b_{11} * a_{14} + b_{12} * a_{24} + b_{13} * a_{34}$$

$$c_{21} = b_{21} * a_{11} + b_{22} * a_{21} + b_{23} * a_{31}$$

$$c_{22} = b_{21} * a_{12} + b_{22} * a_{22} + b_{23} * a_{32}$$

$$c_{23} = b_{21} * a_{13} + b_{22} * a_{23} + b_{23} * a_{33}$$

$$c_{24} = b_{21} * a_{14} + b_{22} * a_{24} + b_{23} * a_{34}$$

6.2.3 Matrizengleichungen

6.2.4 Einstufige Prozesse

6.2.5 Mehrstufige Prozesse

6.2.5.1 Markov-Ketten

6.2.6 Lineare Optimierung

6.2.6.1 Maximierungsprobleme

6.2.6.2 Minimierungsprobleme

6.2.6.3 Sonderfaelle und Loesbarkeit

6.2.6.4 Simplex-Verfahren

6.2.6.5 Simplex-Algorithmus

7 Taschenrechner

8 Beispielaufgaben