

# Mathematik der Oberstufe

Thomas Dost

# Inhaltsverzeichnis

1	Analysis	1
1.1	Lineare Funktionen . . . . .	1
1.1.1	Eigenschaften einer linearen Funktionen . . . . .	1
1.1.2	Schnittpunkt zweier linearer Funktionen . . . . .	2
1.2	Quadratische Funktionen . . . . .	3
1.2.1	Eigenschaften einer quadratischen Funktionen . . . . .	3
1.2.2	Umwandlung der Normalform in die Scheitelpunktform . . . . .	4
1.2.3	Schnittpunkt zweier quadratischer Funktionen . . . . .	4
1.3	Funtionen mit dem Grad groesser 2 . . . . .	5
1.3.1	Substitution . . . . .	5
1.3.2	Polynomdivision . . . . .	5
1.4	Trigonometrische Funktionen . . . . .	5
1.5	Tangente und Normale . . . . .	5
1.6	Exponentialfunktionen . . . . .	5
1.6.1	Natuerliche Expoentialfunktion . . . . .	5
1.7	Umkehrfunktion . . . . .	5
1.8	Funktionenscharen . . . . .	5
1.9	Herleitung . . . . .	5
1.9.1	Trigonometrische Funktionen . . . . .	5
1.9.2	Quadratische Ergaenzung . . . . .	5
1.9.3	P-Q-Formel . . . . .	5
1.9.4	Polynomdivision . . . . .	5
1.9.5	Horner Schema . . . . .	5
2	Differentialrechnung	6
2.1	Ableitung . . . . .	6
2.2	Visualisierung . . . . .	6
2.3	Bedeutung der 1. Ableitung . . . . .	6
2.4	Bedeutung der 2. Ableitung . . . . .	6
2.5	Kurzform des Ableitens . . . . .	6

2.6	Ableitungsregeln . . . . .	7
2.6.1	Summenregel . . . . .	7
2.6.2	Faktorregel . . . . .	7
2.6.3	Produktregel . . . . .	7
2.6.4	Kettenregel . . . . .	7
2.6.5	Quotientenregel . . . . .	8
2.7	Ableitung der $e$ -Funktion . . . . .	8
2.8	Ableitung trigonometrischer Funktionen . . . . .	8
2.9	Herleitungen . . . . .	8
2.9.1	Herleitung der Ableitung mithilfe des Limes . . . . .	8
2.9.2	Herleitung der Potenzregeln in $\mathbb{N}$ . . . . .	8
2.9.3	Herleitung der Ableitung der $e$ -Funktion in $\mathbb{N}$ mit Hilfe des Limes . . . . .	8
2.9.4	Herleitung der Ableitung der Trigofunktion mithilfe des Limes . . . . .	8
2.9.5	Herleitung der Ableitungsregeln . . . . .	8
3	Integralrechnung . . . . .	8
3.1	Unbestimmtes Integral . . . . .	8
3.2	Bestimmtes Integral . . . . .	8
3.3	Rotationskoerper . . . . .	8
3.4	Herleitungen . . . . .	9
3.4.1	Flaeche mit dem Riemann-Integral . . . . .	9
4	Kurvendiskussion . . . . .	9
4.1	Symmetrie . . . . .	9
4.2	Verhalten im Unendlichen . . . . .	9
4.3	Schnittpunkt mit der y-Achse . . . . .	9
4.4	Nullstellen . . . . .	9
4.5	Ableitungen . . . . .	9
4.6	Extrema berechnen . . . . .	9
4.7	Wendepunkte berechnen . . . . .	9
5	Analytische Geometrie . . . . .	9

5.1	Was ist ein Vektor . . . . .	9
5.2	Koordinatensystem . . . . .	10
5.3	Besondere Vektoren . . . . .	10
5.3.1	Nullvektor . . . . .	10
5.3.2	Gegenvektor . . . . .	10
5.3.3	Ortsvektor . . . . .	10
5.3.4	Normalenvektor . . . . .	10
5.3.5	Einheitsvektor . . . . .	11
5.4	Rechnen mit Vektoren . . . . .	11
5.4.1	Addition . . . . .	11
5.4.2	s-Multilpkation . . . . .	11
5.4.3	Linearkombination . . . . .	11
5.4.4	Laenge eines Vektors . . . . .	11
5.4.5	Lineare Abhaengigkeit . . . . .	11
5.4.6	Skalarprodukt . . . . .	12
5.4.7	Kreuzprodukt . . . . .	12
5.4.7.1	Berechnung mithilfe der Determinante . . . . .	12
5.4.8	Spatprodukt . . . . .	12
5.5	Geraden . . . . .	12
5.5.1	Was sind Geraden . . . . .	12
5.5.2	Lage von zwei Geraden im Raum . . . . .	12
5.5.2.1	Abstand Punkt Gerade . . . . .	13
5.5.2.2	Abstand Gerade Gerade . . . . .	13
5.5.2.3	Winkel zwischen Geraden . . . . .	13
5.6	Ebenen . . . . .	13
5.6.1	Ebenenformen . . . . .	13
5.6.1.1	Parameterform . . . . .	13
5.6.1.2	Normalenform . . . . .	15
5.6.1.3	Koordinatenform . . . . .	15
5.6.1.4	Hesse'che Normalenform . . . . .	15
5.6.2	Lage Ebene Gerade . . . . .	15

5.6.2.1	Schnittpunkt . . . . .	15
5.6.2.2	Abstand Gerade Ebene . . . . .	15
5.6.2.3	Winkel zwischen Gerade und Ebene . . . . .	15
5.6.3	Lage Ebene Ebene . . . . .	16
5.6.3.1	Identisch . . . . .	16
5.6.3.2	Schnittgerade . . . . .	16
5.6.3.3	Abstand Ebene Ebene . . . . .	16
5.6.3.4	Winkel zwischen Ebenen . . . . .	16
5.7	Kugeln . . . . .	16
5.7.1	Was ist eine Kugel . . . . .	16
5.7.2	Kugelgleichung . . . . .	16
5.7.3	Lage Kugel Gerade . . . . .	16
5.7.3.1	Abstand . . . . .	17
5.7.3.2	Schnittpunkte . . . . .	17
5.7.4	Lage Kugel Ebene . . . . .	17
5.7.4.1	Abstand . . . . .	17
5.7.4.2	Flaeche der Schnittkreis . . . . .	17
5.7.5	Lage Kugel Kugel . . . . .	17
5.7.5.1	Abstand . . . . .	17
5.8	Herleitungen . . . . .	18
5.8.1	Satz des Pythagoras . . . . .	18
5.8.2	Pythagoras im Raum . . . . .	18
5.8.3	Kosinussatz . . . . .	18
5.8.4	Skalarprodukt . . . . .	18
5.8.5	Kreutzprodukt . . . . .	18
5.8.6	Spatprodukt . . . . .	18
5.8.7	Hesse'sche Normalform . . . . .	18
5.8.8	2D-Hesse'sche Normalform . . . . .	18
6	Lineare Algebra . . . . .	18
6.1	Loesungsverfahren fuer LGS . . . . .	18

6.1.1	Treppenstufen Verfahren . . . . .	18
6.1.2	Koeffizienten Matrix . . . . .	18
6.1.3	Determinante . . . . .	18
6.2	Matrizen . . . . .	19
6.2.1	Besondere Matrizen . . . . .	19
6.2.1.1	Nullmatrix . . . . .	19
6.2.1.2	Stochastische Matrix . . . . .	19
6.2.1.3	Inverse . . . . .	19
6.2.1.4	Einheitsmatrix . . . . .	19
6.2.1.5	Fixvektor . . . . .	20
6.2.1.6	Grenzmatrix . . . . .	20
6.2.2	Rechenregeln . . . . .	21
6.2.3	Matrizengleichungen . . . . .	22
6.2.4	Einstufige Prozesse . . . . .	22
6.2.5	Mehrstufige Prozesse . . . . .	22
6.2.5.1	Markov-Ketten . . . . .	22
6.2.6	Lineare Optimierung . . . . .	22
6.2.6.1	Maximierungsprobleme . . . . .	22
6.2.6.2	Minimierungsprobleme . . . . .	22
6.2.6.3	Sonderfaelle und Loesbarkeit . . . . .	22
6.2.6.4	Simplex-Verfahren . . . . .	22
6.2.6.5	Simplex-Algorithmus . . . . .	22
7	Taschenrechner	22
8	Beispielaufgaben	22
9	Vielleicht falls bock	22
10	Quellen	22

# 1 Analysis

## 1.1 Lineare Funktionen

Eine lineare Funktionen ist eine Funktion der Form  $f(x) = mx + b$ .

### 1.1.1 Eigenschaften einer linearen Funktionen

Bei einer Linearen Funktion stellt  $m$  die Steigung und  $b$  die Verschiebung auf der Y-Achsen dar. Die **Steigung**  $m$  einer linearen Funktion  $f(x) = mx + b$  berechnet sich durch  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



$$f(x) = 0,5x + 1,5$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &\Leftrightarrow \frac{3,5 - 1,5}{4 - 0} = 0,5 \end{aligned}$$

### 1.1.2 Schnittpunkt zweier linearer Funktionen

Der **Schnittpunkt**  $x$  zweier linearer Funktionen berechnet sich durch das Gleichsetzen zweier linearer Funktionen:

$$f(x) = 0,5x + 1,5$$

$$g(x) = 1x + 0,2$$



Beispiel:

$$0,5x + 1,5 = 1x + 0,2 \quad | -0,5x$$

$$1,5 = 0,5x + 0,2 \quad | -0,2$$

$$1,3 = 0,5x \quad | * 2$$

$$2,6 = x$$

Jetzt kann das Ergebnis

$(x = 2,6)$  in die Gleichungen eingesetzt werden um das Ergebnis zu überprüfen.

$$f(2,6) = 2,8$$

$$g(2,6) = 2,8$$

Da die beiden Werte gleich sind heisst das, dass die Rechnung korrekt ist.



## 1.2 Quadratische Funktionen

Eine quadratische Funktion ist eine Funktion der Form  $f(x) = ax^2 + bx + c$  in der Normalform und  $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$  in der Scheitelpunktform.



Gestreckte Parabel:

$$h(x) = 0,2x^2 + 0x + 0; \quad 0,2(x - 0)^2 + 0$$

Normale Parabel:

$$f(x) = 1x^2 + 0x + 0; \quad 1(x - 0)^2 + 0$$

Gesprenzte Parabel

$$g(x) = 4x^2 + 0x + 0; \quad 4(x - 0)^2 + 0$$

### 1.2.1 Eigenschaften einer quadratischen Funktionen

Die Verschiedenen Koeffizienten einer quadratischen Funktion, haben verschiedene Auswirkungen auf das Aussehen einer quadratischen Funktion.

**Normalform:**

Der **Koeffizient**  $a$  gibt sowohl die Öffnungsrichtung als auch die Steigung einer Parabel wieder, ist  $a < 0$  ist die Parabel nach unten geöffnet, ist  $a > 0$  ist sie nach oben geöffnet. Ist  $a = 0$  entsteht eine lineare Funktion.

Über die Steigung kann man folgende Aussagen treffen: Ist  $a > 1$  ist die Parabel gestreckt, ist  $a < 1$  ist sie gespreizt,  $a = 1$  stellt die Normalparabel da.

Der **Koeffizienten**  $b$  gibt die Steigung der Parabel im Schnittpunkt mit der y-Achse an, zusätzlich lässt sich am Vorzeichen ablesen ob die Parabel die y-Achse (Ordinatenachse), mit dem fallenden Ast der Parabel geschnitten wird oder mit dem Steigenden. Ist  $b < 0$ , scheidet der fallende Ast die Ordinatenachse, sonst der Andere. Eine Veränderung des Koeffizienten  $b$  bewirkt eine Verschiebung sowohl in x- als auch in y-Richtung. Wird  $b$  um eins erhöht, dann wird der Graph um  $1/2a$  Einheiten nach links und  $(2b+1)/4a$  nach unten verschoben. Wird  $b$  um eins verringert, wird der Graph dagegen um  $1/2a$  Einheiten nach rechts und  $(2b-1)/4a$  nach oben verschoben.

Der **Koeffizient**  $c$  bestimmt wie die Funktion auf der Ordinatenachse verschoben ist.

### 1.2.2 Umwandlung der Normalform in die Scheitelpunktform

Es sei  $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ , um diese Funktion in die Scheitelpunktform zu ueberfuehren muessen folgende Schritte vollzogen werden.

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax^2 + bx) && + c \quad |a \text{ ausklammern} \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) && + c \quad |q.E. \\ &= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c && |bin.Form \text{ rueckwaerts} \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c && |Klammer aufloesen \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{ab^2}{4a^2} && + c \quad |a \text{ kuerzen} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) && |SPF \text{ der Funktion} \end{aligned}$$

Hier kann man nun den Scheitelpunkt ablesen:

$$S = \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right) = (-0,5 \mid 4,5)$$

### 1.2.3 Schnittpunkt zweier quadratischer Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 10x + 2 \\ g(x) &= x^2 + 2x + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x^2 - 10x + 2 &= x^2 + 2x + 0 && | -2x \\ 5x^2 - 12x + 2 &= x^2 && | -x^2 \\ 4x^2 - 12x + 2 &= 0 && | :4 \\ x^2 - 3x + 0.5 &= 0 \end{aligned}$$

Nun kann die Gleichung mit der P-Q-Formel geloest werden.

### **1.3 Funktionen mit dem Grad grösser 2**

#### **1.3.1 Substitution**

#### **1.3.2 Polynomdivision**

### **1.4 Trigonometrische Funktionen**

### **1.5 Tangente und Normale**

### **1.6 Exponentialfunktionen**

#### **1.6.1 Natürliche Exponentialfunktion**

Als natürliche Exponentialfunktion bezeichnet man Variationen der Funktion  $f(x) = e^x$ .

### **1.7 Umkehrfunktion**

### **1.8 Funktionenschar**

### **1.9 Herleitung**

#### **1.9.1 Trigonometrische Funktionen**

#### **1.9.2 Quadratische Ergänzung**

#### **1.9.3 P-Q-Formel**

#### **1.9.4 Polynomdivision**

#### **1.9.5 Horner Schema**

## 2 Differentialrechnung

### 2.1 Ableitung

### 2.2 Visualisierung

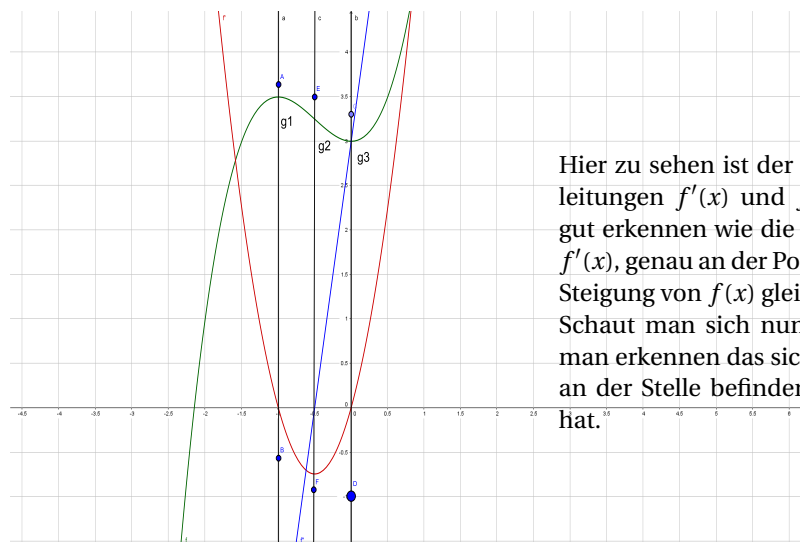


Abbildung 6: Rectangle

### 2.3 Bedeutung der 1. Ableitung

Die 1. Ableitung gibt die Steigung der Originalfunktion wieder, d.h wenn die 1. Ableitung 0 ist hat die Originalfunktion an diesem Punkt eine Steigung von 0 und damit einen möglichen Extrempunkt.

### 2.4 Bedeutung der 2. Ableitung

Muss überarbeitet werden

Die 2. Ableitung gibt die Steigung der 1. Ableitung wieder, d.h wenn die 2. Ableitung 0 ist hat die 1. Ableitung an diesem Punkt eine Steigung von 0. und damit hat die Originalfunktion an diesem Punkt einen Steigungswechsel

### 2.5 Kurzform des Ableitens

Das Ableiten besitzt eine Kurzform, ohne jedes mal den Limes benutzen zu müssen, dabei muss man die Ableitungsregeln sowie die Tatsache dass ein konstanter Summand beim Ableiten wegfällt beachten (Summenregel).

Beispiel:

$$f(x) = 5x^2 + 3x^1 - 5x^0$$

$$f'(x) = 2 \cdot 5x^{2-1} + 1 \cdot 3x^{1-1} = 10x^1 + 3x^0$$

In Worte gefasst bedeutet das, dass der Original-Exponent vor den Koeffizienten gezogen und mit diesem multipliziert wird, danach wird der Exponent um 1 dekrementiert.

## 2.6 Ableitungsregeln

### 2.6.1 Summenregel

Summen von Funktionen werden getrennt abgeleitet.

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= 5x^2 + 8x \\f'(x) &= 10x + 8\end{aligned}$$

### 2.6.2 Faktorregel

Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten.

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= 5 * x^2 \\f'(x) &= 5 * 2x\end{aligned}$$

### 2.6.3 Produktregel

$$\begin{aligned}f(x) &= u(x) * v(x) \\f'(x) &= u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x)\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= 5x^2 * 8x - 1 \\f'(x) &= 10x * 8x + 5x^2 * 8\end{aligned}$$

### 2.6.4 Kettenregel

Äußere mal innere Ableitung".

Ist eine Funktion das Ergebnis der Verkettung von 2 anderen Funktionen dann gilt:

$$\begin{aligned}f(x) &= (u \circ v)(x) \\f'(x) &= u'(v(x)) * v'(x)\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{5x} \\f'(x) &= 5e^{5x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin(5x) \\f'(x) &= 5 * \cos(5x)\end{aligned}$$

### 2.6.5 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$f'(x) = \frac{u'(x) * v(x) - u(x) * v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel:

### 2.7 Ableitung der $e$ -Funktion

Die Ableitung der Funktion  $f(x) = e^x$  ist  $f'(x) = e^x$

Beispiel:

$$f(x) = 5e^x$$
$$f'(x) = 5e^x$$

### 2.8 Ableitung trigonometrischer Funktionen

### 2.9 Herleitungen

#### 2.9.1 Herleitung der Ableitung mithilfe des Limes

#### 2.9.2 Herleitung der Potenzregeln in $\mathbb{N}$

#### 2.9.3 Herleitung der Ableitung der $e$ -Funktion in $\mathbb{N}$ mit Hilfe des Limes

#### 2.9.4 Herleitung der Ableitung der Trigofunktion mithilfe des Limes

#### 2.9.5 Herleitung der Ableitungsregeln

## 3 Integralrechnung

### 3.1 Unbestimmtes Integral

### 3.2 Bestimmtes Integral

### 3.3 Rotationskörper

HALLO GITHUB

### **3.4 Herleitungen**

#### **3.4.1 Fläche mit dem Riemann-Integral**

## **4 Kurvendiskussion**

### **4.1 Symmetrie**

### **4.2 Verhalten im Unendlichen**

### **4.3 Schnittpunkt mit der y-Achse**

### **4.4 Nullstellen**

### **4.5 Ableitungen**

### **4.6 Extrema berechnen**

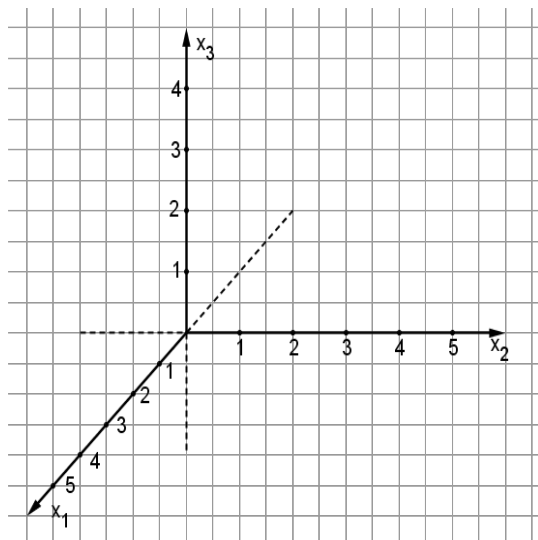
### **4.7 Wendepunkte berechnen**

## **5 Analytische Geometrie**

### **5.1 Was ist ein Vektor**

Ein Vektor ist eine Menge von Pfeilen der Form  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ , die parallel untereinander verschoben sind. Eine anderen Notation fuer diesen Vektor waere  $\vec{a} = (a_1 \dots a_n)^T$

## 5.2 Koordinatensystem



3D Koordinatensystem

## 5.3 Besondere Vektoren

### 5.3.1 Nullvektor

Der Nullvektor ist ein Vektor der Form  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , zudem ist er das neutrale Element der Vektoraddition

$$\text{d.h. } \vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}.$$

### 5.3.2 Gegenvektor

Der Gegenvektor ist das inverse Element der Vektoraddition d.h.  $\vec{a} + -\vec{a} = \vec{0}$ , wobei  $\vec{0}$  den Nullvektor bezeichnet.

### 5.3.3 Ortsvektor

Ein Ortsvektor bezeichnet einen Vektor der vom Koordinatenursprung aus geht d.h. er hat die Form  $\vec{OP}$ , wobei P ein beliebiger Punkt im Raum ist.

### 5.3.4 Normalenvektor

Ein Normalenvektor ist ein Vektor der orthogonal zu seinem Bezugsobjekt z.B. einer Gerade ist.



### 5.3.5 Einheitsvektor

Ein Einheitsvektor ist ein Vektor der Länge 1, d.h. dass sein Betrag = 1 ist ( $|\vec{a}| = 1$ ).

#### Beispiel

Der Einheitsvektor  $\vec{e}_a$  des Vektors  $\vec{a}$  wird berechnet indem man  $\frac{1}{|\vec{a}|} * \vec{a}$  rechnet.

## 5.4 Rechnen mit Vektoren

### 5.4.1 Addition

Zwei Vektoren in  $\mathbb{R}^3$   $\vec{a}, \vec{b}$  werden addiert, indem man ihre Komponenten addiert.  
Beispiel

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

### 5.4.2 s-Multiplikation

Ein Vektor  $\vec{a}$  aus  $\mathbb{R}^3$  wird mit einer Zahl  $s$  aus  $\mathbb{R}$  multipliziert, indem seine Komponenten mit  $s$  multipliziert werden.  
Beispiel

$$s * \vec{a} = s * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s * a_1 \\ s * a_2 \\ s * a_3 \end{pmatrix}$$

### 5.4.3 Linearkombination

Einen Ausdruck der Form  $r_1 * \vec{a}_1 + r_2 * \vec{a}_2 + \dots + r_n * \vec{a}_n$  nennt man Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}_1$  bis  $\vec{a}_n$ . Beachte dass  $\vec{a}_1$  bis  $\vec{a}_n$  Vektoren keine Vektorkomponenten sind.

### 5.4.4 Länge eines Vektors

Der Betrag eines Vektors  $\vec{a}$  stellt seine Länge da, d.h.  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$  ist die Länge eines Vektors.

### 5.4.5 Lineare Abhängigkeit

Die Lineare Abhängigkeit beschreibt die Eigenschaft eines Vektors  $\vec{v}$  sich mit Hilfe der s-Multiplikation und eines beliebigen Vektors  $\vec{b}$  herstellen zu lassen.

Beispiel:

$$\vec{v} = s * \vec{b}$$

Falls es ein  $s$  in  $\mathbb{R}$  gibt das die Gleichung erfüllt ist  $\vec{v}$  linear Abhängig von  $\vec{b}$ .

### 5.4.6 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ordnet je zwei Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  ein Skalar zu, ist dieses Skalar 0 sind die Vektoren orthogonal zueinander.

Beispiel

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + a_3 * b_3.$$

### 5.4.7 Kreuzprodukt

#### 5.4.7.1 Berechnung mithilfe der Determinante

Das Kreuzprodukt lässt sich auch mithilfe der Determinante berechnen indem man, eine quadr. Matrix mit der Standardbasis und zwei sich schneidende Vektoren bildet.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \det \begin{pmatrix} e_1 & a_1 & b_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= e_1 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + e_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= e_1(a_2 * b_3 - a_3 * b_2) + e_2(a_3 * b_1 - a_1 * b_3) + e_3(a_1 * b_2 - a_2 * b_1) \\ &= \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 * b_3 - a_3 * b_2 \\ a_3 * b_1 - a_1 * b_3 \\ a_1 * b_2 - a_2 * b_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 5.4.8 Spatprodukt

## 5.5 Geraden

### 5.5.1 Was sind Geraden

Eine Gerade im 3-Dimensionalen Raum ist eine unendliche Ausdehnung in eine Koordinatenrichtungen.

### 5.5.2 Lage von zwei Geraden im Raum

Um die Lage zweier Gerade zueinander zu bestimmen muss zuert auf lineare Anhaengigkeit geprueft werden. Sind die Richtungsvektoren linear Abhaengig, sind die Gerade etweder Parallel oder Identisch, sind sie jedoch linear Unabhaengig muss geprueft werden ob sie einen Schnittpunkt besitzen oder windschief sind.

#### Beispiel **Parallel**

Fall wir herausgefunden haben dass die Richtungsvektoren lineare Abhaengig sind, muessen wir als naechstes schauen ob der Ortsvektor eine beteiligten Gerade auf der anderen Gerade liegt um zu pruefen ob die Gerade Identisch sind.

#### Beispiel **Windschief**

Hat sich jedoch ergeben dass die Richtungsvektoren linear Unabhaengig sind, muess wird als naechstes schauen die Geraden einen Schnittpunkt besitzen um zu pruefen ob sie windschief sind.

### 5.5.2.1 Abstand Punkt Gerade

Abstand mit Hilfe der 2D-HNF

### 5.5.2.2 Abstand Gerade Gerade

Windschief

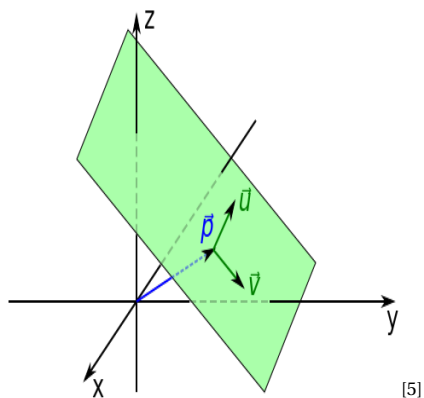
Parallel

Abstand mit Hilfe der 2D-HNF

### 5.5.2.3 Winkel zwischen Geraden

## 5.6 Ebenen

Eine Ebene im 3-Dimensionalen Raum ist eine unendliche Ausdehnung in zwei Koordinatenrichtungen.



Ebene im 3-Dimensionalen Raum

### 5.6.1 Ebenenformen

#### 5.6.1.1 Parameterform

Parameterform einer Ebene:  $E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

In der Parameterform wird eine Ebene mithilfe eines Stützvektors (Ortsvektors) und zwei Richtungsvektoren beschrieben. Es gibt zwei Möglichkeiten, wie diese Richtungsvektoren zueinander liegen dürfen, um eine Ebene zu beschreiben, parallel und geschnitten. Falls sich die gegebenen Richtungsvektoren schneiden, kann die Ebene direkt zwischen ihnen aufgespannt werden. Falls die gegebenen Richtungsvektoren jedoch parallel sind, muss ein Verbindungsvektor zwischen ihnen hergestellt werden.

**Beispiel**

Für die Prüfung ob die Gerade Parallel sind siehe Lage Gerade Gerade.

Seien die Gerade  $g_1 : \vec{x} = \vec{o}_1 + r * \vec{a}$  und  $g_2 : \vec{x} = \vec{o}_2 + s * \vec{b}$  parallel, dann kann die Ebene mit Hilfe des Richtungsvektors von einer der Geraden und eines beliebigen Verbindungsvektors der zwei Geraden gebildet werden.

### 5.6.1.2 Normalenform

Normalenform einer Ebene  $E: \vec{x} = \vec{n} \circ [(\vec{x} - \vec{p})]$

In der Normalenform wird eine Ebene mit Hilfe ihrer Normale ( $\vec{n}$ ) und der Differenz eines Punktes aus der Ebene mit einem beliebigen anderen Punkt beschrieben ( $\vec{x} - \vec{p}$ ) wobei  $\vec{p}$  einen beliebigen Punkt in der Ebene, und  $\vec{x}$  einen beliebigen anderen Punkt darstellt. Alle Differenzen die orthogonal zum Normalenvektor der Ebene liegen beschreiben daher Vektoren die in der Ebene liegen.

### 5.6.1.3 Koordinatenform

Koordinatenform der Ebene:  $E: n_1 * x_1 + n_2 * x_2 + n_3 * x_3 = c$

Die Koordinatenform der Ebene ist die ausmultiplizierte Normalenform einer Ebene.

Beispiel

### 5.6.1.4 Hesse'sche Normalenform

## 5.6.2 Lage Ebene Gerade

Um die Lage einer Gerade zu Ebene zu bestimmen, muss man zuert ueberpruefen ob die Gerade echt parallel ist, dies kann man mit Hilfe der Normale der Ebene und des Richtungsvektors der Gerade ueberpruefen indem man ueberprueft ob die Normale orthogonal zum Richtungsvektor der Gerade liegt. Fall die Gerade parallel zur Ebene liegt, kann man nun den Ortsvektor der Gerade in die Ebene einsetzen um zu ueberpruefen ob sie identisch sind. Falls die Gerade sich jedoch nicht parallel zur Ebene verhaelt hat sie garantiert einen Schnittpunkt mit der Ebene.

### 5.6.2.1 Schnittpunkt

Um den Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene zu berechnen, bringt man die Ebene in Koordinatenform und setzt die Gerade dann in diese ein.

Beispiel

### 5.6.2.2 Abstand Gerade Ebene

Damit eine Gerade und eine Ebene ueberhaupt einen Abstand haben, muessen sie selbstverstaendlich echt parrallel sein, um dies festzustellen ueberprueft man den Normalenvektor der Ebene und den Richtungsvektor der Gerdade auf orthogonalitaet. Falls die Orthogonalitaetsbedingung erfuehlt ist, waehlt man nun ein beliebigen Punkt auf der Ebene und bildet mit der Hilfe von diesem Punkt und der Normale der Ebene eine Gerade, nun berechnet man den Schnittpunkt von dieser Gerade mit der Ebene. Nun bildet man den Vektor zwischen dem Ortsvektor der neuen Gerade und de Schittpunkt der Ebene, der Betrag dieses Vektors ist dann der Abstand von der Gerade zur Ebene.

**Abstand mit Hilfe der HNF**

### 5.6.2.3 Winkel zwischen Gerade und Ebene

### 5.6.3 Lage Ebene Ebene

Um die Lage einer Ebene zu einer anderen Ebene stellt man zuerst fest ob sie parallel zueinander liegen, dies kann man ueberprüfen indem man die beiden Normalen der Ebene auf lineare Abhaengigkeit ueberprueft.

#### 5.6.3.1 Identisch

Um nun zu ueberpruefen ob die Ebenen identisch sind, setzt einen beliebigen Punkt der einen Ebene in die andere Ebene ein. (Koennte Schnittgerade sein, Loesung 3 Punkte einsetzen die zsm keine Gerade werden koennen)

#### 5.6.3.2 Schnittgerade

#### 5.6.3.3 Abstand Ebene Ebene

Um den Abstand zweier Ebenen zu berechnen muessen diese selbstverstaendlich parallel zueinander liegen, nun berechnet man von einer der Ebenen die Normale und stellt mit ihrer Hilfe eine Gerade auf, dann berechnet man den Schnittpunkt dieser Gerade mit der anderen Ebene.

Nun berechnet man den Vektor zwischen dem Ortsvektor der Normale und dem Schnittpunkt, der Betrag dieses Vektors ist der Abstand zwischen den beiden Ebenen.

**Abstand mit Hilfe der HNF**

#### 5.6.3.4 Winkel zwischen Ebenen

## 5.7 Kugeln

### 5.7.1 Was ist eine Kugel

Eine Kugel ist eine Menge von Punkten im 3-Dimensionalen Raum, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand  $r$  haben, der Punkt M wird dabei als Mittelpunkt und der Abstand  $r$  als Radius bezeichnet.

### 5.7.2 Kugelgleichung

Eine Kugel in der Analytischen Geometrie wird mit der Gleichung

$|\vec{p} - \vec{M}|^2 = r^2$  oder  $(p_1 - M_1)^2 + (p_2 - M_2)^2 + (p_3 - M_3)^2 = r^2$  beschrieben, wo M den Mittelpunkt als Vektor,  $p$  einen beliebigen Punkt als Vektor, und  $r$  den Radius als reelle Zahl darstellt.

### 5.7.3 Lage Kugel Gerade

Im  $\mathbb{R}^3$  gibt es zwei Moeglichkeiten wie eine Gerade zu einer Kugel liegen kann, ersten wenn ie Kugel von der Geraden geschnitten wird und zweitens wenn ebendies nicht zutrifft. Dies kann man feststellen indem man den Abstand der Gerade zur Kugel berechnet, ist dieser Abstand groesser als der Kugelradius haben die Gerade und die Kugel keine gemeinsamen Punkte, ist er jedoch kleiner entstehen zwei Schnittpunkte.

#### 5.7.3.1 Abstand

Siehe Abstand Punkt Gerade, wobei der Punkt den Kugelmittelpunkt darstellt.

#### 5.7.3.2 Schnittpunkte

#### 5.7.4 Lage Kugel Ebene

Im  $\mathbb{R}^3$  gibt es zwei Moeglichkeiten wie eine Ebene zu einer Kugel liegen kann, erstens wenn die Kugel von der Ebene geschnitten wird und zweitens wenn ebendies nicht zutrifft. Dies kann man feststellen indem man den Abstand der Ebene zur Kugel berechnet, ist dieser Abstand groesser als der Kugelradius haben die Ebene und die Kugel keine gemeinsamen Punkte, ist er jedoch kleiner entsteht eine Schnittkreis.

##### 5.7.4.1 Abstand

Siehe Abstand Punkt Ebene, wobei die Normale den Richtungsvektor und der Kugelmittelpunkt den Ortsvektor der Gerade darstellt.

#### Beispiel

##### 5.7.4.2 Flaeche der Schnittkreis

Um die Flaeche des Schnittkreises zu berechnen muss zunaechste der Radius des Kreises berechnet werden, diesen kann man mit Hilfe der Entfernung der Ebene zum Mittelpunkt und des Kugelradius berechnen. Es gilt:

$$r_{Kreis}^2 = r_{Kugel}^2 - (AbstandKugelEbene)^2$$
$$A_{Kreis} = \pi * r_{Kreis}^2$$

#### 5.7.5 Lage Kugel Kugel

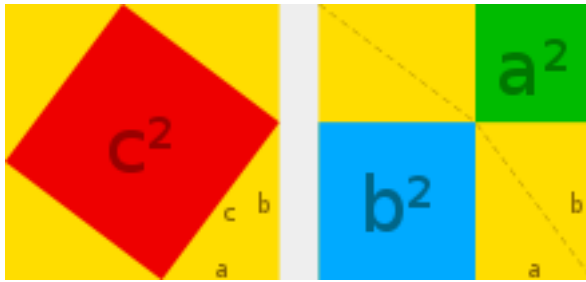
Im  $\mathbb{R}^3$  gibt zwei Moeglichkeiten wie eine Kugel zu einer anderen Kugel liegen kann, ersten wenn die eine Kugel die anderen schneidet und zweitens wenn ebendies nicht zutrifft. Dies kann man feststellen indem man der Abstand der beiden Mittelpunkte berechnet, ist dieser groesser als die Summe der beiden Kugelradien haben die Kugeln keine gemeinsamen Punkte, ist er jedoch kleiner entsteht ein Schnittkoeper.

##### 5.7.5.1 Abstand

Trivial(Abstand Punkt Punkt).

## 5.8 Herleitungen

### 5.8.1 Satz des Pythagoras



Links =  $c^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b)$

Rechts =  $a^2 + b^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b)$

$$c^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b) = a^2 + b^2 + 4 * (\frac{1}{2} a * b) \quad | - 4 * (\frac{1}{2} a * b)$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

### 5.8.2 Pythagoras im Raum

### 5.8.3 Kosinussatz

### 5.8.4 Skalarprodukt

### 5.8.5 Kreuzprodukt

### 5.8.6 Spatprodukt

### 5.8.7 Hesse'sche Normalform

### 5.8.8 2D-Hesse'sche Normalform

## 6 Lineare Algebra

### 6.1 Loesungsverfahren fuer LGS

#### 6.1.1 Treppenstufen Verfahren

#### 6.1.2 Koeffizienten Matrix

#### 6.1.3 Determinante



## 6.2 Matrizen

Eine Matrix vom Typ  $M_{m,n}$  ist eine Zusammenfassung von Werten der Form  $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten

### 6.2.1 Besondere Matrizen

#### 6.2.1.1 Nullmatrix

Die Nullmatrix ist eine Matrix in der alle Elemente Null sind, sie ist damit das neutrale Element der Matrixaddition.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

#### 6.2.1.2 Stochastische Matrix

Eine Stochastische Matrix ist eine quadratische Matrix deren Elemente zwischen 0 und 1 liegen, und der Spalten bzw. Zeilensumme 1 ist.

#### 6.2.1.3 Inverse

Seien  $M$  und  $I$  beliebige quadratische Matrizen und  $E$  die Einheitsmatrix, dann nennt man die Matrix  $I$  die, die Gleichung  $M * I = I * M = E$  erfuehlt, Inverse der Matrix  $M$ . Sie wird mit  $M^{-1}$  dargestellt.

Eine Matrix mit einer Inversen nennt man reguläre Matrix.

GAUSS UND ADJUNKTE

#### 6.2.1.4 Einheitsmatrix

Eine Einheitsmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der alle Elemente auf der Hauptdiagonale gleich 1 sind.

Sie ist das neutrale Element der Matrizenmultiplikation d.h.  $M * E = E * M = M$  wobei  $M$  eine beliebige reguläre Matrix ist, und  $E$  ihre Einheitsmatrix ist.

Sie ist symmetrisch, d.h.  $E^t = E$ .

Sie ist selbstinvers, d.h.  $E^{-1} = E$

Ihre determinante ist 1 d.h.  $\det(E) = 1$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

#### **6.2.1.5 Fixvektor**

Sei  $V_f$  ein Vektor, und  $M$  eine beliebige Matrix, dann nennt man den Vektor der die Gleichung  $M * V_f = V_f$  erfuehlt Fixvektor der Matrix  $M$ .

Beispiel:

#### **6.2.1.6 Grenzmatrix**

Sei  $M$  eine beliebige Matrix, dann nennt man eine Matrix die Gleichung  $M * M = M$  erfuehlt Grenzmatrix der Matrix  $M$ .

Beispiel:

## 6.2.2 Rechenregeln

### Addition

Die Summe zweier Matrizen, berechnet man indem man sie komponentenweise addiert.

$$M = A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrixaddition ist sowohl **kommutativ** ( $A+B=B+A$ ),

als auch **assoziativ** ( $(A+B)+C=A+(B+C)$ ).

Es koennen nur Matrizen der gleiche Dimension addiert werden.

### Skalarmultiplikation

$$r * M = r * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * a_{11} & r * a_{12} & \dots & r * a_{1n} \\ r * a_{21} & r * a_{22} & \dots & r * a_{2n} \\ \vdots & & & \\ r * a_{m1} & r * a_{m2} & \dots & r * a_{mn} \end{pmatrix}$$

### Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen werden multipliziert indem man das Skalaprodukt von den Zeilenvektoren der erstem Matrix

Es koennen nur Matrizen multipliziert wenn die **Spaltenanzahl** der 1. Matrix mit der **Zeilenanzahl** der 2. Matrix uebereinstimmt.

Die Matrizenmultiplikation ist im allgemeinen **nicht** kommutativ ( $A * B \neq B * A$ ), daraus folgt dass beim **Distributivgesetz** die Richtung eine Rolle spielt ( $A * (B+C) \neq (B+C) * A$ ).

$$\begin{array}{c|c} A_{2,3} * B_{3,4} = C_{2,4} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$c_{11} = b_{11} * a_{11} + b_{12} * a_{21} + b_{13} * a_{31}$$

$$c_{12} = b_{11} * a_{12} + b_{12} * a_{22} + b_{13} * a_{32}$$

$$c_{13} = b_{11} * a_{13} + b_{12} * a_{23} + b_{13} * a_{33}$$

$$c_{14} = b_{11} * a_{14} + b_{12} * a_{24} + b_{13} * a_{34}$$

$$c_{21} = b_{21} * a_{11} + b_{22} * a_{21} + b_{23} * a_{31}$$

$$c_{22} = b_{21} * a_{12} + b_{22} * a_{22} + b_{23} * a_{32}$$

$$c_{23} = b_{21} * a_{13} + b_{22} * a_{23} + b_{23} * a_{33}$$

$$c_{24} = b_{21} * a_{14} + b_{22} * a_{24} + b_{23} * a_{34}$$

### **6.2.3 Matrizenungleichungen**

### **6.2.4 Einstufige Prozesse**

### **6.2.5 Mehrstufige Prozesse**

#### **6.2.5.1 Markov-Ketten**

### **6.2.6 Lineare Optimierung**

#### **6.2.6.1 Maximierungsprobleme**

#### **6.2.6.2 Minimierungsprobleme**

#### **6.2.6.3 Sonderfaelle und Loesbarkeit**

#### **6.2.6.4 Simplex-Verfahren**

#### **6.2.6.5 Simplex-Algorithmus**

## **7 Taschenrechner**

## **8 Beispielaufgaben**

## **9 Vielleicht falls bock**

logarithmus-(funktion), verschiedene bewiese/herleitung quar ergaenzung sekante tangene normale Begriffs-  
erklaerung

## **10 Quellen**

[5]. „Plane equation qtl1“ von Quartl - Wikipedia

# Hochschulmathematik

Thomas Dost

## **Inhaltsverzeichnis**