1. Einheiten

1.1 Physikalische Grössen

Bsp: Länge

$$s = 5.0\ m = \{s\} \cdot [s]$$

$\{s\} = 5.0 \rightarrow$ Masszahl

$[s] = m \rightarrow$ Masseinheit

Bsp: Kraft

$$F = m \cdot a$$

$$[F] = [m] \cdot [a]$$

$$[F] = kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

Dimension einer phys. Grösse

$$\dim(s) = L$$

$$\dim(t) = T$$

$$\dim(m) = M$$

Bsp. Beschleunigung:

$$\underline{\underline{\dim(a)}} = \dim\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{\dim(\Delta v)}{\dim(\Delta t)} = \frac{\frac{L}{T}}{T} = \underline{\underline{\frac{L}{T^2} = T^{-2} \cdot L}}$$

1.2 Genauigkeit und Runden

Profi: - Variante: Fehlerfortpflanzungsrechnung

→ sehr Aufwändig

→ selten nötig

Standart-Variante: Dezimalstellen-Regel

Bsp.: Zimmerfläche

① Messen:

$a \approx \underbrace{4.00}_{3\text{ Stellen}}\,m$

$b \approx \underbrace{3.0}_{2\text{ Stellen}}\,m$

② Rechnung:

$\underline{\underline{A}} = a \cdot b \approx 4.00\,m \cdot 3.0\,m \approx \underline{\underline{12\,m^2 = \underbrace{1.2}_{2\text{ Stellen}} \cdot 10^1\,m^2}}$

Näherung

2 Newton - Prinzipien

① Trägheitsprinzip

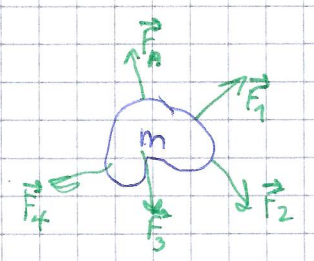
keine Kräfte auf ein Objekt

⇒ Objekt durchläuft gleichförmige Bewegung

$\vec{F}_1 = \ldots = \vec{F}_n = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$

② Aktionsprinzip

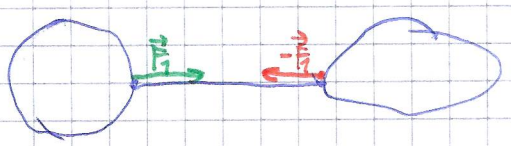
$m\,\vec{a} = \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \vec{F}_N$



Aktionsprinzip entlang eines fixen Weges:

$m \cdot a = F = F_1 - F_2 + \ldots + F_n$

③ Wechselwirkungsprinzip / Reaktionsprinzip



Masseinheit der Kräfte

$[\vec{F}] = [m] \cdot [\vec{a}] = kg \cdot \frac{m}{s^2} \equiv$ 1 Newton

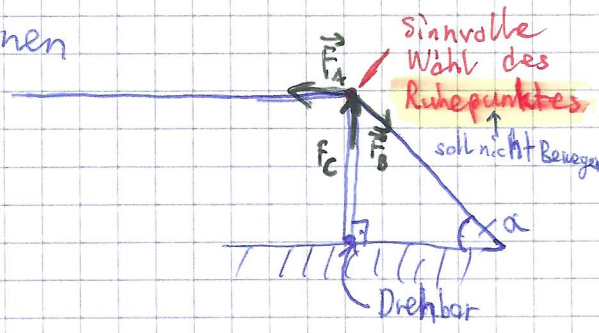
3 Statisches Gleichgewicht

→ Bedingungen für Bewegungslosigkeit
→ Hauptanwendung: Bau, Maschinenbau

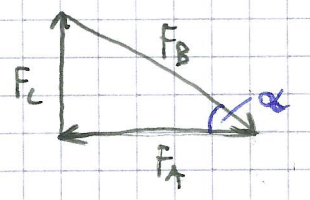
→ Statik bez. Translationen ⇒ Kräfte-Gleichgewicht
→ Statik bez. Rotation ⇒ Drehmoment-Gleichgewicht
↳ basiert auf Kreuzprodukt

3.1 Ruhepunkt-Methode

→ anwendbar in ausgesuchten Situationen
Beispiel: Mast mit Abspannung.



① Wählen eines Ruhepunktes
② Einzeichnen aller Kräfte, die am Ruhepunkt angreifen
③ Kräfte-Vieleck zeichnen



④ Fehlende Kräfte berechnen

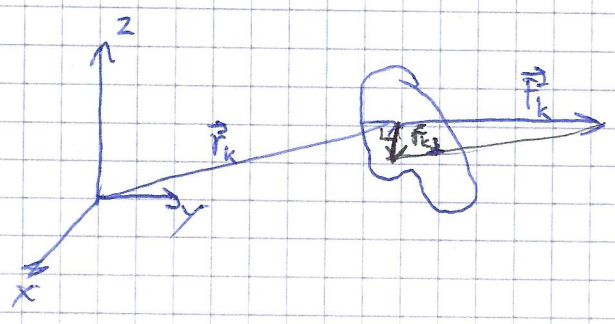
$$\frac{F_A}{F_B} = \cos(\alpha) \Rightarrow \underline{\underline{F_B = \cancel{F_A} \cdot \frac{F_A}{\cos(\alpha)}}}$$

$$\frac{F_C}{F_A} = \tan(\alpha) \Rightarrow \underline{\underline{F_C = F_A \cdot \tan(\alpha)}}$$

3.2 Drehmoment

3.2.1 ~~Drehmoment~~ Definition

Situation:



$\vec{F}_k \equiv$ eine äussere Kraft

$r_k \equiv$ Hebelarm der Kraft $\vec{F}_k$

Def.: Das Drehmoment der Kraft $\vec{F}_k$ bezüglich dem gewählten Koordinatensystem ist

$$\vec{M}_k := \vec{r}_k \times \vec{F}_k .$$

Bemerkungen:

i.) Masseinheit

$$[M] = [r] \cdot [F] = m \cdot N = Nm$$

ii.) Es gilt

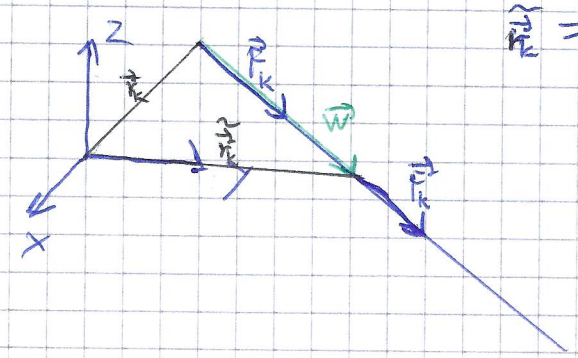
$$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_{k\perp}$$

iii.) Die Komponenten von $\vec{M}_k$ hängen von der Wahl des Koordinatensystems ab.

Wirkungslinensatz

Das Drehmoment einer Kraft bleibt unter Verschiebungen der Kraft entlang ihrer Wirkungslinie erhalten.

Beweiss:

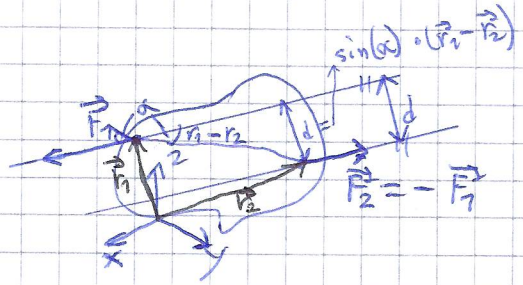


$$\tilde{\vec{r}}_k = \vec{r}_k + w$$

$$\tilde{\vec{M}}_k = \tilde{\vec{r}}_k \times \vec{F}_k = (\vec{r}_k + w) \times \vec{F}_k$$
$$= \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \underbrace{\vec{w} \times F_k}_{=0} = \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{M}_k \quad \blacksquare$$

Kräfte-Paar-Satz

Situation:



Unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems gilt

$$|\vec{M}| = |\vec{M}_1 + \vec{M}_2| = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d$$

Beweiss:

$$|\vec{M}| = |\vec{M}_1 + \vec{M}_2| = |\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2| = |\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1|$$
$$= |(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1| = \underbrace{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \cdot |\vec{F}_1| \cdot \sin(\alpha)}_{d} = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d \quad \blacksquare$$

3.2.2 Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen

Ein Körper befindet sich genau dann im statischen Gleichgewicht, wenn gilt

$$\begin{cases} 0 = \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \\ 0 = \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots \vec{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k \end{cases}$$

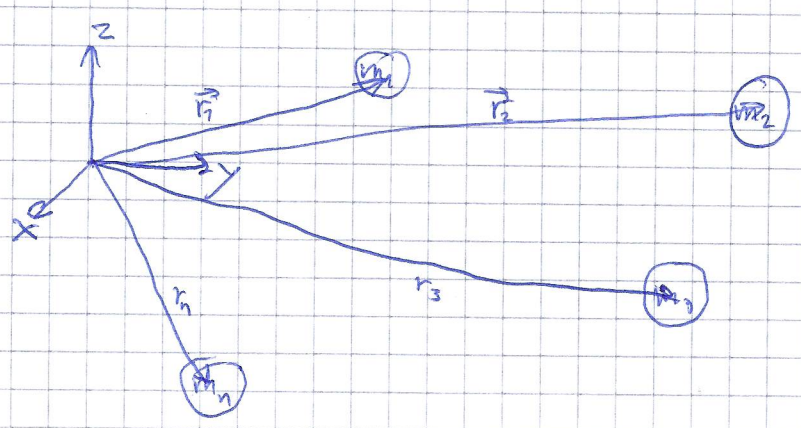
Vorgehen:

1. Situationsskizze
2. Frei schneiden und äussere Kräfte einzeichnen. Koordinatensystem wählen.
3. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = \dots$
   $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_N = \dots$
4. Gleichungssystem aufstellen:
   $$\begin{cases} 0 = \vec{F} = \dots \\ 0 = \vec{M} = \dots \end{cases}$$
5. Gleichungssystem nach den gesuchten Grössen auflösen.

~~Seite 32~~

3.3 Schwerpunkt

Situation:



$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$ ≙ Gesamtmasse

Def. Der Punkt mit Ortsvektor

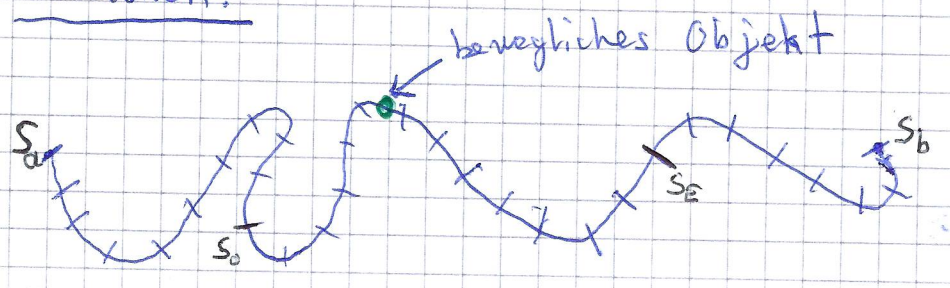
$$\boxed{\vec{r}_S := \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \ldots + m_n \cdot \vec{r}_n}{m}}$$

heisst Schwerpunkt der Massen $m_1, \ldots, m_n$.

4. Geradlinige Bewegung

4.1 Grundbegriffe

• **Situation:**



$S_a \equiv$ Weg anfangsposition

$S_b \equiv$ Weg endposition

$t_0 \equiv$ Anfangszeit | $S_0 \equiv$ Anfangsposition

$t_E \equiv$ Endzeit | $S_E \equiv$ Endposition

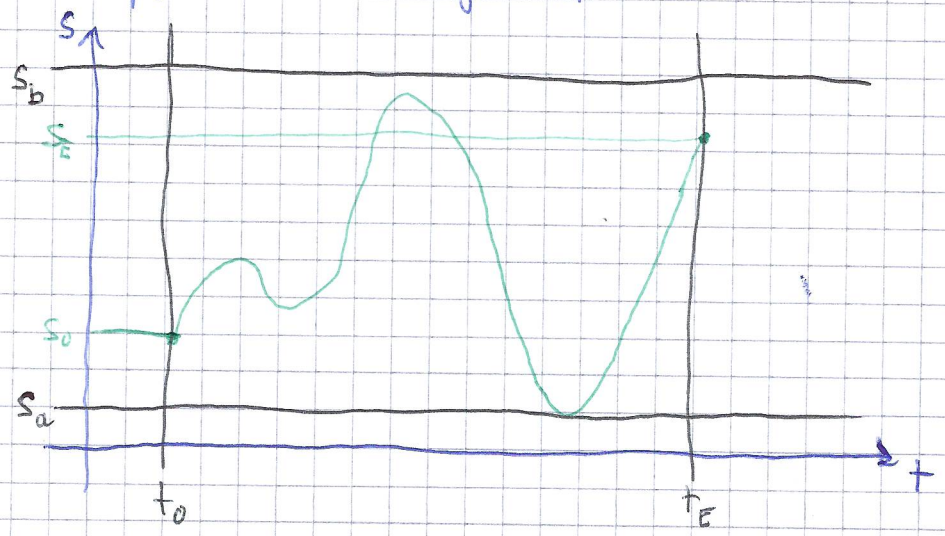
• **Bewegungsfunktion:**

Die Funktion

$$S : [t_0, t_E] \longrightarrow [S_a, S_b]$$
$$t \longmapsto S(t) :\equiv \text{Position des Objekts zur Zeit } t$$

heisst **Bewegungsfunktion**.

Graph → t–s–Diagramm



Die Geschwindigkeitsfunktion ist definiert durch

$$v: [t_0, t_E] \longrightarrow \mathbb{R}\left[\frac{m}{s}\right]$$
$$t \longmapsto v(t) := \dot{s}(t)$$

Ableitung (nur wenn Variabel die Zeit ist)

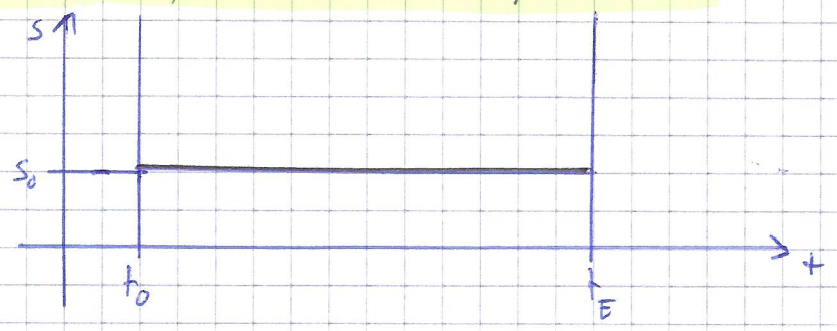
Die Beschleunigungsfunktion ist definiert durch

$$a: [t_0, t_E] \longrightarrow \mathbb{R}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$
$$t \longmapsto a(t) := \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

4.2 Spezielle Bewegungen

4.2.1 Stillstand

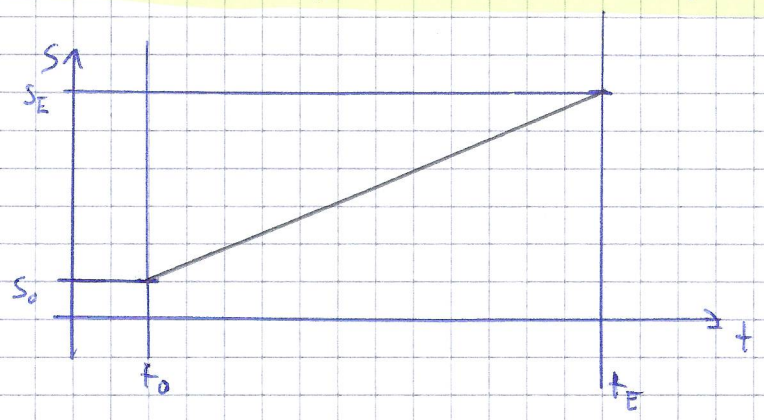
$s(t) = s_0 \equiv$ konstant ; $v(t) = 0$; $a(t) = 0$



4.2.2 Gleichförmige Bewegung

Def: $v(t) = v \equiv$ konstant.

Es gilt: $s(t) = v \cdot (t - t_0) + s_0$; $v(t) = v \equiv$ konstant. ; $a(t) = 0$

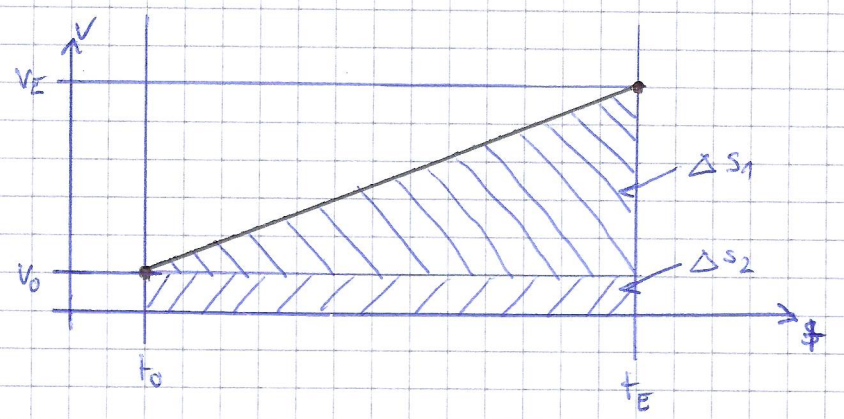


Differenzen:

$$\left.\begin{aligned}\Delta t &= t - t_0\\ \Delta v &= v - v_0\\ \Delta s &= s - s_0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{v = \frac{\Delta s}{\Delta t}} \; ; \quad \boxed{\Delta v = 0}$$

4.2.3 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Def: $a(t) = a \equiv$ konst. mit $a \neq 0$



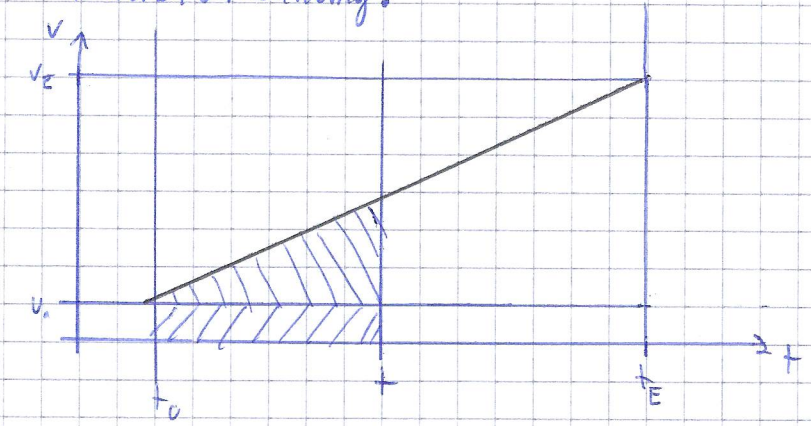
Es gilt:

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) + s_0$$

$$v(t) = a \cdot (t - t_0) + v_0$$

$$a(t) = a \equiv \text{konstant.}$$

Flächenberechnung:



$$\Delta s = (t - t_0) \cdot v_0 + \frac{1}{2} \cdot (t - t_0) \cdot (v(t) - v_0)$$

$$\Delta s = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot (t - t_0) \cdot a \cdot (t - t_0)$$

$$s(t) - s_0 = \Delta s = \frac{a}{2} \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) \Rightarrow \underline{\underline{s(t) = \frac{a}{2} \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) + s_0}}$$

Differenzen:

$$\Delta t = t - t_0$$

$$\Delta s = s(t) - s_0 = \frac{a}{2}(t-t_0)^2 + v_0 \cdot (t-t_0) = \frac{a}{2} \cdot \Delta t^2 + v_0 \cdot \Delta t$$

$$\Delta v = v(t) - v_0 = a \cdot (t-t_0) = a \cdot \Delta t$$

$$\Delta a = a(t) - a_0 \equiv 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{aber:} \quad v(t) \neq \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Weg-Geschwindigkeitsgesetze:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{a}$$

$$\Delta s = \frac{a}{2} \cdot \Delta t^2 + v_0 \cdot \Delta t = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{\Delta v}{a}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{\Delta v}{a}$$

$$= \frac{\cancel{a}}{2} \frac{(v-v_0)^2}{a^{\cancel{2}}} + \frac{v_0 (v-v_0)}{a} = \frac{v^2 - 2 v v_0 + v_0^2}{2a} + \frac{2 v_0 v - 2 v_0^2}{2a}$$

$$= \frac{v^2 - \cancel{2 v v_0} + \cancel{v_0^2} + \cancel{2 v v_0} - \cancel{2} v_0^2}{2a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

Formulierung mit Endgeschwindigkeit:

$$\Delta s = \frac{v_E^2 - v_0^2}{2a} \qquad a = \frac{v_E^2 - v_0^2}{2 \Delta s} \qquad v_E^2 = v_0^2 + 2 a \Delta s$$

Beschleunigungsweg-Formel: $v_0 = 0$

$$\Delta s = \frac{v_E^2}{2a} \qquad a = \frac{v_E^2}{2 \Delta s} \qquad v_E = \pm\sqrt{2 a \cdot \Delta s}$$

Bremsweg-Formel: $v_E = 0$

$$\Delta s = -\frac{v_0^2}{2a} \qquad a = -\frac{v_0^2}{2\Delta s} \qquad v_0 = \pm\sqrt{-2 \cdot a \cdot \Delta s}$$

Begriffe in der Verkehrstechnik:

Verzögerung: $\equiv -a$

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot \left(t^2 - 2t \cdot t_0 + t_0^2\right) + v_0 \cdot (t - t_0) + s_0 \quad \cancel{a \cdot t^2 - 2 \cdot a \cdot t_0 + a \cdot t_0^2}$$

$$s(t) = \frac{a \cdot t^2 - 2 \cdot a \cdot t \cdot t_0 + a \cdot t_0^2}{2} + v_0 \cdot t - v_0 \cdot t_0 + s_0$$

$$\dot{s}(t) = \frac{\cancel{2} \cdot a \cdot t - \cancel{2} \cdot a \cdot t_0}{\cancel{2}} + v_0$$

$$\underline{\underline{v(t) = \dot{s}(t)}} = \underline{\underline{a \cdot (t - t_0) + v_0}}$$

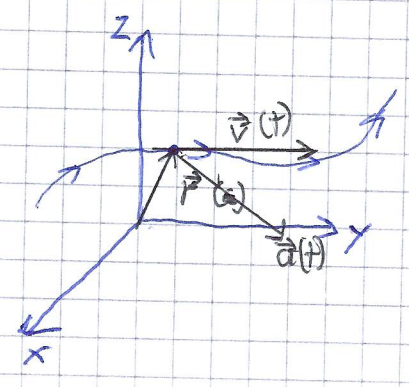
$$v(t) = \dot{s}(t) = at - at_0 + v_0$$

$$\underline{\underline{a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)}} = a \cdot 1 - 0 + 0 = \underline{\underline{a}}$$

5. Krummlinige Bewegung

5.1 Allgemeine Begriffe

Situation:



Bewegungsfunktion:

$$\vec{r} : [t_0, t_E] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; [m]$$
$$t \longmapsto \vec{r}(t) \equiv \text{Position des Objekts zur Zeit } t.$$

Geschwindigkeitsfunktion:

$$\vec{v} : [t_0, t_E] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; [m/s]$$
$$t \longmapsto \vec{v}(t) := \dot{\vec{r}}(t)$$

Beschleunigungsfunktion:

$$\vec{a} : [t_0, t_E] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; [m/s^2]$$
$$t \longmapsto \vec{a}(t) := \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Bahngeschwindigkeit:

$$v(t) := |\vec{v}(t)|$$

~~Bahnbeschleunigung:~~

~~Besch~~ Bahnbeschleunigung:

$$a_B(t) := \dot{v}(t)$$

$$a_B(t) = \langle \vec{a}(t), \hat{v}(t) \rangle \quad | \quad \vec{a}_B(t) = \langle \vec{a}(t), \hat{\vec{v}}(t) \rangle \cdot \vec{v}(t)$$

5.2 spezielle Bewegungen

5.2.1 Stillstand

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \; ; \; \vec{v}(t) = 0 \; ; \; \vec{a}(t) = 0$$

5.2.2 Gleichförmige Bewegung

Definition: $\vec{v}(t) = \vec{v} \equiv$ konstant

$$\vec{r}(t) = \vec{v} \cdot (t - t_0) + \vec{r} \; ; \; \vec{v}(t) = \vec{v} \; ; \; \vec{a}(t) = 0$$

5.2.3 Gleichförmig beschleunigte Bewegung

Def: $\vec{a}(t) = \vec{a} \equiv$ konstant

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}}{2} \cdot (t - t_0)^2 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0) + \vec{r}_0$$

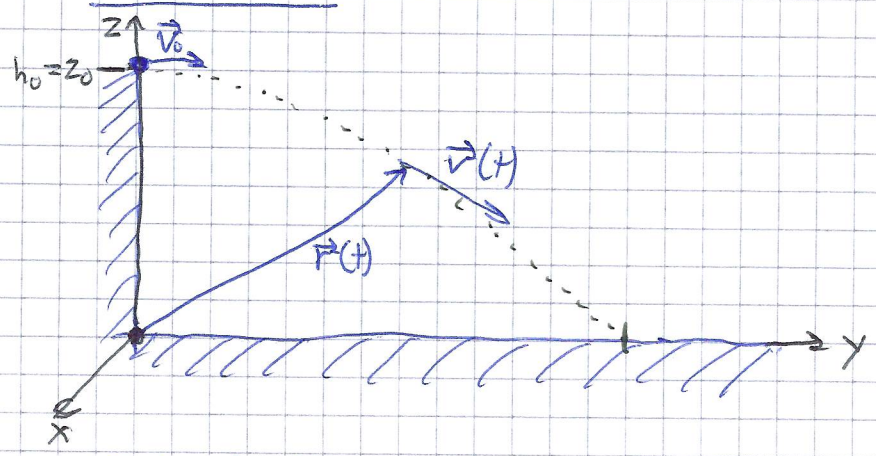
$$\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot (t - t_0) + \vec{v}_0$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}$$

~~5.2.4~~

5.2.4 Horizontaler Wurf

Situation:



Frei schneiden

Aktionsprinzip: $m \cdot \vec{a} = \vec{F} = \vec{F}_g$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{a}}} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}_G = \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}}}$$

→ gleichförmig beschleunigte Bewegung!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} ; \quad \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$$

→ einsetzen:

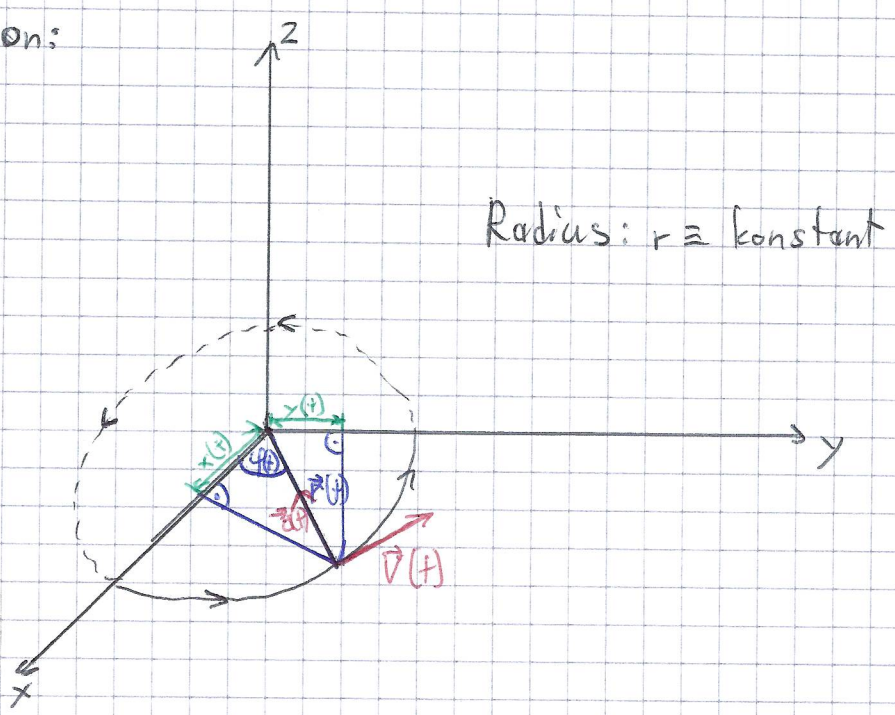
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cdot (t - t_0) \\ h_0 - \frac{g}{2} (t - t_0)^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Stillstand} \\ \leftarrow \text{gleichförmige Bewegung} \\ \leftarrow \text{gleichförmig beschl. Bewegung} \end{array}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ -g \, (t - t_0) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

5.2.5 Gleichförmige Kreisbewegung

Situation:



gleichförmige Kreisbewegung:

$$\Rightarrow \varphi(t) = \omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(t) = \omega :\equiv \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

Formulierung mit Umlaufzeit:

$T :\equiv$ Umlaufzeit

$f := \frac{1}{T} \equiv$ Frequenz $\equiv$ Drehzahl

Es gilt

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Bewegungsfunktion:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi(t)) \\ r \cdot \sin(\varphi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0) \\ r \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsfunktion:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0) \\ +r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beschleunigungsfunktion:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0) \\ -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot (t - t_0) + \varphi_0) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t)$$

Bahngeschwindigkeit:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{r^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\varphi(t)) + r^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\varphi(t)) + 0^2}$$

$$= \sqrt{r^2 \cdot \omega^2 \cdot \underbrace{(\sin^2(\varphi(t)) + \cos^2(\varphi(t)))}_{1}} = \sqrt{r^2 \cdot \omega^2}$$

$$= r \cdot |\omega| \equiv \text{konst.}$$

Bahnbeschleunigung / Tangentialbeschleunigung:

$$a_B(t) = \dot{v}(t) = 0$$

$$a_B(t) = \langle \vec{a}(t), \hat{v}(t) \rangle \cdot \hat{v}(t) = 0$$

$$\vec{a} \perp \vec{v}$$

Zentripetalbeschleunigung:

$$a_{zp}(t) = |\vec{a}(t)| = |-\omega^2 \cdot \vec{r}(t)| = \omega^2 \cdot r = \frac{1}{r} \cdot v^2$$

mit $|\omega| = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega^2 = \frac{v^2}{r^2}$

Zentripetal ~~beschl~~ kraft:

$$F_{zp} = m \cdot a_{zp} = m \cdot r \cdot \omega^2 = \frac{m}{r} \cdot v^2$$

Aktionsprinzip von Newton:

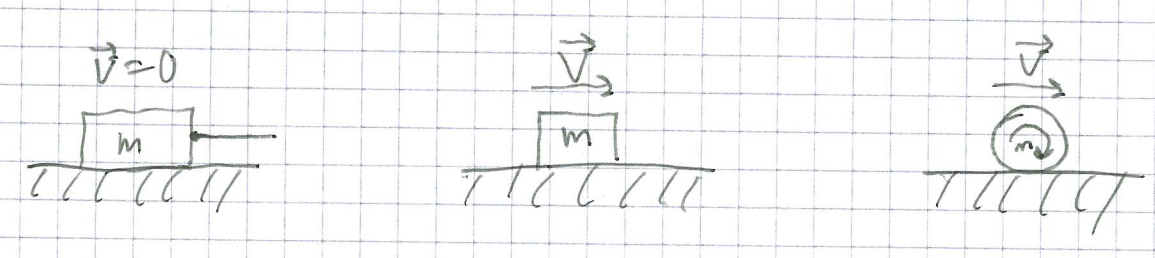
$$\underline{\underline{\vec{F}_{zp}}} = \underline{\underline{\vec{F}}} = \vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_N$$

Zentripetalkraft ist gleich der resultierenden Kraft!

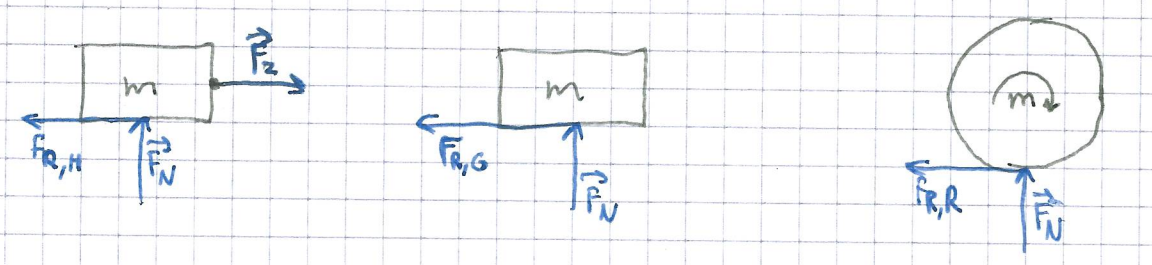
6 Krummlinige Bewegung II

6.1 Reibungskräfte

Situation:



Freischneiden:



Gesetze:

$F_{R,H} \leq \mu_H \cdot F_N$ $\qquad$ $F_{R,G} = \mu_G \cdot F_N$ $\qquad$ $F_{R,R} = \mu_R \cdot F_N$

Bemerkungen:

i) Alle drei Reibungskräfte sind proportional zur Normalkraft.

ii) Die Reibungskoeffizienten μ_H, μ_G, μ_R hängen nur von der Materialpaarung und $\underbrace{\text{Materialbeschaffenheit}}_{\text{geschwindigkeitsabhängig}}$ ab.

iii) Bei gleicher Materialpaarung und Materialbeschaffenheit gilt
$\mu_R \leq \mu_G \leq \mu_H$

iv.) Bis auf wenige Ausnahmen gilt

$$\mu_H \leq 1.$$

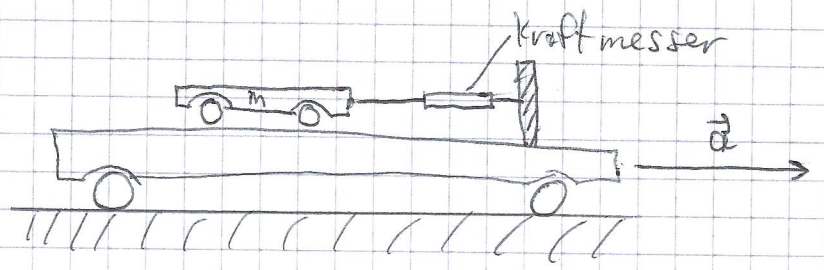
Ausnahmen: • Klett-Verschluss
• Kochsalzkristalle.

v.) Pneu auf trockener Strasse: $\mu_H \approx 1$
Turnschuhe

6.2 Newton's Aktionsprinzip in beschl. Systemen

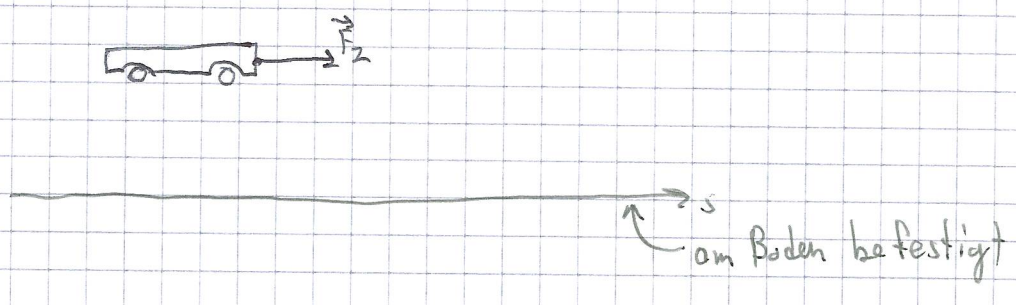
6.2.1 Bei geradliniger Bewegung

Situation:

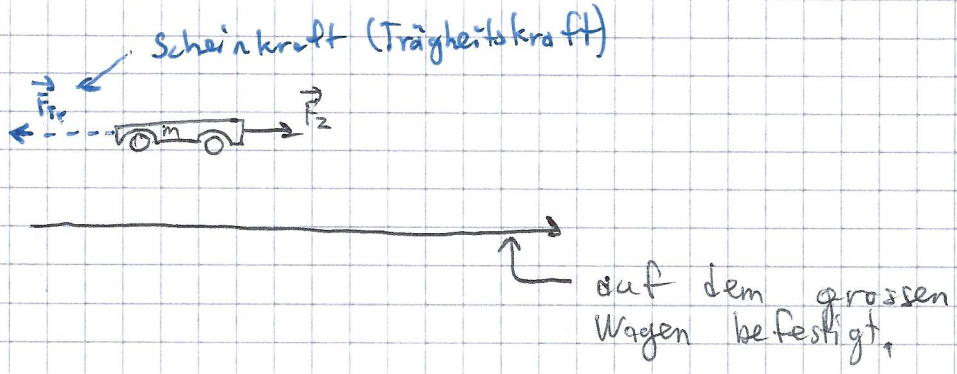


Freischneiden:

①



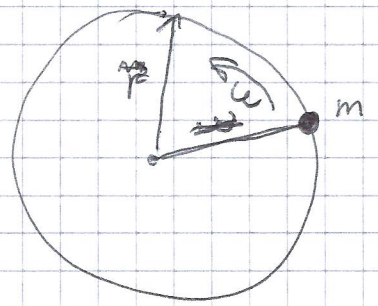
Aktionsprinzip: $m \cdot a = F = F_Z$

② 

Aktionsprinzip: $0 = F = F_Z - F_{Tr}$

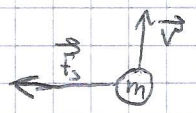
6.2.2 Bei gleichförm. Kreisbewegung

Situation:



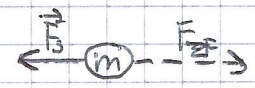
Freischneiden:

① im inertialsystem



Aktionsprinzip (AP): $\vec{F}_{Zp} = \vec{F} = \vec{F}_s$

② im System des Körpers:

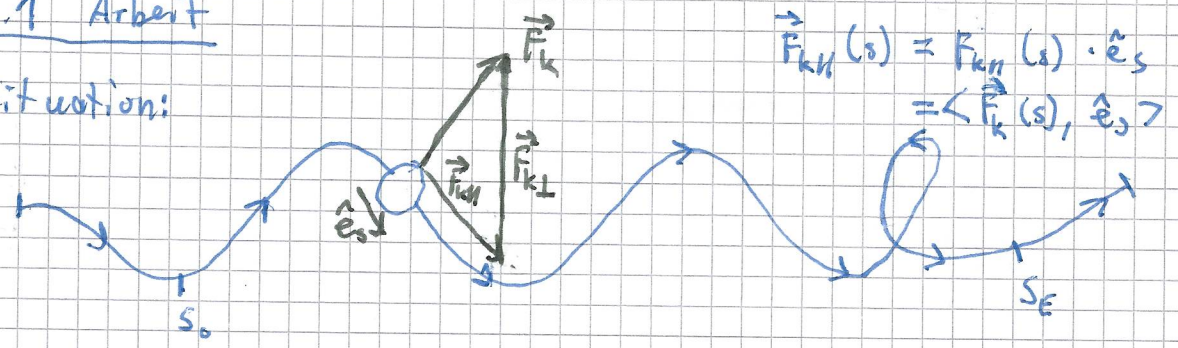


AP: $0 = \vec{F} = F_s + F_{ZF}$

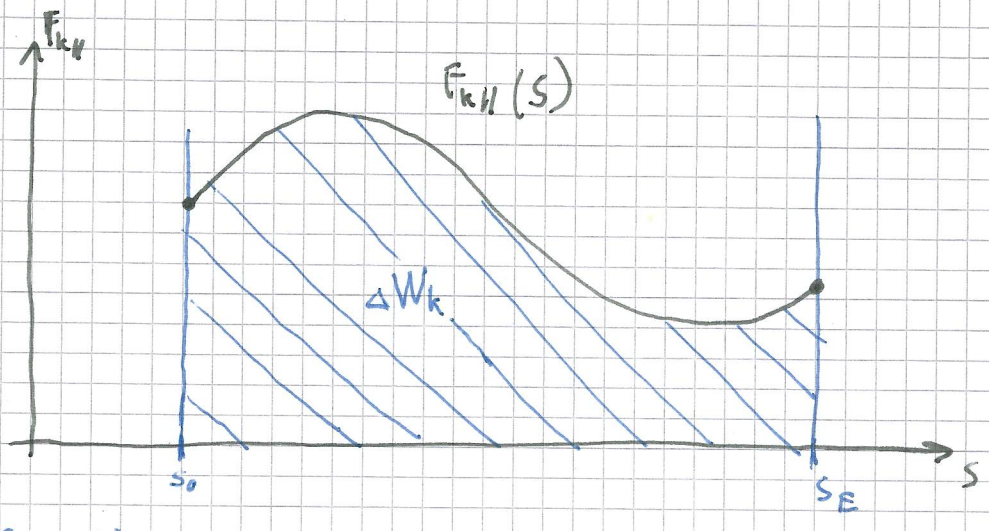
7 Arbeit & Energie

7.1 Arbeit

Situation:



$$\vec{F}_{k\parallel}(s) = F_{k\parallel}(s) \cdot \hat{e}_s = \langle \vec{F}_k(s), \hat{e}_s \rangle$$



Def: Die Grösse

$$\Delta W_k := \int_{s_0}^{s_E} F_{k\parallel}(s)\, ds = \int_{s_0}^{s_E} \langle \vec{F}_{k\parallel}(s), \hat{e}_s \rangle\, ds$$

heisst **Arbeit** der Kraft $\vec{F}_k$ entlang des Weges $\Delta s = s_E - s_0$.

Bemerkungen:

i) Masseinheit:

$$[\Delta W] = [F] \cdot [s] = \underline{Nm} =: 1\,J \equiv 1 \text{ Joule}$$

ii) keine Bewegung $\Rightarrow$ keine Arbeit

no way $\Rightarrow$ no work

iii) Für die Berechnung von ΔW_k spielt es keine Rolle, wie gross die "Verantwortung" der Kraft $\vec{F}_k$ für die Bewegung des Objekts ist.

iv) Vorzeichen

Δs	$F_{\parallel}$	ΔW
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$+$
$\rightarrow$	$\leftarrow$	$-$
$\leftarrow$	$\rightarrow$	$-$
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$+$

v) konstante Kraft: $F_{\parallel}(s) \equiv$ konstant

$$\Rightarrow \boxed{\Delta W = F_{\parallel} \cdot \Delta s}$$

7.2 Energie

Idee: Arbeit in einem System speichern

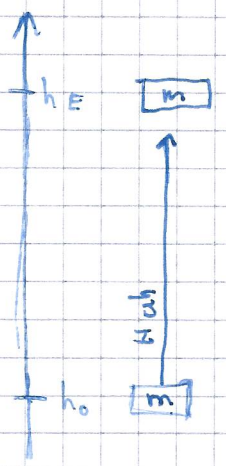
Prozess → Arbeit ("Zahlung", "Lohn")

Zustand → Energie ("Vermögen")

7.2.1 Standard-Energieformen der Mechanik

7.2.1.1 Potentielle Energie

Situation:



Hubarbeit:

$$\underline{\underline{\Delta W}} = F_g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot (h_E - h_0)$$

$$= m \cdot g \cdot h_E - m \cdot g \cdot h_0$$

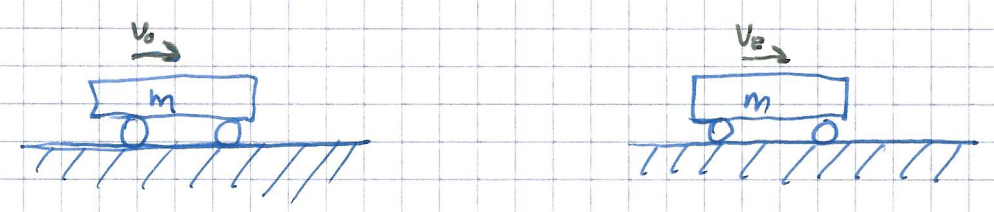
$$=: E_{pot}(h_E) - E_{pot}(h_0)$$

mit

$$E_{pot}(h) := m \cdot g \cdot h$$

7.2.1.2 kinetische Energie

Situation:



Beschleunigungsarbeit:

$$\underline{\underline{\Delta W}} = F \cdot \Delta s = m \cdot \cancel{a} \cdot \frac{v_E^2 - v_0^2}{2\cancel{a}} = \frac{m}{2} \cdot (v_E^2 - v_0^2)$$

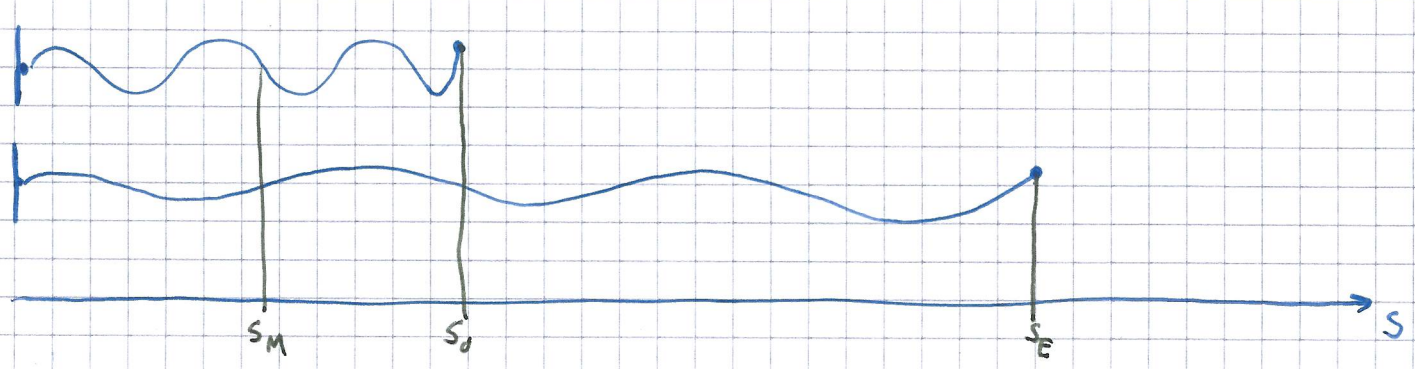
$$= \frac{m}{2} v_E^2 - \frac{m}{2} v_0^2 = E_{kin}(v_E) - E_{kin}(v_0)$$

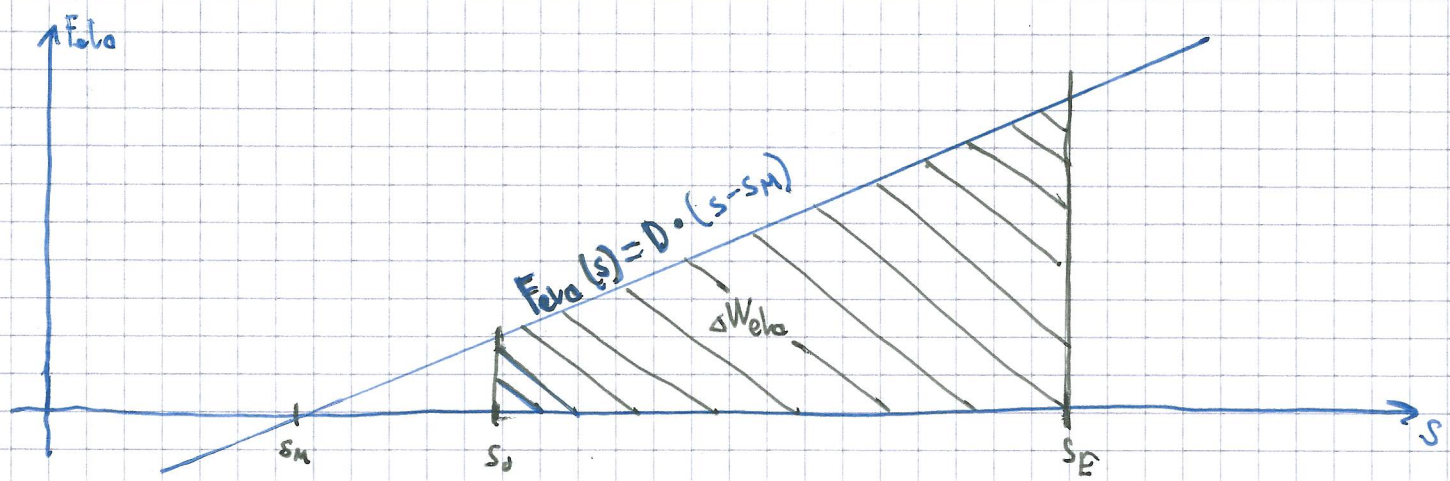
mit

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$$

7.2.1.3 Elastische Energie

Situation:





Elastische Arbeit:

$$\Delta W_{ela} = \frac{1}{2} \cdot (s_E - s_m) \cdot F_{ela}(s_E) - \frac{1}{2} \cdot (s_0 - s_m) \cdot F_{ela}(s_0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (s_E - s_m) \cdot D \cdot (s_E - s_m) - \frac{1}{2} \cdot (s_0 - s_m) \cdot D \cdot (s_0 - s_m)$$

$$= \frac{D}{2} \cdot (s_E - s_m)^2 - \frac{D}{2} \cdot (s_0 - s_m)^2 = E_{ela}(s_E) - E_{ela}(s_0)$$

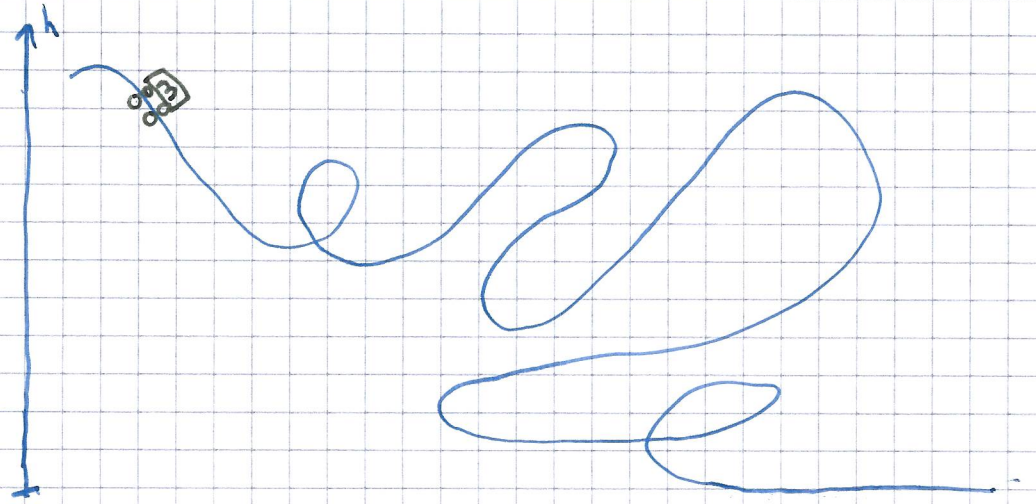
mit

$$E_{ela}(s) = \frac{D}{2} \cdot (s - s_m)^2 = \frac{D}{2} x^2$$

7.2.2 Energie-Erhaltung

Satz In einem abgeschlossenen System (keine Wechselwirkung nach aussen) bleibt die Gesamtenergie erhalten.

Beispiel: Achterbahn (antriebslos)



Gesamtenergie: $E(h:v) = E_{pot}(h) + E_{kin}(v)$

$= m \cdot g \cdot h + \frac{m}{2} v^2$

Endzustand		Anfangszustand
$E(h_E : v_E)$	$=$	$E(h_0 : v_0)$

→ auflösen nach gesuchter Grösse ⇒

ohne WW: $E_E = E_0$

mit WW: $E_E = E_0 + \Delta W$ ← Arbeit von aussen

verluste: $\Delta W < 0$.

Kann man die Energieerhaltung beweisen?

Zusammenhang gefunden 1917/1918 von Frau Amalie Noether.

Symmetrie $\Leftrightarrow$ Erhaltungssatz

Newton-Noether-Tabelle:

Symmetrie	Erhaltungsgrösse	Noehter-Strom
Zeitinvarianz	Energie	Leistung
Ortsinvarianz	Impuls	Kraft
Richtungsinvarianz	Drehimpuls	Drehmoment
U(1)-Eichsymetrie	elektrische Ladung	elektrischer Strom

Ableitung

Impuls & Stösse

8.1 Impuls

Def.: Ein Objekt mit Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$ hat einen Impuls von

$$\vec{p} := m \cdot \vec{v}$$

Bemerkungen:

i) Maseinheit

$$\underline{\underline{[p]}} = [m] \cdot [v] = \underline{\underline{kg \cdot \frac{m}{s} = Ns \; (= Hy)}}$$

ii) Die Def. gilt nur für $v \ll c$

→ Vorsicht bei Elementarteilchen

8.2 Impuls-Erhaltung

Satz: Wechselwirken zwei Objekte ausschliesslich miteinander, dann bleibt ihr Gesamtimpuls erhalten.

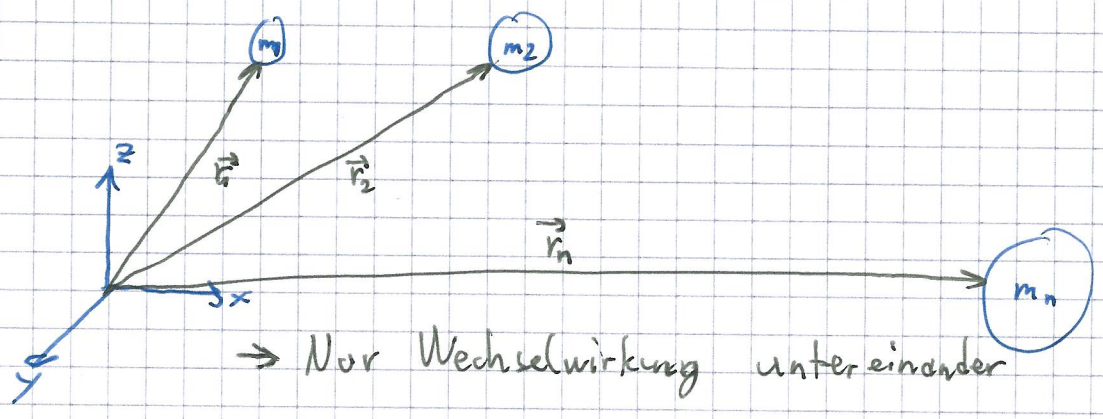
$$\underbrace{\vec{p}_E + \tilde{\vec{p}}_E}_{\text{Nachher}} = \underbrace{\vec{p}_0 + \tilde{\vec{p}}_0}_{\text{Vorher}}$$

Ursache: Ortsinvarianz der physikalischen Gesetze

→ A. Noether 1917/1918

8.3 Schwerpunktsbewegung

Situation: n Massen mit $n \in \mathbb{N}^+$



→ Nur Wechselwirkung untereinander

Gesamtmasse: $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$

Schwerpunkt: $\vec{r}_S = \dfrac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{r}_n}{M}$

Satz: Für den Gesamtimpuls gilt

$$\boxed{\vec{P} = M \cdot \vec{v}_S}$$

wobei $\vec{v}_S$ die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist.

Beweiss: $M \cdot \vec{v}_S = M \cdot \dot{\vec{r}}_S = \cancel{M} \cdot \dfrac{m_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2 + \dots + m_n \dot{\vec{r}}_n}{\cancel{M}}$

$= m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots m_n \cdot \vec{v}_n = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \underline{\underline{\vec{P}}}$ ☑

Beobachtung:

Impulserhaltung $\Rightarrow \vec{P} \equiv$ konstant

$\Rightarrow \vec{v}_S \equiv$ konstant

$\Rightarrow$ der Schwerpunkt durchläuft eine gleichförmige Bewegung!

8.4 Energie – Impuls-Beziehung

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot \vec{v}^2$$

$$\rightarrow \vec{p}^2 = m^2 \cdot \vec{v}^2$$

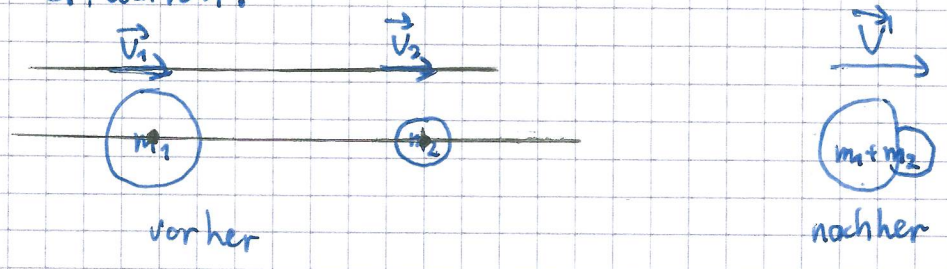
$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot \vec{v}^2 = \frac{m^2 \cdot v^2}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

$$\Rightarrow m = \frac{\vec{p}^2}{2 \cdot E_{kin}}$$ → Massenspektrometrie

8.5 Stössen

8.5.1 Vollkommen inelastisch, zentral

Situation:



Es gilt:

$$v' = \vec{v}_s = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

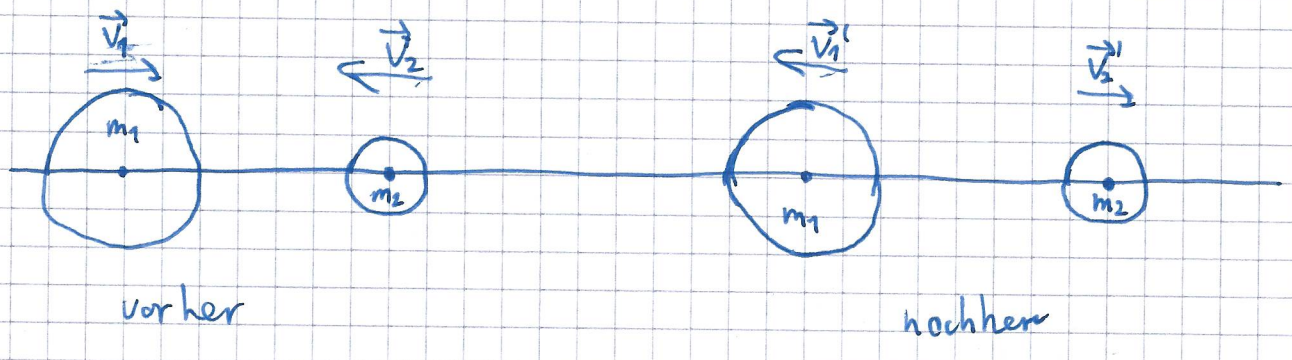
Deformationsenergie:

$$\Delta W = E^0_{kin} - E^E_{kin} = \frac{m_1}{2} \cdot \vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \cdot \vec{v}_2^2 - \left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) \cdot \vec{v}'^2 = \ldots =$$

$$= \frac{m_1 \cdot m_2}{2 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

8.5.2 Vollkommen elastischer, zentraler Stoss

Situation:



elastisch $\Longleftrightarrow$ kinetische Energie bleibt erhalten.

$\rightarrow$ Wechsel ins Schwerpunkt-System

$$\vec{v}_s = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_s$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_s$$

$$\vec{w}_1' = \vec{v}_1' - \vec{v}_s$$

$$\vec{w}_2' = \vec{v}_2' - \vec{v}_s$$

$$\vec{w}_s = \vec{v}_s - \vec{v}_s = 0 \qquad \Rightarrow \vec{P} = 0$$

Impulserhaltung

$$m_1 \cdot \vec{w}_1 + m_2 \cdot \vec{w}_2 = 0 = m_1 \cdot \vec{w}_1' + m_2 \cdot \vec{w}_2'$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot \vec{w}_1 = -m_2 \cdot \vec{w}_2 \quad \text{und} \quad m_1 \cdot \vec{w}_1' = -m_2 \cdot \vec{w}_2'$$

Energie-Erhaltung:

$$\frac{m_1}{2}(\vec{w}_1)^2 + \frac{m_2}{2}(\vec{w}_2)^2 = \frac{m_1}{2} \cdot (\vec{w}_1')^2 + \frac{m_2}{2} \cdot (\vec{w}_2')^2$$

$$\frac{(\vec{p}_1)^2}{2 \cdot m_1} + \frac{(\vec{p}_2)^2}{2 m_2} = \frac{(\vec{p}_1')^2}{2 \cdot m_1} + \frac{(\vec{p}_2')^2}{2 \cdot m_2}$$

$$\frac{(\vec{p}_1)^2}{2 m_1} + \frac{(\vec{p}_1)^2}{2 m_2} = \frac{(p_1')^2}{2 m_1} + \frac{(p_1')^2}{2 m_2}$$

$$\frac{1}{2(m_1 + m_2)} \cdot (\vec{p}_1)^2 = \frac{1}{2 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (\vec{p}_1')^2$$

$$\vec{p}_1^{\,2} = \vec{p}_1'^{\,2}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1' = -\vec{p}_1 \quad \text{und} \quad \vec{p}_2' = -\vec{p}_2$$

$\Rightarrow \vec{p_1}' = -\vec{p_1}$ und $\vec{p_2}' = -\vec{p_2}$

$\Rightarrow \vec{w_1}, \vec{w_2}$ werden umgekehrt!

$\vec{w_1}' = -\vec{w_1}$

$\vec{w_2}' = -\vec{w_2}$

$\rightarrow$ Wechsel in ursprüngliche System:

$$\vec{v_1}' = \vec{w_1}' + \vec{v_s} = -\vec{w_1} + \vec{v_s} = -(\vec{v_1} - \vec{v_s}) + \vec{v_s} = 2\vec{v_s} - v_1$$

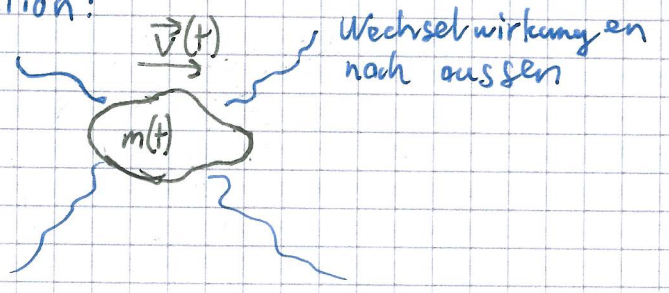
$$\vec{v_2}' = 2\vec{v_s} - \vec{v_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{v_1}' &= 2\vec{v_s} - \vec{v_1} \\ \vec{v_2}' &= 2\vec{v_s} - \vec{v_2} \end{aligned}}$$

9 Aktionsprinzip

9.1 Newton's allgemeine Formulierung

Situation:



Impuls: $\vec{p}(t) = m(t) \cdot \vec{v}(t)$

Def: Die resultierende Kraft auf das Objekt ist

$$\vec{F}(t) := \dot{\vec{p}}(t)$$

Bemerkungen:

i) Allgemein gilt:

$$\underline{\underline{\vec{F}(t)}} = \dot{\vec{p}}(t) = \dot{m}(t) \cdot \vec{v}(t) + m(t) \cdot \dot{\vec{v}}(t)$$
$$= \underline{\underline{\dot{m}(t) \cdot \vec{v}(t) + m(t) \cdot a(t)}}$$

ii) Falls $m(t) = m \equiv$ konst.

$\Rightarrow \dot{m}(t) = 0$

$\Rightarrow \vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$

iii) Falls $\vec{v}(t) = v \equiv$ konst.

$\vec{F}(t) = \dot{m}(t) \cdot \vec{v}$

iv) Worte statt Formeln:

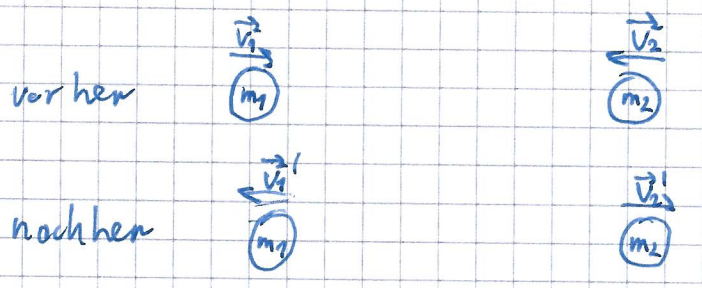
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \frac{\text{übertragener Impuls}}{\text{benötigte Zeit}}$$

Anwendungen

→ Rakete (→ Experiment)

→ Rückstoss beim Feuerwehrschlauch

v.) Mittlere Kraft beim Stoss:



Dauer des Stosses: Δt

$$[\![\vec{F}_1]\!] = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_1' - \vec{p}_1}{\Delta t}$$

$$[\![\vec{F}_2]\!] = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2' - \vec{p}_1}{\Delta t}$$

9.2 Reaktionsprinzip

Satz

Wechselwirken zwei Objekte ausschliesslich miteinander, dann gilt: $\vec{F}_2(t) = -\vec{F}_1(t)$

Beweiss:

Gesamtimpuls: $\vec{p}(t) = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t)$

Impuls-Erhaltung:

$$\vec{p} = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t) \qquad | \ (\ldots)'$$

$$0 = \dot{\vec{p}}_1(t) + \dot{\vec{p}}_2(t)$$

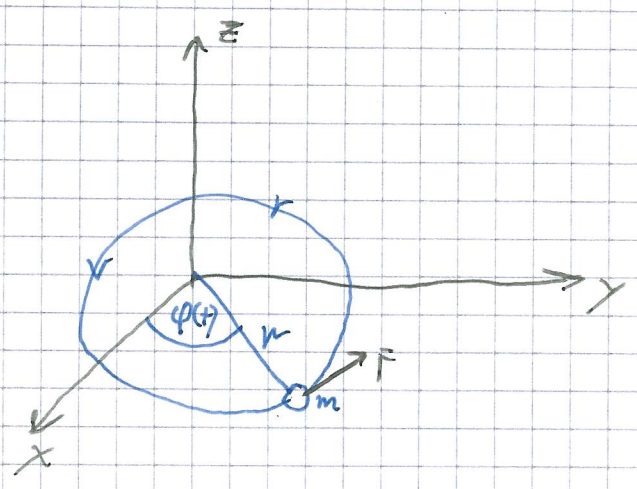
$$0 = \vec{F}_1(t) + \vec{F}_2(t) \qquad | -\vec{F}_1(t)$$

$$\underline{\underline{-\vec{F}_1(t) = \vec{F}_2(t)}} \qquad \blacksquare$$

10 Drehbewegungen

10.1 Massenpunktdynamik

Situation:



$r \equiv$ konstant

① Kinematik

Bewegungsfunktion:

$$s(t) = r \cdot \varphi(t)$$

Geschwindigkeitsbegriffe:

$$\omega(t) := \dot{\varphi}(t) \equiv \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$v(t) = \dot{s}(t) = r \cdot \dot{\varphi}(t) = r \cdot \omega(t)$$

Beschleunigungsbegriffe:

$$\alpha(t) := \dot{\omega}(t) \equiv \text{Winkelbeschleunigung}$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = r \cdot \dot{\omega}(t) = r \cdot \alpha(t)$$

② Dynamik: (Drehmoment $M(t) = r \cdot F(t)$)

$$m \cdot a(t) = F(t) \rightarrow \text{Newton-Aktionsprinzip}$$

$$m \cdot r \cdot \alpha(t) = \frac{M(t)}{r} \quad | \cdot r$$

$$\underbrace{m \cdot r^2}_{J} \cdot \alpha(t) = M(t)$$

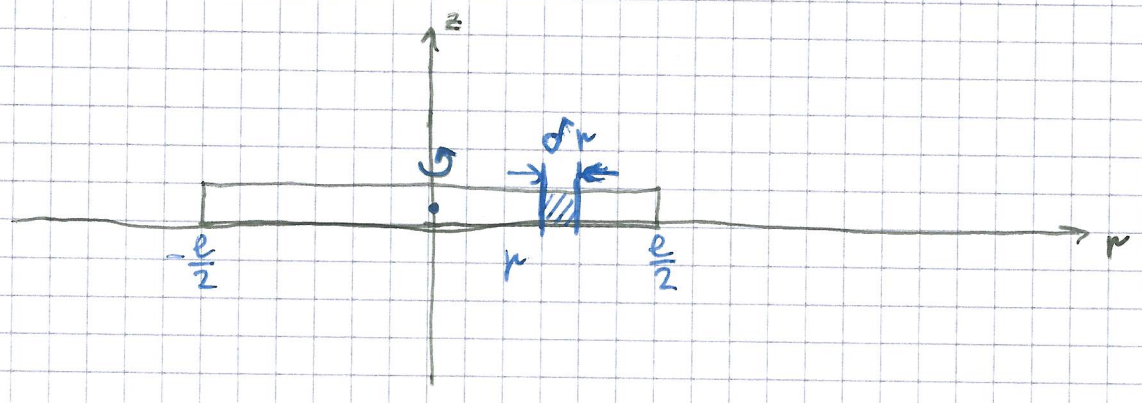
$$J \cdot \alpha(t) = M(t) \rightarrow \text{Euler-Aktionsprinzip}$$

③ Energie:

$$E_{rot} = E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2(t) = \frac{m}{2} (r \cdot \omega(t))^2 = \frac{m}{2} \cdot r^2 \cdot \omega^2(t) = \frac{J}{2} \omega^2(t)$$

10.2 Rotierender Stab

Situation:



S1 Lokal:

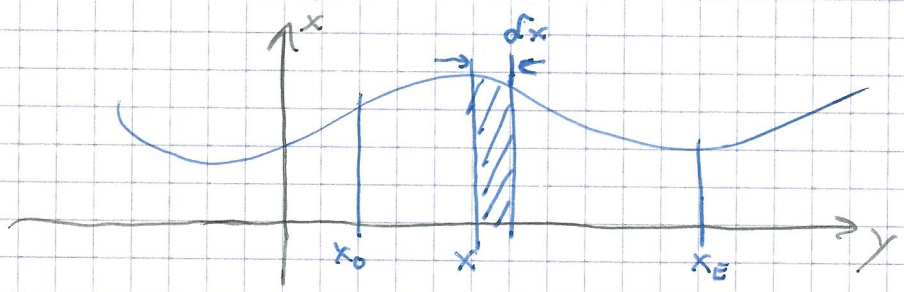
$$\delta J \approx r^2 \cdot \delta m = r^2 \cdot \rho \cdot \delta V = r^2 \cdot \rho \cdot A \cdot \delta r$$

S2 Global:

$$J = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (r^2 \cdot \rho \cdot A)\, dr = 2 \cdot \rho \cdot A \cdot \int_0^{l/2} r^2\, dr = 2 \cdot \rho \cdot A \cdot \frac{1}{3} r^2 \Big|_0^{l/2}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot A \cdot \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} \cdot \underbrace{\rho \cdot \underbrace{A \cdot l}_{V}}_{m} \cdot l^2 = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$$

Warum funktioniert das?



S1 Lokal:

$$\delta A \approx f(x) \cdot \delta x$$

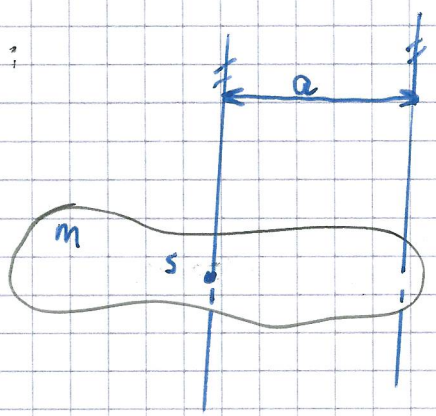
S2 Global:

$$A = \int_{x_0}^{x_E} f(x)\, dx = \ldots$$

Problisches Problem $\xrightarrow[\text{90\% über Streifen}]{\text{DKM-M, IEM-E}}$ Integral $\xrightarrow{\text{IEM-I}}$ Wert

10.3 Satz von Steiner

Situation:



$J_S \equiv$ Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktachse

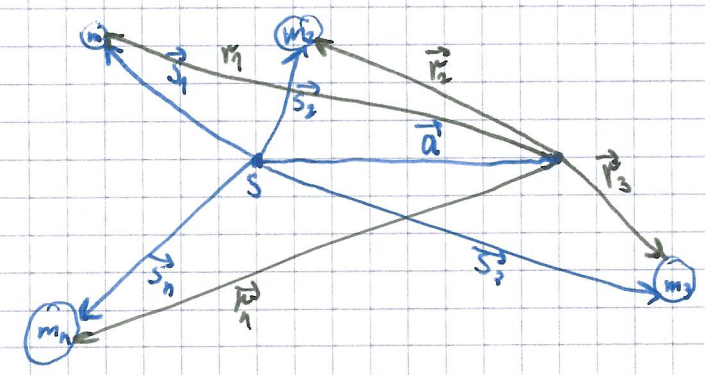
Satz

Das Trägheitsmoment bezüglich der um $a > 0$ verschobenen Achse ist

$$J = J_S + m \cdot a^2$$

Beweis für eine Menge von Massenpunkten:

Skizze in Ebene $\perp$ Achse



Es gilt:

$$\vec{r}_k = \vec{s}_k - a$$

Es gilt:

$$\underline{\underline{J}} = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \langle \vec{r}_k, \vec{r}_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \langle \vec{s}_k - \vec{a}, \vec{s}_k - a \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \left(\langle \vec{s}_k, \vec{s}_k \rangle - 2 \cdot \langle \vec{s}_k, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \langle \vec{s}_k, \vec{s}_k \rangle - 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \langle \vec{s}_k, \vec{a} \rangle + \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \vec{s}_k^{\,2} - 2 \cdot \langle \underbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{s}}_{0}}_{0}, \vec{a} \rangle + \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot a^2$$

$$= J_S - 2 \cdot \qquad + m \cdot a^2$$

$$\underline{\underline{= J_S + m \cdot a^2}}$$

$\boxtimes$

Bemerkungen:

i) Die Werte für J_S lassen sich für viele Standard-Körper aus Tabellen ablesen.

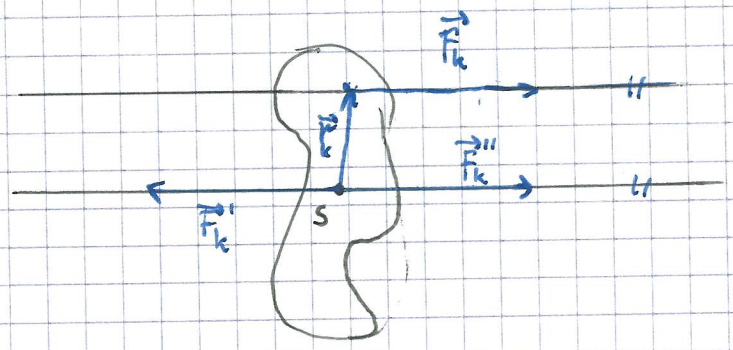
ii) $m \cdot a^2 \geq 0 \Rightarrow \underline{J \geq J_S}$

Schwerpunktsachsen haben das kleinste Trägheitsmoment!

11 Rotation & Translation

11.1 Angriff einer Kraft

Situation:



$\vec{F}_k'$, $\vec{F}_k''$ heissen Versatzkräfte

Es soll gelten $F_k = F_k' = F_k''$

Tatsache: Die Wirkung aller drei Kräfte ist die gleiche, wie die Wirkung von $\vec{F}_k$ alleine.

Wirkung: ① $\vec{F}_k$, $\vec{F}_k'$ bilden ein Kräftepaar

→ Drehmoment bezüglich S

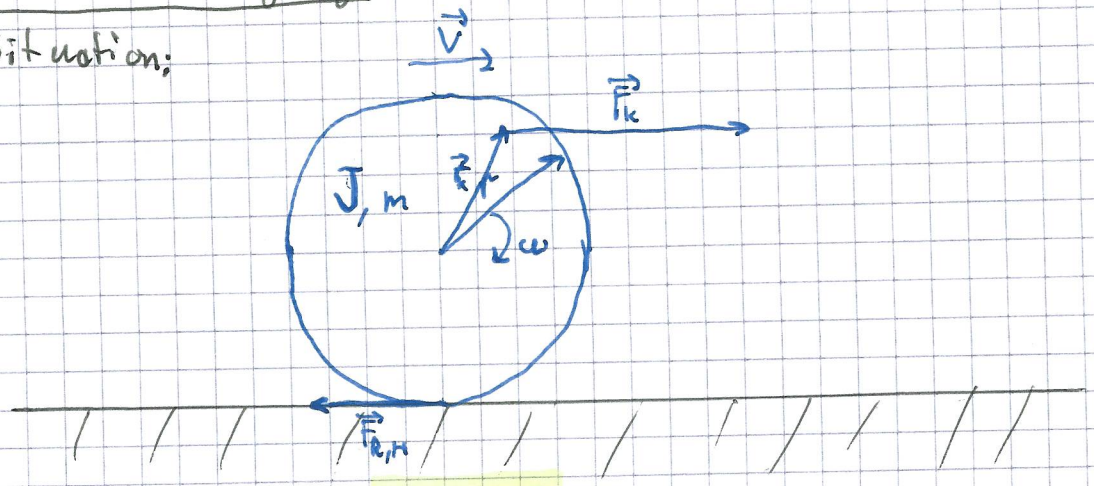
$$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k$$

② $\vec{F}_k''$ führt zu einer Schwerpunktsbeschleunigung

Def: Die Kombination $(\vec{F}_k; \vec{M}_k)$ heisst Dyname der Kraft $\vec{F}_k$.

7.2 Rollbewegung

Situation:



Rollbedingungen:

$$s = r \cdot \varphi$$
$$v = r \cdot \omega$$
$$a = r \cdot \alpha$$

Aktionsprinzip Newton & Euler:

$$\begin{cases} m \cdot a = F_1 + \dots + F_n - F_{R,H} \\ J \cdot \alpha = M_1 + \dots + M_n + r \cdot F_{R,H} \end{cases}$$

Rollbedingungen: $a = r \cdot \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{a}{2}$

$\rightarrow$ Lineares Gleichungssystem für a, $F_{R,H}$

Effektiv-Masse / Rollmasse:

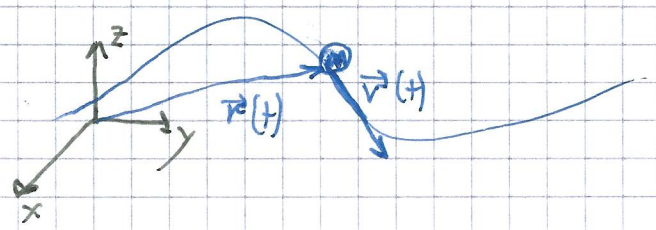
$$m_{eff} := m + \frac{J}{r^2}$$

Es gilt: $m_{eff} \cdot a = F = F_1 + \dots F_N$

12 Drehimpuls & Kreisel

12.1 Drehimpuls

Situation: Massenpunkt auf einer Bahn



Def: Der Drehimpuls des Massenpunktes ist

$$\vec{L}(t) := \vec{r}(t) \times \vec{p}(t).$$

bezüglich des gewählten Koordinatensystems

Bemerkungen:

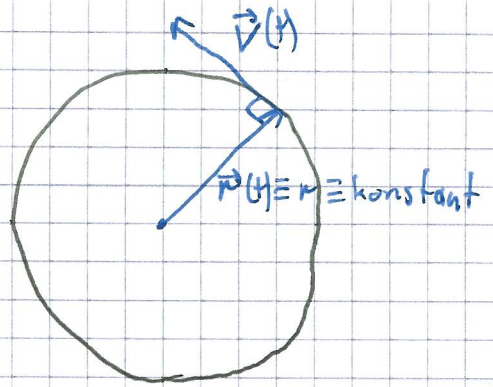
i) $[L] = [r] \cdot [p] = m \cdot \frac{kg \cdot m}{s} = \frac{kg\, m^2}{s}$

ii) $\vec{r}$ und damit $\vec{L}$ hängen von der Wahl des Bezugpunktes ab!

Satz Für einen Massenpunkt m auf einer Kreisbewegung mit Radius r gilt

$$L = J \cdot \omega \qquad \left| \begin{array}{l} J = m \cdot r^2 \\ \omega \equiv \text{Winkelgeschwindigkeit} \end{array} \right.$$

Beweiss



$$\vec{v}(t) \equiv r \cdot \omega(t)$$

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t) = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}(t)) = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L(t)}} = m \cdot |\vec{r}| \cdot |\vec{v}(t)| = m \cdot r \cdot r \cdot \omega(t) = m \cdot r^2 \cdot \omega(t) = \underline{\underline{J \cdot \omega(t)}} \quad \blacksquare$$

<u>Satz</u> Ein Körper an einer fixen Drehachse mit Trägheitsmoment J hat den Drehimpuls

$$L = J \cdot \omega$$

<u>Satz</u> Es gilt

$$\dot{\vec{L}}(t) = \vec{M}(t)$$

Beweiss:

$$\underline{\underline{\dot{\vec{L}}(t)}} = (\vec{r}(t) \times \vec{p}(t))^{\bullet} = \dot{\vec{r}}(t) \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \dot{\vec{p}}(t)$$

$$= \underbrace{\vec{v}(t) \times \vec{p}(t)}_{0} + \underbrace{\vec{r}(t) \times \vec{F}(t)}_{\vec{M}(t)} = \underline{\underline{\vec{M}(t)}} \quad \blacksquare$$

<u>Satz</u> Es gilt

$$\dot{L} = M = J \cdot \alpha$$

Beweiss:

$$\dot{L} = (J \cdot \omega)^{\bullet} = J \cdot \dot{\omega} = \underline{\underline{J \cdot \alpha = M}} \quad \blacksquare$$

<u>Satz</u> Drehimpulserhaltung

Wechselwirken zwei Körper ausschliesslich miteinander, dann bleibt ihr Gesamtdrehimpuls erhalten.

Ursache: Orientierungsunabhängigkeits der physikalischen Gesetze
(nach A. Noether 1918)

Formale Analogie beachten:

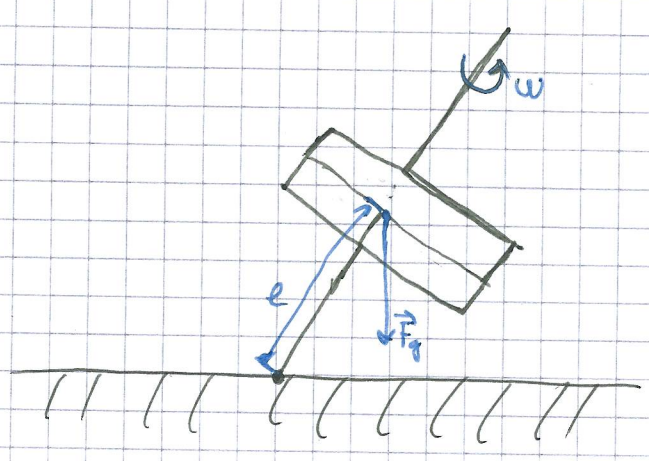
Bsp.:

$$E_{kin} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \qquad \dot{\vec{p}} = \vec{F} = F_1 + \ldots + F_n$$

$$E_{rot} = \frac{\vec{L}^2}{2 \cdot J} \qquad \dot{\vec{L}} = \vec{M} = M_1 + \ldots + M_n$$

12.2 Präzession

Situation (schwerer Kreisel):

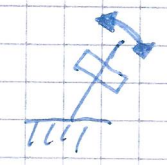


$\vec{F}_g$ führt auf ein Drehmoment $\vec{M}_g$

Gemäss Aktionsprinzip gilt

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{M}_g \neq 0$$

→ Reaktion des Kreisel auf $\vec{M}_g$!!

→ Präzession: Drehung der Drehachse mit $\omega_{pr} \approx \frac{m \cdot g \cdot e}{J \cdot \omega}$

Nutation: Schwingung der Drehachse