Laboratorio N°2 – *Incertidumbre en mediciones Indirectas.*

En el primer laboratorio ya se introdujo el error o incertidumbre en mediciones realizadas de forma directa. Estas involucran las contribuciones del error del instrumento utilizado así como el error aleatorio que se genera al realizar varias mediciones de la misma cantidad. ¿ Pero qué pasa cuando las variables de interés ya no son mediciones directas, como el ejemplo el área o volumen de un cuerpo?. En este caso los errores de estas variables indirectas deben seguir ciertas reglas que serán detalladas y puestas en práctica en la siguiente actividad de laboratorio.

Objetivos

- Determinar el error de mediciones indirectas a partir de mediciones indirectas.
- Expresar correctamente una cantidad física medida indirectamente.

1. Introducción

Tal como se revisó anteriormente, la medición de una variable siempre conlleva una determina incertidumbre. De las diferentes fuentes de incertidumbre que pueden existir en una medición, las dos que son cuantificables son el error instrumental y el error aleatorio, los que se resumen en la siguiente figura.

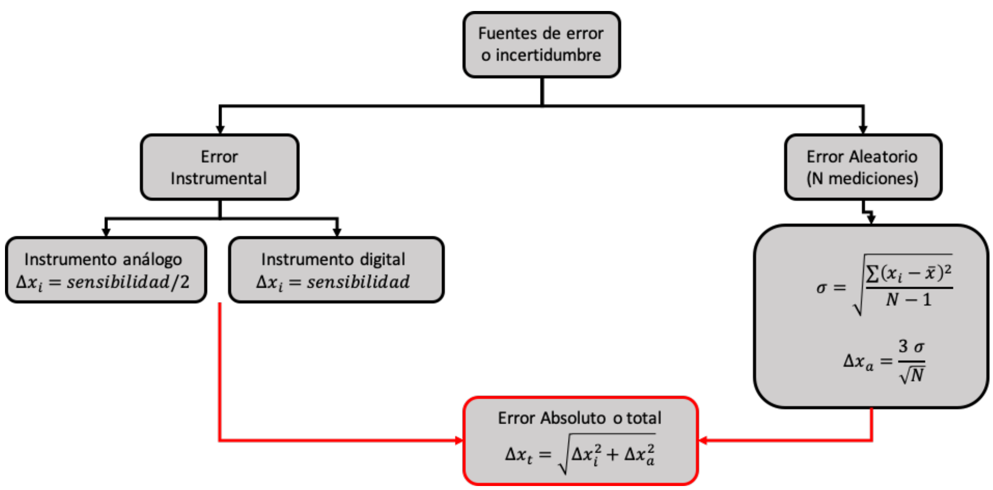


Figura 1: Cuadro resumen que indica los errores cuantificables dentro de una medición.

1.1. Medida Indirecta

Una medida indirecta es aquella que se determina como una función de una o más variables que pueden ser medidas directamente. Por ejemplo si deseamos determinar el área de una mesa, no podemos medirla directamente si no que ponderamos dos cantidades medidas de forma directa como son su largo y su ancho $A = l \cdot a$.

1.2. Incertidumbre en medidas Indirectas

La variable indirecta, la cual llamaremos Z, se puede relacionar con una o más variables directas por medio de una función.
Dependiendo de como sea esta función, es posible determinar el error absoluto en la variable indirecta ΔZ, para finalmente escribir su valor como $Z \pm \Delta Z$.

Funciones de una sola variable. En el caso de que Z dependa de una sola variable directa X, el error puede calcularse dependiendo de la función como indica la siguiente tabla.

Función Z(X)	Error ΔZ
$Z = \frac{1}{X}$	$\Delta Z = \frac{\Delta X}{A^2}$
$Z = k \cdot X$	$\Delta Z = k \cdot \Delta X$
$Z = X^n$	$\Delta Z = n \cdot X^{n-1} \cdot \Delta X$
$Z = sin(X)$	$\Delta Z = cos(X) \cdot \Delta X$
$Z = cos(X)$	$\Delta Z = sin(X) \cdot \Delta X$
$Z = tan(X)$	$\Delta Z = (1 + tan(X)^2) \cdot \Delta X$

Cuadro 1: La tabla indica el cálculo del error en la variable indirecta Z la cual depende de la variable directa X. En el caso de la segunda función, la letra k representa una constante.

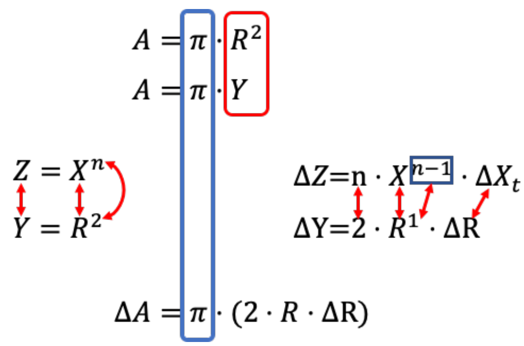
Ejemplo: Con el fin de crear una estructura lo más estable posible, se ha decidido analizar el radio de un conjunto de 10 vigas cilíndricas de acero, obteniendo un valor de $R = 5{,}1 \pm 0{,}4$ (cm), que considera su valor promedio y su error total. ¿ Cómo podríamos determinar el área promedio de la sección circular y su respectivo error total?.

1. Identificar la medida indirecta y su relación con la variable directa. Identificando la medida indirecta, en este caso el área, quien se relaciona con el radio como

$$A = \pi R^2$$

, donde la medida directa es R.

2. Encontrar la función Z que se relacione con X de la misma forma que las variables directa e indirecta. Como π es una constante (no posee error), el error corresponderá al de la medición indirecta R^2, el que será posteriormente ponderado por π. Como muestra la imagen, propondremos la variable $Y = R^2$, la que al relacionarse con R mediante una potencia, es análoga a la función $Z = X^n$ de la tabla **??**, como se indica a continuación.



3. Reemplazar los valores para obtener el área y su error. Reemplazando el valor promedio del radio $\bar{R} = 5{,}1$ (cm) para calcular el área

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \pi\bar{R}^2\\ \bar{A} &= \pi\cdot(5{,}1)^2\\ \bar{A} &= 81{,}71\ (cm^2)\end{aligned}$$

Considerando el error en el radio $\Delta R = 0{,}4$ (cm) para obtener el error en el área

$$\begin{aligned}\Delta A &= \pi\cdot(2\cdot R\cdot\Delta R)\\ \Delta A &= \pi\cdot(2\cdot(5{,}1)\cdot 0{,}4)\\ \Delta A &= 12{,}82\ (cm^2)\end{aligned}$$

Por último expresando el área

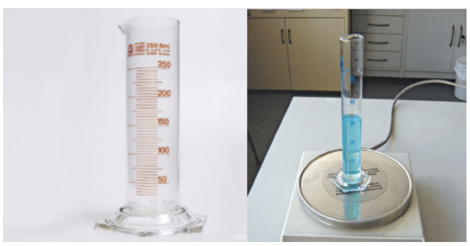
$$A = 81{,}78 \pm 12{,}82\ (cm^2)$$

Funciones de dos variables. Cuando una medida indirecta Z depende de dos variables medidas directamente X e Y, el error asociado a Z puede determinarse, nuevamente dependiendo de la función como:

Función Z(X, Y)	Error ΔZ
$Z = X + Y$	$\Delta Z = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$
$Z = X - Y$	$\Delta Z = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2}$
$Z = X \cdot Y$	$\Delta = X \cdot Y \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y^2}{Y}\right)^2}$
$Z = \frac{X}{Y}$	$\Delta Z = \frac{X}{Y} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y^2}{Y}\right)^2}$

Cuadro 2: La tabla indica el cálculo del error en la variable indirecta Z la cual depende de las variables directas X e Y.

Ejemplo: Con el fin de estimar la densidad óptima de un mezcla, se decide medir su masa con una balanza y su volumen una probeta , obteniendo valores de $M = 0{,}120 \pm 0{,}001$ (kg) y su volumen como $V = (50 \pm 5) \cdot 10^{-6}$ (m^3). ¿ Cómo podríamos determinar la densidad promedio de la mezcla y su respectivo error total?.

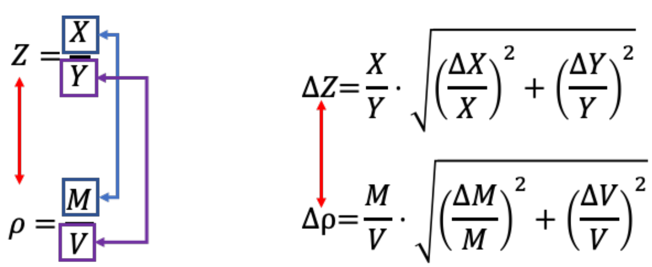


1. Identificar la medida indirecta y su relación con las variables directas. Identificando la medida indirecta, en este caso la densidad, quien se relaciona la masa y el volumen como

$$\rho = \frac{M}{V}$$

, donde las medidas directas son M y V.

2. Encontrar la función Z que se relacione con (X,Y) de la misma forma que las variables directas e indirecta.
La relación entre las variables directas M y V es una división, por lo que podemos compararla con la función $Z = \frac{X}{Y}$ de la tabla **??**, como se indica a continuación.



3. Reemplazar los valores para obtener el densidad ysu error. Reemplazando el valor promedio de la masa y el volumen

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{\bar{M}}{\bar{V}} \\ \bar{\rho} &= \frac{0{,}120}{50 \cdot 10^{-6}} \\ \bar{\rho} &= 2400 \ (kg/m^3) \end{aligned}$$

Considerando el error en la masa $\Delta M = 0{,}001$ (kg) y el error en el volumen $\Delta V = 5 \cdot 10^{-6} (m^3)$ para obtener el error en la densidad

$$\Delta \rho = \frac{M}{V} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2} \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\rho &= \frac{0{,}120}{50\cdot 10{-}6}\cdot\sqrt{\left(\frac{0{,}001}{0{,}120}\right)^2+\left(\frac{5\cdot 10{-}6}{50\cdot 10^{-6}}\right)^2} \\
\Delta\rho &= 240{,}83\ (kg/m^3)
\end{aligned}
$$

Por último expresando la densidad

$$
\rho = 2400 \pm 241 (kg/m^3)
$$

2. Actividad

Estimando la densidad de un elemento de fijación.
La densidad de un sólido homogéneo, es una característica del material del cual está construido. Así, sin importar las dimensiones o geometría que este tenga, la relación entre masa y volumen debe permanecer constante. Los objetivos específicos de esta actividad son:

- Determinar el error en mediciones indirectas.
- Determinar la densidad de un elemento de fijación y su respectivo error.

2.1. Materiales

- Un clavo o perno (elemento bajo estudio).
- Pie de metro.
- Balanza.

2.2. Reporte de Laboratorio

instrucciones
Responda las siguientes preguntas de manera ordenada, argumentando en cada caso según corresponda. Entregue, siguiendo las indicaciones de su profesor/a el reporte de laboratorio antes de que concluya la clase.
1. Averigue el valor nominal de la densidad del elemento bajo estudio según el material que indique el fabricante.

2. Indique:
a) Que instrumento utilizará para medir el largo y el diámetro del elemento.
b) ¿ Es un instrumento análogo o digital?.
c) ¿ Cuál es su sensibilidad y error instrumental?.

3. Indique:
a) Que instrumento utilizará para medir la masa del elemento.
b) ¿ Es un instrumento análogo o digital?.
c) ¿ Cuál es su sensibilidad y error instrumental?.

4. Mida el largo de **un solo elemento** . En este caso al haber solo una medición el error total será igual al instrumental.

5. Mida el diámetro del **mismo elemento**. En este caso al haber solo una medición el error total será igual al instrumental.

6. Considere que el diámetro se relaciona con el radio como $R = \frac{D}{2}$. Encuentre el valor del radio y su respectivo error.

7. Aproximando el elemento a un cilindro de radio R, determine el área $A = \pi \cdot R^2$ y su respectivo error.

8. Si el volumen del cilindro es igual a $V = A \cdot L$, donde A es el área calculada en el punto anterior y L su largo, determine el volumen y su respectivo error.

9. Mida la masa del **mismo elemento** utilizando la balanza. En este caso al haber solo una medición el error total será igual al instrumental.

10. Determine la densidad del elemento como $\rho = \frac{M}{V}$, y su respectivo error .

11. ¿ Cuál es el error porcentual de la densidad obtenida experimentalmente con respecto al valor nominal?

Referencias

[1] $https : //www.lantmateriet.se/globalassets/om - lantmateriet/var - samverkan - med - andra/hmk/gum/riga_gum.pdf$

[2] Hughes, I., & Hase, T. (2010). Measurements and their uncertainties: a practical guide to modern error analysis. OUP Oxford.

[3] Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2009). Física para ciencias e ingeniería con física moderna. Cengage Learning Editores.