习题课二解答：

1、已知某货车：满载质量为 4300kg，轴距为 4.0m，满载时前轴轴载质量为汽车总质量的 35%，质心高度为 0.8m，制动力分配系数为 0.43，该车装有前、后制动器分开的双管路制动系统。试计算：

1）该车的同步附着系数，作出制动效率曲线；

2）在附着系数为 0.6 的路面上制动不抱死车的最大制动减速度；

3）在附着系数为 0.6 的路面上的制动效率的值。

解：1）同步附着系数 $\varphi_0=\dfrac{L\beta-b}{h_g}=\dfrac{4\times0.43-4\times35\%}{0.8}=0.4$；

前轴的制动效率 $E_f=\dfrac{z}{\varphi_f}=\dfrac{b/L}{\beta-\varphi_f h_g/L}=\dfrac{4\times35\%/4}{0.43-\varphi_f 0.8/4}=\dfrac{0.35}{0.43-0.2\varphi_f}$

后轴的制动效率 $E_r=\dfrac{z}{\varphi_r}=\dfrac{a/L}{(1-\beta)+\varphi_r h_g/L}=\dfrac{4\times65\%/4}{(1-0.43)+\varphi_r 0.8/4}=\dfrac{0.65}{0.57+0.2\varphi_r}$

图见 P116 图 4-33 满载曲线（$\varphi_0=0.4$）。

2）$\varphi_0=0.4,\varphi=0.6$，$\varphi>\varphi_0$，则后轮先抱死，故汽车的利用附着系数为 φ_r（后轴的利用附着系数）；

$\varphi_r=\dfrac{(1-\beta)Z}{\frac{1}{L}(a-Zh_g)}$，即 $0.6=\dfrac{(1-0.43)Z}{\frac{1}{4.0}(4\times65\%-0.8Z)}$，解得制动强度 $Z=0.565$；

3）

$\varphi=0.6$ 时，后轴的制动效率

$$E_r=\frac{z}{\varphi_r}=\frac{a/L}{(1-\beta)+\varphi_r h_g/L}=\frac{4\times65\%/4}{(1-0.43)+0.6\times0.8/4}=94.2\%$$

2、已知某小客车前、后为单子午线轮胎，总质量为 1600 kg，轴距 L 为 2.7 m，质心到前轴的距离为 1250mm，前单个车轮的侧偏刚度的值为 30000 N/rad，后单个车轮的侧偏刚度的值为 50000 N/rad，

1）试求该车的稳定性系数和特征车速，确定该车的稳态转向特性的类型；

2）如果该车以 36 km/h 速度、方向盘转角为 330 度做定圆周行驶时，求此时汽车的横摆角速度增益和横摆角速度（转向系总传动比 i 为 22，悬架的侧倾影响不予考虑）；

3)如果将小客车前后轮更换，其稳态转向特性如何变化？计算其特征车速或临界车速。

解：1)稳定性因数 $K=\frac{m}{L^2}(\frac{a}{k_2}-\frac{b}{k_1})=\frac{1600}{2.7^2}(\frac{1.25}{-2\times50000}-\frac{2.7-1.25}{-2\times30000})=2.63\times10^{-3}$ 。

$K=2.63\times10^{-3}>0$，故该车稳态转向特性为不足转向。

因为该车稳态转向特性为不足转向，故计算其特征车速：

$$\mathrm{u_{ch}}=\sqrt{1/\mathrm{K}}=\sqrt{1/2.63\times10^{-3}}=19.5\mathrm{m/s}=70.2km/h$$

2） u=36km/h=10m/s;

330^o =3.14*330/180=5.76(rad)

$$\frac{\omega_r}{\delta}=\frac{u/L}{1+Ku^2}=\frac{10/2.7}{1+2.63\times10^{-3}\times10^2}=2.93 \text{（1/s）}$$

$$\omega_r=2.93\delta=2.93\times\frac{5.76}{22}=0.77 \quad \text{(rad/s)}$$

3) 如将前后轮更换，则

稳定性因数 $K=\frac{m}{L^2}(\frac{a}{k_2}-\frac{b}{k_1})=\frac{1600}{2.7^2}(\frac{1.25}{-2\times30000}-\frac{2.7-1.25}{-2\times50000})=-1.38\times10^{-3}$ 。

$K=-1.38\times10^{-3}<0$，故该车稳态转向特性为过多转向。

因为该车稳态转向特性为过多转向，故计算其临界车速：

$$\mathrm{u_{cr}}=\sqrt{\text{-}1/\mathrm{K}}=\sqrt{1/1.38\times10^{-3}}=26.92\mathrm{m/s}=96.9km/h$$

3、已知汽车车身单质量振动系统的质量 m_2，刚度 K，阻尼系数 C，路面波长为 2m，路面不平度系数为 G_q（n_0），空间频率指数为 2，汽车速度为 u (km/h)。

1）求有阻尼振动的固有频率 ω_r 和阻尼比 ζ ；

2）作出系统的幅频特性 $|z/q|$ 图，并讨论路面激振频率和阻尼比对该系统振动的影响；

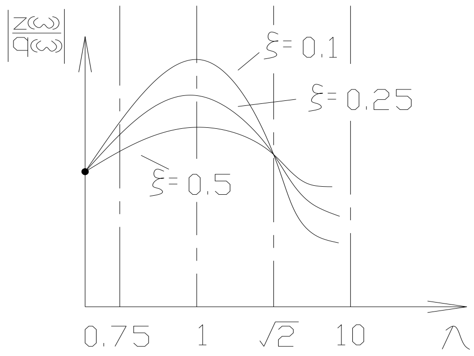
3）计算该车车身加速度的功率谱密度。

解：

1） $\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m_2}}$ ， $\xi=\frac{C}{2\sqrt{m_2K}}$

则 $\omega_r=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}=\sqrt{\frac{K}{m_2}}\sqrt{1-\left(\frac{C}{2\sqrt{m_2K}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4m_2K-C^2}{{m_2}^2}}$

2）如下图为单质量振动系统的幅频特性图，



图以书上为准

单质量振动系统的幅频特性图

分析振动频率和相对阻尼系数对振动的影响如下：

①低频段：$\lambda < 0.75$，在这一频段，$\left|\frac{z}{q}\right| \to 1, z \approx q$，不呈现明显的动态特性，阻尼比对这一频段的影响不大；

②共振段：$0.75 < \lambda < \sqrt{2}$，在这一频段，$\left|\frac{z}{q}\right|$出现峰值，$Z >> q$，$\xi \uparrow$，则$\left|\frac{z(\omega)}{q(\omega)}\right|$峰值↓；

③高频段：$\lambda \geq \sqrt{2}$，$\left|\frac{z}{q}\right| \leq 1$，对输入位移起衰减作用，阻尼比减小对减振有利。

2）路面波长 2m，则空间频率 n=1/2 （1/m）

路面功率谱密度

$$G_q(f) = \frac{1}{u} G_q(n) = \frac{1}{u} G_q(n_0)(\frac{n}{n_0})^{-W} = \frac{1}{u} G_q(n_0)(\frac{1/2}{n_0})^{-2} = \frac{n_0{}^2}{2u} G_q(n_0)$$

该车车身加速度的功率谱密度：

$$G_{\ddot{z}}(f) = \left|\frac{\ddot{z}}{q}\right|^2 G_q(f) = \omega^4 \left|\frac{z}{q}\right|^2 \frac{n_0{}^2}{2u} G_q(n_0) = \omega^2 \frac{1+(2\xi\lambda)^2}{1-\lambda^2+(2\xi\lambda)^2} \frac{n_0{}^2}{2u} G_q(n_0)$$

4、某中型货车的有关参数如下表所示（该车无 ABS 装置）。

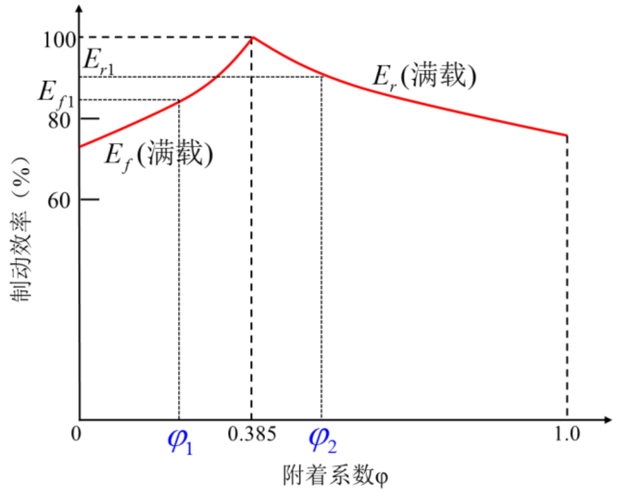
载荷状态	质量m [kg]	质心高度 h_g[m]	轴距L [m]	质心至前轴的距离 a [m]	制动力分配系数β
空载	4080	0.845	3.950	2.15	0.38
满载	9290	1.170	3.950	2.90	0.38

（1）绘制该车满载时的制动效率曲线，并结合该曲线分析该车满载时在不同附着系数道路上的抱死次序和制动强度的变化规律。

（2）该车在空载时易出现何种方向稳定性问题？用力学原理解释为何会出现。

（3）求该车满载在 ϕ=0.7 的路面上车轮不抱死的最大制动减速度。

解：（1）满载时同步附着系数 $\varphi_{0满}=\dfrac{L\beta-b}{h_g}=\dfrac{3.95\times0.38-(3.95-2.9)}{1.17}=0.385$



如图为该车满载时的制动效率曲线，$\varphi=\varphi_0$=0.385 时制动效率为 100%，$\varphi<\varphi_0$ 时为制动效率曲线 E_f 有意义，$\varphi>\varphi_0$ 时为制动效率曲线 E_r 有意义。

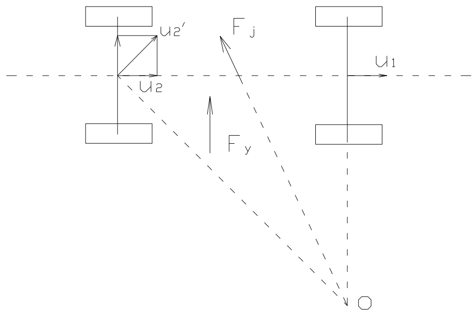
1）当 $\varphi<\varphi_0$ 时，如图中 $\varphi_1<\varphi_0$，此时图中制动效率曲线为 E_f，即随着制动强度的增大，前轮先抱死，此时制动强度为 $z_1=\varphi_1 E_f<\varphi_1$，之后后轮制动器制动力和地面制动力都增大，直到后轮也抱死，达到最大制动强度 φ_1。

2）当 $\varphi>\varphi_0$ 时，如图中 $\varphi_2>\varphi_0$，此时图中制动效率曲线为 E_r；随着制动强度的增大，后轮先抱死，此时制动强度为 $z_2=\varphi_2 E_{r1}<\varphi_2$，之后前轮制动器制动力和地面制动力都增大，直到前轮也抱死，达到最大制动强度 φ_2。

（2）空载时同步附着系数 $\varphi_{0空}=\dfrac{L\beta-b}{h_g}=\dfrac{3.95\times0.38-(3.95-2.15)}{0.845}$ = -0.354。该车空载时总是出现后轮先抱死的工况，该工况是不稳定、危险工况，有可能导致侧滑甩尾。

分析如下：如图为汽车后轮先于前轮制动抱死时的运动情况：

1） 因后轮抱死，后轴受偶然侧向力 F_Y 作用将发生侧滑，后轴中点的前进速度变为 u_2'，前轴因未发生抱死，前进速度方向仍然为汽车纵轴方向 u_1。
2） 此时汽车将发生类似转弯的运动，其瞬时回转中心为速度 u_2' 和 u_1 两垂线的交点 O；汽车作圆周运动时产生了作用于汽车质心的惯性力 F_j。
3） 显然 F_j 的方向与后轴发生侧滑的方向一致，于是惯性力加剧后轴侧滑；后轴侧滑有加剧惯性力，汽车将急剧转动，是不稳定、非常危险的工况。



（3）φ=0.7＞φ_0=0.385，故后轮先抱死，

$$\varphi=\varphi_{\mathrm{r}}=\frac{(1-\beta)z}{\frac{1}{L}\left(a-zh_{\mathrm{g}}\right)}=\frac{(1-0.38)\times z\times 3.95}{2.9-1.17\times z}=0.7$$

解得：$z_{\max}$=0.621，最大制动减速度为 $j_{\max}=0.621\times 9.8=6.086\mathrm{m/s^2}$

5、某轿车：质量为 1100kg，轴距为 2500mm，前轴轴载质量为汽车总质量的 54%，单侧前轮侧偏刚度值为 297.3N/deg，单侧后轮侧偏刚度值为 392.7N/deg。

（1）计算该车的稳定性因数，确定该车稳态转向特性的类型，并计算其特征车速或临界车速。

（2）计算欲使汽车转变为中性转向特性质心需后移的距离。

（3）如果将该车前、后轮互换，该车具有何种稳态转向特性？

（4）绘制（1）、（3）两种情况的转向灵敏度-车速曲线。

解：（1）$k_1=-2\times 297.3\times 180/\pi$=-34068N/rad，

$$k_2=-2\times 392.7\times 180/\pi=\text{-45000N/rad}$$

$$K=\frac{m}{L^2}\left(\frac{b}{|k_1|}-\frac{a}{|k_2|}\right)=\frac{1100}{2.5^2}\left(\frac{0.54\times 2.5}{34068}-\frac{0.46\times 2.5}{45000}\right)=0.00248\mathrm{s^2/m^2}$$

因 K＞0，所以汽车的稳态转向特性为不足转向。

因 K＞0，所以计算特征车速：$u_{ch}=\sqrt{\frac{1}{K}}=\sqrt{\frac{1}{0.00248}}$=20m/s=72km/h

（2）令 $S.M.=\frac{a'-a}{L}=\frac{k_2}{k_1+k_2}-\frac{a}{L}=0$，代入数据 $\frac{392.7}{297.3+392.7}-\frac{a}{2.5}=0$，解得 $a=1.42\mathrm{m}$，

故质心需后移 1.42-1.15=0.27m。

或令 $K=\frac{m}{L^2}\left(\frac{b}{|k_1|}-\frac{a}{|k_2|}\right)=0$，即 $b|k_2|-a|k_1|=0$，$(L-a)|k_2|-a|k_1|=0$，代入数据得：

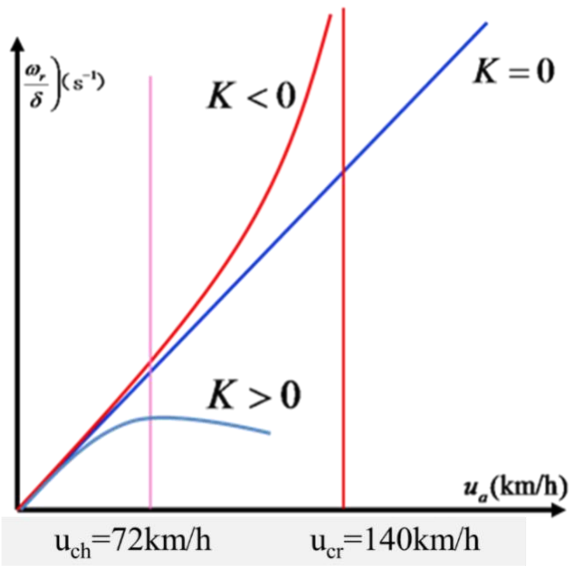
$a=1.42\mathrm{m}$，故质心需后移 1.42-1.15=0.27m。

（3）$K=\frac{m}{L^2}(\frac{b}{|k_1|}-\frac{a}{|k_2|})=\frac{1100}{2.5^2}(\frac{0.54\times2.5}{45000}-\frac{0.46\times2.5}{34068})$=-0.00066$\mathrm{s^2/m^2}$，因 K<0，所以汽车的稳态转向特性为过多转向。

（4）　（1）中特征车速为$u_{ch}=72\mathrm{km/h}$

（3）中临界车速为$u_{cr}=\sqrt{-\frac{1}{K}}=\sqrt{\frac{1}{-0.00066}}$=38.9m/s=140km/h

做出转向灵敏度曲线如图：



6、（1）《人体承受全身振动的评价指南》规定的人体对振动反应的三个感觉界限是什么？它们的振动加速度值的相互关系如何？

（2）把汽车简化为单质量系统模型时，已知m_2=900kg，K=90000N/m，C=2000N/（m·s）；路面波长为2m，路面不平度系数为256×10^{-6}m^2 / m^{-1}，空间频率指数为2，汽车速度为54km/h。求有阻尼振动的固有频率ω_r和阻尼比ζ。

（3）作出系统的幅频特性$|z/q|$图，并讨论路面激振频率和阻尼比对该系统振动的影响；

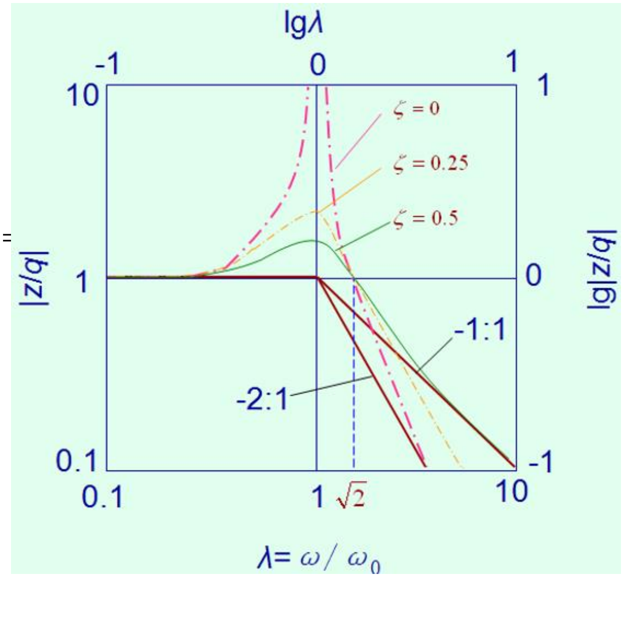
（4）计算该车车轮与路面间相对动载的功率谱密度$G_{F_d/G}(f)$。

解：（1）人体对振动反应的三个不同的感觉界限分别是暴露极限、疲劳-工效降低界限和舒适降低界限。

暴露极限的振动加速度值为疲劳-工效降低界限的 2 倍，舒适降低界限为疲劳-工效降低界限的 1 / 3.15。

（2）$\zeta=\frac{C}{2\sqrt{Km}}=\frac{3000}{2\sqrt{100000\times1000}}=0.15$

$\omega_r=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}=\sqrt{\frac{K}{m}}\times\sqrt{1-\zeta^2}=\sqrt{\frac{100000}{1000}}\times\sqrt{1-0.15^2}=$



（3）如图为单质量振动系统的幅频特性图，分析振动频率和相对阻尼系数对振动的影响如下：

1）低频段：$\lambda < 0.75$，在这一频段，$\left|\dfrac{z}{q}\right| \to 1, z \approx q$，不呈现明显的动态特性，阻尼比对这一频段的影响不大；

2）共振段：$0.75 < \lambda < \sqrt{2}$，在这一频段，$\left|\dfrac{z}{q}\right|$出现峰值，$Z >> q$，$\xi \uparrow$,则$\left|\dfrac{\mathrm{z}(\omega)}{\mathrm{q}(\omega)}\right|$峰值$\downarrow$；

3）高频段：$\lambda \geq \sqrt{2}$，$\left|\dfrac{z}{q}\right| \leq 1$，对输入位移起衰减作用，阻尼比减小对减振有利。

（4）输入功率谱

$$G_q(f) = \frac{1}{u} G_q(n_0)\left(\frac{n}{n_0}\right)^{-w} = \frac{3.6}{54} \times 256 \times 10^{-6} \times \left(\frac{0.5}{0.1}\right)^{-2} = 6.83 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2 \cdot s}$$

其中$n = 1/\lambda = 0.5\mathrm{m}^{-1}$

$$\lambda = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{2\pi f}{\sqrt{\dfrac{K}{m}}} = \frac{2\pi u n}{\sqrt{\dfrac{K}{m}}} = \frac{15\pi}{\sqrt{\dfrac{K}{m}}} = \frac{15\pi}{\sqrt{\dfrac{100000}{1000}}} = 1.5\pi$$

$$\left|\frac{z(\omega)}{q(\omega)}\right| = \left|\frac{z}{q}\right| = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\lambda)^2}}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{1+(2\times 0.15 \times 1.5\pi)^2}}{\sqrt{(1-2.25\pi^2)^2 + (2\times 0.15\times 1.5\pi)^2}} = 0.0814$$

输出功率谱=幅频特性²×输入功率谱

$$\sqrt{G_{\ddot{z}}(f)} = \left|\frac{\ddot{z}}{q}\right| \sqrt{G_q(f)} = \omega^2 \left|\frac{z}{q}\right| \sqrt{G_q(f)} = （15\pi)^2 \times 0.0814 \times \sqrt{6.83\times 10^{-7}}$$

$=0.149\mathrm{ms}^{-3/2}$）