



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## Отчёт по лабораторной работе №1

### *Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений*

Студент: \_\_\_\_\_  
ФН2-52Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Ю. А. Сафронов  
(И. О. Фамилия)

Проверил:

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2021 г.

## Оглавление

<b>1. Краткое описание алгоритмов . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1. Метод Гаусса . . . . .	3
1.2. Метод $QR$ -разложения . . . . .	4
<b>2. Исходные данные . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>3. Результаты расчетов . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>4. Анализ результатов . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>5. Контрольные вопросы . . . . .</b>	<b>9</b>



Следовательно, матрица  $T_{12}$ — это матрица поворота на угол  $\varphi$  по часовой стрелке в плоскости  $(x_1, x_2)$ .

Для исключения  $x_1$  из третьего уравнения, используются коэффициенты  $c_{13}$  и  $s_{13}$ :

$$c_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^{(1)2}}}, \quad s_{13} = \frac{a_{31}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^{(1)2}}},$$

Далее первое и третье уравнение заменяются своими линейными комбинациями.

Эта операция равносильна умножению слева матрицы  $A^{(1)} = T_{12}A$  и вектора правой части  $b^{(1)} = T_{12}b$  на ортогональную матрицу, имеющую вид

$$T_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично неизвестная  $x_1$  исключается из остальных уравнений, затем  $x_2$  – из всех уравнений, кроме первого и второго, при этом используются матрицы  $T_{23}, T_{24}, \dots, T_{2n}$  и так далее. Процесс продолжается, пока система не будет приведена к верхней треугольной форме. То есть  $T = T_{n-1,n} \cdot T_{24} \cdot T_{23} \cdot T_{1n} \cdot \dots \cdot T_{13} \cdot T_{12}$ . Причём,  $R = TA$ , где  $R$  – полученная верхнетреугольная матрица и  $Q = T^{-1} = T^T$ .

## 2. Исходные данные

В вариантах 20, 23 даны 2 СЛАУ, которые имеют вид:

$$A_{20} = \begin{pmatrix} 28.8590 & -0.0080 & 2.4060 & 19.2400 \\ 14.4360 & -0.0010 & 1.2030 & 9.6240 \\ 120.2040 & -0.0320 & 10.0240 & 80.1440 \\ -57.7140 & 0.0160 & -4.8120 & -38.4780 \end{pmatrix}, \quad b_{20} = \begin{pmatrix} 30.4590 \\ 18.2480 \\ 128.1560 \\ -60.9080 \end{pmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 3676.7530 & 35.0160 & -525.2500 & -245.1040 \\ 9055.6200 & 86.2450 & -1293.6600 & -603.6800 \\ 26303.4240 & 250.5040 & -3757.6290 & -1753.4720 \\ 70.3500 & 0.6700 & -10.0500 & -4.6850 \end{pmatrix}, \quad b_{23} = \begin{pmatrix} 245.2070 \\ 604.0000 \\ 1754.1910 \\ 4.7350 \end{pmatrix}$$

### 3. Результаты расчетов

Результаты для варианта 23:

1. Точность double

а) Метод Гаусса

$$x^* = (0, 0, 0, 0)^T, \quad \|b - Ax^*\| = 0.$$

б) Метод QR

$$x^* = (0, 0, 0, 0)^T, \quad \|b - Ax^*\| = 0.$$

2. Точность float

а) Метод Гаусса

$$x^* = (0, 0, 0, 0)^T, \quad \|b - Ax^*\| = 0.$$

б) Метод QR

$$x^* = (0, 0, 0, 0)^T, \quad \|b - Ax^*\| = 0.$$

Изменим вектор  $b$  на величину  $\delta \in [-0.01, 0.01]$ , тогда

$$x^* = (0, 0, 0, 0)^T, \quad \|b - Ax^*\| = 0.$$

Результаты для варианта 20:

1. Точность double

а) Метод Гаусса

$$x^* = (0, 0, 0, 0)^T, \quad \|b - Ax^*\| = 0.$$

б) Метод QR

$$x^* = (0, 0, 0, 0)^T, \quad \|b - Ax^*\| = 0.$$

2. Точность float

а) Метод Гаусса

$$x^* = (0, 0, 0, 0)^T, \quad \|b - Ax^*\| = 0.$$

б) Метод QR

$$x^* = (0, 0, 0, 0)^T, \quad \|b - Ax^*\| = 0.$$

Изменим вектор  $b$  на величину  $\delta \in [-0.01, 0.01]$ , тогда

$$x^* = (0, 0, 0, 0)^T, \quad \|b - Ax^*\| = 0.$$

## 4. Анализ результатов

При использовании типа `double` была достигнута большая точность, чем при использовании типа `float`. Кроме этого, чем точнее тип данных, тем меньше влияние числа обусловленности матрицы на решение. Если сравнивать точность методов, то метод Гаусса получился точнее QR-метода.

Это можно объяснить тем, что в последнем выполняется значительно большее количество арифметических операций, что ведет к большему накоплению погрешностей вычислений.



## 5. Контрольные вопросы

1. **Каковы условия применимости метода Гаусса без выбора и с выбором ведущего элемента?**

Метод Гаусса применим тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы  $\mathcal{A}$  ненулевые, что равносильно условию  $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $a_{ii}^{(i-1)}$  - элементы матрицы на главной диагонали после приведения ее к ступенчатому виду. Соответственно, в противном случае метод Гаусса без выбора главного элемента в ходе работы может привести к делению на ноль, при этом матрица может быть и невырождена. Метод Гаусса с выбором главного элемента можно применять для любой невырожденной матрицы. Если матрица будет вырожденной, то в какой-то момент главный элемент будет равен нулю, что недопустимо.

2. **Докажите, что если  $\det \mathcal{A} \neq 0$ , то при выборе главного элемента в столбце среди элементов, лежащих не выше главной диагонали, всегда найдется хотя бы один элемент, отличный от нуля.**

Докажем от противного. Допустим, что возможна такая ситуация, когда при условии  $\det \mathcal{A} \neq 0$ , существует такой шаг  $k$ , для которого, соответственно, в  $k$ -ом столбце все элементы не выше главной диагонали нулевые (на примере матрицы  $n \times n$ ):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & \dots & a_{k,n-1} & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель ступенчатой матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали:

$$\det \mathcal{A} = a_{11} * a_{22} * \dots * a_{k-1,k-1} * 0 * a_{k+1,k+1} * \dots * a_{nn}, \quad a_{kk} = 0.$$

Противоречие. Следовательно, либо матрица вырождена, либо существует ненулевой элемент не выше главной диагонали.

3. В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.

Данную проблему можно решить вводом косвенной индексации. Вместо  $\mathcal{A}[i][j]$  использовать  $\mathcal{A}[\text{row}(i)][\text{col}(j)]$ , где  $\text{row}$  и  $\text{col}$  — массивы (по сути своей являющиеся подстановками), в которых, например, для перемены местами двух строк или столбцов нужно поменять местами соответствующие индексы.

4. Оцените количество арифметических операций, требуемых для  $QR$ -разложения произвольной матрицы  $A$  размера  $n \times n$ .

Внешний цикл  $i = \overline{1, n-1}$ , внутренний  $j = \overline{i+1, n}$ . Каждый раз считаем коэффициенты  $c_{ij}, s_{ij}$  — это 4 умножения и 2 деления. Вложенный цикл  $k = \overline{1, n}$  дает еще 6 операций. Для нахождения матрицы  $R$  нужно в итоге  $6 \cdot \frac{(n-1)n + (n-1)n^2}{2} = 3n(n-1)(n+1)$

5. Что такое число обусловленности и что оно характеризует? Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы? Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?

Числом обусловленности называют величину  $\text{cond}A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ . Стоит отметить, что  $\text{cond}A = \text{cond}A^{-1}$ . Эта величина характеризует влияние изменения значений правой части на решение системы; отклонение полученного решения от исходного.

Между числом обусловленности и определителем матрицы нет никакой связи, потому что умножение матрицы на число  $\lambda > 0$  меняет определитель, но не меняет число обусловленности, так как  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

6. Как упрощается оценка обусловленности, если матрица является:

- а) диагональной;
- б) симметричной;
- в) ортогональной;
- г) положительно определённой;
- д) треугольной?

а)  $\text{cond}A = \frac{a_{\max}}{a_{\min}}$ , где  $a_{\max}, a_{\min}$  — максимальный и минимальный элементы матрицы;

б)  $\text{cond}A = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ , где  $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$  — максимальный и минимальный собственные элементы матрицы;

в) Для оценки нормы используют тот факт, что для ортогональной матрицы

$A^{-1} = A^T$ , тогда  $\text{cond}A = \|A\|^2$ . Кроме того, число обусловленности ортогональной матрицы равно единице;

г) Собственные числа положительно определенной матрицы являются действительными положительными числами, поэтому в этом случае можно считать число обусловленности через собственные числа;

д)  $\text{cond}A = \frac{a_{\max}}{a_{\min}}$ , где  $a_{\max}, a_{\min}$  — максимальный и минимальный элементы на диагонали матрицы.

**7. Применимо ли понятие числа обусловленности к вырожденным матрицам?**

Обусловленность оценивает близость матрицы  $A$  к вырожденной. Чем больше число обусловленности, тем ближе матрица к вырожденной. Если матрица  $A$  — вырожденная, то её число обусловленности стремится к бесконечности.

**8. В каких случаях целесообразно использовать метод Гаусса, а в каких — методы, основанные на факторизации матрицы?**

**9. Как можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса? В чём достоинства и недостатки такого подхода?**

**10. Объясните, почему, говоря о векторах, норму  $\|x\|_1$  часто называют октаэдрической, норму  $\|x\|_2$  — шаровой, а норму  $\|x\|_\infty$  — кубической. Их называют таковыми в соответствие с объемными геометрическими фигурами, которыми является множество  $X = \{x : \|x\| \leq 1\}$ .**