



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №3

Численное решение краевых задач для одномерного волнового уравнения

Студент: _____
ФН2-62Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. И. Токарев

(И. О. Фамилия)

(Подпись, дата)

Ю. А. Сафронов

(И. О. Фамилия)

Проверил:

(Подпись, дата)

(И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Погрешность на точном решении	3
2. Контрольные вопросы	4

1. Погрешность на точном решении

Требуется рассмотреть погрешность разностной схемы на точном решении и проверить порядок аппроксимации. Рассмотрим первый тестовый пример:

$$u''_{tt} = u''_{xx}, \quad u'_t(x, 0) = 0 = \psi(x), \quad u(x, 0) = \sin(\pi x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0,$$

где точное решение ищется по формуле Д'Аламбера

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx = \frac{\sin(\pi(x - t)) + \sin(\pi(x + t))}{2} = \\ &= \sin(\pi x) \cos(\pi t). \end{aligned}$$

Проведем расчет на равномерной сетке для разных шагов во времени и пространстве, для этих решений построим таблицу с погрешностью на точном решении в норме C пространства непрерывных функций:

$h \setminus \tau$	0.00166667	2. →	0.000833333	2. →	0.000416667
0.01	0.0000719577	0.968586 →	0.0000742916	0.991623 →	0.0000749191
2. ↓	4.46571 ↓	3.92865 ↘	4.05607 ↓	3.9188 ↘	3.9519 ↓
0.005	0.0000161134	0.879738 →	0.0000183161	0.966155 →	0.0000189577
2. ↓	7.46153 ↓	3.68073 ↘	4.18389 ↓	3.69034 ↘	3.81961 ↓
0.0025	2.15953×10^{-6}	0.493294 →	4.37777×10^{-6}	0.882034 →	4.96327×10^{-6}

Рис. 1. Значение рядом со стрелочкой показывает, во сколько раз уменьшилась ошибка или уменьшился шаг

Видно, что с уменьшением шага по времени и пространству в 2 раза погрешность уменьшилась примерно в 4 раза, следовательно, разностная схема имеет 2-ой порядок по времени и по пространству.

2. Контрольные вопросы

1. Предложите разностные схемы, отличные от схемы «крест», для численного решения задачи.

Схема "крест":

$$\frac{1}{\tau^2}(y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}) = \frac{a^2}{h^2}(y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j).$$

Схема аналогичная схеме Дюфорта - Франкела для уравнения теплопроводности:

$$\frac{1}{\tau^2}(y_n^{j+1} - (y_{n+1}^j + y_{n-1}^j) + y_n^{j-1}) = \frac{a^2}{h^2}(y_{n+1}^j - (y_n^{j+1} + y_n^{j-1}) + y_{n-1}^j).$$

В этой схеме мы просто заменили значение точки в середине "креста" на сумму двух соседних точек.

2. Постройте разностную схему с весами для уравнения колебаний струны. Является ли такая схема устойчивой и монотонной?

Конструировать схему можно из следующих соображений. Вторую производную по времени мы будем аппроксимировать как обычно, то есть производная назад от производных вперед или наоборот. Вторую производную по пространству можно искать как комбинацию вторых разностных производных с весами на разных временных слоях:

$$y_{tt} - a^2(\sigma \hat{y}_{\bar{x}x} + (1 - 2\sigma)y_{\bar{x}x} + \sigma \check{y}_{\bar{x}x}) = 0.$$

Данная схема имеет второй порядок аппроксимации и по пространству и по времени. Эта схема является устойчивой при выполнении условия

$$\sigma \geq \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4c^2\tau^2}$$

и не является монотонной.

3. Предложите способ контроля точности полученного решения.

Контролировать точность решения можно с помощью дробления шага по времени и пространству в течение всего алгоритма. Для этого можно вести пересчет в какой-то пространственной подобласти или сразу на всем отрезке в момент времени $\tau/2$, $\tau/4$ и т. д. с шагом $h/2$. Это может быть очень трудоемко, поэтому можно производить корректировку шага раз в 10 итераций. Причем уменьшать шаг по пространству проще, потому что не нужно еще раз считать значения в "среднем" временном слое в точках, в которых значения уже посчитаны, достаточно лишь досчитать значения в промежуточных точках, которые

появятся при дроблении. Основная проблема заключается в том, что схема трехслойная и использовать предыдущие значения не получится, так как они посчитаны с большим шагом, а чтобы их пересчитать нужно запустить весь алгоритм заново. Возможно, имеет смысл заменить половинный предыдущий временной слой полусуммой "среднего" и "нижнего".

4. Приведите пример трехслойной схемы для уравнения теплопроводности. Как реализовать вычисления по такой разностной схеме? Является ли эта схема устойчивой?

Схема "крест" подходит для решения уравнения теплопроводности.