Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №3

Решение задач интерполирования

Студент: ФН2-52Б (Группа) ______ (Подпись, дата) А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

______ (Подпись, дата) Ю. А. Сафронов (И. О. Фамилия)

Проверил: ______ (Подпись, дата) ______ (И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Краткое описание алгоритмов

1.1. Равномерная сетка

Шаг равномерной сетки постоянный и вычисляется по формуле:

$$h = \frac{b-a}{n},$$

а сами узлы имеют координаты

$$x_i = a + h \cdot i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

1.2. Чебышевская сетка

Узлы вычисляются, как корни многочлена Чебышева 1−го рода, то есть точки

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

1.3. Задача интерполирования

Задан отрезок $[a, b]$. Пусть точки $x_0 \ldots x_n$ — узлы интерполяции, то есть точки, лежащие внутри этого отрезка. А значения $y(x_0) = y_0, \ \ldots \ , y(x_n) = y_n$ – значения искомой функции в этих точках. Послодовательность $\{y_i\}_{i=0}^{n}$ будем называть сеточной функцией.

Таким образом, задача интреполирования заключается в построении такой функции $f(x)$, которая будет принимать в узлах те же значения, что и y_i. Геометрически это можно интерпретировать, как построение кривой, проходящей через систему точек (x_i, y_i)

1.4. Многочлен Лагранжа

Многочлен n-степени вида

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k,$$

называют **интерполяционным многочленом** , если

$$L_n(x_i) = y_i$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x) y_k, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

В соответствии с определением интерполяционного полинома получаем:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(x_i) y_k = y_i, \quad c_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

1.5. Кубический сплайн

Кубическим сплайном для функции $y(x)$ называют функцию $S(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S(x)$ — многочлен третьей степени;
2. функция $S(x)$, ее первая и вторая производные непрерывны на отрезке $[x_0, x_n]$;
3. значения функции $S(x)$ и исходной функции $y(x)$ совпадают в узлах интерполяции.

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S(x) = s_i$ ищется следующим образом

$$s_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – коэффициенты, подлежазие определению.

$$\begin{aligned} &a_i = y_{i-1} \\ &a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i \end{aligned}$$

Из условия непрерывности первой и второй производной получаем

$$\begin{aligned} &S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0) \\ &S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= b_{i+1} \\ 2c_i + 6d_i h_i &= 2c_{i+1} \end{aligned}$$

Положим $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, тогда

$$2c_1 = 0$$
$$2c_n + 6d_n h_n = 2c_{n+1} = 0$$

Введением вспомогательного параметра $g_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$ получаем систему

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i ci + 1 = 3(g_i - gi - 1) \\ c_{n+1} = 0, \end{cases}$$

которая является трехдиагональной и обладает диагональным преобладанием, поэтому для нахождения коэффициентов можно использовать метод прогонки.

Остальные коэффициенты находим по формулам

$$b_i = g_i - \frac{(c_{i+1} + 2c_i)h_i}{3}$$
$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

2. Исходные данные

3. Результаты расчетов

3.1. Первый пункт

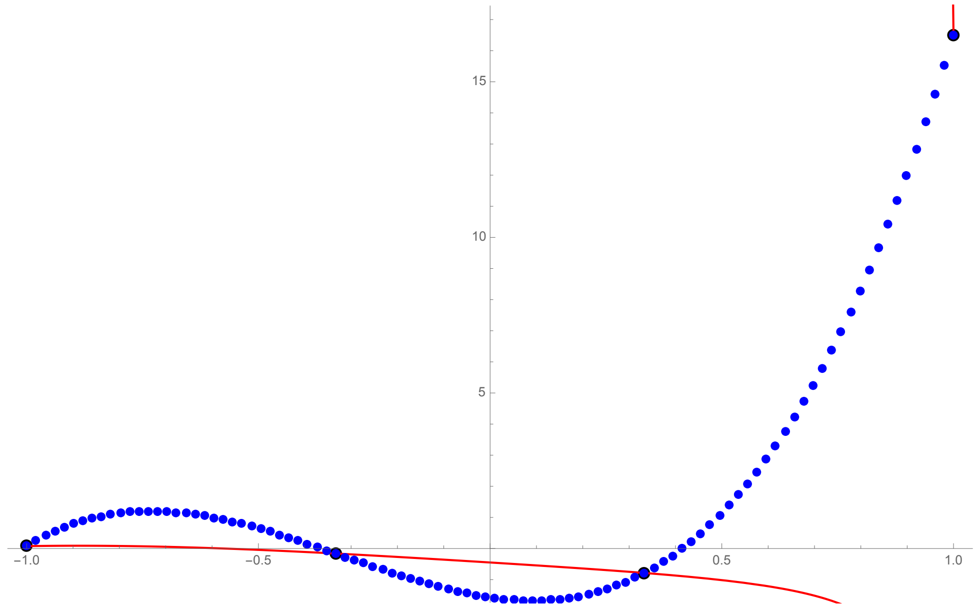

Рис. 1. Равномерная сетка, $n = 2$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 68.31$.

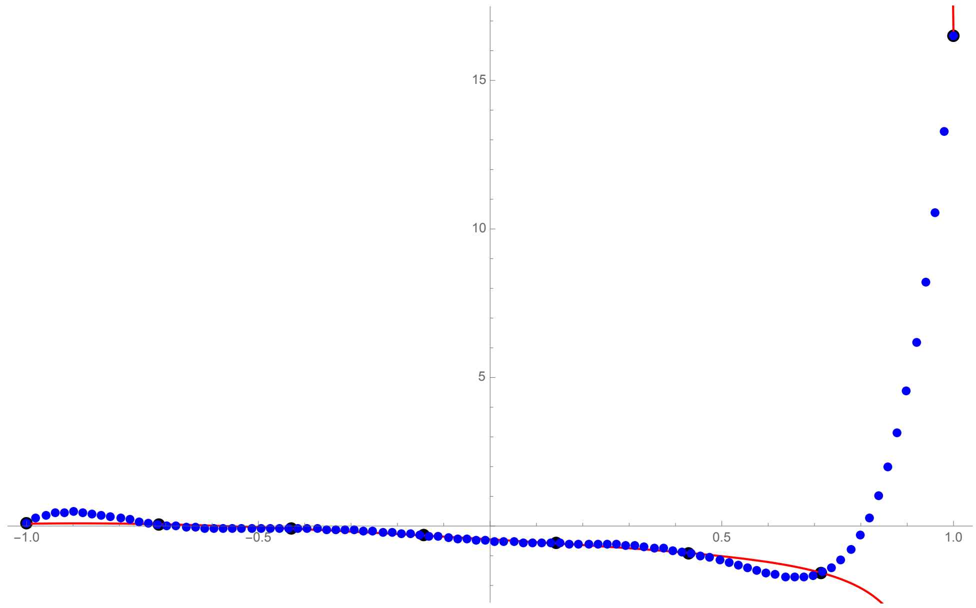

Рис. 2. Равномерная сетка, $n = 8$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 64.25$.

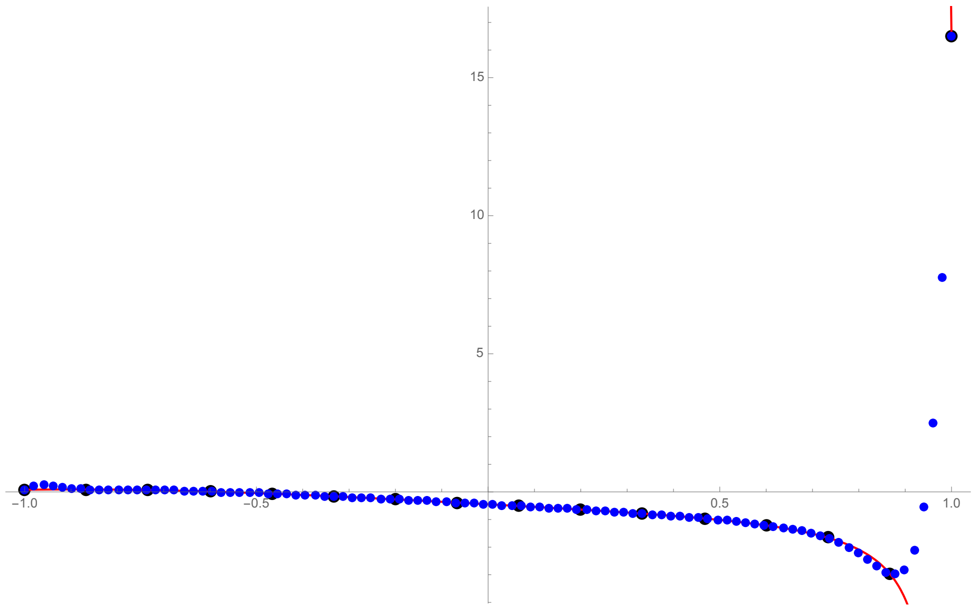

Рис. 3. Равномерная сетка, $n = 16$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 56.1911$.

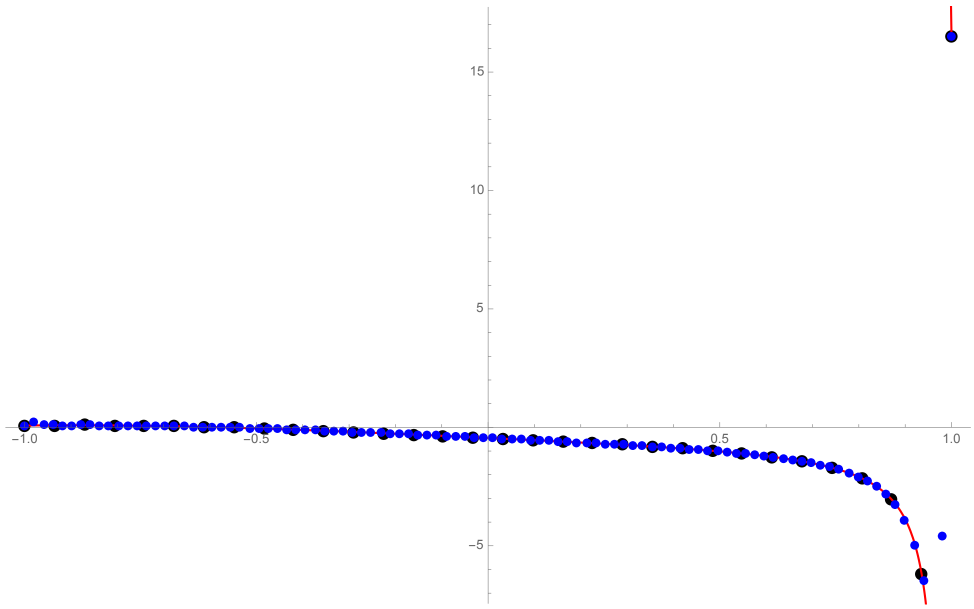

Рис. 4. Равномерная сетка, $n = 32$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 46.0322$.

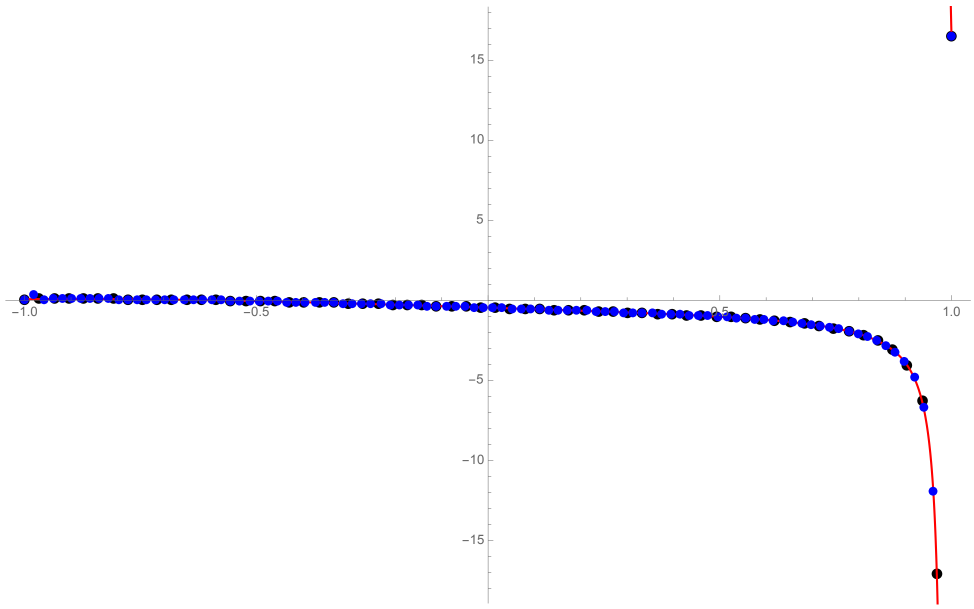

Рис. 5. Равномерная сетка, $n = 64$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 44.5913$.

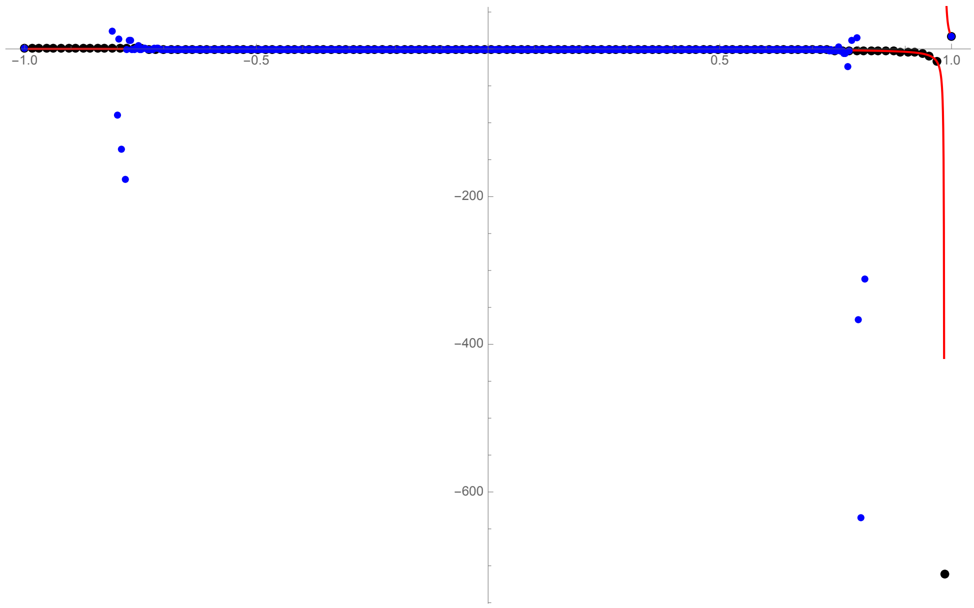

Рис. 6. Равномерная сетка, $n = 128$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 2.34923e + 19$.

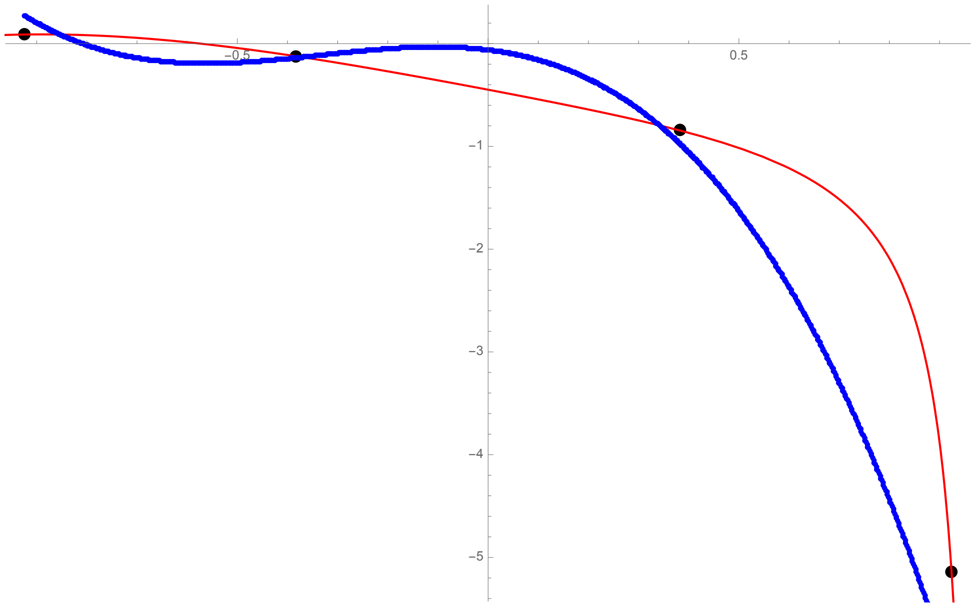

Рис. 7. Чебышевская сетка, $n = 2$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 2.40999$.

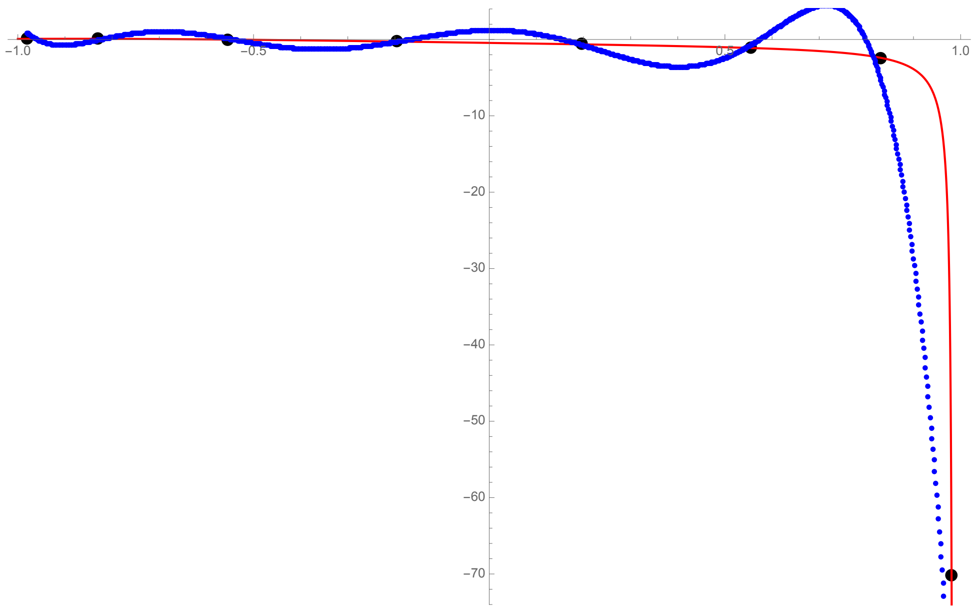

Рис. 8. Чебышевская сетка, $n = 8$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 57.0232$.

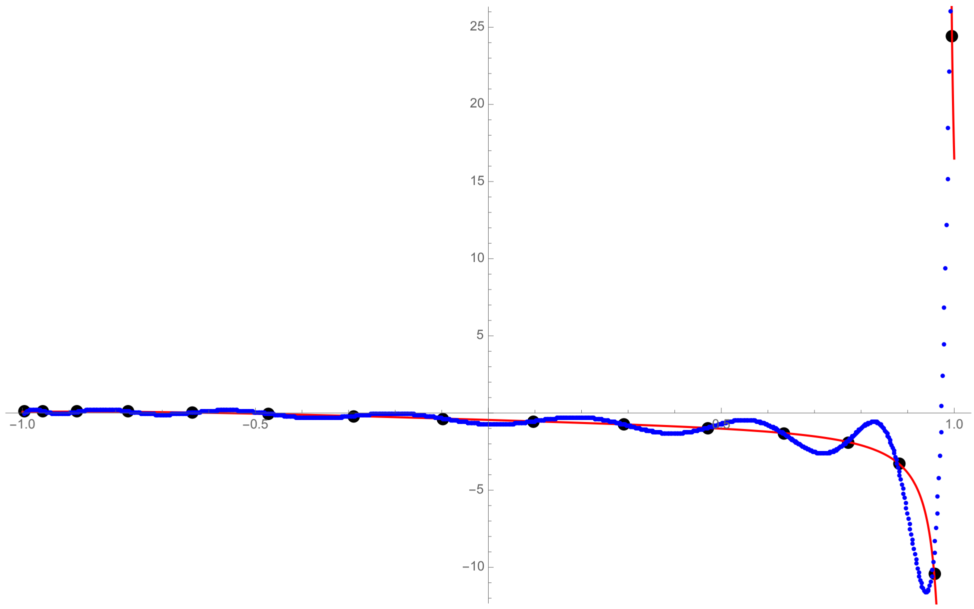

Рис. 9. Чебышевская сетка, $n = 16$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 441.702$.

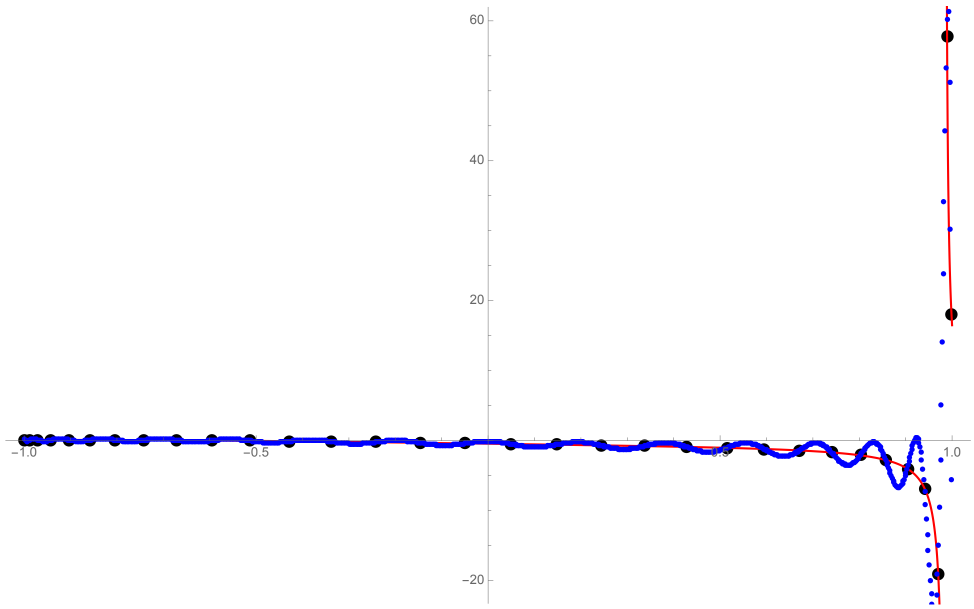

Рис. 10. Чебышевская сетка, $n = 32$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 1659.45$.

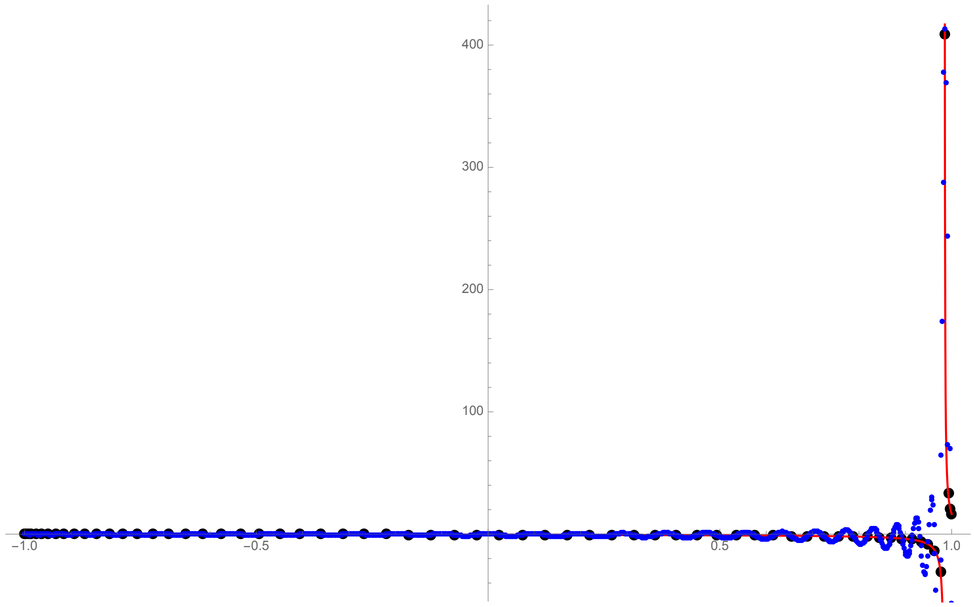

Рис. 11. Чебышевская сетка, $n = 64$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 567$.

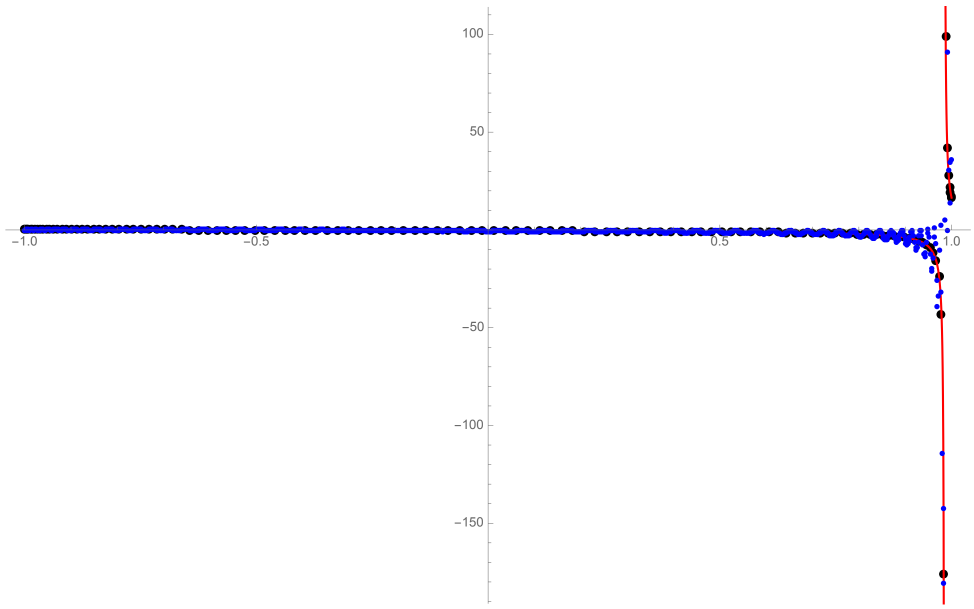

Рис. 12. Чебышевская сетка, $n = 128$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 351.303$.

3.2. Второй пункт

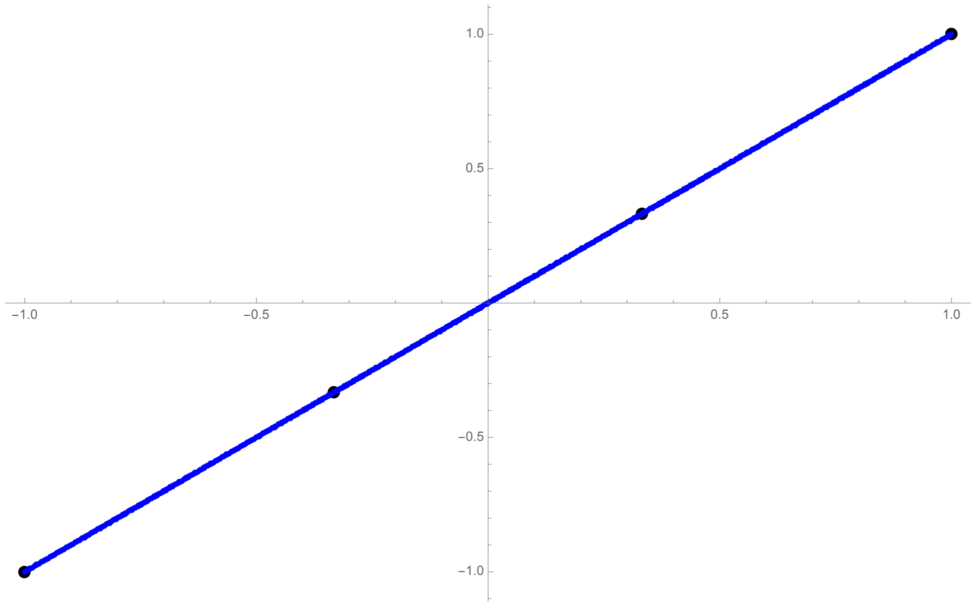

Рис. 13. Равномерная сетка, $n = 4$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 0.00200401$.

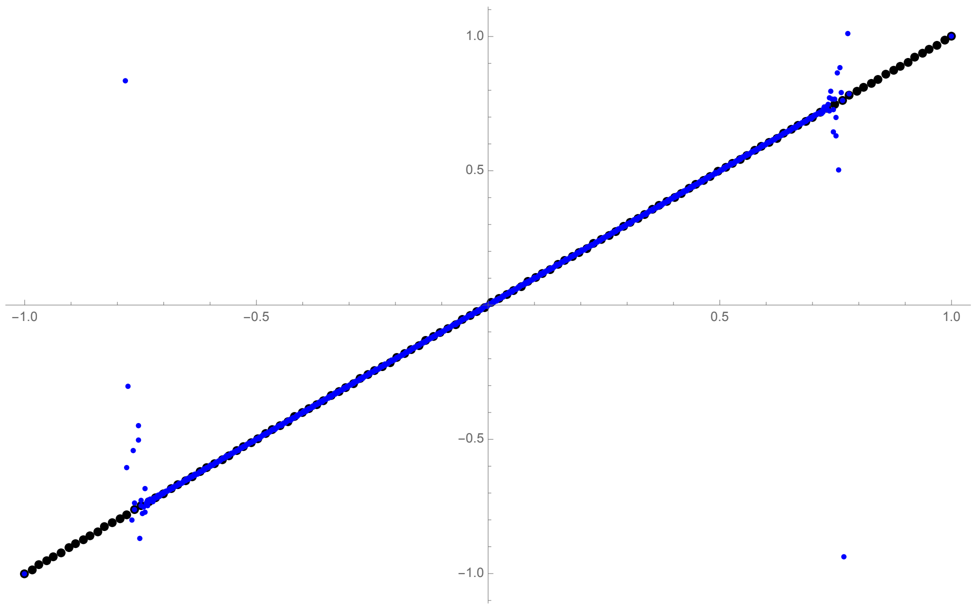

Рис. 14. Равномерная сетка, $n = 128$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 2.84368e + 18$.

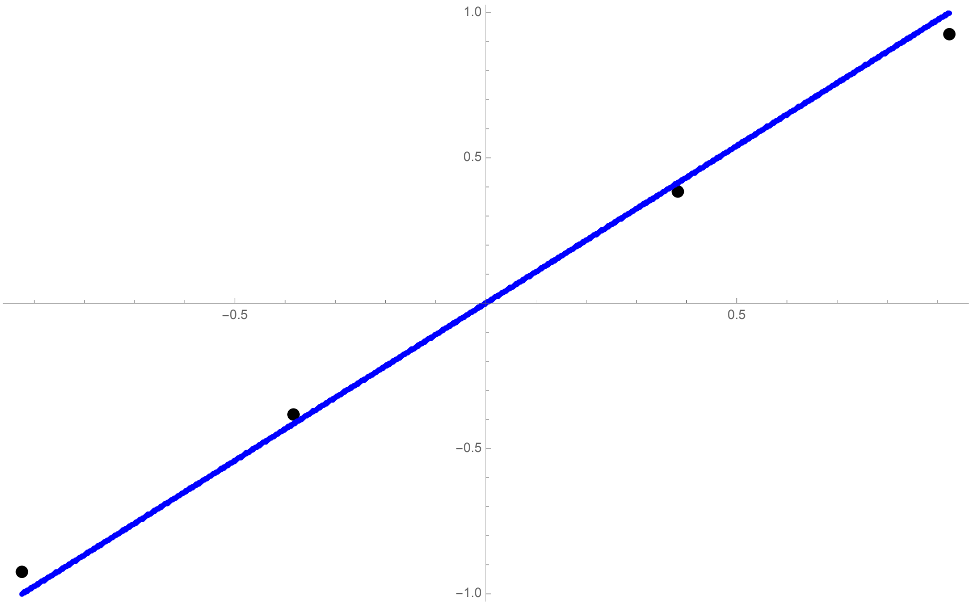

Рис. 15. Чебышевская сетка, $n = 4$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 0.0761205$.

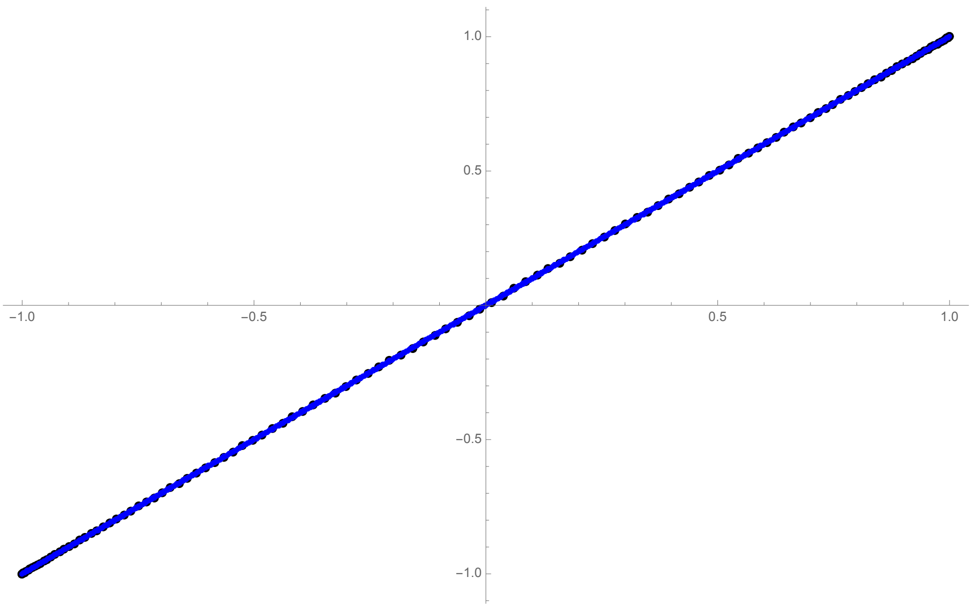

Рис. 16. Чебышевская сетка, $n = 128$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 0.00192856$.

3.3. Третий пункт

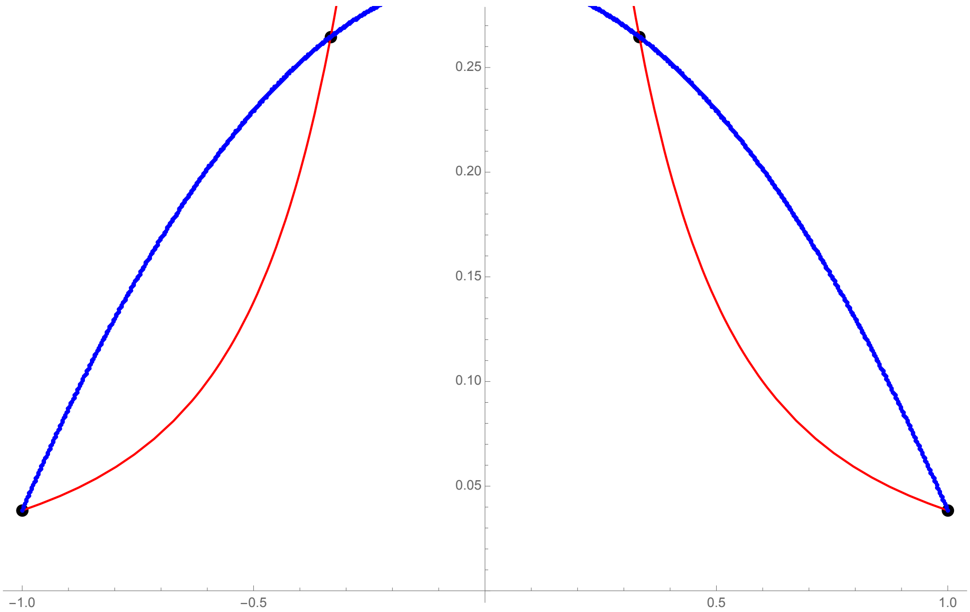

Рис. 17. Равномерная сетка, $n = 4$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 0.707014$.

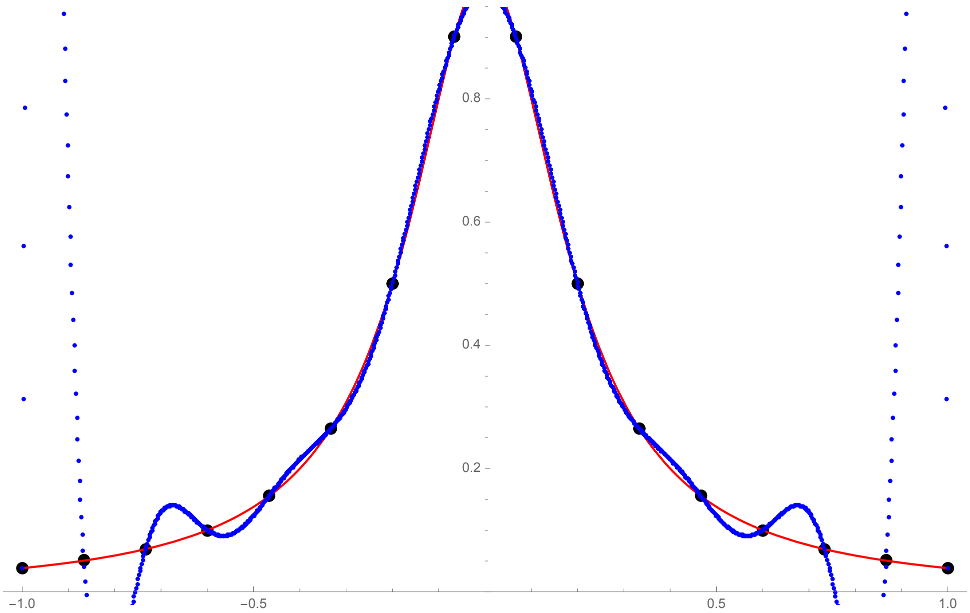

Рис. 18. Равномерная сетка, $n = 16$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 2.10702$.

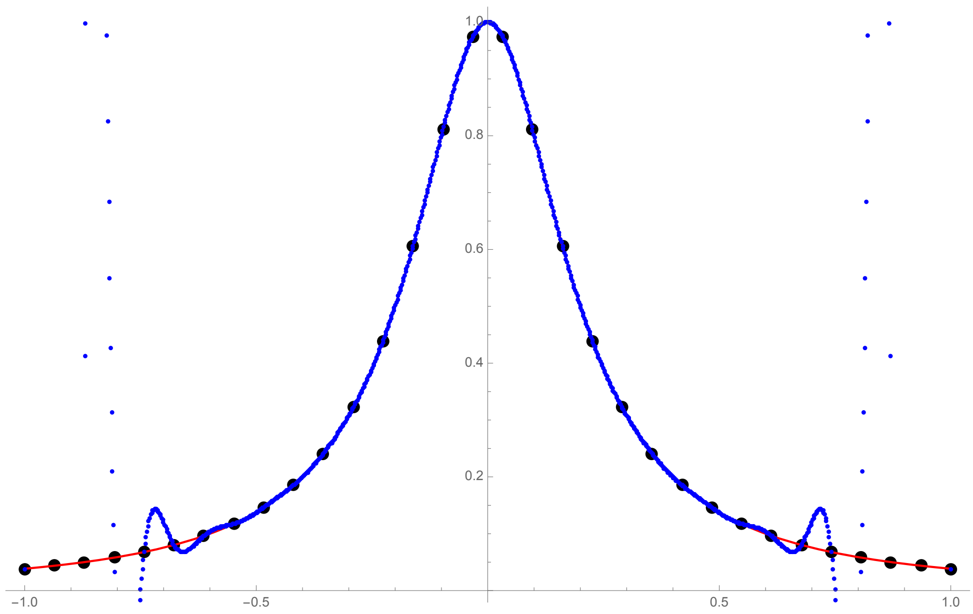

Рис. 19. Равномерная сетка, $n = 32$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 704.076$.

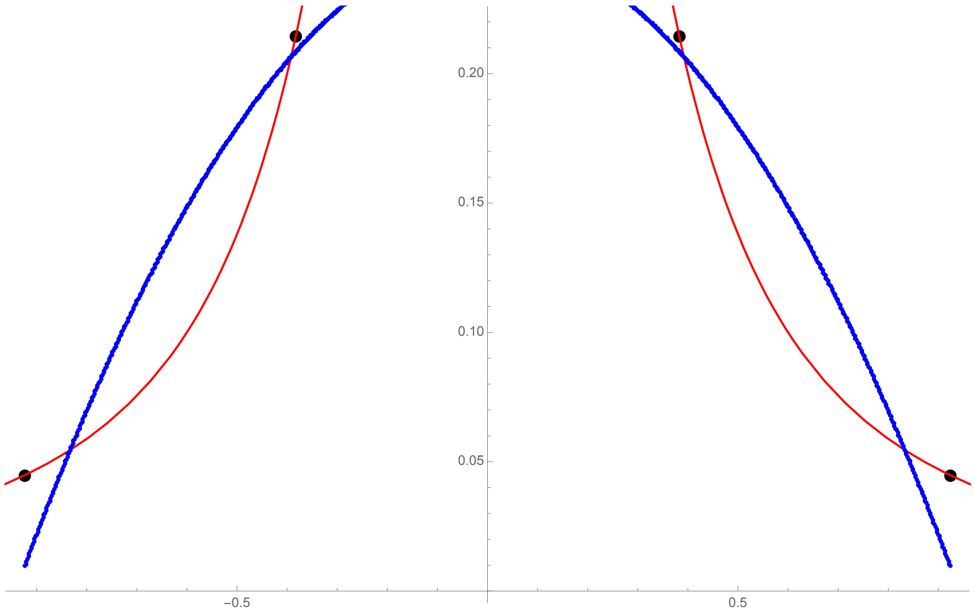

Рис. 20. Чебышевская сетка, $n = 4$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 0.7503$.

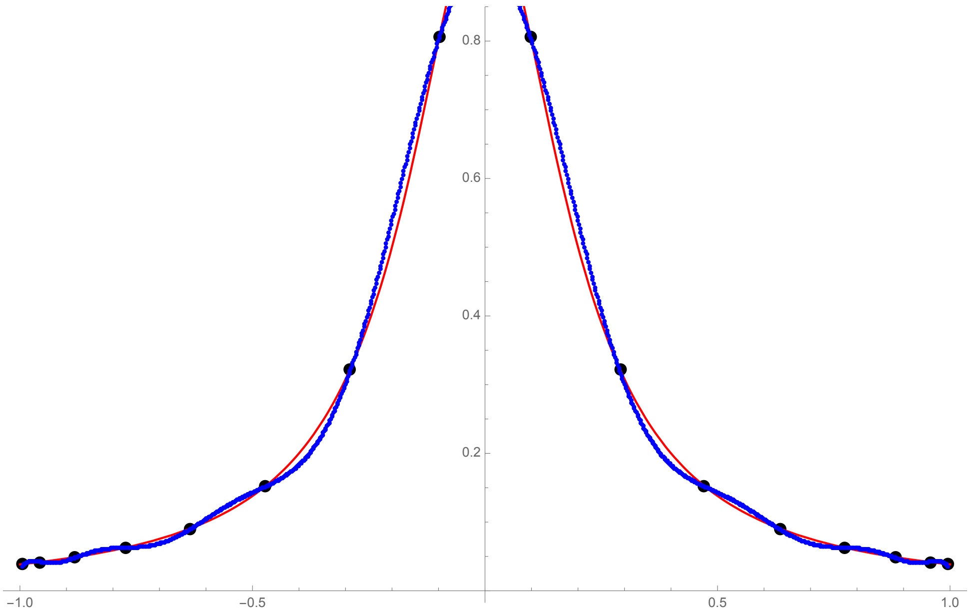

Рис. 21. Чебышевская сетка, $n = 16$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 0.0831194$.

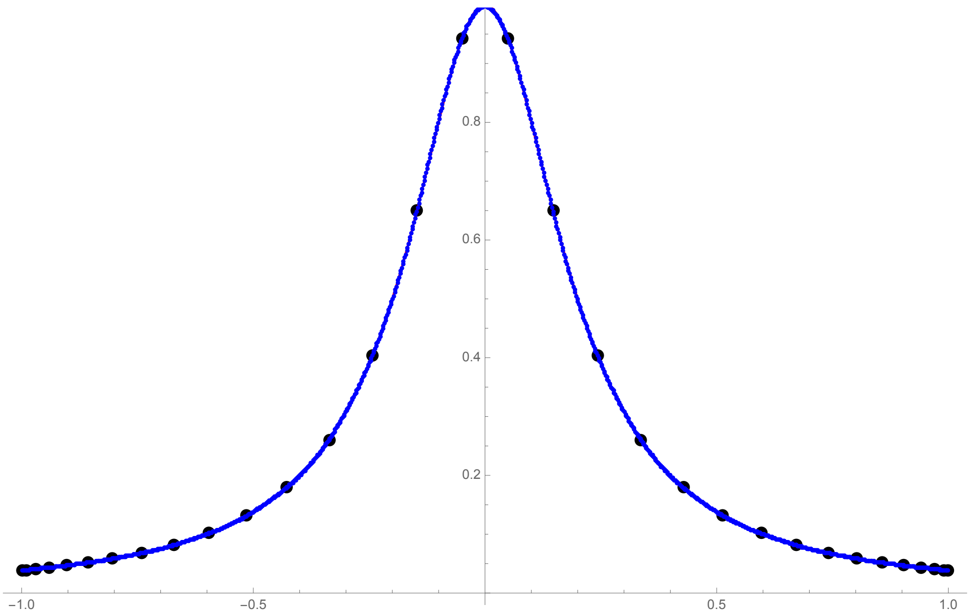

Рис. 22. Чебышевская сетка, $n = 32$, $\|f(x) - L_n(x)\|_C = 0.0059259$.

3.4. Четвертый пункт

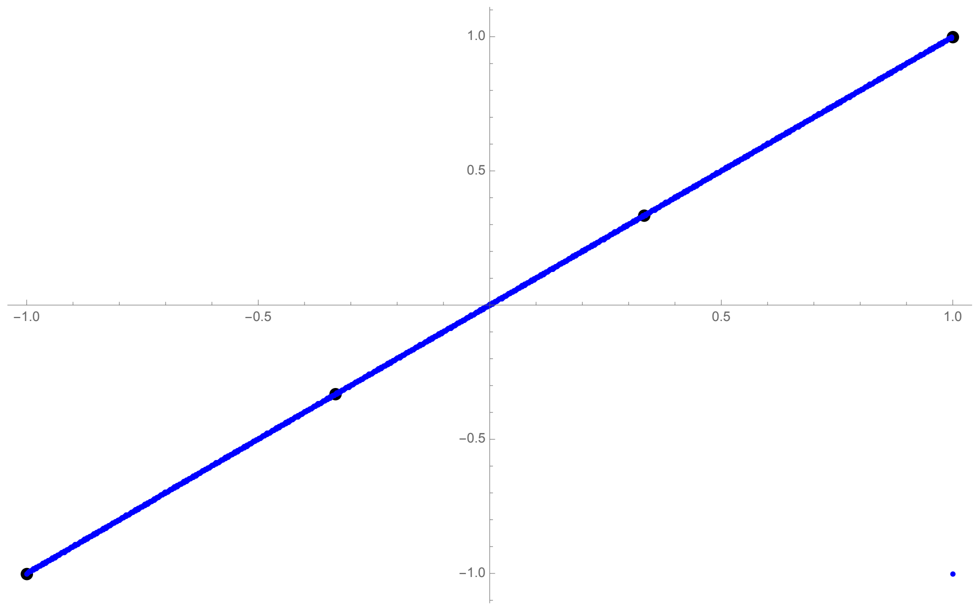

Рис. 23. Равномерная сетка, $f(x) = x$, $n = 4$.

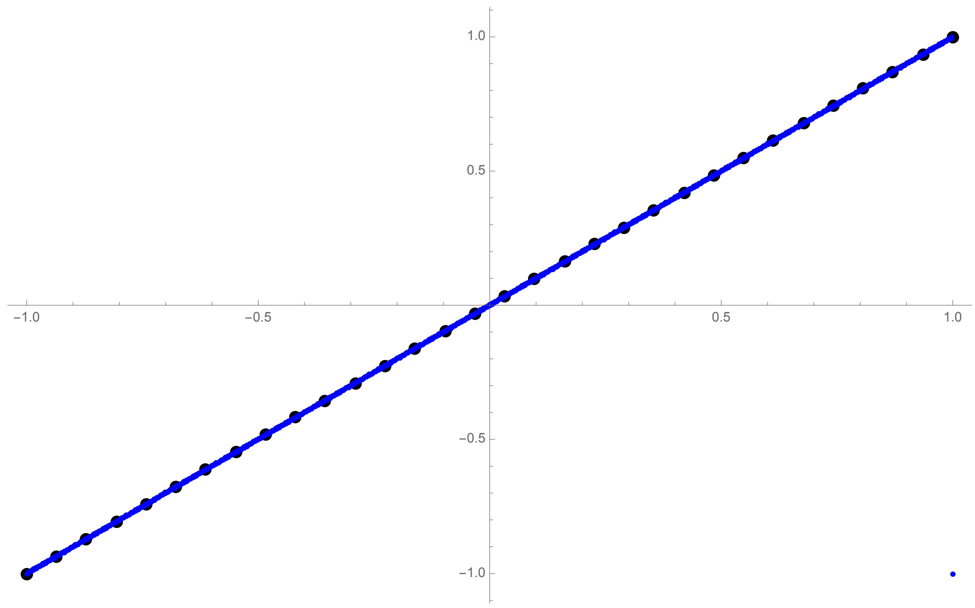

Рис. 24. Равномерная сетка, $f(x) = x$, $n = 32$.

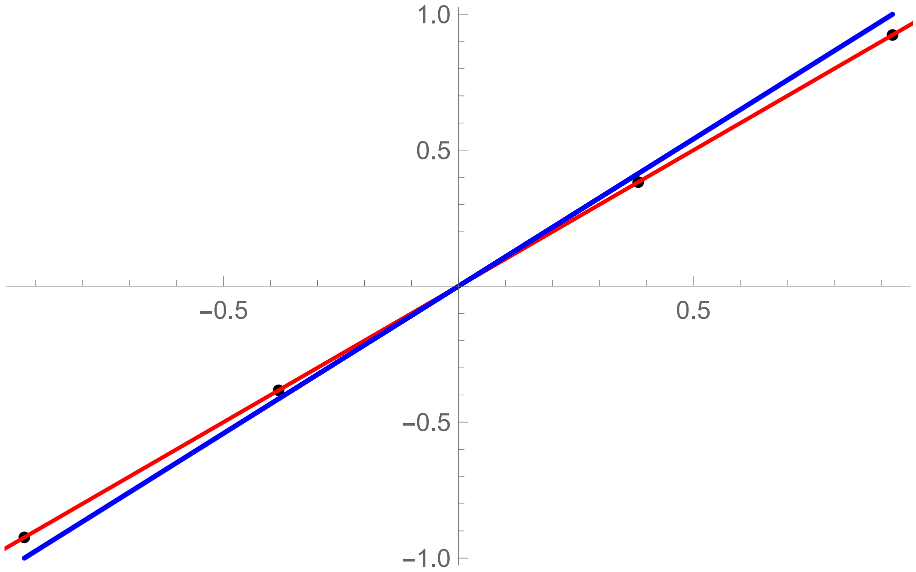

Рис. 25. Чебышевская сетка, $f(x) = x$, $n = 4$.

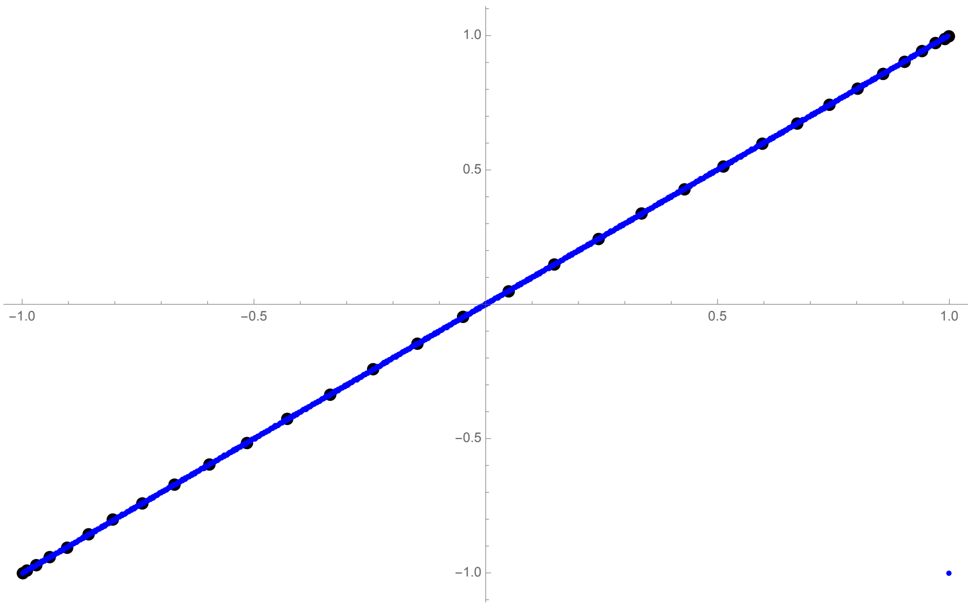

Рис. 26. Чебышевская сетка, $f(x) = x$, $n = 32$.

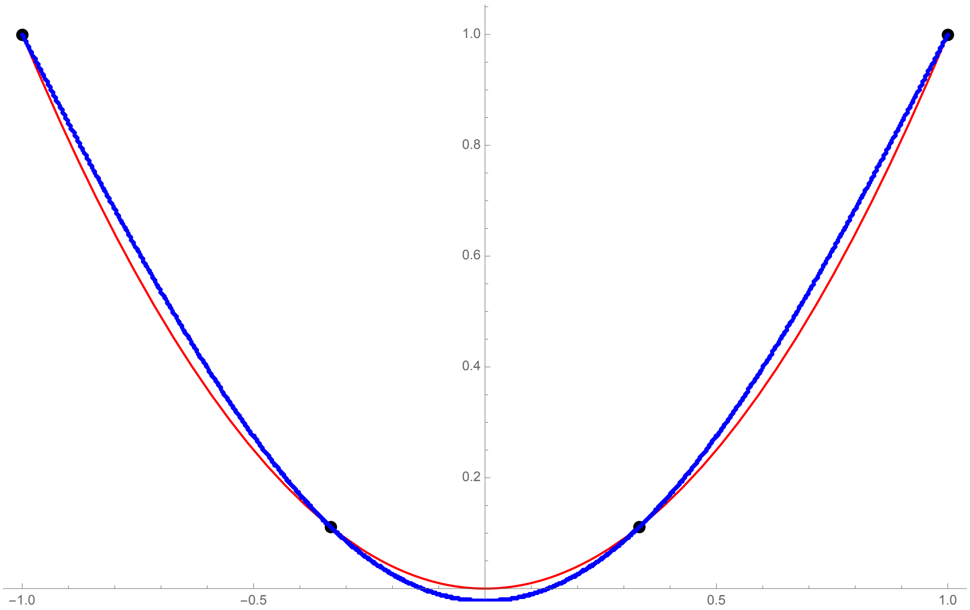

Рис. 27. Равномерная сетка, $g(x) = x^2$, $n = 4$.

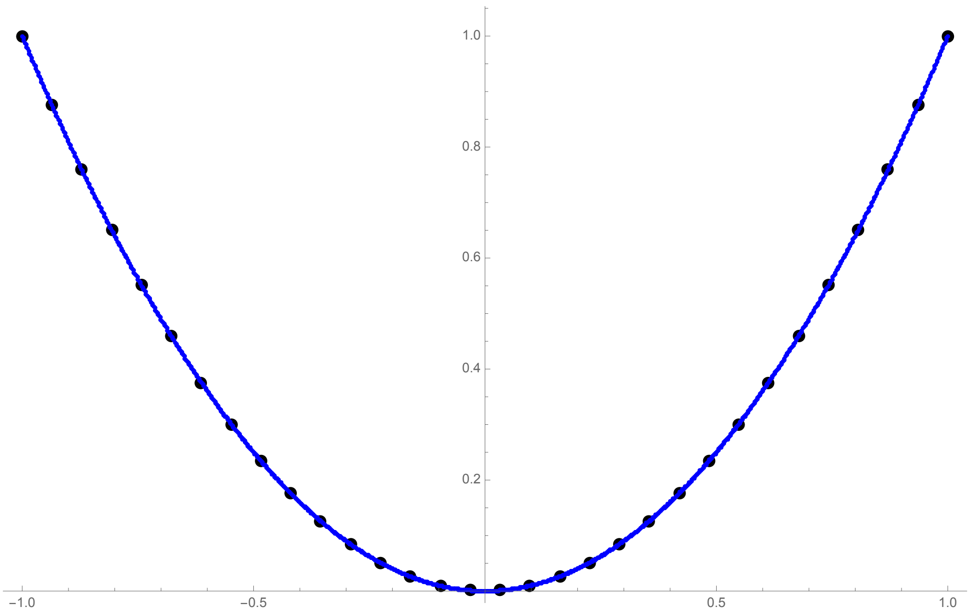

Рис. 28. Равномерная сетка, $g(x) = x^2$, $n = 32$.

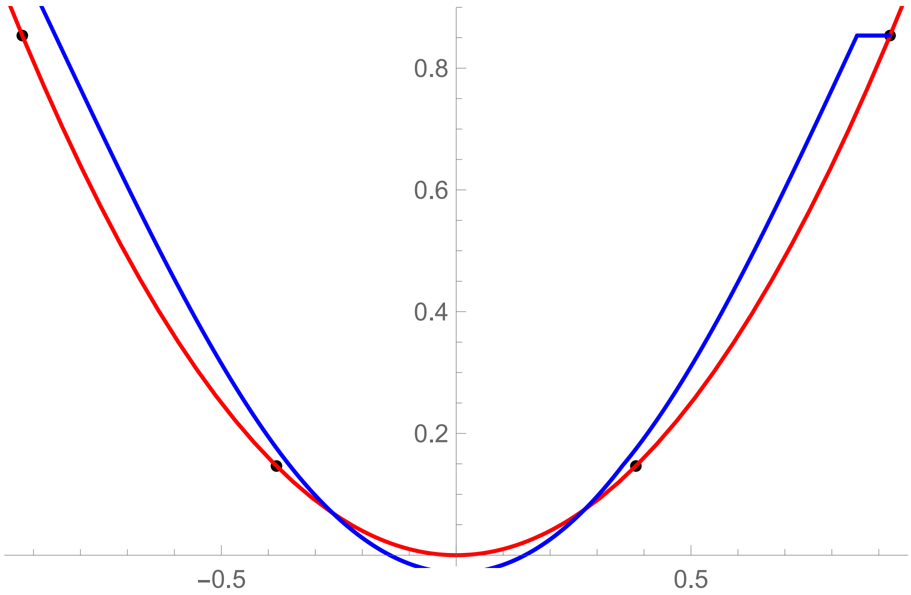

Рис. 29. Чебышевская сетка, $g(x) = x^2$, $n = 4$.

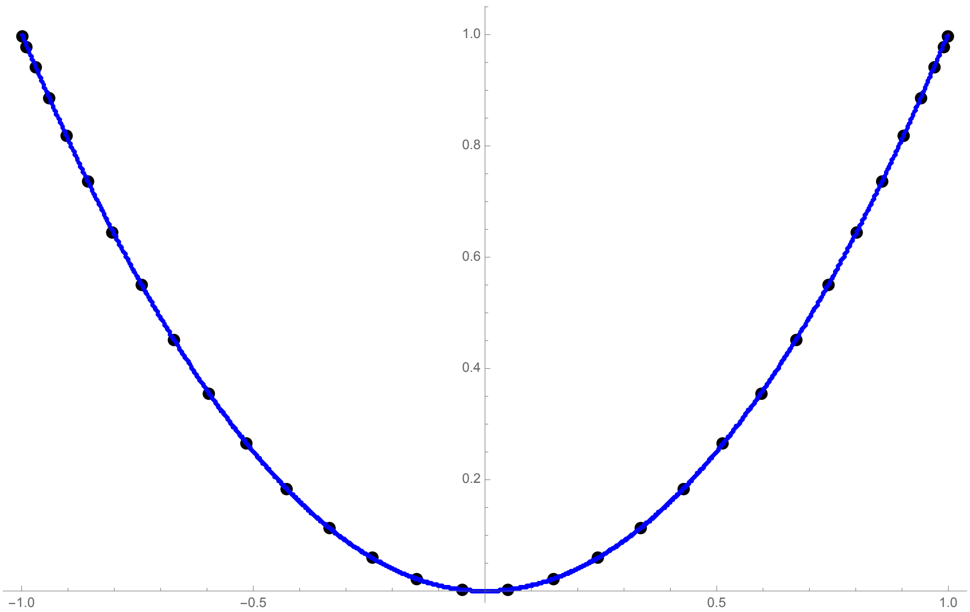

Рис. 30. Чебышевская сетка, $g(x) = x^2$, $n = 32$.

3.5. Пятый пункт

Кол-во узлов n	Лагранж на равномерной	Лагранж на чебышевской	Сплайн $[-1;1]$	Сплайн $[-1.25;1.25]$
8	7.234	8.643	5.762	1.333
16	20.811	24.471	4.588	2.323
32	-0.137	13.828	4.232	2.128
64	-30.044	-0.884	4.103	2.054
128	-62.744	-0.058	4.049	2.024

4. Контрольные вопросы

1. Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке многочленом Лагранжа (включая построение самого многочлена) на сетке с числом узлов, равным n.

   Пусть количество узлов равно n. Интерполяционный полином Лагранжа выглядит следующим образом:

   $$L(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x) y_k,$$

   где y_k — значение функции в точке x_k, а $c_k = \prod\limits_{j=0,k\neq j}^{n-1} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$.

   Вычисление арифметических операций.

   Начнем с коэффициентов c_k: нужна 1 операция деления, всего их будет $n-1$, и $n-2$ операции перемножения дробей. Таким образом, на вычисление каждого c_k требуется $2n-3$ операций. После вычисления коэффициентов c_k, нужно умножить на y_k, т.е. еще 1 операция умножения. И все это суммируется от 0 до $n-1$, т.е. $n-1-0+1=n$.

   В итоге получаем: $((2n-3)+1)n = (2n-2)n = 2n^2-2n \Rightarrow$ Всего для интерполирования функции в некоторой точке многочленом Лагранжа требуется $2n^2-2n$ мультипликативных операций.

   Для того, чтобы посчитать коэффициент $c_k(x)$ и умножить его на y_k, нужно n операций. Для подсчета суммы всех произведений $k=\overline{1,...,n}$ нужно $n \cdot n = n^2$ операций.

2. Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке кубическим сплайном (включая затраты на вычисление коэффициентов сплайна) на сетке с числом узлов, равным n.

   Для подсчета g_i нужно n операций. Для прогонки потребуется $5n$ операций. Далее для подсчета коэффициентов b_i и d_i нужно $3n+2n=5n$ операций. Итог: $n+5n+5n=11n$.

3. Функция $f(x) = e^x$ интерполируется многочленом Лагранжа на отрезке $[0, 2]$ на равномерной сетке с шагом $h = 0.2$. Оцените ошибку экстраполяции в точке $x = 2.2$, построив многочлен Лагранжа и подставив в него это значение, а также по формуле для погрешности экстраполяции.

Построение полинома Лагранжа

```
f[x_] := e^x;
x = Table[i , {i, 0, 2, 0.2}]
    таблица значений
Out[•]= {0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1., 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.}

In[•]:= n = Length@x
            длина
Out[•]= 11

In[•]:= y = Table[f[x[[i]]], {i, 1, n}]
            таблица значений
Out[•]= {1., 1.2214, 1.49182, 1.82212, 2.22554,
  2.71828, 3.32012, 4.0552, 4.95303, 6.04965, 7.38906}
```

$$\text{In[•]:= coeff[k\_, xx\_] := } \prod_{j=1}^{k-1}\left(\frac{xx - x[[j]]}{x[[k]] - x[[j]]}\right) * \prod_{j=k+1}^{n}\left(\frac{xx - x[[j]]}{x[[k]] - x[[j]]}\right);$$

$$\text{In[•]:= Lagrange[xx\_] := } \sum_{k=1}^{n} \text{coeff[k, xx] * y[[k]];}$$

```
Lagrange[2.2]

9.025013436781308`

In[•]:= f[2.2]

9.025013499434122`

In[•]:= Print["Misclosure = ", Abs[Lagrange[2.2] - f[2.2]]]
         печатать               абсолютное значение
```

Misclosure = 6.26528×10^{-8}

In[•]:= Print["Evaluation(formula) = ", $0.2^n\, e^{2.2}$]
печатать

Evaluation(formula) = 1.84832×10^{-7}

Рис. 31. Полином Лагранжа для функции $Exp[x]$. Нахождение значения этого полинома в точке $x = 2.2$. Сравнение с оценочной формулой

4. Выпишите уравнения для параметров кубического сплайна, если в узлах x_0 и x_n помимо значений функции y_0 и y_n заданы первые производные $y\prime(x_0)$ и $y\prime(x_n)$.
5. Каковы достоинства и недостатки сплайн-интерполяции и интерполяции многочленом Лагранжа?

   Интерполирование многочленом лагранжа.

   $+$: график интерполяционного многочлена Лагранжа проходит через каждую точку массива, конструируемая функция легко описывается (число подлежащих определению коэффициентов интерполяционного многочлена Лагранжа на сетке равно $n + 1$), построенная функция имеет непрерывные производные любого порядка, заданным массивом интерполяционный многочлен определен однозначно.

   $-$: погрешности вычислений, неустойчивость для большого количества узлов, степень многочлена зависит от узлов сетки, необходимость все пересчитывать при добавлении нового узла.

   Интерполирование сплайнами.

   $+$: график построенной функции проходит через каждую точку массива, конструируемая функция сравнительно легко описывается, степени многочленов не зависят от числа узлов сетки и, следовательно, не изменяются при его увеличении, построенная функция имеет непрерывные производные.

   $-$: осцилляция в окрестности точки, сильно отличающейся от соседних
6. Какие свойства полиномов Чебышева и чебышевских сеток Вам известны?
   (a) Многочлен Чебышева первого рода $T_n(x)$ характеризуется, как многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n+1}, который меньше всего отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$
   (b) Многочлен Чебышева второго рода $U_n(x)$ характеризуется, как многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^n, интеграл от абсолютной величины которого по отрезку $[-1, 1]$ принимает наименьшее значение.
   (c) Многочлены четных степеней являются четными функциями, нечетных степеней являются нечетными функциями, то есть при четном n многочлен $T_n(x)$ содержит только четные степени x и яляется четной функцией, а при нечетном n многочлен $T_n(x)$ содержит только нечетные степени x и является нечетной функцией.