Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №2

Численное решение краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности

Студент: ФН2-62Б (Группа) ______ (Подпись, дата) А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

______ (Подпись, дата) Ю. А. Сафронов (И. О. Фамилия)

Проверил: ______ (Подпись, дата) ______ (И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Исходные данные

Дано уравнение в частных производных с начальным условием и граничными условиями

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx}; \quad 0 < x < 1; \\ u(0,t) = 0; \quad u(1,t) = 0; \\ u(x,0) = \sin(\pi x). \end{cases}$$

Аналитическое решение:

$$u(x,t) = \sin(\pi x)e^{-\pi^2 t}.$$

Требуется проверить порядок аппроксимации явной, неявной и симметричной схем на аналитическом решении.

h \ τ	0.001	0.0005	0.00025
0.25	0.0278931	0.00428028	0.000470495
0.125	0.028611	0.0051571	0.000435724
0.0625	0.0289694	0.00559348	0.0008873

Рис. 1. Симметричная схема

h \ τ	0.001	0.0005	0.00025
0.001	0.00180997	0.00180994	0.00180986
0.0005	0.000906874	0.000906676	0.000906758
0.00025	0.00045426	0.000454146	0.00045408

Рис. 2. Неявная схема

h \ τ	0.001	0.0005	0.00025
0.25	0.0278931	0.00428028	0.000470495
0.125	0.028611	0.0051571	0.000435724
0.0625	0.0289694	0.00559348	0.0008873

Рис. 3. Явная схема

2. Контрольные вопросы

1. Дайте определения терминам: корректно поставленная задача, понятие аппроксимации дифференциальной задачи разностной схемой, порядок аппроксимации, однородная схема, консервативная схема, монотонная схема, устойчивая разностная схема (условно/абсолютно), сходимость.

   Задача называется корректной по Адамару в том случае, если её решение существует, единственно и непрерывно зависит от входных данных. Разностная схема аппроксимирует исходную задачу, если порядок аппроксимации РС стремится к нулю по норме при дроблении шага. РС называется однородной, если её уравнение записано одинаково и на одном шаблоне во всех узлах сетки без явного выделения особенности. РС называется консервативной, если для её решения выполняются законы сохранения. РС называется монотонной, если в одном случае её решение сохраняет монотонность по пространственной переменной при условии, что такое свойство справедливо для исходной задачи. РС называется устойчивой, если её решение непрерывно зависит от входных данных. Устойчивость называется безусловной, если её наличие или отсуствие не зависит от соотношения между шагами, иначе условной. СХОДИМОСТЬ = УСТОЙЧИВОСТЬ + ПОРЯДОК АППРОКСИМАЦИИ.

2. Какие из рассмотренных схем являются абсолютно устойчивыми? Какая из рассмотренных схем позволяет вести расчеты с более крупным шагом по времени?

   Смешанная разностная схема, определяемая параметром σ, устойчива, если

   $$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{c\rho h^2}{4\tau \max K(x)}.$$

   Отсюда следует, что смешанная схема с $\sigma > \frac{1}{2}$, в частности, неявная схема устойчивы при любых соотношениях параметров τ и h, то есть устойчивы абсолютно. Симметричная схема (при $\sigma = \frac{1}{2}$), так как она позволяет достичь второго порядка аппроксимации.

3. Будет ли смешанная схема иметь второй порядок аппроксимации при $a_i = \dfrac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i)+K(x_{i-1})}$?

   $$a_i = \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h}\frac{dx}{K(x)}\right)^{-1} \approx \left(\frac{1}{h}\frac{h}{2}\left(\frac{1}{K(x_i)} + \frac{1}{K(x_{i-1})}\right)\right)^{-1} =$$

   $$\frac{2K(x_i)K(x_{i-1})}{K(x_i)+K(x_{i-1})},$$

следовательно, поскольку формула трапеций имеет второй порядок аппроксимации, то и схема будет иметь второй порядок аппроксимации.

4. Какие методы (способы) построения разностной аппроксимации граничных условий с порядком точности $O(\tau + h^2)$, $O(\tau^2 + h^2)$ и $O(\tau^2 + h)$ вы знаете?

   При $\sigma = 1$ (полностью неявная схема) порядок первый по времени и второй по пространству, при $\sigma = 1/2$ (симметричная схема) порядок второй и по пространству и по времени. Чтобы добиться первого порядка по времени и второго по пространству, нужно взять симметричную схему, так как другие не дают второй порядок по времени, и «испортить» порядок по пространству, взяв квадратурные формулы первого порядка для подсчета коэффициентов a_i.

5. При каких h, τ и σ смешанная схема монотонна? Проиллюстрируйте результатами расчетов свойства монотонных и немонотонных разностных схем.

   Любую разностную схему можно записать в виде:

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in S'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in G_h,$$

   где S – шаблон разностной схемы. Определим сеточный оператор:

$$Ly = D(x)y(x) - \sum_{\xi \in S'(x)} B(x,\xi)(y(\xi) - y(x)), \quad D = A(x) - \sum_{\xi \in S'(x)} B(x,\xi) \Rightarrow Ly = F.$$

   Тогда для монотонности необходимо, чтобы сетки G_h, w(множество внутренних узлов сетки) были связны, а коэффициенты A, B, D положительны. В этом случае функция y не может принимать своего максимального или минимального значения, то есть она монотонна(следует из принципа максимума).

$$\hat{y_n} = \sum_{i}^{n} \alpha_i y_{n+i}$$

   Явная двухслойная линейная однородная схема с постоянными коэффициентами монотонна в смысле сохранения монотонности профиля y тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\alpha_i \geq 0$.

6. Какие ограничения на h, τ и σ накладывают условия устойчивости прогонки?

   Прогоночные коэффициенты выглядят следующим образом:

$$A_i = \frac{\sigma}{h}a_i, \quad B_i = \frac{\sigma}{h}a_{i+1}, \quad C_i = \frac{\sigma}{h}a_i + \frac{\sigma}{h}a_{i+1} + c\rho\frac{h}{\tau},$$

   откуда следует, что $C_i > A_i + B_i$, когда $\sigma \geq 0, h > 0, t > 0$, а значит прогонка устойчива.

7. В случае $K = K(u)$ чему равно количество внутренних итераций, если итерационный процесс вести до сходимости, а не обрывать после нескольких первых итераций?

   Все зависит от вида функции $K = K(u)$ и выбора итерационного метода. В общем случае, можно сказать, что все зависит от требуемой точности.

8. Для случая $K = K(u)$ предложите способы организации внутреннего итерационного процесса или алгоритмы, заменяющие его.

   Для органазции внутреннего итерационного процесса подходит любой гибридный метод. Например, линейное приближение a_i можно получать с помощью метода Ньютона на внешних итерациях, а уточнять значение на внутренних с помощью метода простой итерации, Якоби, Зейделя, минимальных невязок и наискорейшего спуска. Также может подойти обычный метод Ньютона решения нелинейного уравнения.