Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №5

Численные решения интегральных уравнений

Студент: ФН2-62Б (Группа) — (Подпись, дата) — А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

(Подпись, дата) — Ю. А. Сафронов (И. О. Фамилия)

Проверил: (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

2022 г.

Оглавление

Результаты расчетов

Будем решать уравнение Фредгольма II рода

$$u(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b].$$

1. Часть №1

Требуется решить рассмотреть два интегральных уравнения с двумя вариантами пределов интегрирования

$$u(x) - \frac{1}{2}\int\limits_a^b (1 - x\cos(xs))u(s)ds = \frac{1}{2}(1+\sin x), \tag{1}$$

$$u(x) - \frac{1}{2}\int\limits_a^b (1 - x\cos(xs))u(s)ds = x^2 + \sqrt{x}, \tag{2}$$

$$a = 0, \quad b = 1, \quad \text{или} \quad a = 0.1, \quad b = 1.$$

1.1. Метод квадратур

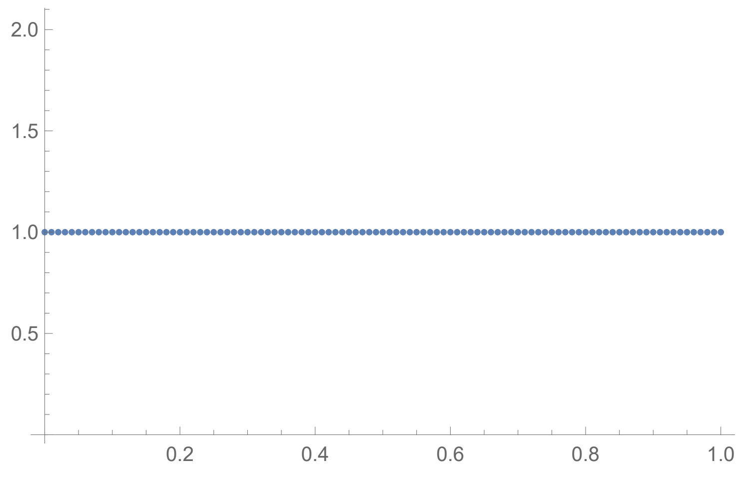

Рис. 1. Численное решение уравнения (1) для случая $a = 0, b = 1$

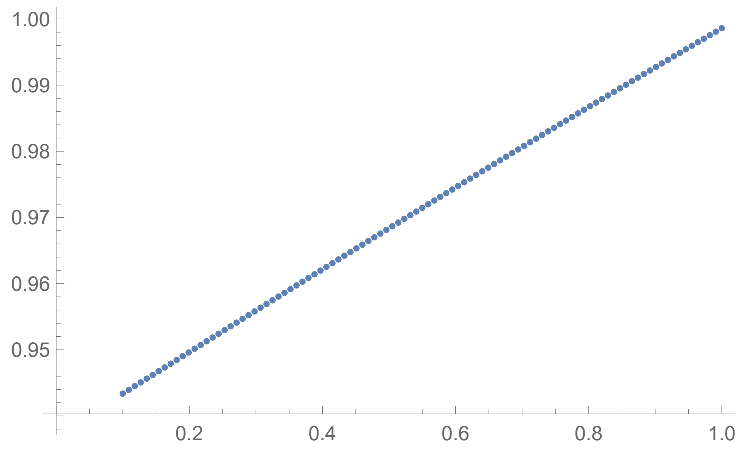

Рис. 2. Численное решение уравнения (1) для случая $a = 0.1, b = 1$

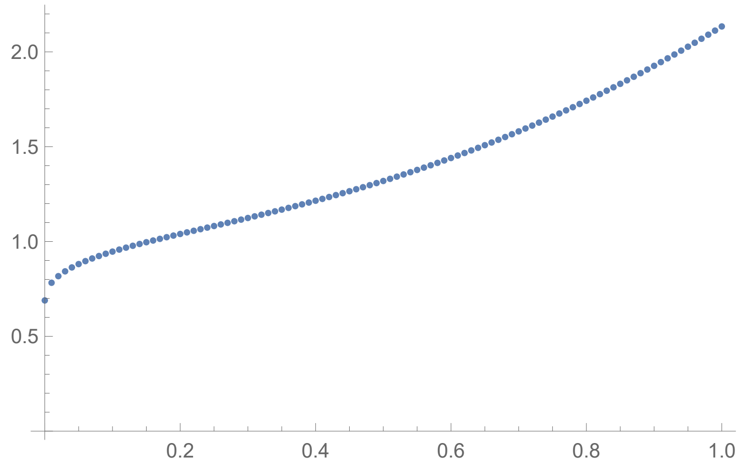

Рис. 3. Численное решение уравнения (2) для случая $a = 0, b = 1$

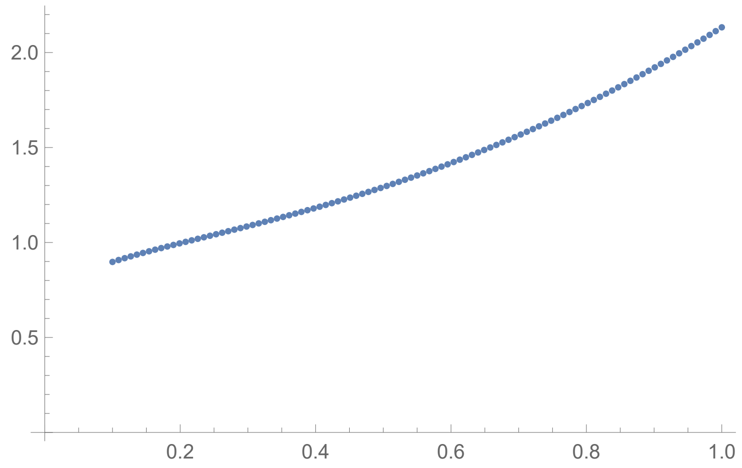

Рис. 4. Численное решение уравнения (2) для случая $a = 0.1, b = 1$

2. Контрольные вопросы

1. При выполнении каких условий интегральное уравнение Фредгольма 2 рода имеет решение? В каком случае решение является единственным?

   На вопросы существования решения этого уравнения отвечает классическая теория Фредгольма. Если $K(t,s)$, $f(t)$ – непрерывные функции на заданных отрезках, то $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ интегральное уравнение. Рассмотрим интегральное уравнение
$$u(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds = f(t),$$
   где $K(t,s)$ – ядро этого уравнения, являющееся функцией непрерывной на декартовом произведении отрезка $[a,b]$ на себя, а $\lambda \neq 0$ – параметр данного уравнения. Представим уравнение в операторном виде:
$$(I - A)(u) = f,$$
   где оператор A преобразует исходную функцию $u(t)$ в
$$v(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds,$$
   то есть действует из $C[a,b] \to C[a,b]$. Используя свойства определенного интеграла для функции $v = A(u)$ и любой точки $t \in [a,b]$ находим:
$$|v(t)| = |\lambda \int_a^b K(t,s)u(s)ds| \leq |\lambda| \int_a^b |K(t,s)u(s)|ds \leq |\lambda|(b-a) \max_{t,s\in[a,b]} |K(t,s)| \max_{t\in[a,b]} |u(t)|.$$
   Пусть $q = |\lambda|(b-a) \max\limits_{t,s\in[a,b]} |K(t,s)| < 1 \Rightarrow$
$$\|Au\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |v(t)| \leq q \max_{t\in[a,b]} |u(t)| = q \|u\|_{C[a,b]}.$$
   Таким образом $\|A\| \leq q < 1$. Значит, согласено теореме об обратном операторе $\exists S = (I - A)^{-1}$, то есть рассматриваемое интегральное уравнение имеет единственное решение $u^0 = S(f)$, причем
$$|u^0|_{C[a,b]} \leq \|S\| \|f\|_{C[a,b]} \leq \frac{1}{1-q} \|f\|_{C[a,b]}, \quad \|f\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$
   Дополнение: если однородное уравнение $f(x) = 0$ имеет только тривиальное решение, то значение параметра λ называется правильным или регулярным. Тогда у неоднородного уравнения при любой правой части $f(x)$ существует единственное решение.

2. Можно ли привести матрицу СЛАУ, получающуюся при использовании метода квадратур, к симметричному виду в случае, если ядро интегрального уравнения является симметричным, т. е. $K(x,s) = K(s,x)$?

   Да, можно. Если использовать квадратурные формулы центральных прямоугольников, то матрица системы

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda a_0^N K(x_0,s_0) & -\lambda a_1^N K(x_0,s_1) & \dots & -\lambda a_{N-1}^N K(x_0,s_{N-1}) & -\lambda a_N^N K(x_0,s_N) \\ -\lambda a_0^N K(x_1,s_0) & 1-\lambda a_1^N K(x_1,s_1) & \dots & -\lambda a_{N-1}^N K(x_1,s_{N-1}) & -\lambda a_N^N K(x_1,s_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ -\lambda a_0^N K(x_{N-1},s_0) & -\lambda a_1^N K(x_{N-1},s_1) & \dots & 1-\lambda a_{N-1}^N K(x_{N-1},s_{N-1}) & -\lambda a_N^N K(x_{N-1},s_N) \\ -\lambda a_0^N K(x_N,s_0) & -\lambda a_1^N K(x_N,s_1) & \dots & -\lambda a_{N-1}^N K(x_N,s_{N-1}) & 1-\lambda a_N^N K(x_N,s_N) \end{pmatrix}$$

   примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda\frac{h}{2}K(x_0,s_0) & -\lambda hK(x_0,s_1) & \dots & -\lambda\frac{h}{2}K(x_0,s_N) \\ -\lambda\frac{h}{2}K(x_1,s_0) & 1-\lambda hK(x_1,s_1) & \dots & -\lambda\frac{h}{2}K(x_1,s_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\frac{h}{2}K(x_{N-1},s_0) & -\lambda hK(x_{N-1},s_1) & \dots & -\lambda\frac{h}{2}K(x_{N-1},s_N) \\ -\lambda\frac{h}{2}K(x_N,s_0) & -\lambda hK(x_N,s_1) & \dots & 1-\lambda\frac{h}{2}K(x_N,s_N) \end{pmatrix}, \quad Ay = f.$$

   Поскольку $K(x,s) = K(s,x)$, то для симметричности достаточно домножить уравнения $(2) - (N-1)$ на 2, тогда

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda\frac{h}{2}K(x_0,s_0) & -\lambda hK(x_0,s_1) & \dots & -\lambda\frac{h}{2}K(x_0,s_N) \\ -\lambda hK(x_1,s_0) & 2(1-\lambda hK(x_1,s_1)) & \dots & -\lambda hK(x_1,s_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda hK(x_{N-1},s_0) & -2\lambda hK(x_{N-1},s_1) & \dots & -\lambda hK(x_{N-1},s_N) \\ -\lambda\frac{h}{2}K(x_N,s_0) & -\lambda hK(x_N,s_1) & \dots & 1-\lambda\frac{h}{2}K(x_N,s_N) \end{pmatrix}, \quad Ay = f.$$

3. Предложите способ контроля точности результата вычислений при использовании метода квадратур.

   Получаем решение на сетке с шагом h, затем решаем ту же задачи с шагом $h_2 = \frac{h}{2}$, сравниваем разницу между решениями $|I - I_2| \leq \varepsilon$ с некоторой точностью. Если необходимая точность достигается, ответ найден, в противном случае сетка продолжает дробиться.

4. Оцените возможность и эффективность применения методов квадратур, простой итерации и замены ядра при решении интегральных уравнений Вольтерры 2 рода.

Метод квадратур применим. Матрица заполняется до треугольной и решается методом Гаусса (причем за один ход – обратный).

Метод замены ядра вырожденным неприменим, так как ядро уравнения Вольтерры 2 рода не бывает вырожденным.

5. Что называют резольвентой ядра интегрального уравнения?

   Резольвентой интегрального уравнения Фредгольма 2 рода называется такая функция $R = R(s, t, \lambda)$, что решение этого уравнения представляется в виде:

$$u(s) = f(s) + \int_a^b R(s, t, \lambda) f(t) dt,$$

   где λ не является собственным числом.

6. Почему замену ядра интегрального уравнения вырожденным предпочтительнее осуществлять путем разложения по многочленам Чебышева, а не по формуле Тейлора?

   В первую очередь, полиномы Чебышева наилучшим образом приближают функцию, а также обеспечивают самую точную аппроксимацию. Кроме того, формула Тейлора записывается в окрестности точки, а значит с увеличением расстояния от точки, в которой происходит разложение, также происходит значительное увеличение погрешности аппроксимации. Таким образом, полиномы Чебышева лучше подходят для разложения ядра.

7. Какие вы можете предложить методы решения переопределенной системы (5.13), (5.17) помимо введения дополнительно переменной R?

   Переопределенные СЛАУ можно решать методом наименьших квадратов.

   Также подходит SVD-разложение:

$$AX = b, \quad A = USV^T,$$

   где U – прямоугольная ортогональная по столбцам матрица размерностью m строк на n столбцов, V – квадратная ортогональная матрица размерностью n на n, S – диагональная матрица размерностью n строк на n столбцов, содержащая сингулярные значения матрицы A, причем

$$U^T U = V^T V = E.$$

   По найденному решению X вычисляется следующим образом:

$$X = V diag\{\frac{1}{s_{ii}}\} U^T b.$$