Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №4

Численное решение краевых задач для двумерного уравнения Пуассона

Студент: ФН2-62Б (Группа) _______ (Подпись, дата) А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

_______ (Подпись, дата) Ю. А. Сафронов (И. О. Фамилия)

Проверил: _______ (Подпись, дата) _______ (И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Погрешность на точном решении

1.1. Пример №1

Требуется рассмотреть погрешность разностной схемы на точном решении и проверить порядок аппроксимации. Рассмотрим второй тестовый пример:

$$\Delta u = 0, \quad (x_1, x_2) \in G = [0,1] \times [0,1],$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_1, 0) = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x_1, 1) = 1,$$
$$u(0, x_2) = 1 + x_2, \quad u(0, x_2) = 1 + x_2.$$

Точное решение :

$$u(x_1, x_2) = 1 + x_2.$$

Проведем рассчет на равномерной сетке для разных шагов по пространственным координатам, для этих решений построим таблицу с погрешностью на точном решении в норме C пространства непрерывных функций:

h1 \ h2	0.2	2. →	0.1	2. →	0.05
0.2	0.04551	2.23527 →	0.02036	2.12304 →	0.00959
2. ↓	0.977448 ↓	2.17335 ↘	0.972302 ↓	2.05865 ↘	0.969666 ↓
0.1	0.04656	2.2235 →	0.02094	2.11729 →	0.00989
2. ↓	1. ↓	2.22456 ↘	1.00048 ↓	2.11729 ↘	1. ↓
0.05	0.04656	2.22456 →	0.02093	2.11628 →	0.00989

Рис. 1. Значение рядом со стрелочкой показывает, во сколько раз уменьшилась ошибка или уменьшился шаг

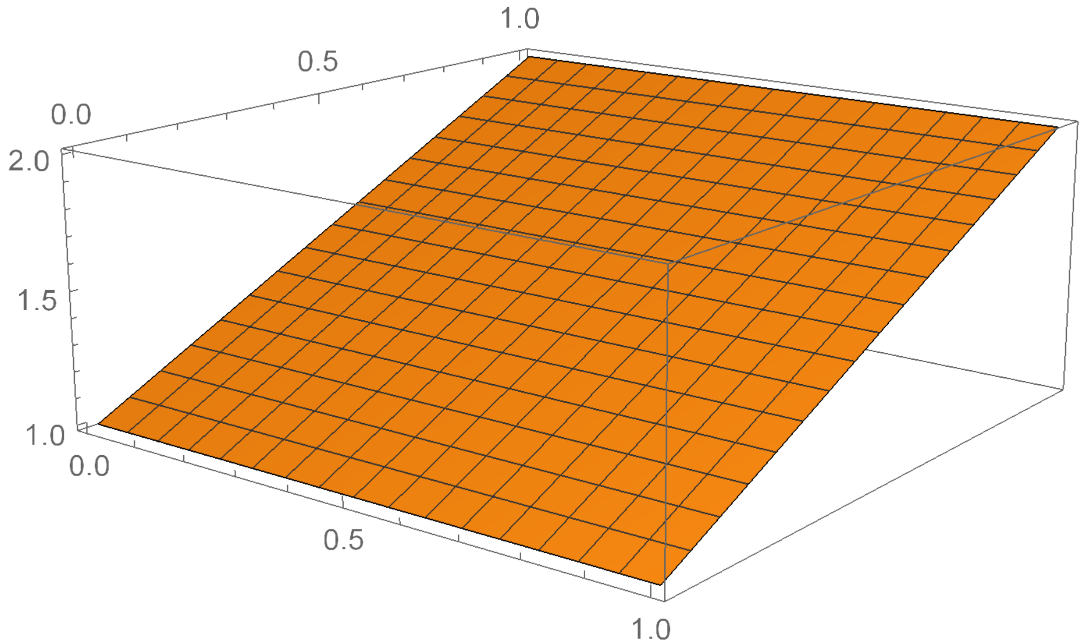

Рис. 2. График точного решения

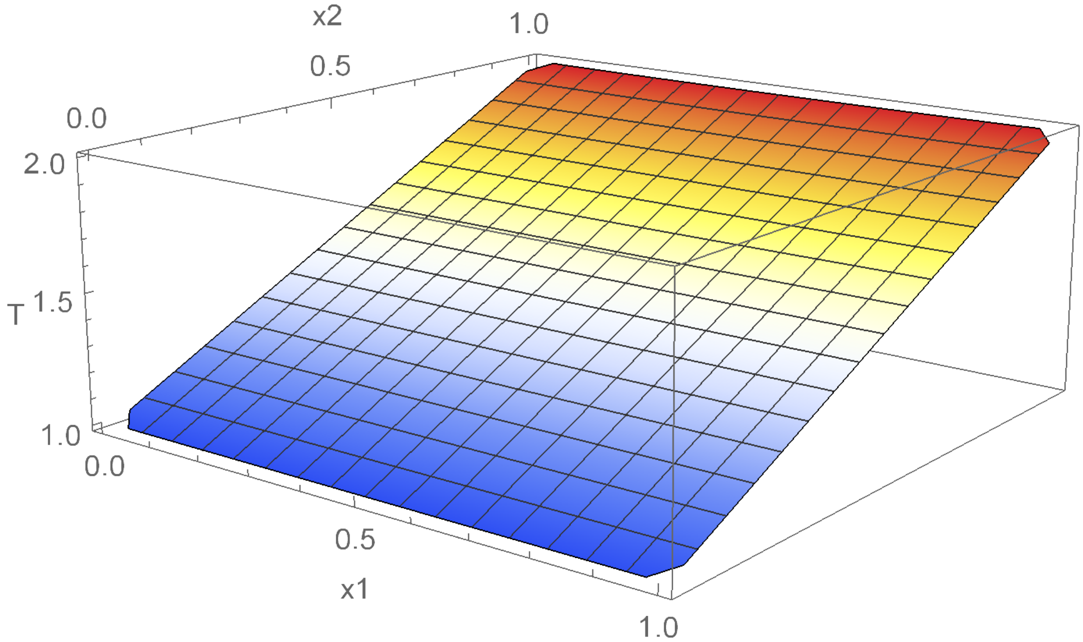

Рис. 3. График численного решения при $N_1 = 30$, $N_2 = 30$ ($h_1 = h_2 = \frac{1}{30}$)

2. Контрольные вопросы

1. Оцените число действий, необходимое для перехода на следующий слой по времени методом переменных направлений.

   Чтобы расчитать прогонку для перехода к промежуточному временному слою нужно $5(N_2-1)$ действий, для перехода от промежуточного к следующему нужно еще $5(N_1-1)$ действий. Для подсчета правой части $F_{ij}^k, j=\overline{1, N_2-1}$, нужно $3(N_2-1)$ действий, для подсчета правой части $\hat{F}_{ij}^k, i=\overline{1, N_1-1}$, нужно еще $3(N_1-1)$ действий. Итого требуется

   $$(3+5)(N_2-1)(N_1-1)+(3+5)(N_1-1)(N_2-1)=16(N_2-1)(N_1-1)=O(N_1N_2)$$

   действий (без учета подсчета $\frac{1}{h_1^2}, \frac{1}{h_2^2}$ и т.д.).

2. Почему при увеличении числа измерений резко возрастает количество операций для решения неявных схем (по сравнению с одномерной схемой)?

   Потому что матрица системы сильно увеличивается.

3. Можно ли использовать метод переменных направлений в областях произвольной формы?

   Да. Форма области влияет лишь на размерность трехдиагональной матрицы на каждой итерации.

4. Можно ли использовать метод переменных направлений для решения пространственных и вообще n-мерных задач?

   Нет. Существует локально-одномерная схема, которую можном трактовать как обобщение продольно-поперечной схемы(метод переменных направлений) на трехмерный случай (и даже на случай произвольного числа измерений).

5. Можно ли использовать метод переменных направлений на неравномерных сетках?

   Да, можно, но только на прямоугольных.