



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №3

Решение задач интерполирования

Студент: _____
ФН2-52Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. И. Токарев

(И. О. Фамилия)

(Подпись, дата)

Ю. А. Сафронов

(И. О. Фамилия)

Проверил:

(Подпись, дата)

(И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Краткое описание алгоритмов	3
1.1. Равномерная сетка	3
1.2. Чебышевская сетка	3
1.3. Задача интерполирования	3
1.4. Многочлен Лагранжа	3
1.5. Кубический сплайн	4
2. Исходные данные	5
3. Результаты расчетов	6
4. Контрольные вопросы	7

1. Краткое описание алгоритмов

1.1. Равномерная сетка

Шаг равномерной сетки постоянный и вычисляется по формуле:

$$h = \frac{b - a}{n},$$

а сами узлы имеют координаты

$$x_i = a + h \cdot i = a + \frac{b - a}{n} \cdot i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

1.2. Чебышевская сетка

Узлы вычисляются, как корни многочлена Чебышева 1-го рода, то есть точки

$$x_i = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cos \frac{(2i + 1)\pi}{2(n + 1)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

1.3. Задача интерполирования

Задан отрезок $[a, b]$. Пусть точки $x_0 \dots x_n$ — узлы интерполяции, то есть точки, лежащие внутри этого отрезка. А значения $y(x_0) = y_0, \dots, y(x_n) = y_n$ — значения искомой функции в этих точках. Последовательность $\{y_i\}_{i=0}^n$ будем называть сеточной функцией.

Таким образом, задача интерполирования заключается в построении такой функции $f(x)$, которая будет принимать в узлах те же значения, что и y_i . Геометрически это можно интерпретировать, как построение кривой, проходящей через систему точек (x_i, y_i)

1.4. Многочлен Лагранжа

Многочлен n -степени вида

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k,$$

называют **интерполяционным многочленом**, если

$$L_n(x_i) = y_i$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x) y_k, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

В соответствии с определением интерполяционного полинома получаем:

$$\sum_{k=0}^n c_k(x_i) y_k = y_i, \quad c_k(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

1.5. Кубический сплайн

Кубическим сплайном для функции $y(x)$ называют функцию $S(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S(x)$ — многочлен третьей степени;
2. функция $S(x)$, ее первая и вторая производные непрерывны на отрезке $[x_0, x_n]$;
3. значения функции $S(x)$ и исходной функции $y(x)$ совпадают в узлах интерполяции.

На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S(x) = s_i$ ищется следующим образом

$$s_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3,$$

где a_i, b_i, c_i, d_i — коэффициенты, подлежащие определению.

$$a_i = y_{i-1}$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i$$

Из условия непрерывности первой и второй производной получаем

$$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0)$$

$$S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

тогда

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}$$

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}$$

Положим $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, тогда

$$2c_1 = 0$$

$$2c_n + 6d_n h_n = 2c_{n+1} = 0$$

Введением вспомогательного параметра $g_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$ получаем систему

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} + 1 = 3(g_i - g_{i-1} - 1) \\ c_{n+1} = 0, \end{cases}$$

которая является трехдиагональной и обладает диагональным преобладанием, поэтому для нахождения коэффициентов можно использовать метод прогонки.

Остальные коэффициенты находим по формулам

$$b_i = g_i - \frac{(c_{i+1} + 2c_i)h_i}{3}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

2. Исходные данные

3. Результаты расчетов

4. Контрольные вопросы

1. Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке многочленом Лагранжа (включая построение самого многочлена) на сетке с числом узлов, равным n .

Для того, чтобы посчитать коэффициент $c_k(x)$ и умножить его на y_k , нужно n операций. Для подсчета суммы всех произведений $k = \overline{1, \dots, n}$ нужно $n \cdot n = n^2$ операций.

2. Определите количество арифметических операций, требуемое для интерполирования функции в некоторой точке кубическим сплайном (включая затраты на вычисление коэффициентов сплайна) на сетке с числом узлов, равным n .

Для подсчета g_i нужно n операций. Для прогонки потребуется $5n$ операций. Далее для подсчета коэффициентов b_i и d_i нужно $3n + 2n = 5n$ операций. Итог: $n + 5n + 5n = 11n$.

3. Функция $f(x) = e^x$ интерполируется многочленом Лагранжа на отрезке $[0, 2]$ на равномерной сетке с шагом $h = 0.2$. Оцените ошибку экстраполяции в точке $x = 2.2$, построив многочлен Лагранжа и подставив в него это значение, а также по формуле для погрешности экстраполяции.

Построение полинома Лагранжа

```

f[x_] := e^x;
x = Table[i, {i, 0, 2, 0.2}]
      [таблица значений]

Out[ ]:= {0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1., 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.}

In[ ]:= n = Length@x
      [длина]

Out[ ]:= 11

In[ ]:= y = Table[f[x[[i]]], {i, 1, n}]
      [таблица значений]

Out[ ]:= {1., 1.2214, 1.49182, 1.82212, 2.22554,
          2.71828, 3.32012, 4.0552, 4.95303, 6.04965, 7.38906}

In[ ]:= coeff[k_, xx_] :=  $\prod_{j=1}^{k-1} \left( \frac{xx - x[[j]]}{x[[k]] - x[[j]]} \right) * \prod_{j=k+1}^n \left( \frac{xx - x[[j]]}{x[[k]] - x[[j]]} \right);$ 

In[ ]:= Lagrange[xx_] :=  $\sum_{k=1}^n \text{coeff}[k, xx] * y[[k]];$ 

Lagrange[2.2]

9.025013436781308`

In[ ]:= f[2.2]

9.025013499434122`

In[ ]:= Print["Misclosure = ", Abs[Lagrange[2.2] - f[2.2]]]
      [печатать] [абсолютное значение]

Misclosure = 6.26528 × 10-8

In[ ]:= Print["Evaluation(formula) = ", 0.2^n e2.2]
      [печатать]

Evaluation(formula) = 1.84832 × 10-7

```

Рис. 1. Полином Лагранжа для функции $Exp[x]$. Нахождение значения этого полинома в точке $x = 2.2$. Сравнение с оценочной формулой

-
4. Выпишите уравнения для параметров кубического сплайна, если в узлах x_0 и x_n помимо значений функции y_0 и y_n заданы первые производные $y'(x_0)$ и $y'(x_n)$.
 5. Каковы достоинства и недостатки сплайн-интерполяции и интерполяции многочленом Лагранжа?
 6. Какие свойства полиномов Чебышева и чебышевских сеток Вам известны?