Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №5

Методы решения нелинейных уравнений

Студент: ФН2-52Б (Группа) (Подпись, дата) А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

(Подпись, дата) Ю. А. Сафронов (И. О. Фамилия)

Проверил: (Подпись, дата) (И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Краткое описание алгоритмов

1.1. Локализация корней

Дано нелинейное уравнение $f(x) = 0, \quad x \in [a,\, b]$, требуется найти все отрезки принадлежащие $[a,\, b]$, на которых уравнение имеет единственный корень, т. е. произвести локализацию корней. Для этого воспользуемся первой теоремой Больцано—Коши из классического анализа:

если непрерывная на отрезке $[a,\, b]$ функция $f(x)$, такая , что $f(a)f(b) < 0$, то $\exists c \in [a,\, b]\colon f(c) = 0$.

Соответственно, чтобы локализовать корни, нужно составить достаточно подробное дробление отрезка $[a,\, b]$ и проверить на каждом из них условие теоремы. Составим дробление отрезка: $a_1 = a, a_2 = a + h, ...a_{n-1} = b - h, a_n = b$, где h — шаг дробления, а n — количество точек, включая концы отрезка.

1.2. Метод бисекций

Пусть теперь $[a_i,\, a_{i+1}] \subset [a,\, b]$ — отрезок локализации $f(x)$, т.е. $f(a_i)f(a_{i+1}) < 0$. Найдем корень уравнения $f(x) = 0$ на i-ом отрезке локализации с наперед заданной точностью ε.

1. Обозначим $\alpha_0 = a_i$, $\beta_0 = a_{i+1}$, тогда $x_0 = \dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{2}$;
2. Если $\left|\dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{2}\right| < 2\varepsilon$, то корень найден, $x^* = x_0$, иначе идем к пункту 3;
3. Если $f(x_0)f(\alpha_0) < 0$, то $\alpha_1 = \alpha_0$, $\beta_1 = x_0$. Если $f(x_0)f(\beta_0) < 0$, то $\alpha_1 = x_0$, $\beta_1 = \beta_0$. Тогда $x_1 = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2}$;
4. Если $\left|\dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{4}\right| < 2\varepsilon$, то корень найден $x^* = x_1$, иначе повторяем процедуру из пункта 3 для последующих значений $x_1, x_2, ...x_k$ до тех пор, пока не выполнится условие $\left|\dfrac{\beta_k - \alpha_k}{2^{k-1}}\right| < \varepsilon$. Тогда $x^* = x_k$.

Данный метод повторяем для всех отрезков локализации.

1.3. Метод Ньютона

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности известного приближения корня x_k, пренебрегая величинами больше второго порядка малости и принимая истинное значение корня за x_{k+1}, тогда уравнение примет вид

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0,$$

отсюда получим итерационную формулу метода Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2...$$

2. Исходные данные

Вариант 20: интервал — $[-1, 0]$

$f(x) = \sin\left(\dfrac{x^3\sqrt{13} - 9x - 5 - \sqrt{17}}{10}\right) + \tan\left(\dfrac{x^2 + x + 2^{\frac{1}{3}}}{3x - 5}\right) + 0.6.$

Вариант 23: интервал — $[-1, 0]$

$f(x) = \sin\left(\dfrac{-2x^2 - x\sqrt{10} + 1}{4}\right) + \left(\dfrac{x^2 + x(\sqrt{2} + \sqrt{7}) + 1 - \sqrt{5}}{x\sqrt{7} - \sqrt{5}}\right)^{\ln 2} - 0.1.$

3. Результаты расчетов

4. Контрольные вопросы

1. Можно ли использовать методы бисекции и Ньютона для нахождения кратных корней уравнения $f(x) = 0$ (т. е. тех, в которых одна или несколько первых производных функций $f(x)$ равны нулю)? Обоснуйте ответ.

   Метод бисекции можно использовать для абсолютно любой функции в любых ситуациях, так как он не использует никакую информацию о функции, кроме значения в точках. На отрезке локализации он найдет корень, но не всегда быстро. Метод Ньютона не сойдется при условии, что первая производная в корне равна нулю в силу построения итерационного метода. Покажем это явно:

   $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad f'(x_k) \to 0, \quad k \to \infty, \quad x_{k+1} \to -\infty.$$

   Поскольку для кратных корней как минимум первая производная обращается в ноль, то методом Ньютона такие корни не найти.

2. При каких условиях можно применять метод Ньютона для поиска корней уравнения $f(x) = 0$? При каких ограничениях на функцию $f(x)$ метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости? В каких случаях можно применять метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений?

   Если в некоторой окрестности корня x^* выполнены условия $|f'(x)| > m > 0$, $|f''(x)| < M$, $\dfrac{|f(x)F''(x)|}{(f'(x))^2} < 1$, где m, M — константы, то при попадании очередного приближения x_s в эту окрестность итерационный процесс по методу Ньютона будет сходиться с квадратичной скоростью: $|x_{k+1} - x^*| < C|x_k - x^*|^2, \quad k = s, s+1, s+2, ...$

3. Каким образом можно найти начальное приближение?
4. Можно ли использовать метод Ньютона для решения СЛАУ?
5. Предложите альтернативный критерий окончания итераций в методе бисекции, в котором учитывалась бы возмоность попадания очередного приближения в очень малую окрестность корня уравнения.
6. Предложите различные варианты модификаций метода Ньютона. Укажите их достоинства и недостатки.
7. Предложите алгоритм для исключения зацикливания метода Ньютона и выхода за пределы области поиска решения?