



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## Отчёт по лабораторной работе №4

### *Методы решения проблемы собственных значений*

Студент: \_\_\_\_\_  
ФН2-52Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А. И. Токарев  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Ю. А. Сафронов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Проверил:

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2021 г.

## Оглавление

1. Краткое описание алгоритмов . . . . .	3
2. Исходные данные . . . . .	3
3. Результаты расчетов . . . . .	4
4. Контрольные вопросы . . . . .	4

# 1. Краткое описание алгоритмов

## 1.1. Метод $QR$ разложения

Один из способов нахождения собственных значений квадратной матрицы — приведение данной матрицы к треугольному виду преобразованием подобия

$$R = P^{-1}AP,$$

где  $P$ —невырожденная матрица, которую можно найти, используя  $QR$ —алгоритм. Рассмотрим метод  $QR$ —разложения или алгоритмом Френсиса-Кублановской.

На первой итерации строится  $QR$ —разложение матрицы  $A^{(0)} = A$ :

$$A^{(0)} = Q_1 R_1, \quad R_1 = Q_1^{-1} A^{(0)}.$$

Затем вычислим матрицу  $A^{(1)} = R_1 Q_1$  или  $A^{(1)} = Q_1^{-1} A^{(0)} Q_1$ .

Видим, что  $A^{(0)}$  и  $A^{(1)}$  подобны и имеют один и тот же набор собственных значений. На второй итерации найдём  $QR$ —разложение матрицы  $A^{(1)}$  и вычисляется  $A^{(2)}$ . На  $(k+1)$ —ой итерации определим разложение  $A^{(k)} = Q_{k+1} R_{k+1}$  и построим матрицу

$$A^{(k+1)} = R_{(k+1)} Q_{(k+1)} = Q_{(k+1)}^{-1} A^{(k)} Q_{k+1}.$$

Получим последовательность матриц  $\{A^{(k)}\}$ , в том случае, если собственные значения  $A$  вещественны и различны по модулю, т.е.  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ , сходится к верхнетреугольной матрице. Отметим, что элементы  $a_{ij}^{(k)}$  матриц  $A^{(k)}$ , стоящие ниже главной диагонали, сходятся к нулю со скоростью геом-ой прогрессии, т.е.:

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right| \cdot |a_{ij}^{(k-1)}|, \quad i > j, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отметим, что среди С.Ч матрицы  $A$  есть близкие величины, то есть

$$\left| \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right| \approx 1,$$

то сходимость будет очень медленной. Поэтому используют алгоритм со сдвигами: ищем собственные значения матрицы  $\tilde{A} = A - \sigma E$ , которые равны  $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i - \sigma$ . В таком случае скорость сходимости  $QR$ —алгоритма определяется величиной

$$\left| \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_j} \right| = \left| \frac{\lambda_i - \sigma}{\lambda_j - \sigma} \right|.$$

## 1.2. Метод обратных итераций

Если известно собственное значение  $\lambda_i$  матрицы  $A$  или точное приближение  $\lambda_i^*$ , то можно рассмотреть задачу нахождения собственного вектора, отвечающему данному собственному значению.

Собственный вектор  $e_i$  ищем как нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda_i E)e_i = 0$$

с вырожденной матрицей  $(A - \lambda_i E)$ . Когда  $\lambda_i$  известно приближенно, тогда нужно решать систему

$$(A - \lambda_i^* E)e_i,$$

решение которой может быть только тривиальным, так как матрица  $(A - \lambda_i^* E)$  невырождена. Поэтому численное решение данной системы не даёт возможности вычислить соответствующий собственный вектор.

Тогда рассмотрим **метод простых итераций**. Каждая итерация данного метода состоит из двух этапов:

1. На первом этапе решается система

$$(A - \lambda_i^* E)y^{(k+1)} = x^{(k)}$$

относительно неизвестного вектора  $y^{k+1}$ .

2. На втором этапе производится нормировка решения:

$$x^{(k+1)} = \frac{y^{(k+1)}}{\|y^{(k+1)}\|}.$$

В качестве  $x^{(0)}$  можно взять любой нормированный вектор. При условии, что известное приближение  $\lambda_i^*$  достаточно близко к истинному значению  $\lambda_i$ , последовательность векторов  $x^k$  быстро сходится к собственному вектору  $e_i$ , соответствующему собственному значению  $\lambda_i$ .

## 2. Исходные данные

Даны матрицы ( $dim = 4$ ):

$$A_{20} = \begin{pmatrix} 99.4000 & -2.9000 & -9.9800 & 0.6300 \\ -2.9000 & 106.4000 & -9.4300 & -8.0200 \\ -9.9800 & -9.4300 & -159.4000 & -5.8900 \\ 0.6300 & -8.0200 & -5.8900 & 58.2000 \end{pmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} -182.2000 & 1.6100 & 7.6500 & -9.1000 \\ 1.6100 & -43.4000 & 5.5400 & -6.8500 \\ 7.6500 & 5.5400 & 12.6000 & 9.3200 \\ -9.1000 & -6.8500 & 9.3200 & -77.2000 \end{pmatrix}$$

### 3. Результаты расчетов

#### 4. Контрольные вопросы

1. Почему нельзя находить собственные числа матрицы  $A$ , прямо решая уравнение  $\det(A - \lambda E) = 0$ , а собственные векторы — «по определению», решая систему  $(A - \lambda_i E)e_i = 0$ ?

Для нахождения собственных чисел матрица, нам надо составить характеристический многочлен и найти его корни, что для многочленов высокой степени является трудоемким процессом. Данный подход становится неудовлетворительным, если речь идёт о вычислении собственных значений матриц, имеющих порядок  $m$  в несколько десятков (или даже сотен). Одна из причин состоит в том, что  $Ax = \lambda x$  и  $\lambda^m + p_1\lambda^{m-1} + p_2\lambda^{m-2} + \dots + p_{m-1}\lambda + p_m = 0$  формально эквивалентны, они имеют разную обусловленность. Так как корни многочлена  $P_m(x)$  высокой степени срезвычайно чувствительны к погрешностям в коэффициентах, то на этапе вычисления коэффициентов характеристического уравнения может быть в значительной степени потеряна информация о собственных значениях матрицы. Если исходить непосредственно из определения собственного вектора, то  $e_i$  следует искать как нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda_i E)e_i = 0$$

с вырожденной матрицей  $(A - \lambda_i E)$ . Но обычно  $\lambda_i$  известно лишь приближенно, и в действительности приходится решать систему

$$(A - \lambda_i^* E)e_i = 0,$$

где  $\lambda_i^*$  — достаточно точное приближение к собственному значению  $\lambda_i$ . Решение данной системы быть только тривиальным, так как матрица  $(A - \lambda_i^* E)$  невырождена. Поэтому непосредственное численное решение не дает возможности вычислить соответствующий собственный вектор.

2. **Докажите, что ортогональное преобразование подобия сохраняет симметрию матрицы.**

Ортогональное преобразование подобия имеет вид:

$$R = P^{-1} A P,$$

где  $P^{-1} = P^T$ ,  $A = A^T$ . Тогда

$$\begin{aligned} R^T &= (P^{-1} A P)^T = (A P)^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^{-1} A P = R, \\ &\implies R^T = R. \end{aligned}$$

3. **Как преобразование подобия меняет собственные векторы матрицы?**

Можно рассматривать матрицу  $P$  как матрицу перехода.  $B = P^{-1} A P$  матрицы  $A$  и  $B$  подобны.

Полученная в результате преобразования подобия матрица имеет тот же набор собственных чисел:

$$\begin{aligned} \det(P^{-1} A P - \lambda E) &= \det(P^{-1}(A - \lambda E) P) = \\ &= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda E) \det(P) = \det(A - \lambda E). \end{aligned}$$

Таким образом, характеристические многочлены и собственные числа матриц  $A$  и  $P^{-1} A P$  совпадают. Соответствующие собственные векторы  $x$  и  $x'$  не совпадают, но, т.к.  $P^{-1} A P x' = \lambda x' \Rightarrow A P x' = \lambda P x'$ , они связаны равенством  $x = P x'$ .

4. **Почему на практике матрицу  $A$  подобными преобразованиями вращения приводят только к форме Хессенберга, но не к треугольному виду?**

Рассматривая алгоритм подобных преобразований вращения, заметим, что обнуляются все элементы, лежащие левее элемента стоящего на поддиагонали, то построив такую последовательность элементарных вращений, которая приведет матрицу  $A$  к форме Хессенберга:

$$A^* = T_{kl} A T_{kl}^{-1} = T_{kl} A T_{kl}^T$$

где  $T_{kl}$ -матрица, в которой все элементы главной диагонали равны 1, кроме элементов стоящих на пересечении  $k$ -ых столбца и строки и  $l$ -ых столбца и строки(они равны  $\alpha = \cos \varphi$ ), а все элементы вне главной диагонали равны 0, за исключением элемента на пересечении  $k$ -ого столбца и  $l$ -ой строки(он равен  $-\beta = -\sin \varphi$ ) и элемента стоящего на пересечении  $l$ -ого столбца и  $k$ -ой строки(он равен  $\beta = \sin \varphi$ ), а  $A^*$  отличается от матрицы  $A$  лишь двумя

строками и двумя столбцами с номерами  $k, l$ , при этом в матрице  $A^*$  элемент  $a_{l,k-1}^* = 0$ .

По построению матриц  $T_{kl}$  видно, что  $k > l$  и  $k > 1$ , а значит можем сделать вывод, что не возможно данными преобразованиями занулить поддиагональные элементы.

**5. Оцените количество арифметических операций, необходимое для приведения произвольной квадратной матрицы  $A$  к форме Хессенберга.**

Для вычисления элементов матрицы  $T_{kl}$  требуется 5 мультипликативных операций. Необходимо обнулить все элементы ниже диагонали, примыкающей к главной в столбцах с 1 по  $n - 2$ . В  $k$ -ом столбце необходимо обнулить  $n - k - 1$  элемент. Умножение слева и справа на матрицы  $T_{kl}$  и  $T_{kl}^T$  соответственно изменяет в матрице  $A$   $4n - 2k + 2$  элемента. Для изменения одного элемента требуется 2 мультипликативные операции. В итоге получаем:

$$\sum_{k=1}^{n-2} 5 \cdot (n - k - 1)(4n - 2k + 2) \cdot 2 = \frac{50n^3}{3} - 40n^2 + \frac{10n}{3} + 20.$$

**6. Сойдется ли алгоритм обратных итераций, если в качестве начального приближения взять собственный вектор, соответствующий другому собственному значению? Что будет в этой ситуации в методе обратной итерации, использующем отношение Рэлея?**

В качестве начального приближения в методе обратных итераций можно взять любой нормированный вектор. Пусть  $e_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  — ОНБ из собственных векторов матрицы  $A$ .

$$\begin{aligned} (A - \lambda_j^* E)y &= x; \\ y &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i; \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_j^*) &= \sum_{i=1}^n c_i e_i; \\ \alpha_i &= \frac{c_i}{\lambda_i - \lambda_j^*}; \\ y &= \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{\lambda_i - \lambda_j^*} e_i = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j^*} \left( c_j e_j + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_j - \lambda_j^*}{\lambda_i - \lambda_j^*} c_i e_i \right). \end{aligned}$$

Если в качестве начального приближения взять собственный вектор, соответствующий другому собственному числу:

$$y = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j^*} \left( c_j e_j + \frac{\lambda_j - \lambda_j^*}{\lambda_k - \lambda_j^*} c_k e_k \right).$$



Если  $|\lambda_j - \lambda_j^*| \ll |\lambda_k - \lambda_j^*|$ , то второе слагаемое правой части мало по сравнению с первым. Следовательно алгоритм сойдется к  $e_j$ .

Если в методе обратных итераций использовать отношение Рэлея, а в качестве начального приближения  $x^{(0)}$  выбрать собственный вектор  $e_k$ , соответствующий другому собственному значению, то метод сойдется к собственному числу, соответствующему собственному вектору  $e_k$ .

**7. Сформулируйте и обоснуйте критерий останова для  $QR$ -алгоритма отыскания собственных значений матрицы.**

Так как последовательность матриц  $A_k$  сходится к верхнетреугольной матрице  $R$ , на главной диагонали которой стоят собственные значения, то используя тот факт, что  $QR$ -алгоритм последовательно обнуляет элементы начиная с  $a_{n,1}$  до  $a_{n,n-1}$ , то итерационный метод поиска собственного значения следует продолжать пока не будет выполняться неравенство  $|a_{n,n-1}| < \varepsilon$ , затем считая что  $\lambda_i = a_{n,n}$  переходить к задаче меньшей размерности т.е. искать спектр матрицы размерности  $(n-1) \times (n-1)$ .

**8. Предложите возможные варианты условий перехода к алгоритму со сдвигами. Предложите алгоритм выбора величины сдвига.**

При помощи леммы Гершгорина можем оценить диапазон собственных значений и в случае, если оценка диапазона меньше единицы, то мы получим достаточное условие того, что отношение собственных значений близко к единице, и можно будет перейти к алгоритму со сдвигами, взяв в качестве величины сдвига среднее значение из оценки диапазона.

Так же если элементы  $a_{ij}^{(k)}$  матриц  $A^{(k)}$ , стоящие ниже главной диагонали  $\frac{a_{ij}^{(k)}}{a_{ij}^{(k-1)}} \leq \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right| \approx 1, i > j, k = 1, 2, \dots$ , то алгоритм будет сходиться очень медленно и следует переходить к алгоритму со сдвигами. В качестве величины сдвига можно взять  $a_{n,n}^{(k)}$ .

**9. Для чего нужно на каждой итерации нормировать приближение к собственному вектору?**

Если  $|\lambda| > 1$ , то последовательность норм векторов стремится к бесконечности, если  $|\lambda| < 1$ , то последовательность норм векторов стремится к нулю и возможно исчезновение порядка. Для предупреждения этих ситуаций вектор  $x^k$  нормируют. То есть приближение к собственному вектору необходимо нормировать для того чтобы застраховаться от накопления погрешностей и выхода значений переменных за пределы типа.

**10. Приведите примеры использования собственных чисел и собственных векторов в численных методах.**

- 
- 1) С помощью собственных чисел можно сделать вывод о числе обусловленности матрицы.
  - 2) В электрических и механических системах собственные числа отвечают собственным частотам колебаний, а собственные векторы характеризуют соответствующие формы колебаний.
  - 3) Одна из задач, которая дает геометрическую интерпретацию собственных векторов, есть приведение кривых второго порядка к каноническому виду. Собственные вектора образуют главные направления кривых второго порядка.