



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №1

Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Студент: _____
ФН2-62Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. И. Токарев

(И. О. Фамилия)

(Подпись, дата)

Ю. А. Сафронов

(И. О. Фамилия)

Проверил:

(Подпись, дата)

(И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Исходные данные	3
2. Результаты расчетов	3
3. Анализ результатов	4
4. Контрольные вопросы	5

1. Исходные данные

Модель Лотки - Вольтерры динамики системы «хищник-жертва»

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x'_1 = r_1 x_1 - b_{11} x_1^2 - b_{12} x_1 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x'_2 = -r_2 x_2 - b_{22} x_2^2 + b_{21} x_1 x_2 \\ r_1 = 0.4, \quad r_2 = 0.1, \quad b_{11} = 0.05, \\ b_{12} = 0.1, \quad b_{21} = 0.08, \quad b_{22} = 0.003, \\ t = 0 \dots 150, \\ x_1(0) = 1.0, \quad x_2(0) = 4.0. \end{array} \right.$$

2. Результаты расчетов

3. Анализ результатов

4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте условия существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Выполнены ли они для вашего варианта задания?

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Для того, чтобы существовало решение задачи Коши достаточно, чтобы функция $f(x, y)$ была непрерывна в ограниченной замкнутой области $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$. Чтобы решение было единственным, должно выполняться условие Липшица по правому аргументу (или должна существовать непрерывная частная производная по y), т.е.

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \exists L > 0: |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Для системы

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2) \\ x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \end{cases}$$

если в области $G \subset \mathbb{R}^3$ функции f_1, f_2 непрерывны и имеют непрерывные частные производные по x_1, x_2 , то в некотором интервале существует единственное решение системы, удовлетворяющее начальным условиям.

Для модели Лотки - Вольтерры:

$$\begin{cases} f_1 = r_1 x_1 - b_{11} x_1^2 - b_{12} x_1 x_2; \\ f_2 = -r_2 x_2 - b_{22} x_2^2 + b_{21} x_1 x_2; \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = r_1 - 2b_{11} x_1 - b_{12} x_2; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -b_{12} x_1; \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = b_{21} x_2; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -r_2 - 2b_{22} x_2 + b_{21} x_1; \end{cases}$$

функции непрерывны всюду на \mathbb{R}^3 , точка $(0, 1.0, 4.0) \in \mathbb{R}^3$, значит существует единственное решение задачи Коши.

2. Что такое фазовое пространство? Что называют фазовой траекторией? Что называют интегральной кривой?

Фазовое пространство — это пространство, каждая точка которого соответствует одному состоянию из множества всех возможных состояний системы.

Траекторию движения в фазовом пространстве называют фазовой траекторией.

Интегральной кривой называется график решения дифференциального уравнения. Фазовая траектория является проекцией интегральной кривой.

3. Каким порядком аппроксимации и точности обладают методы, рассмотренные в лабораторной работе?
 - (а) Явный метод Эйлера — первый порядок
 - (б) Неявный метод Эйлера — второй порядок
 - (с) Симметричная схема — первый порядок
 - (д) Метод РК 2-го порядка — второй порядок
 - (е) Метод РК 4-го порядка — четвертый порядок
 - (f) Метод прогноза и коррекции — четвертый порядок
4. Какие задачи называются жесткими? Какие методы предпочтительны для их решения? Какие из рассмотренных методов можно использовать для решения жестких задач?

Система ОДУ $y' = Ay$ с постоянной матрицей A называется жесткой, если все собственные числа $A = A_{n \times n}$ имеют отрицательную действительную часть ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, n$), причем число $S = \frac{\max |\operatorname{Re} \lambda|}{\min |\operatorname{Re} \lambda|}$, называемое числом жесткости, велико. Для решения жестких задач используются неявные методы, так как они обладают лучшими свойствами устойчивости. Из рассмотренных можно использовать неявный метод Эйлера, симметричную схему.
5. Как найти $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$, чтобы реализовать алгоритм прогноза и коррекции?
6. Какой из рассмотренных алгоритмов является менее трудоемким? Какой из рассмотренных алгоритмов позволяет достигнуть заданную точность, используя наибольший шаг интегрирования? Какие достоинства и недостатки рассмотренных алгоритмов вы можете указать?
7. Какие алгоритмы, помимо правила Рунге, можно использовать для автоматического выбора шага?