

Проверил:

# Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

## «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ		Фундаментальные нау	КИ		
КАФЕДРА	Прикладная математика				
	Отчёт по л	абораторной рабо	оте №1		
Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений					
Студент:	ФН2-52Б		Ю. А. Сафронов		
Студент.	(Группа)	(Подпись, дата)	(И.О. Фамилия)		

(Подпись, дата)

(И.О. Фамилия)

## Оглавление

1.	Краткое описание алгоритмов	3
	1.1. Метод Гаусса	3
	1.2. Метод <i>QR</i> -разложения	4
2.	Исходные данные	6
3.	Результаты расчетов	7
4.	Анализ результатов	8
5	Контрольные вопросы	g

### 1. Краткое описание алгоритмов

Дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = f_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

#### 1.1. Метод Гаусса

Сначала система (1) приводится прямым ходом к верхнетреугольному виду:

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(0)}x_n = f_1^{(0)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n = f_{n-1}^{(n-2)}, \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = f_n^{(n-1)}. \end{cases}$$

Коэффициенты  $a_{ij}^{(k)}$  и  $f_i^{(k)}$  вычисляются следующим образом

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - c_{ik}a_{kj}^{(k-1)}, \quad f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - c_{ik}f_k^{(k-1)}$$

где

$$c_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad f_i^{(0)} = f_i, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{k, n}, \quad i = \overline{k+1, n}.$$

Далее производится обратный ход метода, во время которого определяются неизвестные  $x_i$ , начиная с i=n:

$$x_i = \left(f_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j\right) / a_{ii}^{(i-1)}, \quad i = \overline{n, 1}.$$

Общее количество делений и умножений в методе Гаусса:  $\frac{1}{3}n(n^2+3n-1)\sim \frac{n^3}{3}$ .

#### 1.2. Метод QR-разложения

Метод QR-разложения основан на представлении матрицы системы в виде произведения ортогональной матрицы Q и верхней треугольной матрицы R. Один из способов получения такого разложения — метод вращений.

Сначала неизвестное  $x_1$  исключается из всех уравнений, кроме первого. Это производится при помощи следующего алгоритма. Для исключения  $x_1$  из второго уравнения вычисляются коэффициенты

$$c_{12} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \quad s_{12} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}},$$

затем первое уравнение системы заменяется линейной комбинацией первого и второго уравнений с коэффициентами  $c_{12}$  и  $s_{12}$ , а второе уравнение — линейной комбинацией тех же уравнений, но уже с коэффициентами  $(-s_{12})$  и  $c_{12}$ . Так как  $-s_{12}a_{11}+c_{12}a_{21}=0$ , коэффициент во втором уравнении при  $x_1$  обратится в нуль.

В итоге исходная система будет приведена к виду:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{31}^{(1)}x_1 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{cases}$$

Это преобразование эквивалентно умножению матрицы системы уравнений и вектора правой части слева на ортогональную матрицу  $T_{12}$ , имеющую вид

$$T_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Так как коэффициенты  $c_{12}$  и  $s_{12}$  подобраны таким образом, что  $c_{12}^2+s_{12}^2=1$ , то можно считать, что

$$c_{12} = \cos \varphi$$
 и  $s_{12} = \sin \varphi$ .

Следовательно, матрица  $T_{12}$ — это матрица поворота на угол  $\varphi$  по часовой стрелке в плоскости  $(x_1, x_2)$ .

Для исключения  $x_1$  из третьего уравнения, используются коэффициенты  $c_{13}$  и  $s_{13}$ :

$$c_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^{(1)})^2}}, \ s_{13} = \frac{a_{31}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^{(1)})^2}},$$

Далее первое и третье уравнение заменяются своими линейными комбинациями. Эта операция равносильна умножению слева матрицы  $A^{(1)}=T_{12}A$  и вектора правой части  $b^{(1)}=T_{12}b$  на ортогональную матрицу, имеющую вид

$$T_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично неизвестная  $x_1$  исключается из остальных уравнений, затем  $x_2$  – из всех уравнений, кроме первого и второго, при этом используются матрицы  $T_{23}, T_{24}, \ldots, T_{2n}$  и так далее. Процесс продолжается, пока система не будет приведена к верхней треугольной форме. То есть  $T = T_{n-1,n} \cdot T_{24} \cdot T_{23} \cdot T_{1n} \cdot \ldots \cdot T_{13} \cdot T_{12}$ . Причём, R = TA, где R – полученная верхнетреугольная матрица и  $Q = T^{-1} = T^T$ .

### 2. Исходные данные

В вариантах 20, 23 даны 2 СЛАУ, которые имеют вид:

$$A_{20} = \begin{pmatrix} 28.8590 & -0.0080 & 2.4060 & 19.2400 \\ 14.4360 & -0.0010 & 1.2030 & 9.6240 \\ 120.2040 & -0.0320 & 10.0240 & 80.1440 \\ -57.7140 & 0.0160 & -4.8120 & -38.4780 \end{pmatrix}, \quad b_{20} = \begin{pmatrix} 30.4590 \\ 18.2480 \\ 128.1560 \\ -60.9080 \end{pmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 3676.7530 & 35.0160 & -525.2500 & -245.1040 \\ 9055.6200 & 86.2450 & -1293.6600 & -603.6800 \\ 26303.4240 & 250.5040 & -3757.6290 & -1753.4720 \\ 70.3500 & 0.6700 & -10.0500 & -4.6850 \end{pmatrix}, \quad b_{23} = \begin{pmatrix} 245.2070 \\ 604.0000 \\ 1754.1910 \\ 4.7350 \end{pmatrix}$$

## 3. Результаты расчетов

## 4. Анализ результатов

### 5. Контрольные вопросы

1. Каковы условия применимости метода Гаусса без выбора и с выбором ведущего элемента?

Метод Гаусса применим тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы  $\mathcal{A}$  ненулевые, что равносильно условию  $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$  для всех i=1,2,...,n, где  $a_{ii}^{(i-1)}$  - элементы матрицы на главной диагонали после приведения ее к ступенчатому виду. Соотвественно, в противном случае метод Гаусса без выбора главного элемента в ходе работы может привести к делению на ноль, при этом матрица может быть и невырождена. Метод Гаусса с выбором главного элемента можно применять для любой невырожденной матрицы. Если матрица будет вырожденной, то в какой-то момент главный элемент будет равен нулю, что недопустимо.

2. Докажите, что если  $\det A \neq 0$ , то при выборе главного элемента в столбце среди элементов, лежащих не выше главной диагонали, всегда найдется хотя бы один элемент, отличный от нуля.

Докажем от противного. Допустим, что возможна такая ситуация, когда при условии  $\det \mathcal{A} \neq 0$ , существует такой шаг k, для которого, соотвественно, в k-ом столбце все элементы не выше главной диагонали нулевые (на примере матрицы  $n \times n$ ):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & \dots & a_{k,n-1} & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель ступенчатой матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали:

$$\det \mathcal{A} = a_{11} * a_{22} * \dots * a_{k-1,k-1} * 0 * a_{k+1,k+1} * \dots * a_{nn}, \quad a_{kk} = 0.$$

Противречие. Следовательно, либо матрица вырождена, либо существует ненулевой элемент не выше главной диагонали.

3. В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.

Данную проблему можно решить вводом косвенной индексации. Вместо  $\mathcal{A}[i][j]$  использовать  $\mathcal{A}[row(i)][col(j)]$ , где row и col — массивы (по сути своей являющиеся подстановками), в которых, например, для перемены местами двух строк или столбцов нужно поменять местами соотвествующие индексы.

- 4. Оцените количество арифметических операций, требуемых для QRразложения произвольной матрицы A размера  $n \times n$ .
- 5. Что такое число обусловленности и что оно характеризует? Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы? Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?

Числом обусловленности называют величину  $condA = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$ . Стоит отметить, что  $condA = condA^{-1}$ . Эта величина характеризует влияние изменения значений правой части на решение системы; отклонение полученного решения от исходного.

Между числом обусловленности и определителем матрицы нет никакой связи, потому что умножение матрицы на число  $\lambda>0$  меняет определитель, но не меняет число обусловленности, так как  $\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$ .

- 6. Как упрощается оценка обусловленности, если матрица является:
  - а) диагональной;
  - б) симметричной;
  - в)ортогональной;
  - г) положительно определённой;
  - д) треугольной?
  - а)  $condA = \frac{a_{max}}{a_{min}},$  где  $a_{max}, a_{min}$  максимальный и минимальный элементы матрицы;
  - б)  $condA = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ , где  $\lambda_{max}, \lambda_{min}$  максимальный и минимальный собственные элементы матрицы;
  - в) Для оценки нормы используют тот факт, что для ортогональной матрицы  $A^{-1} = A^T$ , тогда  $condA = ||A||^2$ . Кроме того, число обусловленности ортогональной матрицы равно единице;
  - г) Собственные числа положительно определенной матрицы являются действительными положительными числами, поэтому в этом случае можно считать

число обусловленности через собственные числа;

- д)  $condA = \frac{a_{max}}{a_{min}},$  где  $a_{max}, a_{min}$  максимальный и минимальный элементы на диагонали матрицы.
- 7. Применимо ли понятие числа обусловленности к вырожденным матрицам?

Обусловленность оценивает близость матрицы A к вырожденной. Чем больше число обусловленности, тем ближе матрица к вырожденной. Если матрица A — вырожденная, то её число обусловленности стремится к бесконечности.

- 8. В каких случаях целесообразно использовать метод Гаусса, а в каких методы, основанные на факторизации матрицы?
- 9. Как можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса? В чём достоинства и недостатки такого подхода?
- 10. Объясните, почему, говоря о векторах, норму  $||x||_1$  часто называют октаэдрической, норму  $||x||_2$  шаровой, а норму  $||x||_{\infty}$  кубической.