



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## Отчёт по лабораторной работе №1

### *Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений*

Студент: \_\_\_\_\_  
ФН2-52Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А. И. Токарев  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Ю. А. Сафронов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Проверил:

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2021 г.

## Оглавление

<b>1. Краткое описание алгоритмов . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1. Метод Гаусса . . . . .	3
1.2. Метод $QR$ -разложения . . . . .	4
<b>2. Исходные данные . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>3. Результаты расчетов . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>4. Анализ результатов . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>5. Контрольные вопросы . . . . .</b>	<b>10</b>





Для исключения  $x_1$  из третьего уравнения, используются коэффициенты  $c_{13}$  и  $s_{13}$ :

$$c_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^{(1)2}}}, \quad s_{13} = \frac{a_{31}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^{(1)2}}},$$

Далее первое и третье уравнение заменяются своими линейными комбинациями.

Эта операция равносильна умножению слева матрицы  $A^{(1)} = T_{12}A$  и вектора правой части  $b^{(1)} = T_{12}b$  на ортогональную матрицу, имеющую вид

$$T_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично неизвестная  $x_1$  исключается из остальных уравнений, затем  $x_2$  – из всех уравнений, кроме первого и второго, при этом используются матрицы  $T_{23}, T_{24}, \dots, T_{2n}$  и так далее. Процесс продолжается, пока система не будет приведена к верхней треугольной форме. То есть  $T = T_{n-1,n} \cdot T_{24} \cdot T_{23} \cdot T_{1n} \cdot \dots \cdot T_{13} \cdot T_{12}$ . Причём,  $R = TA$ , где  $R$  – полученная верхнетреугольная матрица и  $Q = T^{-1} = T^T$ .

## 2. Исходные данные

Даны две СЛАУ, которые имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 28.8590 & -0.0080 & 2.4060 & 19.2400 \\ 14.4360 & -0.0010 & 1.2030 & 9.6240 \\ 120.2040 & -0.0320 & 10.0240 & 80.1440 \\ -57.7140 & 0.0160 & -4.8120 & -38.4780 \end{pmatrix}, \quad f_A = \begin{pmatrix} 30.4590 \\ 18.2480 \\ 128.1560 \\ -60.9080 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 117.2000 & 1.0500 & -8.9700 & 0.7500 \\ 4.2600 & 185.8000 & 0.1300 & -8.8600 \\ -3.8100 & 5.2300 & -189.0000 & -4.8800 \\ 5.8200 & 3.8700 & -2.4700 & 81.4000 \end{pmatrix}, \quad f_B = \begin{pmatrix} 455.3400 \\ -924.0400 \\ -1554.4600 \\ 59.7500 \end{pmatrix}$$

### 3. Результаты расчетов

Результаты для A:

#### 1. Точность double

а) Метод Гаусса

$$x^* = (1.000, 1000.000, -20.000, 3.000)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 5.75 \cdot 10^{-14}.$$

б) Метод QR

$$x^* = (1.000, 1000.000, -20.000, 3.000)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 9.11 \cdot 10^{-14}.$$

#### 2. Точность float

а) Метод Гаусса

$$x^* = (1.487, 1000.238, -18.078, 2.029)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 3.303 \cdot 10^{-5}.$$

б) Метод QR

$$x^* = (1.313, 1000.154, -18.766, 2.377)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 7.864 \cdot 10^{-6}.$$

Изменим вектор  $b$  на величину  $\delta = 0.01$ . Тогда для точности double методом Гаусса

$$b^* = (30.4690, 18.2580, 128.1660, -60.9180)^T,$$

$$x^* = (-1278.8167, 378.425, -5019.792, 2547.633), \quad \|Ax^* - b^*\| = 5.15 \cdot 10^{-11}.$$

Для точности float методом Гаусса

$$b^* = (30.4690, 18.2580, 128.1660, -60.9180)^T,$$

$$x^* = (-1006.303, 513.317, -3939.908, 2003.767), \quad \|Ax^* - b^*\| = 0.016.$$

Малое изменение правой части ведет к большому изменению решения, следовательно, матрица плохо обусловлена. Точный расчет числа обусловленности:

$$\text{cond}_1 A = 1.22 \cdot 10^8, \quad \text{cond}_\infty A = 1.09 \cdot 10^8, \quad \text{cond}_{\max} A = 5.63 \cdot 10^8.$$

Оценка числа обусловленности снизу:

$$\text{cond}_A = 42319.177.$$

Результаты для B:

#### 1. Точность double

а) Метод Гаусса

$$x^* = (3.000, -5.000, 8.000, 1.000)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 2.163 \cdot 10^{-12}.$$

б) Метод QR

$$x^* = (2.999, -5.000, 8.000, 0.999)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 3.019 \cdot 10^{-11}.$$

## 2. Точность float

а) Метод Гаусса

$$x^* = (3.000, -4.999, 8.000, 1.000)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 0.001.$$

б) Метод QR

$$x^* = (3.000, -5.000, 8.000, 0.999)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 0.010.$$

Изменим вектор  $b$  на величину  $\delta = 0.01$ . Тогда для точности double методом Гаусса

$$b^* = (455.3500, -924.0500, -1554.4700, 59.7500)^T,$$

$$x^* = (2.999, -5.000, 8.000, 0.999), \quad \|Ax^* - b^*\| = 2.24 \cdot 10^{-12}.$$

Для точности float методом Гаусса

$$b^* = (455.3500, -924.0500, -1554.4700, 59.7500)^T,$$

$$x^* = (2.999, -5.000, 8.000, 0.999), \quad \|Ax^* - b^*\| = 0.001.$$

Малое изменение правой части ведет к малому изменению решения, следовательно, матрица хорошо обусловлена. Точный расчет числа обусловленности:

$$\text{cond}_1 A = 2.64, \quad \text{cond}_\infty A = 2.64, \quad \text{cond}_{\max} A = 37.05.$$

Оценка числа обусловленности снизу:

$$\text{cond}_A = 1.40$$



## 4. Анализ результатов

Использование типа `double` позволяет получить более точные решения, нежели использование `float`. Если матрица плохо обусловлена, то решение сильно зависит от ошибки в правой части: любое отклонение приводит к сильному изменению решения. Метод Гаусса считает точнее, чем  $QR$ , так как требуется меньшее число арифметических операций для его реализации.

## 5. Контрольные вопросы

1. **Каковы условия применимости метода Гаусса без выбора и с выбором ведущего элемента?**

Метод Гаусса применим тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы  $\mathcal{A}$  ненулевые, что равносильно условию  $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $a_{ii}^{(i-1)}$  - элементы матрицы на главной диагонали после приведения ее к ступенчатому виду. Соответственно, в противном случае метод Гаусса без выбора главного элемента в ходе работы может привести к делению на ноль, при этом матрица может быть и невырождена. Метод Гаусса с выбором главного элемента можно применять для любой невырожденной матрицы. Если матрица будет вырожденной, то в какой-то момент главный элемент будет равен нулю, что недопустимо.

2. **Докажите, что если  $\det \mathcal{A} \neq 0$ , то при выборе главного элемента в столбце среди элементов, лежащих не выше главной диагонали, всегда найдется хотя бы один элемент, отличный от нуля.**

Докажем от противного. Допустим, что возможна такая ситуация, когда при условии  $\det \mathcal{A} \neq 0$ , существует такой шаг  $k$ , для которого, соответственно, в  $k$ -ом столбце все элементы не выше главной диагонали нулевые (на примере матрицы  $n \times n$ ):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & \dots & a_{k,n-1} & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель ступенчатой матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали:

$$\det \mathcal{A} = a_{11} * a_{22} * \dots * a_{k-1,k-1} * 0 * a_{k+1,k+1} * \dots * a_{nn}, \quad a_{kk} = 0.$$

Противоречие. Следовательно, либо матрица вырождена, либо существует ненулевой элемент не выше главной диагонали.

3. В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.

Данную проблему можно решить вводом косвенной индексации. Вместо  $\mathcal{A}[i][j]$  использовать  $\mathcal{A}[\text{row}(i)][\text{col}(j)]$ , где  $\text{row}$  и  $\text{col}$  — массивы (по сути своей являющиеся подстановками), в которых, например, для перемены местами двух строк или столбцов нужно поменять местами соответствующие индексы.

4. Оцените количество арифметических операций, требуемых для  $QR$ -разложения произвольной матрицы  $A$  размера  $n \times n$ .

Внешний цикл  $i = \overline{1, n-1}$ , внутренний цикл  $j = \overline{i+1, n}$ . Каждый виток цикла  $j$  считаются коэффициенты  $c_{ij}, s_{ij}$  - 4 операции (так то их 6, но знаменатель мы считаем 1 раз). Далее для замены строк на линейные комбинации понадобится еще один цикл  $k = \overline{1, n}$  по 4 операции. Отсюда получение матрицы  $R$  занимает  $4n \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 4 \frac{n(n-1)}{2} = 2(n-1)n(n+1)$ . Далее для нахождения матрицы  $Q$  воспользуемся соотношением  $R \cdot Q = A$ , или  $Q = A \cdot R^{-1}$ . Найти обратную матрицу для верхнетреугольной можно за  $\frac{n(n-\frac{1}{2})(n-1)}{3}$  операций. Чтобы перемножить матрицы нужно  $n^3$  операций. В итоге  $2(n-1)n(n+1) + \frac{n(n-\frac{1}{2})(n-1)}{3} + n^3 \sim \frac{10}{3}n^3$ .

5. Что такое число обусловленности и что оно характеризует? Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы? Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?

Числом обусловленности называют величину  $\text{cond}A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ . Стоит отметить, что  $\text{cond}A = \text{cond}A^{-1}$ . Эта величина характеризует влияние изменения значений правой части на решение системы; отклонение полученного решения от исходного.

Между числом обусловленности и определителем матрицы нет никакой связи, потому что умножение матрицы на число  $\lambda > 0$  меняет определитель, но не меняет число обусловленности, так как  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

6. Как упрощается оценка обусловленности, если матрица является:

- а) диагональной;
- б) симметричной;
- в) ортогональной;
- г) положительно определённой;
- д) треугольной?

а)  $\text{cond}A = \frac{a_{\max}}{a_{\min}}$ , где  $a_{\max}, a_{\min}$  — максимальный и минимальный элементы мат-

рицы;

б)  $\text{cond}A = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ , где  $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$  — максимальный и минимальный собственные элементы матрицы;

в) Для оценки нормы используют тот факт, что для ортогональной матрицы  $A^{-1} = A^T$ , тогда  $\text{cond}A = \|A\|^2$ . Кроме того, число обусловленности ортогональной матрицы равно единице;

г) Собственные числа положительно определенной матрицы являются действительными положительными числами, поэтому в этом случае можно считать число обусловленности через собственные числа;

д)  $\text{cond}A = \frac{a_{\max}}{a_{\min}}$ , где  $a_{\max}, a_{\min}$  — максимальный и минимальный элементы на диагонали матрицы.

**7. Применимо ли понятие числа обусловленности к вырожденным матрицам?**

Обусловленность оценивает близость матрицы  $A$  к вырожденной. Чем больше число обусловленности, тем ближе матрица к вырожденной. Если матрица  $A$  — вырожденная, то её число обусловленности стремится к бесконечности.

**8. В каких случаях целесообразно использовать метод Гаусса, а в каких — методы, основанные на факторизации матрицы?**

Метод Гаусса считает точнее и быстрее, так как требует меньше арифметических операций, но он проигрывает «на длинной дистанции», когда нужно решать одну задачу с различными правыми частями. Для алгоритмов факторизации можно единожды посчитать разложение, в то время как для алгоритма Гаусса придется все начинать сначала.

**9. Как можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса? В чём достоинства и недостатки такого подхода?**

Можно обнулять не все элементы ниже главной диагонали, а все элементы, кроме элементов главной диагонали. Достоинство: один цикл. Недостаток: приходится выполнять лишние арифметические операции.

**10. Объясните, почему, говоря о векторах, норму  $\|x\|_1$  часто называют октаэдрической, норму  $\|x\|_2$  — шаровой, а норму  $\|x\|_\infty$  — кубической. Потому что множество  $X = \{x : \|x\| < 1\}$ , которое называют открытым единичным шаром (для замкнутого неравенства нестрогое), с соответствующей нормой приобретает форму соответствующей геометрической фигуры.**