



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №1

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Студент: _____
ФН2-52Б
(Группа)

(Подпись, дата)

А. А. Токарев

(И. О. Фамилия)

(Подпись, дата)

Ю. А. Сафронов

(И. О. Фамилия)

Проверил:

(Подпись, дата)

(И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Краткое описание алгоритмов	3
1.1. Метод Гаусса	3
1.2. Метод QR -разложения	4
2. Исходные данные	6
3. Результаты расчетов	7
4. Анализ результатов	9
5. Контрольные вопросы	10

Для исключения x_1 из третьего уравнения, используются коэффициенты c_{13} и s_{13} :

$$c_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^{(1)2}}}, \quad s_{13} = \frac{a_{31}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^{(1)2}}},$$

Далее первое и третье уравнение заменяются своими линейными комбинациями.

Эта операция равносильна умножению слева матрицы $A^{(1)} = T_{12}A$ и вектора правой части $b^{(1)} = T_{12}b$ на ортогональную матрицу, имеющую вид

$$T_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично неизвестная x_1 исключается из остальных уравнений, затем x_2 – из всех уравнений, кроме первого и второго, при этом используются матрицы $T_{23}, T_{24}, \dots, T_{2n}$ и так далее. Процесс продолжается, пока система не будет приведена к верхней треугольной форме. То есть $T = T_{n-1,n} \cdot T_{24} \cdot T_{23} \cdot T_{1n} \cdot \dots \cdot T_{13} \cdot T_{12}$. Причём, $R = TA$, где R – полученная верхнетреугольная матрица и $Q = T^{-1} = T^T$.

2. Исходные данные

Даны 2 СЛАУ, которые имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 28.8590 & -0.0080 & 2.4060 & 19.2400 \\ 14.4360 & -0.0010 & 1.2030 & 9.6240 \\ 120.2040 & -0.0320 & 10.0240 & 80.1440 \\ -57.7140 & 0.0160 & -4.8120 & -38.4780 \end{pmatrix}, \quad f_A = \begin{pmatrix} 30.4590 \\ 18.2480 \\ 128.1560 \\ -60.9080 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 117.2000 & 1.0500 & -8.9700 & 0.7500 \\ 4.2600 & 185.8000 & 0.1300 & -8.8600 \\ -3.8100 & 5.2300 & -189.0000 & -4.8800 \\ 5.8200 & 3.8700 & -2.4700 & 81.4000 \end{pmatrix}, \quad f_B = \begin{pmatrix} 455.3400 \\ -924.0400 \\ -1554.4600 \\ 59.7500 \end{pmatrix}$$

3. Результаты расчетов

Результаты для A:

1. Точность double

а) Метод Гаусса

$$x^* = (1, 1000, -20, 3)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 5.75 \cdot 10^{-14}.$$

б) Метод QR

$$x^* = (1, 1000, -20, 3)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 9.11 \cdot 10^{-14}.$$

2. Точность float

а) Метод Гаусса

$$x^* = (1.487, 1000.238, -18.078, 2.029)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 3.303 \cdot 10^{-5}.$$

б) Метод QR

$$x^* = (1.313, 1000.154, -18.766, 2.377)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 7.864 \cdot 10^{-6}.$$

Изменим вектор b на величину $\delta = 0.01$. Тогда для точности double методом Гаусса

$$b^* = (30.4690, 18.2580, 128.1660, -60.9180)^T,$$

$$x^* = (-1279, 378.4, -5020, 2548), \quad \|Ax^* - b^*\| = 5.15 \cdot 10^{-11}.$$

Для точности float методом Гаусса

$$b^* = (30.4690, 18.2580, 128.1660, -60.9180)^T,$$

$$x^* = (-1006.303, 513.317, -3939.908, 2003.767), \quad \|Ax^* - b^*\| = 0.016.$$

Малое изменение правой части ведет к большому изменению решения, следовательно, матрица плохо обусловлена. Точный расчет числа обусловленности:

$$\text{cond}_1 A = 1.22 \cdot 10^8, \quad \text{cond}_\infty A = 1.09 \cdot 10^8, \quad \text{cond}_{\max} A = 5.63 \cdot 10^8.$$

Оценка числа обусловленности снизу:

$$\text{cond}_A = 42319.177.$$

Результаты для B:

1. Точность double

а) Метод Гаусса

$$x^* = (3, -5, 8, 1)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 2.163 \cdot 10^{-12}.$$

б) Метод QR

$$x^* = (2.999, -5.000, 8.000, 0.999)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 3.019 \cdot 10^{-11}.$$

2. Точность float

а) Метод Гаусса

$$x^* = (3.000, -4.999, 8.000, 1.000)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 0.001.$$

б) Метод QR

$$x^* = (3.000, -5.000, 8.000, 0.999)^T, \quad \|Ax^* - b\| = 0.010.$$

Изменим вектор b на величину $\delta = 0.01$. Тогда для точности double методом Гаусса

$$b^* = (455.3500, -924.0500, -1554.4700, 59.7500)^T,$$

$$x^* = (2.999, -5.000, 8.000, 0.999), \quad \|Ax^* - b^*\| = 2.24 \cdot 10^{-12}.$$

Для точности float методом Гаусса

$$b^* = (455.3500, -924.0500, -1554.4700, 59.7500)^T,$$

$$x^* = (2.999, -5.000, 8.000, 0.999), \quad \|Ax^* - b^*\| = 0.001.$$

Малое изменение правой части ведет к малому изменению решения, следовательно, матрица хорошо обусловлена. Точный расчет числа обусловленности:

$$\text{cond}_1 A = 2.64, \quad \text{cond}_\infty A = 2.64, \quad \text{cond}_{\max} A = 37.05.$$

Оценка числа обусловленности снизу:

$$\text{cond}_A = 1.40$$

4. Анализ результатов

Использование типа `double` позволяет получить более точные решения, нежели использование `float`. Если матрица плохо обусловлена, то решение сильно зависит от ошибки в правой части: любое отклонение приводит к сильному изменению решения. Метод Гаусса считает точнее, чем QR , так как требуется меньшее число арифметических операций для его реализации.

5. Контрольные вопросы

1. **Каковы условия применимости метода Гаусса без выбора и с выбором ведущего элемента?**

Метод Гаусса применим тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы \mathcal{A} ненулевые, что равносильно условию $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, где $a_{ii}^{(i-1)}$ - элементы матрицы на главной диагонали после приведения ее к ступенчатому виду. Соответственно, в противном случае метод Гаусса без выбора главного элемента в ходе работы может привести к делению на ноль, при этом матрица может быть и невырождена. Метод Гаусса с выбором главного элемента можно применять для любой невырожденной матрицы. Если матрица будет вырожденной, то в какой-то момент главный элемент будет равен нулю, что недопустимо.

2. **Докажите, что если $\det \mathcal{A} \neq 0$, то при выборе главного элемента в столбце среди элементов, лежащих не выше главной диагонали, всегда найдется хотя бы один элемент, отличный от нуля.**

Докажем от противного. Допустим, что возможна такая ситуация, когда при условии $\det \mathcal{A} \neq 0$, существует такой шаг k , для которого, соответственно, в k -ом столбце все элементы не выше главной диагонали нулевые (на примере матрицы $n \times n$):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & \dots & a_{k,n-1} & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель ступенчатой матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали:

$$\det \mathcal{A} = a_{11} * a_{22} * \dots * a_{k-1,k-1} * 0 * a_{k+1,k+1} * \dots * a_{nn}, \quad a_{kk} = 0.$$

Противоречие. Следовательно, либо матрица вырождена, либо существует ненулевой элемент не выше главной диагонали.

3. В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.

Данную проблему можно решить вводом косвенной индексации. Вместо $\mathcal{A}[i][j]$ использовать $\mathcal{A}[\text{row}(i)][\text{col}(j)]$, где row и col — массивы (по сути своей являющиеся подстановками), в которых, например, для перемены местами двух строк или столбцов нужно поменять местами соответствующие индексы.

4. Оцените количество арифметических операций, требуемых для QR -разложения произвольной матрицы A размера $n \times n$.

Внешний цикл $i = \overline{1, n-1}$, внутренний цикл $j = \overline{i+1, n}$. Каждый виток цикла j считаются коэффициенты c_{ij}, s_{ij} - 4 операции (так то их 6, но знаменатель мы считаем 1 раз). Далее для замены строк на линейные комбинации понадобится еще один цикл $k = \overline{1, n}$ по 4 операции. Отсюда получение матрицы R занимает $4n \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 4 \frac{n(n-1)}{2} = 2(n-1)n(n+1)$. Далее для нахождения матрицы Q воспользуемся соотношением $R \cdot Q = A$, или $Q = A \cdot R^{-1}$. Найти обратную матрицу для верхнетреугольной можно за $\frac{n(n-\frac{1}{2})(n-1)}{3}$ операций. Чтобы перемножить матрицы нужно n^3 операций. В итоге $2(n-1)n(n+1) + \frac{n(n-\frac{1}{2})(n-1)}{3} + n^3 \sim \frac{10}{3}n^3$.

5. Что такое число обусловленности и что оно характеризует? Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы? Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?

Числом обусловленности называют величину $\text{cond}A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$. Стоит отметить, что $\text{cond}A = \text{cond}A^{-1}$. Эта величина характеризует влияние изменения значений правой части на решение системы; отклонение полученного решения от исходного.

Между числом обусловленности и определителем матрицы нет никакой связи, потому что умножение матрицы на число $\lambda > 0$ меняет определитель, но не меняет число обусловленности, так как $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

6. Как упрощается оценка обусловленности, если матрица является:

- а) диагональной;
- б) симметричной;
- в) ортогональной;
- г) положительно определённой;
- д) треугольной?

а) $\text{cond}A = \frac{a_{\max}}{a_{\min}}$, где a_{\max}, a_{\min} — максимальный и минимальный элементы мат-

рицы;

б) $\text{cond}A = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$, где $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ — максимальный и минимальный собственные элементы матрицы;

в) Для оценки нормы используют тот факт, что для ортогональной матрицы $A^{-1} = A^T$, тогда $\text{cond}A = \|A\|^2$. Кроме того, число обусловленности ортогональной матрицы равно единице;

г) Собственные числа положительно определенной матрицы являются действительными положительными числами, поэтому в этом случае можно считать число обусловленности через собственные числа;

д) $\text{cond}A = \frac{a_{\max}}{a_{\min}}$, где a_{\max}, a_{\min} — максимальный и минимальный элементы на диагонали матрицы.

7. Применимо ли понятие числа обусловленности к вырожденным матрицам?

Обусловленность оценивает близость матрицы A к вырожденной. Чем больше число обусловленности, тем ближе матрица к вырожденной. Если матрица A — вырожденная, то её число обусловленности стремится к бесконечности.

8. В каких случаях целесообразно использовать метод Гаусса, а в каких — методы, основанные на факторизации матрицы?

Метод Гаусса считает точнее и быстрее, так как требует меньше арифметических операций, но он проигрывает «на длинной дистанции», когда нужно решать одну задачу с различными правыми частями. Для алгоритмов факторизации можно единожды посчитать разложение, в то время как для алгоритма Гаусса придется все начинать сначала.

9. Как можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса? В чём достоинства и недостатки такого подхода?

Можно обнулять не все элементы ниже главной диагонали, а все элементы, кроме элементов главной диагонали. Достоинство: один цикл. Недостаток: приходится выполнять лишние арифметические операции.

10. Объясните, почему, говоря о векторах, норму $\|x\|_1$ часто называют октаэдрической, норму $\|x\|_2$ — шаровой, а норму $\|x\|_\infty$ — кубической. Потому что множество $X = \{x : \|x\| < 1\}$, которое называют открытым единичным шаром (для замкнутого неравенства нестрогое), с соответствующей нормой приобретает форму соответствующей геометрической фигуры.