Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №2

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Студент: ФН2-52Б (Группа) ____________ (Подпись, дата) А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

____________ (Подпись, дата) Ю. А. Сафронов (И. О. Фамилия)

Проверил: ____________ (Подпись, дата) ____________ (И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Краткое описание алгоритмов

Дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = f_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Будем искать решение итерационными методами, т.е. последовательно приближаясь к решению. Общий вид стационарных итерационных методов:

$$B\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = f.$$

1.1. Метод простой итерации

$$B = E, \quad \frac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = f, \quad k \in \mathbb{N};$$
$$x^k = -(\tau A - E)x^{k-1} + \tau f.$$

1.2. Метод Якоби

Представим матрицу A в виде суммы

$$A = L + D + U,$$

где L — нижняя треугольная, U — верхняя треугольная, а D - диагональная матрицы.

$$B = D, \quad D(x^{k-1} - x^k) + Ax^k = f, \quad k \in \mathbb{N};$$
$$x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)x^k + D^{-1}f.$$

1.3. Методы релаксации и Зейделя

$$B = D + \omega L, \quad \tau = \omega \quad (D+\omega L)\frac{x^{k+1}-x^k}{\omega} + Ax^k = f, \quad k \in \mathbb{N};$$
$$(E + \omega D^{-1}L)x^{k+1} = ((1-\omega)E - \omega D^{-1}U)x^k + \omega D^{-1}f;$$

$\omega > 0$ — метод релаксации, $\omega = 1$ — частный случай, метод Зейделя.

Для метода релаксации существуют удобные расчетные формулы, которые помогают упростить вычисления.

$$x_i^{k+1} + \omega\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k+1} = (1-\omega)x_i^k - \omega\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^k + \omega\frac{f_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,...,n};$$

$$x_1^{k+1} = (1-\omega)x_1^k - \omega\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j^k + \omega\frac{f_1}{a_{11}};$$

$$x_2^{k+1} = -\omega\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{k+1} + (1-\omega)x_2^k - \omega\sum_{j=3}^{n}\frac{a_{2j}}{a_{22}}x_j^k + \omega\frac{f_2}{a_{22}};$$

$$...$$

$$x_i^{k+1} = -\omega\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k+1} + (1-\omega)x_i^k - \omega\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^k + \omega\frac{f_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{3,4,...,n-1};$$

$$x_n^{k+1} = -\omega\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{nj}}{a_{nn}}x_j^{k+1} + (1-\omega)x_n^k + \omega\frac{f_n}{a_{nn}}$$

2. Исходные данные

Для СЛАУ матрица A и столбец правой части f_A имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 175.4000 & 0.0000 & 9.3500 & -0.960 \\ 0.5300 & -46.0000 & 0.2300 & 5.1900 \\ -0.6300 & 5.4400 & 190.6000 & 9.7000 \\ 6.2300 & -8.8900 & -9.8800 & -153.4000 \end{pmatrix}, \quad f_A = \begin{pmatrix} 985.3600 \\ 348.170 \\ 2284.7700 \\ -638.7800 \end{pmatrix}.$$

Так же нужно решить СЛАУ с трехдиагональной матрицей A размерности $n = 220$.

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & ... & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & ... & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & ... & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ ... \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix},$$

$a_i = c_i = 1; b_i = 4; i = \overline{1,...,n}; d_1 = 6; d_i = 10 - 2(i \mod 2), i = \overline{2,...,n-1}; d_n = 9 - 3(n \mod 2)$.

3. Результаты расчетов

4. Анализ результатов

Метод	$\|\|C\|\|$ или $\|\|G_1\|\|$ $+\|\|G_2\|\|$	Оценка числа итераций	Крит. 1. Норма ошибки	Крит. 1. Число итераций	Крит. 2. Норма ошибки	Крит. 2. Число итераций	Крит. 3. Норма ошибки	Крит. 3. Число итераций

5. Контрольные вопросы

1. s