Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №2

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Студент: ФН2-52Б (Группа) — (Подпись, дата) — А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

(Подпись, дата) — Ю. А. Сафронов (И. О. Фамилия)

Проверил: (Подпись, дата) — (И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Краткое описание алгоритмов

Дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i = f_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Будем искать решение итерационными методами, т.е. последовательно приближаясь к решению. Общий вид стационарных итерационных методов:

$$B\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = f.$$

1.1. Метод простой итерации

$$B = E, \quad \frac{x^{k+1}-x^k}{\tau} + Ax^k = f, \quad k \in \mathbb{N};$$
$$x^k = -(\tau A - E)x^{k-1} + \tau f.$$

1.2. Метод Якоби

Представим матрицу A в виде суммы

$$A = L + D + U,$$

где L — нижняя треугольная, U — верхняя треугольная, а D - диагональная матрицы.

$$B = D, \quad D(x^{k-1} - x^k) + Ax^k = f, \quad k \in \mathbb{N};$$
$$x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)x^k + D^{-1}f.$$

1.3. Методы релаксации и Зейделя

$$B = D + \omega L, \quad \tau = \omega \quad (D+\omega L)\frac{x^{k+1}-x^k}{\omega} + Ax^k = f, \quad k \in \mathbb{N};$$
$$(E + \omega D^{-1}L)x^{k+1} = ((1-\omega)E - \omega D^{-1}U)x^k + \omega D^{-1}f;$$

$\omega > 0$ — метод релаксации, $\omega = 1$ — частный случай, метод Зейделя.

Для метода релаксации существуют удобные расчетные формулы, которые помогают упростить вычисления.

$$x_i^{k+1} + \omega\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k+1} = (1-\omega)x_i^k - \omega\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^k + \omega\frac{f_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,...,n};$$

$$x_1^{k+1} = (1-\omega)x_1^k - \omega\sum_{j=2}^{n}\frac{a_{1j}}{a_{11}}x_j^k + \omega\frac{f_1}{a_{11}};$$

$$x_2^{k+1} = -\omega\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{k+1} + (1-\omega)x_2^k - \omega\sum_{j=3}^{n}\frac{a_{2j}}{a_{22}}x_j^k + \omega\frac{f_2}{a_{22}};$$

...

$$x_i^{k+1} = -\omega\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k+1} + (1-\omega)x_i^k - \omega\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^k + \omega\frac{f_i}{a_{ii}}, \quad i=\overline{3,4,...,n-1};$$

$$x_n^{k+1} = -\omega\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{nj}}{a_{nn}}x_j^{k+1} + (1-\omega)x_n^k + \omega\frac{f_n}{a_{nn}}$$

2. Исходные данные

Для СЛАУ матрица A и столбец правой части f_A имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 175.4000 & 0.0000 & 9.3500 & -0.960 \\ 0.5300 & -46.0000 & 0.2300 & 5.1900 \\ -0.6300 & 5.4400 & 190.6000 & 9.7000 \\ 6.2300 & -8.8900 & -9.8800 & -153.4000 \end{pmatrix}, \quad f_A = \begin{pmatrix} 985.3600 \\ 348.170 \\ 2284.7700 \\ -638.7800 \end{pmatrix}.$$

Так же нужно решить СЛАУ с трехдиагональной матрицей A размерности $n = 220$.

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & ... & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & ... & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & ... & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ ... \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix},$$

$a_i = c_i = 1; b_i = 4; i = \overline{1,...,n}; d_1 = 6; d_i = 10 - 2(i \mod 2), i = \overline{2,...,n-1}; d_n = 9 - 3(n \mod 2).$

3. Результаты расчетов

Результаты с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$ приведены в таблице.

Метод	$\|\|C\|\|$ $\|\|G_1\|\|$ $\|\|G_2\|\|$	Оценка числа итераций	Крит. 1. Норма ошибки	Крит. 1. Число итераций	Крит. 2. Норма ошибки	Крит. 2. Число итераций	Крит. 3. Норма ошибки	Крит. 3. Число итераций
П. И. $\tau = 0.0089$	0.8367	104	$5.927 \cdot 10^{-9}$	62	$5.384 \cdot 10^{-7}$	49	$3.357 \cdot 10^{-8}$	57
П. И. $\tau = 0.007$	0.7196	54	$2.588 \cdot 10^{-6}$	38	$2.588 \cdot 10^{-6}$	38	$1.653 \cdot 10^{-7}$	45
Якоби	0.1630	9	$1.906 \cdot 10^{-8}$	8				
Зейдель	0.3115 0.1033	8	1.181	2				
Релакс $\omega = 1.3$	0.4050 0.4343	57	1.181	19				
Релакс $\omega = 0.3$	0.0935 0.731	85	1.181	56				

4. Контрольные вопросы

1. Почему условие $\|C\| < 1$ гарантирует сходимость итерационных методов решения СЛАУ?
$\|x^{k+1} - x^k\| = \|(Cx^k + y) - (Cx^{k-1} + y)\| = \|C(x^k - x^{k-1})\| \le \|C\|\|x^k - x^{k-1}\|$
Пусть $\|C\| < 1$, следовательно, оператор C является сжимающим. Существует единственная неподвижная точка x, которая и является решением системы.
Пусть x^* – решение СЛАУ $Ax = b$, которое которое мы решаем итерационным методом $x^{k+1} = Cx^k + y$, тогда:
$$x^{k+1} - x^* = (Cx^k + y) - (Cx^* + y) = C(x^k - x^*),$$
тогда, если $\|C\| < 1$, то
$\|x^{k+1} - x^*\| = \|C(x^k - x^*)\| \le \|C\|\|x^k - x^*\| \le \|C\|^2\|x^{k-1} - x^*\| \le \ldots \le$
$\le \|C\|^{k+1}\|x^0 - x^*\| \to 0$ при $k \to \infty$

2. Каким следует выбирать итерационный параметр τ в методе простой итерации для увеличения скорости сходимости? Как выбрать начальное приближение x^0?
Нужно выбрать значение $\tau \in (0; \dfrac{2}{\lambda_{max}})$, чтобы норма матрицы C была минимальной. Оптимальным будет значение $\tau = \dfrac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}}$. Начальное приближение можно выбрать любым.
3. На примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными дайте геометрическую интерпретацию метода Якоби, метода Зейделя и метода релаксации.
Геометрическая интерпретация метода Зейделя.
Приведём геометрическую интерпретацию метода Зейделя в случае $m = 2$, т.е. в случае решения системы:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$
Первое уравнение системы задаёт на плоскости x_1Ox_2 прямую l_1, второе - прямую l_2 (рис. (1)). Расчётные формулы метода принимают следующий вид:
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{12}x_2^{(k)} + c_1, \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + c_2, \end{cases}$$
где $b_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{11}},\ c_1 = \frac{b_1}{a_{11}},\ b_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{22}},\ c_2 = \frac{b_2}{a_{22}}$.

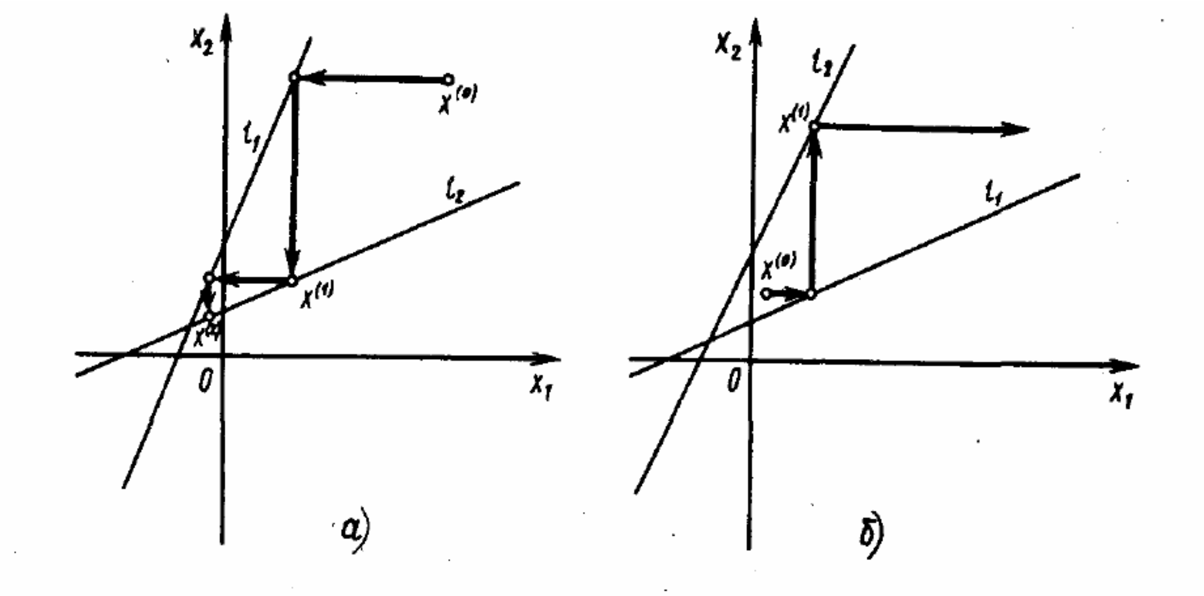

Рис. 1. Графическая интерпретация метода Зейделя.

Пусть приближение $x^{(k)}$ уже найдено. Тогда при определении $x_1^{(k+1)}$ координата $x_2 = x_2^{(k)}$ фиксируется и точка x перемещается параллельно оси Ox_1 до пересечения с прямой l_1.

Координата x_1 точки пересечения принимается за $x_1^{(k+1)}$. Затем точка x перемещается вдоль прямой $x_1 = x_1^{(k+1)}$ до пересечения с прямой l_2. Координата x_2 точки пересечения принимается за $x_2^{(k+1)}$.

На рис. (1) приведены геометрические иллюстрации, отвечающие сходящемуся и расходящемуся итерационному процессу Зейделя. Видно, что характер сходимости может измениться при перестановке уравнений.

Метод релаксации.

Суть метода релаксации состоит в том, что после вычисления очередной i-ой компоненты $(k+1)$-го приближения по формуле Зейделя

$$\widetilde{x}_i^{(k+1)} = b_{i1}x_1^{(k+1)} + b_{i2}x_2^{(k+1)} + \ldots + b_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} + b_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} + \ldots + b_{im}x_m^{(k)} + c_i$$

производят дополнительно смещение этой компоненты на величину $(\omega-1)(\widetilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})$, где ω-параметр релаксации. Таким образом, i-ая компонента $(k+1)$-го приближения вычисляется по формуле:

$$x_i^{(k+1)} = \widetilde{x}_i^{(k+1)} + (\omega - 1)(\widetilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}) = \omega\widetilde{x}_i^{(k+1)} + (1-\omega)x_i^{(k)}.$$

На рис.(2) показано несколько первых итераций метода при значении параметра релаксации $\omega = 1.25$.

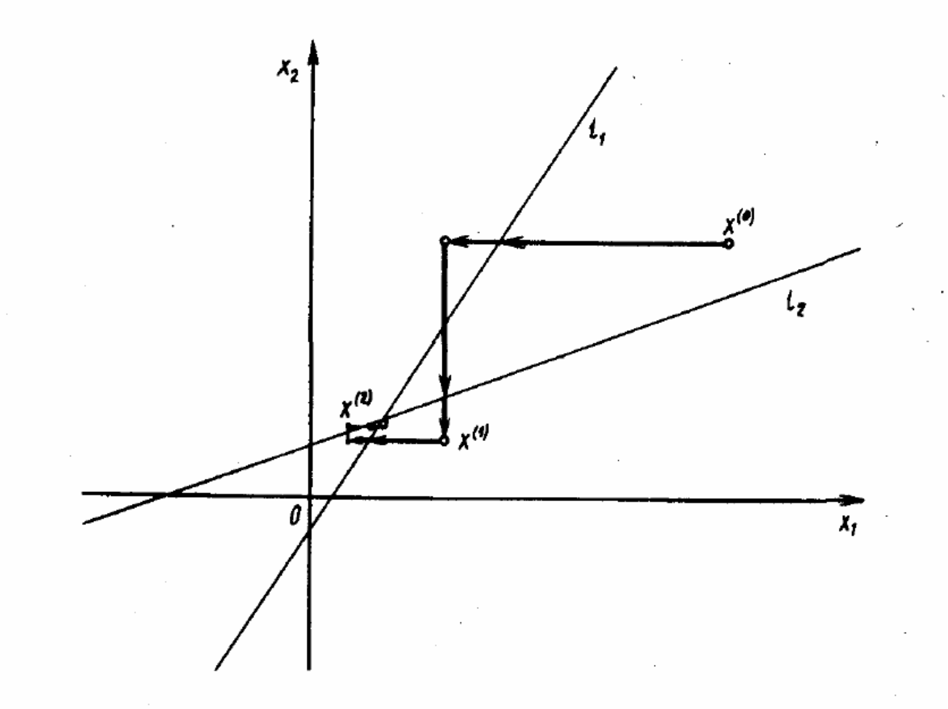

Рис. 2. Графическая интерпретация метода релаксации.

При $\omega = 1$ метод релаксации совпадает с методом Зейделя. При $\omega > 1$ его называют методом последовательной верхней релаксации, а при $\omega < 1$ - методом последовательной нижней релаксации.

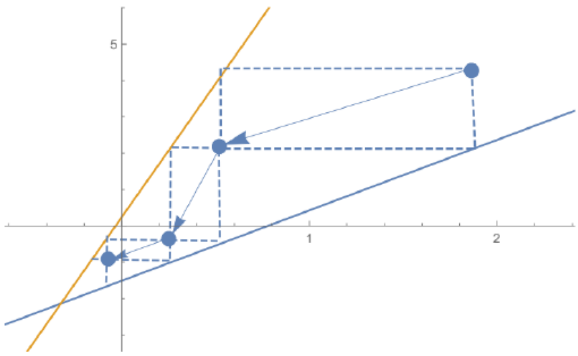

Рис. 3. Графическая интерпретация метода Якоби.

Если домножить одно из уравнений на (-1), то изменится только направление движения по x_i (но не величина, с которой двигаемся).
Если поменять порядок уравнений местами, то прямые, задаваемые данными уравнениями, поменяются местами. В обоих случаях гарантировать сходимость/расходимость невозможно.

4. При каких условиях сходятся метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и метод релаксации? Какую матрицу называют положительно определённой?

Сходимость метода простой итерации.

Пусть выполнено условие

$$\|B\| < 1.$$

Тогда: 1) решение $\overline{x}$ системы $x = Bx+c$, где B — квадратная матрица с элементами $b_{ij}(i, j = 1, 2, \ldots, m), c$ — вектор-столбец с элементами $c_i(i = 1, 2, \ldots, m)$, существует и единственно;

2) при произвольном начальном приближении x^0 метод простой итерации сходится и справедлива оценка погрешности:

$$\|x^{(n)} - \overline{x}\| \leq \|B\|^n \|x^{(0)} - \overline{x}\|.$$

Сходимость метода Зейделя.

Теорема: Пусть $\|B\| < 1$, где $\|B\|$ - одна из норм $\|B\|_\infty, \|B\|_1$. Тогда при любом выборе начального приближения x^0 метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $q \leq \|B\|$.

Теорема: Пусть выполнено условие $\|B_1\| + \|B_2\| < 1$. Тогда при любом выборе начального приближения метод Зейделя сходится и верна оценка погрешности:

$$\|x^{(n)} - \overline{x}\| \leq q^n \|x^{(0)} - \overline{x}\|,$$

где $q = \frac{\|B_2\|}{(1-\|B_1\|)} < 1$.

Теорема: Пусть A-симметричная положительно определённая матрица. Тогда при любом выборе начального приближения $x^{(0)}$ метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Сходимость метода релаксации.

Если A — симметричная положительно определённая матрица, то при любом значении параметра ω $(0 < \omega < 2)$ метод релаксации сходится. Можно выбрать параметр $\omega > 1$ так, чтобы метод релаксации сходился существенно быстрее, чем методы Якоби и Зейделя.

Сходимость метода Якоби. Пусть A — симметричная положительно определённая матрица с диагональным преобладанием, т.е. $a_{ii} > \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}|, i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда метод Якоби сходится.

Матрица A называется положительно определённой, если $\exists \delta > 0 : (Ax, x) \geq \delta \|x\|^2$.

5. Выпишите матрицу C для методов Зейделя и релаксации.

   Для метода релаксации: $C = -\omega(D + \omega L)^{-1} A + E$,

   Для метода Зейделя: $C = -(D + L)^{-1} A + E$.

6. Почему в общем случае для остановки итерационного процесса нельзя использовать критерий $\|x^k - x^{k-1}\| < \varepsilon$?

   Потому что этот критерий не гарантирует сходимость к верному решению. Мы можем изначально построить неверный итерационный метод, но он, благодаря этому критерию, сойдется к неверному решению.

7. Какие ещё критерии окончания итерационного процесса Вы можете предложить?

   Для метода Зейделя и релаксации:

   1.$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon$;

   2.$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \dfrac{1 - \|G_1 + G_2\|}{\|G_2\|}\varepsilon$;

   3.$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon\|x_k\| + \varepsilon_0$.

   Для метода Якоби и метода простой итерации:

   1.$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon$;

   2.$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \dfrac{1 - \|C\|}{\|C\|}\varepsilon$;

   3.$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \varepsilon\|x_k\| + \varepsilon_0$.