



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## Отчёт по лабораторной работе №1

### *Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений*

Студент: \_\_\_\_\_  
ФН2-62Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А. И. Токарев  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Ю. А. Сафронов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Проверил:

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2021 г.

## Оглавление

<b>1. Исходные данные . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1. Тестовые примеры . . . . .	3
<b>2. Таблица . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>3. Контрольные вопросы . . . . .</b>	<b>4</b>

# 1. Исходные данные

Модель Лотки - Вольтерры динамики системы «хищник-жертва»

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x'_1 = r_1x_1 - b_{11}x_1^2 - b_{12}x_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x'_2 = -r_2x_2 - b_{22}x_2^2 + b_{21}x_1x_2 \\ r_1 = 0.4, \quad r_2 = 0.1, \quad b_{11} = 0.05, \\ b_{12} = 0.1, \quad b_{21} = 0.08, \quad b_{22} = 0.003, \\ t = 0 \dots 150, \\ x_1(0) = 1.0, \quad x_2(0) = 4.0. \end{cases}$$

## 1.1. Тестовые примеры

1.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = 2x + y^2 - 1, \\ \frac{dy}{dt} = y' = 6x - y^2 + 1. \end{cases}$$

Особые точки:  $(0, 1)$  — центр,  $(0, -1)$  — фокус.

2.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = 1 - x^2 - y^2, \\ \frac{dy}{dt} = y' = 2x. \end{cases}$$

Особые точки:  $(0, 1)$  — центр,  $(0, -1)$  — седло.

3.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = y' = x(r - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = z' = xy - bz, \\ \sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

## 2. Таблица

Расчет порядка для методов с параметрами  $h = 0.03$ ,  $q = 0.5$ , количества умножений и вычислений правой части:

Метод	Я. Эйлера	Н. Эйлера	Симм.	РК 2	РК 4	Адамс-Башфот	Прогноз-корр.
Порядок	1.00162	0.998336	1.99999	1.99313	4.01972	3.76745	3.6865
Кол-во оп.	$n$	—	—	$4n$	$9n$	$36 + 6n$	$12n$
Правая часть	$n$	—	—	$2n$	$4n$	$16 + 4n$	$8n$

### 3. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте условия существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Выполнены ли они для вашего варианта задания?

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Для того, чтобы существовало решение задачи Коши достаточно, чтобы функция  $f(x, y)$  была непрерывна в ограниченной замкнутой области  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ . Чтобы решение было единственным, должно выполняться условие Липшица по правому аргументу (или должна существовать непрерывная частная производная по  $y$ ), т.е.

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \exists L > 0: |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Для системы

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2) \\ x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \end{cases}$$

если в области  $G \subset \mathbb{R}^3$  функции  $f_1, f_2$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные по  $x_1, x_2$ , то в некотором интервале существует единственное решение системы, удовлетворяющее начальным условиям.

Для модели Лотки - Вольтерры:

$$\begin{cases} f_1 = r_1 x_1 - b_{11} x_1^2 - b_{12} x_1 x_2; \\ f_2 = -r_2 x_2 - b_{22} x_2^2 + b_{21} x_1 x_2; \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = r_1 - 2b_{11} x_1 - b_{12} x_2; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -b_{12} x_1; \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = b_{21} x_2; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -r_2 - 2b_{22} x_2 + b_{21} x_1; \end{cases}$$

функции непрерывны всюду на  $\mathbb{R}^3$ , точка  $(0, 1.0, 4.0) \in \mathbb{R}^3$ , значит существует единственное решение задачи Коши.

2. Что такое фазовое пространство? Что называют фазовой траекторией? Что называют интегральной кривой?

Фазовое пространство — это пространство, каждая точка которого соответствует одному состоянию из множества всех возможных состояний системы.

Траекторию движения в фазовом пространстве называют фазовой траекторией.

Интегральной кривой называется график решения дифференциального уравнения. Фазовая траектория является проекцией интегральной кривой.

3. Каким порядком аппроксимации и точности обладают методы, рассмотренные в лабораторной работе?
- (а) Явный метод Эйлера — первый порядок
  - (б) Неявный метод Эйлера — первый порядок
  - (с) Симметричная схема — второй порядок
  - (d) Метод РК 2-го порядка — второй порядок
  - (е) Метод РК 4-го порядка — четвертый порядок
  - (f) Метод прогноза и коррекции — четвертый порядок
4. Какие задачи называются жесткими? Какие методы предпочтительны для их решения? Какие из рассмотренных методов можно использовать для решения жестких задач?

Система ОДУ  $y' = Ay$  с постоянной матрицей  $A$  называется жесткой, если все собственные числа  $A = A_{n \times n}$  имеют отрицательную действительную часть ( $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, n$ ), причем число  $S = \frac{\max |\operatorname{Re} \lambda|}{\min |\operatorname{Re} \lambda|}$ , называемое числом жесткости, велико. Для решения жестких задач используются неявные методы, так как они обладают лучшими свойствами устойчивости. Из рассмотренных можно использовать неявный метод Эйлера, симметричную схему.

5. Как найти  $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ , чтобы реализовать алгоритм прогноза и коррекции?
- Смотря какой порядок у метода прогноза-коррекции. В этой лабораторной работе можно использовать метод РК 4-го порядка аппроксимации для нахождения первых приближений, так как сам метод прогноза-коррекции имеет 4-ый порядок аппроксимации. Если взять метод более низкого порядка, то и прогноз-коррекция понизит свой порядок до порядка этого метода.
6. Какой из рассмотренных алгоритмов является менее трудоемким? Какой из рассмотренных алгоритмов позволяет достигнуть заданную точность, используя наибольший шаг интегрирования? Какие достоинства и недостатки рассмотренных алгоритмов вы можете указать?

Явный метод Эйлера является самым нетрудоемким. Метод прогноза-коррекции позволяет достичь заданную точность. Достоинства явных методов в простоте их реализации, неявных в высокой устойчивости. Основной недостаток неявных методов — это необходимость решать нелинейные уравнения. У многошаговых методов более высокая точность, но нужно знать информацию из предыдущих итераций. При этом они требуют меньшего числа вычислений правой части по сравнению с методами Рунге - Кутты при том же порядке

аппроксимации.

7. Какие алгоритмы, помимо правила Рунге, можно использовать для автоматического выбора шага?

Вложенные методы Рунге-Кутты. Эти методы кроме основного решения содержат вспомогательное решение более высокого порядка. По вспомогательному решению можно оценить погрешность основного. Ошибка основного решения оценивается через норму разности основного и вспомогательного решений. На практике широко используются вложенные методы Мерсона, Инглэнда, Фельдберга, а также Дормана — Принса.