Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №5

Методы решения нелинейных уравнений

Студент: ФН2-52Б (Группа) — (Подпись, дата) — А. И. Токарев (И. О. Фамилия)

(Подпись, дата) — Ю. А. Сафронов (И. О. Фамилия)

Проверил: (Подпись, дата) — (И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Краткое описание алгоритмов

1.1. Локализация корней

Дано нелинейное уравнение $f(x) = 0, \quad x \in [a,\, b]$, требуется найти все отрезки принадлежащие $[a,\, b]$, на которых уравнение имеет единственный корень, т. е. произвести локализацию корней. Для этого воспользуемся первой теоремой Больцано—Коши из классического анализа:

если непрерывная на отрезке $[a,\, b]$ функция $f(x)$, такая , что $f(a)f(b) < 0$, то $\exists c \in [a,\, b]\colon f(c) = 0$.

Соответственно, чтобы локализовать корни, нужно составить достаточно подробное дробление отрезка $[a,\, b]$ и проверить на каждом из них условие теоремы. Составим дробление отрезка: $a_1 = a, a_2 = a + h, ...a_{n-1} = b - h, a_n = b$, где h — шаг дробления, а n — количество точек, включая концы отрезка.

1.2. Метод бисекций

Пусть теперь $[a_i,\, a_{i+1}] \subset [a,\, b]$ — отрезок локализации $f(x)$, т.е. $f(a_i)f(a_{i+1}) < 0$. Найдем корень уравнения $f(x) = 0$ на i-ом отрезке локализации с наперед заданной точностью ε.

1. Обозначим $\alpha_0 = a_i$, $\beta_0 = a_{i+1}$, тогда $x_0 = \dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{2}$;
2. Если $\left|\dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{2}\right| < 2\varepsilon$, то корень найден, $x^* = x_0$, иначе идем к пункту 3;
3. Если $f(x_0)f(\alpha_0) < 0$, то $\alpha_1 = \alpha_0$, $\beta_1 = x_0$. Если $f(x_0)f(\beta_0) < 0$, то $\alpha_1 = x_0$, $\beta_1 = \beta_0$. Тогда $x_1 = \dfrac{\beta_1 - \alpha_1}{2}$;
4. Если $\left|\dfrac{\beta_0 - \alpha_0}{4}\right| < 2\varepsilon$, то корень найден $x^* = x_1$, иначе повторяем процедуру из пункта 3 для последующих значений $x_1, x_2, ...x_k$ до тех пор, пока не выполнится условие $\left|\dfrac{\beta_k - \alpha_k}{2^{k-1}}\right| < \varepsilon$. Тогда $x^* = x_k$.

Данный метод повторяем для всех отрезков локализации.

1.3. Метод Ньютона

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности известного приближения корня x_k, пренебрегая величинами больше второго порядка малости и принимая истинное значение корня за x_{k+1}, тогда уравнение примет вид

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0,$$

отсюда получим итерационную формулу метода Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2...$$

2. Исходные данные

Вариант 20: интервал — $[-1,\ 0]$
$f(x) = \sin\left(\dfrac{x^3\sqrt{13} - 9x - 5 - \sqrt{17}}{10}\right) + \tan\left(\dfrac{x^2 + x + 2^{\frac{1}{3}}}{3x - 5}\right) + 0.6.$
Вариант 23: интервал — $[-1,\ 0]$
$f(x) = \sin\left(\dfrac{-2x^2 - x\sqrt{10} + 1}{4}\right) + \left(\dfrac{x^2 + x(\sqrt{2} + \sqrt{7}) + 1 - \sqrt{5}}{x\sqrt{7} - \sqrt{5}}\right)^{\ln 2} - 0.1.$

3. Результаты расчетов

4. Контрольные вопросы

1. Можно ли использовать методы бисекции и Ньютона для нахождения кратных корней уравнения $f(x) = 0$ (т. е. тех, в которых одна или несколько первых производных функций $f(x)$ равны нулю)? Обоснуйте ответ.

   Метод бисекции можно использовать для абсолютно любой функции в любых ситуациях, так как он не использует никакую информацию о функции, кроме значения в точках. На отрезке локализации он найдет корень, но не всегда быстро. Если в методе Ньютона производная в точке корня равна нулю, то скорость сходимости будет не квадратичной, а линейной, а сам метод может преждевременно прекратить поиск, и дать неверное для заданной точности приближение. Поскольку для кратных корней как минимум первая производная обращается в ноль, то методом Ньютона такие корни найти сложнее.
2. При каких условиях можно применять метод Ньютона для поиска корней уравнения $f(x) = 0$? При каких ограничениях на функцию $f(x)$ метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости? В каких случаях можно применять метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений?

   Область применимости определяется теоремой Канторовича.

Теорема Канторовича.

Если существуют такие константы $A,\ B,\ C$, что:

1. $\dfrac{1}{|f'(x)|} < A$ *на* $[a,\ b]$, *то есть* $f'(x)$ *существует и не равна нулю;*
2. $\left|\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right| < B$ *на* $[a,\ b]$, *то есть* $f(x)$ *ограничена;*
3. $\exists f''(x)$ *на* $[a,\ b]$, *и* $|f''(x)| \leqslant C \leqslant \dfrac{1}{2AB}$*;*

Причём длина рассматриваемого отрезка $|a-b| < \dfrac{1}{AB}\left(1-\sqrt{1-2ABC}\right)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *на* $[a,\ b]$ *существует корень* x^* *уравнения* $f(x)=0$: $\exists x^* \in [a,\ b]$: $f(x^*)=0$*;*
2. *если* $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$, *то итерационная последовательность сходится к этому корню:* $\left\{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right\} \to x^*$*;*
3. *погрешность может быть оценена по формуле* $|x^*-x_n| \leqslant \dfrac{B}{2^{n-1}}(2ABC)^{2^{n-1}}$.

Из последнего из утверждений теоремы в частности следует квадратичная сходимость метода:

$$|x^*-x_n| \leqslant \frac{B}{2^{n-1}}(2ABC)^{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\frac{B}{2^{n-2}}\left((2ABC)^{2^{n-2}}\right)^2 = \alpha|x^*-x_{n-1}|^2.$$

Тогда ограничения на исходную функцию $f(x)$ будут выглядеть так:

1. функция должна быть ограничена;
2. функция должна быть гладкой, дважды дифференцируемой;
3. её первая производная $f'(x)$ равномерно отделена от нуля;
4. её вторая производная $f''(x)$ должна быть равномерно ограничена.

Рис. 1.

Если в некоторой окрестности корня x^* выполнены условия $|f'(x)| > m > 0$, $|f''(x)| < M$, $\dfrac{|f(x)F''(x)|}{(f'(x))^2} < 1$, где m, M — константы, то при попадании очередного приближения x_s в эту окрестность итерационный процесс по методу Ньютона будет сходиться с квадратичной скоростью: $|x_{k+1}-x^*| < C|x_k-x^*|^2, \quad k = s, s+1, s+2, \ldots$

В случае решения систем нелинейных уравнений для применимости метода Ньютона необходимо существование матрицы, обратной матрице $F'(x_k)$. Как и в скалярном случае, метод сходится с квадратичной скоростью, если выбрано хорошее начальное приближение.

3. Каким образом можно найти начальное приближение?

   Если известен отрезок $[a,\ b]$ локализации корня, то для получения начального приближения x_0 можно использовать метод хорд

$$x_0 = \frac{f(a)b - f(b)a}{f(a)-f(b)},$$

т.е. x_0 — абсцисса точки пересечения с осью Ox отрезка, соединяющего точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Также можно использовать метод бисекции или взять середину отрезка:

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

4. Можно ли использовать метод Ньютона для решения СЛАУ?

   Метод Ньютона применим для решения СЛАУ $Ax = b$, если матрица обратима (т.е. когда СЛАУ имеет единственное решение), причем метод сойдется за одну итерацию, так как он основан на линеаризации системы. СЛАУ $Ax = b$.

$$F(x) = Ax - b, \quad F'(x) = A, \quad (F'(x))^{-1} = A^{-1};$$

$$x_1 = x_0 - A^{-1}(Ax_0 - b) = x_0 - (A^{-1}A)x_0 + A^{-1}b = A^{-1}b;$$

$$x_2 = x_1 - A^{-1}(Ax_1 - b) = A^{-1}b - A^{-1}(b - b) = A^{-1}b;$$

$$|x_2 - x_1| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow \text{метод сошелся.}$$

5. Предложите альтернативный критерий окончания итераций в методе бисекции, в котором учитывалась бы возмоность попадания очередного приближения в очень малую окрестность корня уравнения.

   Итерационный процесс метода бисекции для нахождения корня можно продолжать до тех пор пока не будет выполнено неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. На каждой итерации нужно сравнивать значение функции на концах отрезка с нулём. Если случайно край попадет в нужное решение, то алгоритм зациклится без этой проверки.

6. Предложите различные варианты модификаций метода Ньютона. Укажите их достоинства и недостатки.

   (a) Простой вариант модификации метода Ньютона — использование вычисленной в одной выбранной точке производной на всех итерациях:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)} \quad (\text{для систем } : F'(x_0)(x_{k+1} - x_k) + F(x_k) = 0).$$

   Квадратичная скорость сходимости теряется, но уменьшаются вычислительные затраты, так как пропадает необходимость на каждом шаге вычислять производную.

   (b)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f(x_k - f(x_k)f'(x_k)^{-1})}{f'(x_k)}.$$

   Скорость сходимости кубическая, но происходит увеличение вычислительных затрат.

   (c) Если вычисление второй производной рассматриваемой функции не вызывает проблем, то можно использовать другую модификацию метода Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f''(x_k)(f(x_k))^2}{2(f'(x_k))^3},$$

дающую кубическую скорость сходимости.

(d) Так же можно предложить следующую модификацию:

$$F'(x_0)\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau_{k+1}}+F(x_k)=0.$$

Скорость сходимости зависит выбора от параметра τ_{k+1}.

7. Предложите алгоритм для исключения зацикливания метода Ньютона и выхода за пределы области поиска решения?

   Если произошло зацикливание внутри области, то стоит изменить начальное приближение. Если произошел выход за пределы области, то можно изменить угол наклона касательной таким образом, чтобы вновь вернуться в область. Сделать это можно, используя метод Ньютона с параметром :

$$x_{k+1}=x_k-\alpha\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

   Для систем:

$$X_{k+1}=X_k-\alpha(F'(X_k))^{-1}F(X_k).$$

   Также для избежания выхода следующего приближения за отрезки локализации, можно использовать модификации алгоритма, например, комбинацию метода Ньютона и метода хорд:

$$x_{k+1}=x_k-f(x_k)\frac{b-x_k}{f(b)-f(x_k)}.$$

   В таком варианте если очередное приближение метода Ньютона вышло за пределы отрезка локализации, то вместо него используется приближение, получаемое методом хорд.