



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ Фундаментальные науки

КАФЕДРА _____ Прикладная математика

Отчёт по лабораторной работе №1

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Студент: _____
ФН2-52Б
(Группа)

(Подпись, дата)

Ю. А. Сафронов
(И. О. Фамилия)

Проверил:

(Подпись, дата)

(И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

1. Краткое описание алгоритмов	3
1.1. Метод Гаусса	3
1.2. Метод QR -разложения	4
2. Исходные данные	6
3. Результаты расчетов	7
4. Анализ результатов	8
5. Контрольные вопросы	9

Для исключения x_1 из третьего уравнения, используются коэффициенты c_{13} и s_{13} :

$$c_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^{(1)2}}}, \quad s_{13} = \frac{a_{31}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^{(1)2}}},$$

Далее первое и третье уравнение заменяются своими линейными комбинациями.

Эта операция равносильна умножению слева матрицы $A^{(1)} = T_{12}A$ и вектора правой части $b^{(1)} = T_{12}b$ на ортогональную матрицу, имеющую вид

$$T_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично неизвестная x_1 исключается из остальных уравнений, затем x_2 – из всех уравнений, кроме первого и второго, при этом используются матрицы $T_{23}, T_{24}, \dots, T_{2n}$ и так далее. Процесс продолжается, пока система не будет приведена к верхней треугольной форме. То есть $T = T_{n-1,n} \cdot T_{24} \cdot T_{23} \cdot T_{1n} \cdot \dots \cdot T_{13} \cdot T_{12}$. Причём, $R = TA$, где R – полученная верхнетреугольная матрица и $Q = T^{-1} = T^T$.

2. Исходные данные

В вариантах 20, 23 даны 2 СЛАУ, которые имеют вид:

$$A_{20} = \begin{pmatrix} 28.8590 & -0.0080 & 2.4060 & 19.2400 \\ 14.4360 & -0.0010 & 1.2030 & 9.6240 \\ 120.2040 & -0.0320 & 10.0240 & 80.1440 \\ -57.7140 & 0.0160 & -4.8120 & -38.4780 \end{pmatrix}, \quad b_{20} = \begin{pmatrix} 30.4590 \\ 18.2480 \\ 128.1560 \\ -60.9080 \end{pmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 3676.7530 & 35.0160 & -525.2500 & -245.1040 \\ 9055.6200 & 86.2450 & -1293.6600 & -603.6800 \\ 26303.4240 & 250.5040 & -3757.6290 & -1753.4720 \\ 70.3500 & 0.6700 & -10.0500 & -4.6850 \end{pmatrix}, \quad b_{23} = \begin{pmatrix} 245.2070 \\ 604.0000 \\ 1754.1910 \\ 4.7350 \end{pmatrix}$$

3. Результаты расчетов

4. Анализ результатов

5. Контрольные вопросы

1. Каковы условия применимости метода Гаусса без выбора и с выбором ведущего элемента?

Метод Гаусса применим тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы \mathcal{A} ненулевые, что равносильно условию $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, где $a_{ii}^{(i-1)}$ - элементы матрицы на главной диагонали после приведения ее к ступенчатому виду. Соответственно, в противном случае метод Гаусса без выбора главного элемента в ходе работы может привести к делению на ноль, при этом матрица может быть и невырождена. Метод Гаусса с выбором главного элемента можно применять для любой невырожденной матрицы. Если матрица будет вырожденной, то в какой-то момент главный элемент будет равен нулю, что недопустимо.

2. Докажите, что если $\det \mathcal{A} \neq 0$, то при выборе главного элемента в столбце среди элементов, лежащих не выше главной диагонали, всегда найдется хотя бы один элемент, отличный от нуля.

Докажем от противного. Допустим, что возможна такая ситуация, когда при условии $\det \mathcal{A} \neq 0$, существует такой шаг k , для которого, соответственно, в k -ом столбце все элементы не выше главной диагонали нулевые (на примере матрицы $n \times n$):

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1,k-1} & a_{k-1,k} & \dots & a_{k,n-1} & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{k+1,n-1} & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель ступенчатой матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали:

$$\det \mathcal{A} = a_{11} * a_{22} * \dots * a_{k-1,k-1} * 0 * a_{k+1,k+1} * \dots * a_{nn}, \quad a_{kk} = 0.$$

Противоречие. Следовательно, либо матрица вырождена, либо существует ненулевой элемент не выше главной диагонали.

3. В методе Гаусса с полным выбором ведущего элемента приходится не только переставлять уравнения, но и менять нумерацию неизвестных. Предложите алгоритм, позволяющий восстановить первоначальный порядок неизвестных.

Данную проблему можно решить вводом косвенной индексации. Вместо $A[i][j]$ использовать $A[\text{row}(i)][\text{col}(j)]$, где row и col — массивы (по сути своей являющиеся подстановками), в которых, например, для перемены местами двух строк или столбцов нужно поменять местами соответствующие индексы.

4. Оцените количество арифметических операций, требуемых для QR -разложения произвольной матрицы A размера $n \times n$.
5. Что такое число обусловленности и что оно характеризует? Имеется ли связь между обусловленностью и величиной определителя матрицы? Как влияет выбор нормы матрицы на оценку числа обусловленности?

Числом обусловленности называют величину $\text{cond}A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$. Стоит отметить, что $\text{cond}A = \text{cond}A^{-1}$. Эта величина характеризует влияние изменения значений правой части на решение системы; отклонение полученного решения от исходного.

Между числом обусловленности и определителем матрицы нет никакой связи, потому что умножение матрицы на число $\lambda > 0$ меняет определитель, но не меняет число обусловленности, так как $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

6. Как упрощается оценка обусловленности, если матрица является:

- а) диагональной;
- б) симметричной;
- в) ортогональной;
- г) положительно определённой;
- д) треугольной?

а) $\text{cond}A = \frac{a_{\max}}{a_{\min}}$, где a_{\max}, a_{\min} — максимальный и минимальный элементы матрицы;

б) $\text{cond}A = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$, где $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ — максимальный и минимальный собственные элементы матрицы;

в) Для оценки нормы используют тот факт, что для ортогональной матрицы $A^{-1} = A^T$, тогда $\text{cond}A = \|A\|^2$. Кроме того, число обусловленности ортогональной матрицы равно единице;

г) Собственные числа положительно определённой матрицы являются действительными положительными числами, поэтому в этом случае можно считать

число обусловленности через собственные числа;

д) $\text{cond}A = \frac{a_{\max}}{a_{\min}}$, где a_{\max}, a_{\min} — максимальный и минимальный элементы на диагонали матрицы.

7. Применимо ли понятие числа обусловленности к вырожденным матрицам?

Обусловленность оценивает близость матрицы A к вырожденной. Чем больше число обусловленности, тем ближе матрица к вырожденной. Если матрица A — вырожденная, то её число обусловленности стремится к бесконечности.

8. В каких случаях целесообразно использовать метод Гаусса, а в каких — методы, основанные на факторизации матрицы?

9. Как можно объединить в одну процедуру прямой и обратный ход метода Гаусса? В чём достоинства и недостатки такого подхода?

10. Объясните, почему, говоря о векторах, норму $\|x\|_1$ часто называют октаэдрической, норму $\|x\|_2$ — шаровой, а норму $\|x\|_\infty$ — кубической.