2023 级数学韶峰班选拔考试
高等代数与解析几何试题

filament
仓库地址

2024 年 8 月 28 日

考试方式：闭卷

考试时间：150 分钟

1. (20 分)

设 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ ，满足 $A^2 = B^2 = E,\ AB + BA = 0$.
证明：存在可逆矩阵 $T \in M_2(\mathbb{R})$ 使 $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, TBT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 。

2. (15 分)

设 A, B 是两个特征值都为正数的 n 阶实方阵。
证明：如果 $A^2 = B^2$ ，则 $A = B$ 。

3. (10 分)

设 S, T 均为 n 阶对称正定矩阵。
证明：$\det(S + T) \geq \det S + \det T$ 。

4. (15 分)

设 V 是有限维欧氏空间，V_1, V_2 是 V 的非平凡子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$ 。设 p_1, p_2 分别是 V 到 V_1, V_2 的正交投影，$\varphi = p_1 + p_2$ 。
证明：$0 < \det \varphi \leq 1$ 且 $\det \varphi = 1$ 的充要条件是 V_1 与 V_2 正交。

5. (15 分)

证明：4 维欧氏空间中不存在 5 个不同点，使得每个点的坐标皆为整数，且任意两点距离相等。

6. (15 分)

设 V 是数域 F 上的有限维线性空间，$\sigma \in \mathrm{End}V$,
定义 $\mathrm{ad}\,\sigma \in \mathrm{End}(\mathrm{End}\,V)$, $\mathrm{ad}\,\sigma(\tau) = \sigma\tau - \tau\sigma$, 其中 $\mathrm{End}\,V$ 是 V 上所有线性变换所成的线性空间。

7. (10 分)

在空间直角坐标系中，设椭球 S 的方程为 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ 。
过动点 $P(x, y, z)$ 存在三条互相垂直的射线与椭球 S 相切，求动点 P 满足的方程。