2023 级数学韶峰班选拔考试
数学分析试卷

filament

2024 年 8 月 28 日

考试方式：闭卷

考试时间：2 小时

1. (20 分)

   研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$ 的敛散性，其中 $x \in \mathbb{R}$.

2. (20 分)

   设 I 为有限长度的区间。证明：区间 I 上实函数 $f(x)$ 一致连续的充要条件是 $f(x)$ 把 Cauchy 列映成 Cauchy 列，即若 $\{x_n\}$ 是 I 上 Cauchy 列，则 $\{f(x_n)\}$ 也是 Cauchy 列。

3. (20 分)

   讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p} \mathrm{d}x$ 的敛散性（包括绝对收敛、条件收敛、发散）。

4. (20 分)

   设 $u_n(x), v_n(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $|u_n(x)| \leq v_n(x), n=1,2,\cdots$。证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 (a,b) 上收敛于一个连续函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上也收敛于一个连续函数。

5. (20 分)

   证明 Stirling 公式：
   $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \to \infty).$$