2023-2012
微积分II 期末试题与解析

试卷：

(^_^)v加油！

左侧试卷附有超链接
每份试卷和答案的标题也是超链接
点击可以在试卷和答案之间快速切换
（更新到2023年啦）

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2023.6.14)

一、计算下列各题（每题 6 分, 共 3 题, 合计 18 分）

1. 设 $u = \mathrm{e}^{xy^2} + \ln(x + y + z^2)$, 求 u 在点 $P(1, -1, 1)$ 处的全微分.
2. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = ax(a > 0)$ 截下的部分曲面的面积.
3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ 的和.

二、计算下列各题（每题 7 分, 共 3 题, 合计 21 分）

1. 求函数 $f(x) = \dfrac{5x - 12}{x^2 + 5x - 6}$ 的马克劳林级数，并给出其收敛域.
2. 求微分方程 $y' - y = xy^5$ 的通积分.
3. 求微分方程 $y'' - 8y' + 16y = x\mathrm{e}^{4x}$ 的通解.

三. (本题10分) 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ 上平行于平面 $x - y + 2z = 0$ 的切平面方程.

四. (本题10分) $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$, Σ 为立体 Ω 的表面，求曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (x^4 + y^4 + z^4 - z^3)\mathrm{d}S$.

五. (本题10分) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$ 的敛散性 (绝对收敛/条件收敛/发散), 其中 $p > 0$.

六. (本题10分) 试将函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \ne 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 展成 x 的幂级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2}$ 的和.

七. (本题10分) 设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且 $f(x) = 2 + |x|, x \in [-1, 1]$.

1. 求 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的傅里叶展开式;
2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和;
3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

八. (本题11分) 求微分方程 $y'' - y = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^x} + \cos x$ 的通解.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2022.6.13)

一、简答题（8 分 $\times 6 = 48$ 分）

1. 计算 $I = \iint\limits_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由曲线 $xy=1, xy=2$ 以及 $y=x, y=2x$ 所围图形在第一象限的部分.

2. 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\Big(\cos(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})-\cos(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})\Big)$ 绝对收敛.

3. 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数及收敛域.

4. 求方程 $y''+\mathrm{e}^{y'}=0, y(0)=0, y'(0)=0$ 的解.

5. 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的马克劳林展式.

6. 求函数 $y=x$ $(x\in[0,\pi])$ 的余弦级数.

二、(10 分) 已知 $y=\mathrm{e}^x$ 为方程 $y''+\tan x\, y'-(1+\tan x)y=0$ 的一个解, 求方程的通解.

三、(10 分) 计算第二型曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\dfrac{1}{1+z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$, 取上侧.

四、(10 分) 已知第二型曲线积分 $I_L=\int_L (x+y^2+\mathrm{e}^z)\mathrm{d}x+(2xy+yz)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 与路径无关, $R(0,0,z)=z^2$. 求函数 $R(x,y,z)$ 的表达式以及当 L 的起点为 $(0,0,0)$, 终点为 $(1,1,1)$ 时 I_L 的值.

五、(10 分) 已知 $A=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^k}\iiint\limits_{\Omega(t)}(e^{xy}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为非零常数, 求 A 及 k 的值, 其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq t^2\}$.

六、(12 分) 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的有界连续函数, 记 $M=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. 求方程 $y''-y=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ 的有界解, 并证明对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 有 $|y(x)|\leq M$.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2021.6.22)

一、计算下列各题（6分×5 = 30 分）

1. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ 3x+2y+z=10 \end{cases}$ 在点 $P(1,2,3)$ 处的法平面与切线方程.

2. 求柱面 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$ 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部分曲面的面积.

3. 计算第二类曲线积分 $I_1=\int_C \cos(x+y^2)\mathrm{d}x+\left(2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}\ \right)\mathrm{d}y$, 其中 C 为旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, 由 $O(0,0)$ 到 $A(2\pi a,0)$, 其中 $a>0$.

4. 计算第一类曲面积分 $I_2=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中 S 为圆锥面 $x=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截下的部分.

5. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

二、计算下列各题（8分×5 = 40 分）

1. 讨论数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性.

2. 讨论数项级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

3. 求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$ 的和.

4. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3x^2+2xy-y^2}{2xy-x^2}$ 的通积分.

5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^4+y^3}{xy^2}$ 的通积分.

三、（本题10分）计算 $I_3=\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, 其中 C 是平面 $x+y+z=1$ 的第一卦限部分与三个坐标面的交线，从 z 周正向往 z 轴负向看去是逆时针方向.

四、（本题10分）计算 $I_4=\iint\limits_S 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为曲线 $z=\mathrm{e}^y(0\le y\le a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面，取下侧.

五、（本题10分）设 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)}$, $x\in(-1,1)$. 求出 $f(x)$ 满足的微分方程，并求解之. 计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2020.8.18)

一、(8分) 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性以及连续可微性.

二、计算下列各题（7分×3 = 21 分）

1. 求过直线 $L:\begin{cases} 10x+2y-2z=27, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 且与曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的平面方程.

2. 求旋转抛物面 $x^2+y^2=2az\ (a>0)$ 与半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面积.

3. 计算 $I=\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x\geq 1, y\geq x^2$.

三、计算下列各题（7分×3 = 21 分）

1. 计算 $I=\displaystyle\int_C 2x\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+(x+2y-z)\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y=z \end{cases}$ 上从点 $A(1,0,0)$ 到$B(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 的位于第一卦限的一段曲线.

2. 计算 $I=\displaystyle\oint_C \frac{y^2}{2}\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y=R. \end{cases}$ 从 y 轴的正向看去是依顺时针方向.

3. 计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

四、计算下列各题（7分×4 = 28 分）

1. 考察级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

2. 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性.（提示：$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$）

3. 求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$ 的和函数，并求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\frac{1}{3^n}$ 的和.

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

五、计算下列各题（7分×2 = 14 分）

1. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(1+x+y), y(0)=-1$ 的特解. 2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$ 的通解.

六、(8分) 求微分方程 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2019.6.17)

一、计算下列各题(6分 × 5=30分)

1. 求平面 $x+4y-8z=18$ 被圆柱面 $x^2+y^2=6y$ 所截部分的面积.

2. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\arcsin\frac{\pi}{5^n}$ 的敛散性.

3. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $2xy\cdot y'-y^2+x=0$ 的解.

5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2-y+5}{x+y^2+2}$ 的通积分.

二、(10分) 求过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 且与曲面 $S:3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的切平面方程.

三、(10分) 设 $C: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(t\in[0,2\pi])$ 为旋轮线的一拱，方向由原点到$A(2\pi a,0)$, 计算 $I_1=\displaystyle\int_C[(x+y+1)e^x-e^y+y]\mathrm{d}x+[e^x-(x+y+1)e^y-x]\mathrm{d}y.$

四、(10分) 计算 $I_2=\displaystyle\iint_S 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ $(z\geq 0)$ 的上侧.

五、(10分) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

六、(10分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域、和函数，并由此计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

七、(10分) 将函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成余弦级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

八、(10分) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$, $y_2=xe^x+e^{-x}$, $y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求出此微分方程，写出其通解.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2018.7.3)

一、计算下列各题(6分 × 5=30分)

1. 设 $u = f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, 其中 $f(v)$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$ 的收敛域.

4. 求微分方程 $(x-\sin y)\mathrm{d}y + \tan y \mathrm{d}x = 0$ 满足初始条件 $y(1) = \dfrac{\pi}{6}$ 的特解.

5. 求微分方程 $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 5\right)\mathrm{d}x + \left(-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} + \dfrac{6}{y^3}\right)\mathrm{d}y = 0$ 的通积分.

二、(10分)　计算 $I_1 = \displaystyle\iint_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ 的上侧.

三、(10分)　计算 $I_2 = \displaystyle\oint_C (y^2-z^2)\mathrm{d}x + (z^2-x^2)\mathrm{d}y + (x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 C 是立方体 $0 \le x \le a, 0 \le y \le a, 0 \le z \le a$ 的表面与平面 $x+y+z = \dfrac{3a}{2}$ 的交线，从 z 轴正向看去是逆时针方向.

四、(10分)　对常数 p, 讨论数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}$ 何时绝对收敛，何时条件收敛，何时发散.

五、(10分)　试将函数 $f(x) = \dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}$ 展成马克劳林级数，并写出其收敛域.

六、(10分)　将函数 $f(x) = \dfrac{x}{4}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，并求级数 $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$ 的和.

七、(10分)　求二阶微分方程 $y''-y = 2x + e^{2x}\cos x$ 的通解.

八、(10分)　(1) (非商学院学生做) 设函数 $f(x)$ 对定义域内任意两点 x, y 有等式 $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0) = a$ $(a \neq 0)$, 求函数 $f(x)$.

(2) (商学院学生做) 已知 $\displaystyle\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a = \frac{1}{2}f(x)+1$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2017.7.4)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 的极值，并讨论是极大还是极小.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\frac{n+2}{n+1}\quad(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $(x^2y^3+xy)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$ 的通积分.

5. 求微分方程 $y''=1+(y')^2$ 的通解.

二、(10分)　计算 $I_1=\displaystyle\oint_C\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 C 取逆时针方向，分别取以下两种路径：

(1) 圆周 $x^2+y^2=2x+2y-1$;　　　(2) 闭曲线 $|x|+|y|=1$.

三、(10分)　计算 $I_2=\displaystyle\oint_C\frac{y^2}{2}\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+y=R$ 的交线，从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、(10分)　计算第二类曲面积分 $I_3=\displaystyle\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$, 取下侧.

五、(10分)　(1) 证明 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(2) 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性。如果收敛，指明其是条件收敛还是绝对收敛，并说明理由.

六、(10分)　求数项级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和。

七、(10分)　将函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内展开成傅里叶级数.

八、(10分)　(1) (非商学院学生做) 设 $f(x)$ 二阶连续可微，$g(x)$ 一阶连续可微，且满足 $f'(x)=g(x)$, $g'(x)=2e^x-f(x)$, 且 $f(0)=0$, $g(0)=2$, 计算 $I_4=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right)\mathrm{d}x$.

(2) (商学院学生做) 设 $f(x)=x^3+1-x\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2016.6.20)

一、计算下列各题(6分 × 5=30分)

1. 求二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2}$.

2. 设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases} u^2-v+xy=0,\\ u+v^2+x-y=0\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

3. 求证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}$ 收敛，并求其和。

4. 求微分方程 $y'-y=xy^3$ 的通解.

5. 求微分方程 $yy''=(y')^2$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

二、(10分)　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处的连续性，可偏导性与可微性。

三、(10分)　求第一类曲面积分 $I_1=\iint\limits_S x^2y^2\mathrm{d}S$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, x^2+y^2\le R^2$.

四、(10分)　计算第二类曲面积分 $I_2=\iint\limits_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $a>0$ 是一个常数, S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧. (提示：利用高斯公式)

五、(10分)　讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n}$ 的敛散性。如果收敛，说明其是条件收敛还是绝对收敛.

六、(10分)　求 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$ 的马克劳林展式。

七、(10分)　将函数 $f(x)=x\ (0\le x\le\pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$, 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和。

八、(10分)　(1)　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛域；

(2)　设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$, 建立 $S(x)$ 所满足的微分方程，并求 $S(x)$.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2015.6.22)

一、计算下列各题(5分 × 11=55分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D |y-x^2|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $|x|\le 1, 0\le y\le 2$.

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2+2z=5$ 上点 $(1,1,1)$ 处的切平面和法线.

4. 判别广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$ 的敛散性, 若收敛，计算其值.

5. 求解微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 计算曲线积分 $\oint_C \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$, 其中 C 为 $y=x^2$ 与 $y=x$ 所围区域的边界，取逆时针方向.

7. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{7}{10^n}\right)$是否收敛，如果收敛，求其和.

8. 计算曲线积分 $\int_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 l 为包含单位圆周 $x^2+y^2=1$ 在内的分段光滑的简单闭曲线，取逆时针方向.

9. 求解微分方程 $(e^x\sin y-2y\sin x)\mathrm{d}x+(e^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=0$.

10. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛域, 并求其和函数.

11. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ 的值.（提示：可利用上题结果）

二、(12分)　计算曲面积分 $\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中 $a>0$ 是一个常数, S 是曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,

三、(12分)　设函数 $Q(x,y)$ 连续可微，曲线积分 $\int_C 3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，且对一切实数 t 都有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}3x^2y\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 求函数 $Q(x,y)$.

四、(13分)　1. 求函数 $f(x)=x^2,(-\pi\le x\le\pi)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶展开式;

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ 的和.　　3. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.

五、(8分) (本题非商学院的考生做)　设 $a_n>0, S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\ (n=1,2,\cdots)$,

证明: (1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛;　(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛当且仅当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

六、(8分) (本题商学院的考生做)　讨论当实数 p 为何值时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^p$ 收敛, 实数 p 为何值时, 级数发散.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2014.6.23)

一、简答题(6分 $\times$ 8=48分)

1. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ 的收敛域.

2. 求积分 $I=\displaystyle\int_C \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到 $(2,4)$ 的一段弧.

3. 求微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 的通积分.

4. 已知 $f(x)$ 为 $[0,2]$ 上的连续函数，证明 $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 u[f(u)+f(2-u)]\,\mathrm{d}u$.

5. 求函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 关于 x 的幂级数展式.

6. 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\ (p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

7. 求函数项级数 $I(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$ 的和函数.

8. 计算曲面积分 $I=\displaystyle\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 外侧在 $z\geq 0$ 的部分.

二、(10分)　求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n n!}$ 的和.

三、(10分)　计算曲线积分 $\displaystyle\int_\Gamma 2y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+e^z\,\mathrm{d}z$, 其中积分曲线 Γ 为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y=1 \end{cases}$ 从 y 轴正向看去是顺时针方向.

四、(10分)　计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S (xy+yz+zx)\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截得的有限部分.

五、(10分)　设 $f(x)=|x|$,

1. 求 $f(x)$ 在 $[0,\pi)$ 上的正弦级数展式的前两项系数 b_1 和 b_2;

2. 证明：对于二元函数 $F(a,b)=\displaystyle\int_0^{\pi}\Big[f(x)-a\sin x-b\sin(2x)\Big]^2\mathrm{d}x$, (b_1,b_2) 为其在 $\mathbb{R}^2$ 上的最小值点.

商学院同学任选下列两题中一题，其他院系同学必须选做第七题.

六、(12分)　(1) 求方程 $y''-5y'+6y=e^x$ 的通解.

(2) 设 $y=f(x)$ 为 $y'''-5y''+6y'=e^x$ 的解，证明：$y=f(x)$ 为 $y''-5y'+6y=e^x$ 的解的充要条件为 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

七、(12分)　(1) 求方程 $y''-5y'+6y=f(x)$ 的通解, 其中 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(2) 若 $f(x)\geq 0$, 证明上述方程满足条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的解必非负.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2013.6.26)

一、计算下列各题(5分 × 10=50分)

1. 计算曲面积分 $\iint\limits_{S} z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}$ 的和.

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径, 收敛区间和收敛域.

4. 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

5. 解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy+x^2}$.

6. 判别广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 若收敛，计算其值.

7. 计算曲面积分 $\iint\limits_{S} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0, y\geq 0$ 的部分.

8. 计算曲线积分 $\int_l \dfrac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 l 为椭圆周 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, 积分按逆时针方向进行.

9. 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面的方程.

10. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是区域 $x^2+y^2+z^2\leq 4z, \sqrt{x^2+y^2}\leq z$.

二、(8分)　设区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\leq z\leq t, x^2+y^2\leq t^2\}\ (t>0)$, 函数 $f(u)$ 可导并且 $f(0)=0, f'(0)=2, F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{F(t)}{t^5}$.

三、(10分)　设函数 $f(x)$ 二阶连续可微，满足 $\int_0^x (x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 求函数 $f(x)$.

四、(12分)　计算曲线积分 $\int_l (x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z$, 其中积分曲线 l 是从 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 的螺线　$x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$.

五、(12分)　1. 设函数 $f(x)$ 是周期为2的周期函数，且 $f(x)=2+|x|, (-1\leq x\leq 1)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的傅立叶展开式;

2. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ 的和.　　3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

六、(8分)　设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续可微函数，使得广义积分 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛，证明：如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 收敛，则广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2012.6.20)

一、计算下列各题(6分 × 10=60分)

1. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\ (0<h<a)$ 截出的顶部.

2. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_S (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 V 的整个边界曲面的外侧.

3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ 的和.

4. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域.

5. 求微分方程 $y''+y=x^2$ 的通解.

6. 求微分方程 $(x-y)\,\mathrm{d}x+(x+y)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

7. 求函数 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展式.

8. 判别广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$ 的敛散性.

9. 计算曲线积分 $\displaystyle\int_C\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$.

10. 计算三重积分 $\displaystyle\iiint_\Omega y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为锥面 $z=\sqrt{4x^2+4y^2}$ 与 $z=2$ 所围立体.

二、(10分) 讨论实数 p 为何值时，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)^p$ 收敛，实数 p 为何值时，级数发散.

三、(10分) 设函数 $f(x),g(x)$ 连续可微，$f(0)=g(0)=0$, 使得曲线积分

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,0,1)}\left((x^2-f(x))y+\frac{1}{2}g(x)y^2\right)\mathrm{d}x+\big(f(x)y-g(x)\big)\,\mathrm{d}y+\,\mathrm{d}z$$

与路径无关，求出 $f(x),g(x)$, 并求出该曲线积分的值.

四、(10分) 1. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\pi^2-x^2$, $(-\pi\le x\le\pi)$, 求函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶级数展开式;

2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 的和.

3. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

五、(本题非商学院的学生必做题，10分) 已知曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 恒等于常数 A, 其中函数 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=1$, L 为任意包围原点 $O(0,0)$ 的简单闭曲线，取正向，

(1) 设 G 为不包含原点的单连通区域，证明：G 内的曲线积分 $\displaystyle\int_C\frac{1}{f(x)+8y^2}(x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)$ 与路径无关，其中 C 为完全位于 G 内的曲线;

(2) 求函数 $f(x)$ 与常数 A.

六、(本题商学院学生做，非商学院学生做了不给分，10分) 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$$\oint_C (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 是椭圆 $x^2+y^2=a^2, \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1(a>0,h>0)$, 从 x 轴的正向看去，此椭圆取逆时针方向.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2023.6.14)

一、1. $\mathrm{d}u\Big|_{(1,-1,1)} = (\mathrm{e}+1)\mathrm{d}x + (-2\mathrm{e}+1)\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}z$;　　2. $2a^2(\pi-2)$;　　3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n} = 1$.

二、1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{6^n}\right)x^n,\ x\in(-1,1)$.　2. $y^4(C\mathrm{e}^{-4x}-x+\dfrac{1}{4}) = 1$.　3. $y = (C_1+C_2x)\mathrm{e}^{4x}+\dfrac{x^3\mathrm{e}^{4x}}{6}$.

三、$x-y+2z = \pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.　　　四、$\dfrac{32\pi}{5}$.

五、$p>1$时绝对收敛；$\dfrac{1}{2}<p\leq 1$时条件收敛；$0<p\leq\dfrac{1}{2}$时发散.

六、$f(x) = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n},\ x\in[-1,1]$;　　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2} = \dfrac{f(1)-1}{2} = \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$.

七、1. $f(x) = \dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}$;　　2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$;　　3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

八、$y = C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{2}-x\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{x})-\dfrac{1}{2}\cos x$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2022.6.13)

一、 1. $\frac{3}{8}$.

2. $\left|n\Big(\cos(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})-\cos(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})\Big)\right|=2n\sin\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n^2}\le\frac{2}{n^2}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，故原级数绝对收敛.

3. 收敛域为$[-1,1]$，和函数 $S(x)=\begin{cases}-\ln(1-x)+1+\frac{\ln(1-x)}{x}, & x\in[-1,1),x\neq 0,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

4. $y=-x\ln(1+x)+x-\ln(1+x)$.

5. $\sqrt{1-x^2}=1-\frac{x^2}{2}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad (|x|\le 1)$.

6. x 的余弦级数为 $\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)\cos(nx),\quad x\in[0,\pi]$.

二. 通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}(\sin x-2\cos x)$, 其中$c_1,c_2$ 为任意常数.

三. $(\frac{8}{3}-2\ln 2)\pi$.

四. $R(x,y,z)=x\mathrm{e}^z+\frac{1}{2}y^2+z^2$. 　当$L$ 的起点为$(0,0,0)$, 终点为$(1,1,1)$ 时, $I_L=\mathrm{e}+\frac{7}{3}$.

五. 解: 由泰勒公式可得，当 $(x,y,z)\in\Omega(t)$ 时, $\mathrm{e}^{xy}-1=xy+\frac{1}{2}x^2y^2+o(t^4)$.

$$\iiint\limits_{\Omega(t)}(\mathrm{e}^{xy}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega(t)}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+o(t^7)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2}x^2y^2\sqrt{t^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+o(t^7)$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^t\rho^5\sqrt{t^2-\rho^2}\mathrm{d}\rho+o(t^7)\xlongequal{(\sqrt{t^2-\rho^2}=u)}\frac{\pi}{4}\int_0^t u^2(t^2-u^2)^2\mathrm{d}u+o(t^7)$$

$$=\frac{2\pi}{105}t^7+o(t^7).\quad 因此 k=7, A=\frac{2\pi}{105}.$$

六. 解: 齐次方程的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}$.

利用常数变易法, 设非齐次方程的解为 $y=c_1(x)\mathrm{e}^x+c_2(x)\mathrm{e}^{-x}$, 则有

$$\begin{cases}c_1'(x)\mathrm{e}^x+c_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=0\\ c_1'(x)\mathrm{e}^x-c_2'(x)\mathrm{e}^{-x}=f(x)\end{cases}\quad 解得\ \begin{cases}c_1'(x)=\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{-x}\\ c_2'(x)=-\frac{1}{2}f(x)\mathrm{e}^{x}\end{cases}$$

为了保证方程的解为有界解, 形式上需要 $c_1(+\infty)=0, c_2(-\infty)=0$.

从而我们取 $c_1(x)=\frac{1}{2}\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\quad c_2(x)=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$.

因此形式上非齐次方程的解为 $y(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{2}\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t$.

同时由于对任意的 $t\in\mathbb{R}$, $|f(t)|\le M$, 从而

$$|y(x)|\le\frac{\mathrm{e}^x}{2}\left|\int_{+\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right|+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}\left|\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\right|\le\frac{M\mathrm{e}^x}{2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\frac{M\mathrm{e}^{-x}}{2}\int_{-\infty}^x\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t\le M.$$

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2021.6.22)

一、 1. 法平面方程为 $x-2y+z=0$，切线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

2. 解：柱面在第一卦限部分记为 S_1，则 $S_1: x=\sqrt{ay-y^2},(y,z)\in D$，$D=\{(y,z)|0\le z\le \sqrt{a^2-ay},0\le y\le a\}$.

$$S=4S_1=\iint\limits_D\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_D\frac{a}{2\sqrt{ay-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-ay}}\frac{a}{\sqrt{ay-y^2}}\mathrm{d}x=4a^2.$$

3. 解：$P=\cos(x+y^2),Q=2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2y\sin(x+y^2)$，所以积分与路径无关. 取直线段 $\overline{OA}: y=0,x:0\to 2\pi a$，则 $I_1=\displaystyle\int_{\overline{OA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\cos x\mathrm{d}x=\sin(2\pi a)$.

4. 解：S 关于 $y=0$ 对称，$xy+yz$ 关于 y 是奇函数，则

$$I_2=\iint\limits_S zx\mathrm{d}S=\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(1+z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^3\cos\theta\mathrm{d}\rho=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

5. 解：$\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

对于 $I_1=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，(1) $p\ge 1$ 时是定积分，收敛；(2) $p<1$ 时，0 是奇点，$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{p-1}e^{-x}\cdot x^{1-p}=1$，由柯西判别法，当 $0<1-p<1$ 即 $0<p<1$ 时收敛，当 $1-p\ge 1$ 即 $p\le 0$ 时发散. 由(1)(2)可知，I_1 仅当 $p>0$ 时收敛.

对于 $I_2=\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，$+\infty$ 是奇点，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{p-1}e^{-x}\cdot x^2=0$，所以 I_2 收敛.

综上，原式仅当 $p>0$ 时收敛；

二、1. 解：$0<u_n=\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}<\dfrac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\dfrac{1}{n^2}$，而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以原级数收敛.

2. 解：因为数列 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ 单调减少趋于零，

$$\left|\sum_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{6}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\sum_{k=1}^n 2\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\sum_{k=1}^n\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{12}-\cos\frac{(2k+1)\pi}{12}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{(2n+1)\pi}{12}\right|\le\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}},$$

故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$ 的部分和有界. 由狄利克莱判别法知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$ 收敛.

又 $\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}\right|\ge\dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}-\dfrac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$. 与上面的证明类似，可以知道级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$ 收敛，而级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散. 一个发散级数与一个收敛级数逐项相减所得的级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$ 必发散，由比较判别法可知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}\right|$ 发散. 综上所述，原级数条件收敛.

3. 解：注意到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x)$, $x\in(-1,1]$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(1-\frac{1}{3^n}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{3^n}=\ln(1+1)-\ln(1+\frac{1}{3})=\ln\frac{3}{2}.$$

4. 解：原方程化为$(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$, 这是全微分方程，通积分为$x^3+x^2y-xy^2=C$.

5. 解：原方程化为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x}y=x^3\cdot y^{-2}$, 这是伯努利方程，令$y^3=u$, 则原方程化为$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\dfrac{3}{x}\cdot u=3x^2$, 解得 $u=\mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\Big(C+\displaystyle\int 3x^3\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=x^3(C+3x)$, 故所求通积分为$y^3=x^3(C+3x)$.

三、解：设S是平面$x+y+z=1$在第一卦限的部分的上侧，则由斯托克斯公式，

$$I_3=-2\iint\limits_S z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}S=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma(S)=-1.$$

四、解：曲面S的方程为$z=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$, 其中$(x,y)\in D, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$. 设$S_1: z=\mathrm{e}^a, (x,y)\in D$, 取上侧. $P=4xz, Q=-2yz, R=1-z^2$, 则由高斯公式$\displaystyle\iint\limits_{S+S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，所以$I_4=-\displaystyle\iint\limits_{S_1}(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2$

五、解：$f'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$, $f''(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=xs(x)$,

$s(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}$, 两边积分得

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$$

$$=x\Big(4x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\Big)=x(4x+f'(x))=4x^2+xf'(x),$$

所以$s(x)=8x+f'(x)+xf''(x)$, 故$f''(x)=xs(x)=8x^2+xf'(x)+x^2f''(x)$，

所以$f(x)$满足的微分方程为 $f''(x)-\dfrac{x}{1-x^2}f'(x)=\dfrac{8x^2}{1-x^2}$,

这是关于$f'(x)$的一阶线性微分方程，解得

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\Big(C_1+\int\frac{8x^2}{1-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(C_1+8\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\Big)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(C_1+4\arcsin x-4x\sqrt{1-x^2}\Big)$$

由$f'(0)=0$得$C_1=0$, 所以$f'(x)=4\Big(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\Big)$, 两边再积分得$f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2+C_2$,

由$f(0)=0$得$C_2=0$, 所以$f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2$

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2020.8.18)

一、 解： $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

$\omega=f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y)=xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$

$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\dfrac{\omega}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\rho\cos\theta\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $f'_x(x,y)=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f'_x(x,y)=\lim\limits_{\rho\to 0^+}(\rho\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}-\cos^2\theta\sin\theta\cos\dfrac{1}{r})$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续可微.

二、1. $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z+27=0$.

2. 解：$S=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 2a^2}\Big(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}+\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2^{1/2}}\Big(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}+\frac{\sqrt{a^2+\rho^2}}{a}\Big)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{16}{3}\pi a^2.$$

3. $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{+\infty}\frac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}\Big|_{y=x^2}^{y\to+\infty}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$

三、1. 曲线的参数方程为 $x=\cos\theta,y=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}},z=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}},\theta$ 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\frac{1}{2}.$$

2. 记 $S:x+y=R$ 后侧, $I=\displaystyle\iint\limits_S(y+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{R}{\sqrt{2}}\iint\limits_S\mathrm{d}S=-\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$

3. 设 $S_1:z=0,((x,y)\in D)$ 取下侧, 其中 $D:x^2+y^2\le a^2$. Ω 是 S 与 S_1 所围立体，

$P=x^3+az^2,Q=y^3+ax^2,R=z^3+ay^2$, 则

$$\iint\limits_{S+S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5},$$

$$\iint\limits_{S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4},$$

所以 $I=\dfrac{6\pi a^5}{5}+\dfrac{\pi a^5}{4}=\dfrac{29}{20}\pi a^5$

四、1. 解：$\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$, $a_n=\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}-\Big(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{3n^3}+o(\dfrac{1}{n^4})\Big)\sim\dfrac{1}{3n^3},$

所以级数收敛.

2. 解：$a_n=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, a_n 单调减，$\dfrac{1}{2n}<a_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以由莱布尼茨判别法可知原级数收敛；由 $a_n>\frac{1}{2n}$ 可知原级数非绝对收敛, 故原级数条件收敛.

3. 解：设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}(n+1)^2x^n$, 两边积分得

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\Big)'=x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'=\frac{x}{(1-x)^2},(|x|<1)$$

两边求导 $S(x)=\Big(\dfrac{x}{(1-x)^2}\Big)'=\dfrac{x+1}{(1-x)^3},(-1<x<1)$. 令 $x=-\dfrac{1}{3}$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{9}{32}$.

4. $x^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}\cos n\pi x, x\in(-\infty,+\infty)$, 取 $x=0$ 即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

五、1. $\tan(1+x+y)-\sec(1+x+y)=x-1$.

2. 原方程可以写成 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{2x}{y}=-2\dfrac{x^2}{y^3}$, 这是一个关于 x 的伯努利方程，通积分为 $y^2=C\mathrm{e}^{\frac{y^2}{x}}$.

六、$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2019.6.17)

一、 1. 平面方程为 $z=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{9}{4}$, $(x,y)\in D$, 其中 $D: x^2+(y-3)^2\le 9$.

则所求面积 $S=\displaystyle\iint\limits_D\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{9}{8}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{8}\cdot 9\pi=\frac{81}{8}\pi$.

2. $a_n=n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\arcsin\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\arcsin\frac{\pi}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\frac{\pi}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$,

所以级数收敛.

3. $x=1$ 是奇点. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\sqrt{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}$, 所以广义积分收敛.

4. 这是伯努利方程，令 $y^2=u$, 方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\dfrac{1}{x}u=-1$, 通积分为 $y^2=Cx-x\ln|x|$.

5. 方程化为 $(x^2-y+5)\mathrm{d}x-(x+y^2+2)\mathrm{d}y=0$, 这是全微分方程，通积分为 $\frac{x^3-y^3}{3}-xy+5x-2y=C$.

二、 解：直线 L 过点 $M_0(\frac{27}{8},-\frac{27}{8},0)$, 方向向量为 $(10,2,-2)\times(1,1,-1)=8(0,1,1)$.

设切点为 (x_0,y_0,z_0), 则法向量为 $(3x_0,y_0,-z_0)$, 切平面方程为 $3x_0x+y_0y-z_0z=27$.

所以 $\begin{cases}3x_0\cdot\frac{27}{8}+y_0\cdot(-\frac{27}{8})=27,\\(3x_0,y_0,-z_0)\cdot(0,1,1)=0,\\3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27.\end{cases}$ 解得 $(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1)$ 或 $(-3,-17,-17)$,

所以切平面方程为 $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z=-27$.

三、 记 $P(x,y)=(x+y+1)e^x-e^y+y$, $Q(x,y)=e^x-(x+y+1)e^y-x$, 则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2$

$$\int_{C+\overline{AO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint\limits_D(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad(\text{其中 } D \text{ 为旋轮线的一拱与 } x \text{ 轴所围的区域})$$

$$=2\int_0^{2\pi a}y\mathrm{d}x=2\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=6\pi a^2,$$

所以 $I_1=6\pi a^2+\displaystyle\int_0^{2\pi a}((x+1)e^x-1)\mathrm{d}x=6\pi a^2+2\pi a(e^{2\pi a}-1)$.

四、方法一: 设 $S_1: z=0$, $(x^2+y^2\le 1)$, 取下侧, 则

$$\iint\limits_{S+S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega 6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\qquad(\text{柱坐标})$$

$$=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^3+\rho z)\mathrm{d}z=2\pi,\ \text{所以}$$

$$I_2=2\pi-\iint\limits_{S_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

方法二: $S: z=1-x^2-y^2$, $(x,y)\in D$, $D: x^2+y^2\le 1$, 则

$$I_2=\iint\limits_D\Big(2x^3(-z_x')+2y^3(-z_y')+3\big((1-x^2-y^2)^2-1\big)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D(7x^4+7y^4-6x^2-6y^2+6x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad(\text{极坐标})$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\Big(7\rho^5\cos^4\theta+7\rho^5\sin^4\theta-6\rho^3+6\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\Big)\mathrm{d}\rho=-\pi.$$

五、(10分)　设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

解：$x>0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)$, 令 $x=\frac{1}{k}$, 则 $\frac{1}{k+1}<\ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big)$, 取 $k=1,2,\cdots,n-1$,

再将各式相加可得 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n+1<2\ln n\ (n\geq 3)$, 所以 $\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}<\frac{2\ln n}{n^2}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n^2}\cdot n^{\frac{3}{2}}=0$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\ln n}{n^2}$ 收敛. 由比较判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 收敛.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}a_k\Big(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\Big)=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2-a_1}{3}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$$

$=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$.

六、　令 $t=x^2$, 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$, $a_n=\frac{2n-1}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2^n}{(2n-1)2^{n+1}}=\frac{1}{2}$,

所以 $R=2$. $t=2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$ 发散; 所以 $0\leq x^2<2$, 收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, 则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^n=\frac{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}{1-\frac{x^2}{2}}=\frac{x}{2-x^2}$,

所以 $S(x)=\Big(\frac{x}{2-x^2}\Big)'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$, 　$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 　　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S(1)=3$.

七、 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0,\ n=1,2,\cdots$.

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4\pi^2}{3}$, 　$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$, $n=1,2,\cdots$,

所以 $\pi^2-x^2=\frac{2}{3}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$, 　$x\in[-\pi,\pi]$.

代入 $x=0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$, 　代入 $x=\pi$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{4}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

八、 $y_1-y_3=e^{-x}$ 是对应的齐次方程的一个解，则 $y_4=y_2-e^{-x}=xe^x$ 是非齐次方程的一个解，

$y_1-y_4=e^{2x}$ 是对应的齐次方程的另一个解。所以 $-1,2$ 是特征根。

二阶线性非齐次微分方程为 $y''-y'-2y=f(x)$, 将 $y_4=xe^x$ 带入方程可得 $f(x)=(1-2x)e^x$.

所以微分方程为 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$, 通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$.

微积分II（第一层次）期末试卷参考答案2018.7.3

一、1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}f''(\sqrt{x^2+y^2+z^2})-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}f'(\sqrt{x^2+y^2+z^2});$$

2. $+\infty$是唯一奇点. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\cdot x^{1+\frac{1}{n}}=1$, $1+\frac{1}{n}>1$, 所以原广义积分收敛。

3. 解法一： 令$t=(x-3)^2$, 对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n5^n}$, $a_n=\dfrac{1}{n5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n}{(n+1)5^{n+1}}=\dfrac{1}{5}$, 所以$R=5$. $t=5$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 发散; 所以$0\le(x-3)^2<5$, 解得$3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, 收敛域为$(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

解法二：令$u_n=\dfrac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 5^n(x-3)^2}{(n+1)5^{n+1}}=\dfrac{(x-3)^2}{5}$, 当$\dfrac{(x-3)^2}{5}<1$ 时，原级数绝对收敛；当$\dfrac{(x-3)^2}{5}>1$时，原级数发散；当$\dfrac{(x-3)^2}{5}=1$时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, 发散; 所以$\dfrac{(x-3)^2}{5}<1$, 解得$3-\sqrt{5}<x<3+\sqrt{5}$, 收敛域为$(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$.

4. 原方程化为$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+x\cot y=\cos y$, 关于$x$是一阶线性方程，解得

$$x=e^{-\int\cot y\mathrm{d}y}(C+\int\cos y e^{\int\cot y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y)=\frac{C}{\sin y}+\frac{\sin y}{2}.$$

$y(1)=\dfrac{\pi}{6}$代入得$C=\dfrac{3}{8}$, 所以所求特解为$8x\sin y=3+4\sin^2 y$.

5. (全微分方程，通解为$\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+5x-\dfrac{3}{y^2}=C$)

二、 设曲面$S_1:z=0,(x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧，则

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5}.$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4}.\qquad 原式=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^5}{4}=\frac{29\pi a^5}{20}.$$

三、 设C所围的正六边形为$S:x+y+z=\dfrac{3a}{2}$, 取上侧，则S的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 由斯托克斯公式，

$$I_2=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3a}{2}\iint\limits_S\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2=-\frac{9}{2}a^3.$$

四、 $a_n=\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}=\dfrac{2}{n^p(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}\sim\dfrac{1}{n^{p+1/2}}$，

所以 $p>\dfrac{1}{2}$ 时绝对收敛，$-\dfrac{1}{2}<p\leq\dfrac{1}{2}$ 时，非绝对收敛。

$-\dfrac{1}{2}<p\leq\dfrac{1}{2}$ 时，原级数是交错级数，用莱布尼茨判别法可得级数条件收敛；

$p\leq-\dfrac{1}{2}$ 时，一般项不趋向于0，级数发散.

五、 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}=\dfrac{1}{2x+5}+\dfrac{1}{(x-3)^2}=\dfrac{1}{5}(1+\dfrac{2}{5}x)^{-1}+\dfrac{1}{9}(1-\dfrac{x}{3})^{-2}$

$$(1+\frac{2}{5}x)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}(\frac{2}{5}x)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{5^n}x^n,\qquad x\in(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}),$$

$$(1-\frac{x}{3})^{-2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)\cdots(-n-1)}{n!}(-\frac{x}{3})^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}x^n,\qquad x\in(-3,3),$$

所以 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{n+1}{3^{n+2}}+(-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}\Big)x^n,\quad x\in\Big(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\Big).$

六、$f(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\quad x\in[0,\pi).$

在上式中取 $x=\dfrac{\pi}{2}$, 得 $I=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots=\dfrac{\pi}{4}$, 于是

$$1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\cdots=I+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\cdots=I+\frac{1}{3}I=\frac{\pi}{3}.$$

七、$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-2x+\dfrac{e^{2x}}{10}(\cos x+2\sin x).$

八、(1) 在 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$ 中令 $x=y=0$ 得 $f(0)=0$.

因为 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$.

且 $f'(0)=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)-f(0)}{y}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(y)}{y}$.

$$\lim_{y\to0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}-f(x)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{f(y)}{y}(1+4f^2(x))=f'(0)(1+4f^2(x)),$$

即 $f'(x)=a(1+4f^2(x))$, 这是一个可分离变量的方程，解得 $f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2ax+C)$,

由 $f(0)=0$ 得 $C=0$, 所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2ax)$.

(2) $f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=-\dfrac{2}{x},\quad f(x)=2+Cx.$

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2017.7.4)

一、1. 由$\begin{cases} f'_x = -(1+e^y)\sin x = 0, \\ f'_y = e^y(\cos x - 1 - y) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $P_1(2k\pi, 0)$, $P_2((2k-1)\pi, -2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$f''_{xx} = -(1+e^y)\cos x$, $f''_{xy} = -e^y \sin x$, $f''_{yy} = e^y(\cos x - y - 2)$,

对于 P_1, $A = -2, B = 0, C = -1, B^2 - AC < 0, A < 0$, 所以 $f(P_1) = 2$ 是极大值;

对于 P_2, $A = 1 + e^{-2}, B = 0, C = -e^{-2}, B^2 - AC > 0$, 所以 P_2 不是极值点.

2. $+\infty$ 是唯一奇点. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{\frac{4}{3}} = 1$, 所以原广义积分收敛。

3. $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p} \sim \dfrac{1}{2^p n^{\frac{p}{2}+1}}$, 仅当 $\dfrac{p}{2} + 1 > 1$ 即 $p > 0$ 时原级数收敛.

4. 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - yx = y^3x^2$, 关于 x 是伯努利方程. 令 $x^{-1} = u$, 则方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + yu = -y^3$, 解得 $u = e^{-\int y\mathrm{d}y}\left(C - \displaystyle\int y^3 e^{\int y\mathrm{d}y}\mathrm{d}y\right) = e^{-\frac{y^2}{2}}\left(C - 2e^{\frac{y^2}{2}}\left(\dfrac{y^2}{2} - 1\right)\right)$, 故通积分为 $x\left(Ce^{-\frac{y^2}{2}} - y^2 + 2\right) = 1$.

5. 令 $y' = p(x)$, 则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 1 + p^2$, 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{1+p^2} = \mathrm{d}x$, 两边积分得 $\arctan p = x + C_1$, 即 $y' = \tan(x + C_1)$, 解得通解为 $y = -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2$.

二、 (1) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$, 由格林公式得 $I_1 = 0$.

(2) 设曲线 $C_1 : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, $0 < \varepsilon < 0.5$, 取顺时针方向, 则

$$I_1 = \oint_{C+C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} - \oint_{C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 0 - \oint_{C_1} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = -2\pi.$$

三、 由斯托克斯公式, $I_2 = \displaystyle\iint\limits_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（其中 S 为 $x+y=R$, 取后侧）

$$= -\iint\limits_S \frac{\sqrt{2}R}{2}\mathrm{d}S = -\frac{\sqrt{2}}{2}R \cdot \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)^2 = -\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$$

四、 设曲面 $S : z = 0, (x^2 + y^2 \le 1)$, 取上侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma+S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_\Omega (2z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 2r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}.$$

$$I_3 = \frac{3\pi}{2} - \iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2} - \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

五、证明: (1) 设 $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 由不等式 $n^2 > (n+1)(n-1)$ 可得,

$$(a_n)^2 = \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2} < \frac{1^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{(1\cdot 3)(3\cdot 5)\cdots(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1},\ \text{所以}\ a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

(2) 由于 $0 < a_n < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 且 $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} < a_n$,

由莱布尼茨判别法可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 收敛.

又 $a_n = 1\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n-2}\cdot\dfrac{1}{2n} > \dfrac{1}{2n}$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散. 故原级数条件收敛.

六、方法一：考虑幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{n!}x^n$, 此幂级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = x\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} = xe^x$, $S(x) = \Big(xe^x\Big)' = (x+1)e^x$. 令 $x=2$ 即得 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2$.

方法二：注意到 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} = 2e^2 + e^2 = 3e^2.$$

七、 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\big(-x\cos x + \sin x\big)\Big|_0^{\pi} = 2,$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\big(-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\big)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\big(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\big)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{x}{n+1}\cos(n+1)x + \frac{1}{(n+1)^2}\sin(n+1)x + \frac{x}{n-1}\cos(n-1)x - \frac{1}{(n-1)^2}\sin(n-1)x\Big)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}, \ (n = 2, 3, \cdots).$$

所以 $x\sin x = 1 - \dfrac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$, $\quad x\in(-\pi,\pi)$.

八、 (1) 由题意可得 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x) + f(x) = 2e^x, f(0) = 0, f'(0) = 2$, 解这个微分方程得 $f(x) = -\cos x + \sin x + e^x$.

$$I_4 = \int_0^{\pi}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}f(x) - \int_0^{\pi}\frac{f(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \frac{f(x)}{1+x}\Big|_0^{\pi} = \frac{f(\pi)}{1+\pi} = \frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}.$$

(2) $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x) + f(x) = 6x, f(0) = 1, f'(0) = 0$, 解得 $f(x) = \cos x - 6\sin x + 6x$.

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2016.6.20)

一、 1. $0 < \left(\dfrac{5xy}{3(x^2+y^2)}\right)^{x^2+y^2} \leq \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x^2+y^2}$, 而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x^2+y^2} = 0$, 由夹逼准则可知，原式=0.

2. 设 $F = u^2 - v + xy, H = u + v^2 + x - y$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\frac{D(F,H)}{D(x,v)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}} = -\dfrac{2vy+1}{4uv+1}, \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\frac{D(F,H)}{D(u,y)}}{\frac{D(F,H)}{D(u,v)}} = \dfrac{2u+x}{4uv+1}$.

3. 方法1: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3^{n+1}} \cdot \dfrac{3^n}{2n-1} = \dfrac{1}{3} < 1$, 由达朗贝尔判别法知原级数收敛。

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{3^{k-1}} - \frac{k+1}{3^{k+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{n+1}{3}\right) = 1.$$

方法2：构造幂级数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$, 此幂级数的收敛域为(-1,1).

则 $\displaystyle\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^{n-1} = \frac{x}{1-x^2}$, $\quad S(x) = \left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)' = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, $\quad x \in (-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n-2} = \frac{1}{3}S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.$$

4. 令 $y^{-2} = u$, 则原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + 2u = -2x$, 通解为

$$u = y^{-2} = \mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left(C + \int(-2x)\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = C\mathrm{e}^{-2x} - x + \frac{1}{2}.$$

5. 令 $y' = P(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程化为 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p$, 分离变量积分得 $p = cy$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Cy$, 代入初值条件得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$, 分离变量积分得 $y = C_1\mathrm{e}^x$, 代入初值条件得 $y = \mathrm{e}^x$.

二、 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to0^+} \dfrac{\rho^3\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\rho^2} = 0 = f(0,0)$,

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；

(2) $f'_x(0,0) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{x} = 1$, $\quad f'_y(0,0) = \lim\limits_{y\to0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to0} \dfrac{0}{y} = 0$,

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

(3) 令 $f(x,y) - f(0,0) = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y + \omega$, 则 $\omega = \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - x = -2\rho\cos\theta\sin^2\theta$,

$\dfrac{\omega}{\rho} = -2\cos\theta\sin^2\theta \not\to 0(\rho\to0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、 $$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} x^2y^2\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} \frac{Rx^2y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \frac{\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^R \frac{\rho^5}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$\xlongequal{(\rho = R\sin t)} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos4\theta}{8}\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^5\sin^5 t\mathrm{d}t = \frac{2\pi R^6}{15}.$$

四、 设曲面$S_1: z=0, (x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧，则

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5}.$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4}.\qquad 原式=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^5}{4}=\frac{29\pi a^5}{20}.$$

五、 $|u_n|=\dfrac{1}{n+(-1)^n}\sim\dfrac{1}{n}$, $(n\to\infty)$, 而调和级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散, 所以原级数不绝对收敛；

$u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}=(-1)^n\dfrac{n}{n^2-1}-\dfrac{1}{n^2-1}$, 而级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}$是莱布尼兹型的交错级数，收敛； 级数$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$也收敛，所以原级数收敛且条件收敛.

六、 $f'(x)=\dfrac{1}{1-x^4}-1=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}$ $(|x|<1)$, 所以 $f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $\quad |x|<1$.

七、 将$f(x)$进行偶延拓，则$b_n=0\ \ (n=1,2,\cdots)$; $\quad a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi},\quad (n=2k-1,\quad k=1,2,\cdots)$$

所以 $x=\dfrac{\pi}{2}-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$, $\quad x\in[0,\pi]$. $\qquad x=0$代入上式得$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S$, 所以$S=\dfrac{\pi^2}{6}$.

八、 (1) $u_n(x)=\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{3n+1}(3n)!}{|x|^{3n}(3n+3)!}=0$, 所以收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$, $S''(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$, 可得微分方程 $\begin{cases}S''+S'+S=e^x,\\ S(0)=1,\ S'(0)=0.\end{cases}$

特征方程为$\lambda^2+\lambda+1=0$, $\lambda=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 设特解为$y^*=Ae^x$, 代入原方程得 $y^*=\dfrac{1}{3}e^x$.

方程的通解为 $S=e^{-\frac{1}{2}x}\Big(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\Big)+\dfrac{1}{3}e^x$.

由初始条件$S(0)=1, S'(0)=0$可得$C_1=\dfrac{2}{3}, C_2=0$, 所以$S(x)=\dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{3}e^x$.

($S(x)$满足的微分方程也可以是$S'''(x)-S(x)=0, S(0)=1, S'(0)=S''(0)=0.$)

微积分II(第一层次)期末参考答案 (2015.6.22)

一、1. 曲面 S 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D$, $D:\ x^2+y^2\le a^2-h^2$,
原式$=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D a\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi a(a^2-h^2)$.

2. 原式$=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\mathrm{d}y=\dfrac{46}{15}$.

3. 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2z-5$, 则 $\boldsymbol{n}=(F_x'(1,1,1),F_y'(1,1,1),F_z'(1,1,1))=(2,2,4)=2(1,1,2)$, 于是曲面在 $(1,1,1)$ 的切平面方程为 $(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$, 法线方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{(x-\frac{1}{x})}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

5. 原方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}+1}$, 这是一个齐次微分方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 于是原方程变为 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u^2}{u+1}$, 分离变量得 $\left(1+\dfrac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, 两边积分, 得 $u+\ln|u|+C=-\ln|x|$, 所以原方程的通积分为: $\dfrac{y}{x}+\ln|y|+C=0$. $y=0$ 为奇解. (通积分也可写成 $y=Ce^{-\frac{y}{x}}$.)

6. $\displaystyle\oint_C \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=\int_0^1[2x\mathrm{arctan}x-1]\mathrm{d}x+\int_1^0(\mathrm{arctan}1-1)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}-1.$

7. $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}}-\dfrac{\frac{7}{10}(1-(\frac{1}{10})^n)}{1-\frac{1}{10}}\right)=-\dfrac{5}{18}$. 所以级数收敛，和为$-\dfrac{5}{18}$.

8. 记 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ 在 l 与单位圆周 $C: x^2+y^2=1$ 所围的区域内成立，故积分与路径无关，所以 $\displaystyle\int_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$.

9. 记 $P=e^x\sin y-2y\sin x, Q=e^x\cos y+2\cos x$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y-2\sin x$, 这是一个全微分方程，$u(x,y)=\displaystyle\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(e^x\cos y+2\cos x)\mathrm{d}y=e^x\sin y+2y\cos x$, 所以原方程的通解为 $e^x\sin y+2y\cos x=C$.

10. 令 $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n+3}x^2=x^2$, 所以 $|x|<1$ 时级数收敛，$|x|>1$ 时级数发散，而 $x=\pm1$ 时，易知级数收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$. 设 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$, 则 $S(0)=0$, $S'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$, 所以 $S(x)=S(0)+\displaystyle\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x$, $x\in[-1,1]$.

11. 在上题中令 $x=1$ 得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

二、 设 $S_1: z=0\ (x^2+y^2\le a^2)$, 取下侧, 记 V 是 S 与 S_1 所围立体.

$$I=\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint\limits_S\frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}$$

$$= \iint\limits_{S+S_1} \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a} - \iint\limits_{S_1} \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a}$$

$$= \iiint\limits_{V} \mathrm{d}V - \iint\limits_{S_1} \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2y(z+a)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{a} = \frac{2}{3}\pi a^3 + \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{5}{3}\pi a^3.$$

三、 设 $P(x,y) = 3x^2y$, 因为积分与路径无关，所以 $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) = 3x^2$, 故 $Q(x,y) = x^3 + \varphi(y)$.

又因为 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(t,1)} 3x^2y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 Q(0,y)\mathrm{d}y + \int_0^t 3x^2\mathrm{d}x = \int_0^1 Q(0,y)\mathrm{d}y + t^3,$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 3x^2y\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^t Q(0,y)\mathrm{d}y + \int_0^1 3x^2t\mathrm{d}x = \int_0^t Q(0,y)\mathrm{d}y + t,$$

所以 $\displaystyle\int_0^1 Q(0,y)\mathrm{d}y + t^3 = \int_0^t Q(0,y)\mathrm{d}y + t$, 两边对 t 求导得 $3t^2 = Q(0,t)+1$, 即 $Q(0,t) = 3t^2 - 1$, 所以 $\varphi(y) = Q(0,y) = 3y^2 - 1$.　所以 $Q(x,y) = x^3 + 3y^2 - 1$.

四、 (1) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n = 0$ $(n = 1,2,3\cdots)$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3}. \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{4}{n^2}, (n = 1,2,3,\cdots).$$

而 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 所以 $\displaystyle f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx,\ (-\pi \le x \le \pi).$

(2) 在上式中令 $x = 0$, 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$

(3) 在(1)中令 $x = \pi$, 得 $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$, 与(2)式相加得 $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

五、 (1) $\displaystyle\frac{a_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} < \frac{S_n - S_{n-1}}{S_nS_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n},\ (n \ge 2),$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{S_k^2} < \frac{1}{S_1} + \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}\right) = \frac{2}{a_1} - \frac{1}{S_n} < \frac{2}{a_1},$$

而正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有界，所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

(2) 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 的部分和为 σ_n, 即 $\displaystyle\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{S_k}}$, $\displaystyle\sigma_n > \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{S_n}} > \sqrt{S_n}$, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛，则 σ_n 有上界，由上式可知 S_n 有上界，故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛. $\displaystyle\sigma_n < \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\sqrt{S_1}} = \frac{S_n}{\sqrt{a_1}}$,　若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ 收敛，则 S_n 有上界，由上式可知 σ_n 有上界，故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{\sqrt{S_n}}$ 收敛.

六、 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e - (1+\frac{1}{x})^x}{\frac{1}{x}} = \frac{e}{2}$, 所以级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p$ 与级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ 敛散性相同，$p > 1$ 时收敛，$p \le 1$ 时发散.

微积分II(第一层次)期末试卷参考答案 (2014.6.23)

一、 1. 收敛域为 $(\frac{1}{e}, e)$.

2. $I=\int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^2\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}(1+4x^2)=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{17^{\frac{3}{2}}-1}{12}$.

3. 设 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程化为 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$, 分离变量得 $\frac{1}{p}\mathrm{d}p=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y$,

两边积分得 $p=\frac{C_1}{y}$, 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{C_1}{y}$, 分离变量得 $y\mathrm{d}y=C_1\mathrm{d}x$, 积分得 $y^2=C_1x+C_2$.

4. 设$x+y=u, y-x=v$, $J(u,v)=\frac{1}{2}$,

原式$=\iint\limits_{D'}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}v+2\int_1^2\mathrm{d}u\int_0^{2-u}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}v=\int_0^1 uf(u)\mathrm{d}u+\int_1^2(2-u)f(u)\mathrm{d}u$

$(2-u=t)=\int_0^1 uf(u)\mathrm{d}u+\int_0^1 tf(2-t)\mathrm{d}t=\int_0^1 u[f(u)+f(2-u)]\,\mathrm{d}u$.

5. $f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n$, 所以 $f(x)=f(0)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $x\in(-1,1]$.

6. $x=0, x=+\infty$ 是两个奇点，原式$=\int_0^1\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\mathrm{d}x=I_1+I_2$,

对于 I_1, $x=0$ 是唯一奇点，$\frac{x^p}{1+x^2}\sim x^p=\frac{1}{x^{-p}}$, 所以 I_1 仅当 $-p<1$ 即 $p>-1$ 时收敛；

对于 I_2, $x=+\infty$ 是唯一奇点，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2-p}\cdot\frac{x^p}{1+x^2}=1$, 所以 I_2 仅当 $2-p>1$ 即 $p<1$ 时收敛；

综上，原广义积分仅当 $-1<p<1$ 时收敛.

7. 级数的收敛域为$[-1.1]$; $xI(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=S(x)$,

$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$, $\quad S''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$, $\quad x\in(-1,1)$, $\quad S(0)=S'(0)=0$,

所以 $S'(x)=S'(0)+\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)$,

$S(x)=S(0)-\int_0^x\ln(1-x)\mathrm{d}x=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)$, $x\in[-1,1)$,

$I(0)=0$, $\quad I(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1$.

所以 $I(x)=\begin{cases}1+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x=1\end{cases}$

8. 设 $S_1: z=0, x^2+y^2\le R^2$ 取下侧, 由高斯公式 $\iint\limits_{S+S_1}x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi R^4}{2}$.

所以 $I=\dfrac{\pi R^4}{2}-\displaystyle\iint\limits_{S_1} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\dfrac{\pi R^4}{2}$.

二、 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x,\ x\in\mathbb{R},\quad$ 原式$\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})^n}{(n+1)!}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})^{n+1}}{(n+1)!}=-2(e^{-\frac{1}{2}}-1+\frac{1}{2})=-2e^{-\frac{1}{2}}+1.$

三、 $P=2y,Q=x,R=e^z,\quad S:x+y=1$ 取左侧，

原式$\displaystyle=\iint\limits_{S}\Big(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\Big(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{S}-1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

四、 曲面 S 关于 $y=0$ 对称，$xy+yz$ 关于 y 是奇函数，所以 $\displaystyle\iint\limits_{S}(xy+yz)\,\mathrm{d}S=0$;

原式$\displaystyle=\iint\limits_{S}zx\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}x\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\cos\theta\mathrm{d}\rho=\frac{64\sqrt{2}}{15}.$

五、 1. $b_1=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=2,\qquad b_2=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x=-1;$

2. $F(a,b)=\displaystyle\int_0^{\pi}\Big[f(x)-a\sin x-b\sin(2x)\Big]^2\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\Big[x-a\sin x-b\sin(2x)\Big]^2\mathrm{d}x$

$\displaystyle=\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x+a^2\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x+b^2\int_0^{\pi}\sin^2 2x\mathrm{d}x-2a\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x-2b\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x+2ab\int_0^{\pi}\sin x\sin 2x\mathrm{d}x$

$=\dfrac{\pi^3}{3}+\dfrac{\pi}{2}a^2+\dfrac{\pi}{2}b^2-2a\pi+b\pi=\dfrac{\pi}{2}\big[(a-2)^2+(b+1)^2\big]-\dfrac{5\pi}{2}+\dfrac{\pi^3}{3}$, 显然$F(a,b)$在$(2,-1)$处取得最小值.

六、 (1) 特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$, 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$. 设原方程有特解 $y^*=Ce^x$, 代入原方程得 $C=\dfrac{1}{2}$, 所以原方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\dfrac{1}{2}e^x$.

(2) 若 $y=f(x)$ 为 $y''-5y'+6y=e^x$ 的解，则由(1)知$f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$, 所以 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

对于三阶方程 $y'''-5y''+6y'=e^x$，其特征方程为 $\lambda^3-5\lambda^2+6\lambda=0$, 解得 $\lambda=0,2,3$, 设此方程有特解 $y^*=Ce^x$, 代入方程得 $C=\dfrac{1}{2}$, 所以此三阶方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+C_3+\frac{1}{2}e^x$.

所以若 $y=f(x)$ 为 $y'''-5y''+6y'=e^x$ 的解，则 $f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+C_3+\frac{1}{2}e^x$, 若 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$, 则 $C_3=0$, 所以 $f(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{2}e^x$, $y=f(x)$ 是 $y''-5y'+6y=e^x$ 的解.

七、 (1) 特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$, 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

所以对应的齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$;

设 $y^*=C_1(x)e^{2x}+C_2(x)e^{3x}$ 是原方程的解，则 $\begin{cases}C_1'(x)e^{2x}+C_2'(x)e^{3x}=0,\\ 2C_1'(x)e^{2x}+3C_2'(x)e^{3x}=f(x),\end{cases}$

解得$C_1(x)=-\displaystyle\int_0^x e^{-2t}f(t)\mathrm{d}t,\ C_2(x)=\int_0^x e^{-3t}f(t)\mathrm{d}t,$

原方程的通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\displaystyle\int_0^x(e^{3x-3t}-e^{2x-2t})f(t)\mathrm{d}t.$

(2) 证明： 若 $y(0)=y'(0)=0$，则由(1)知 $C_1=C_2=0$, 从而 $y=\displaystyle\int_0^x(e^{3x-3t}-e^{2x-2t})f(t)\mathrm{d}t.$

当 $x>0$ 时，$e^{3x-3t}-e^{2x-2t}>0,\ t\in(0,x)$; 当 $x<0$ 时，$e^{3x-3t}-e^{2x-2t}<0,\ t\in(x,0)$; 从而当 $f(x)\ge 0$ 时，$y\ge 0$.

大学数学理一(II)期末试卷(A卷)参考答案 (2013.6.26)

一、 1. $\pi a(a^2-h^2)$.

2. 解法1： $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$, $\quad 2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

$$S_n=2S_n-S_n=1+\Big(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2}\Big)+\cdots+\Big(\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}\Big)-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n},\quad \text{所以 } S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\Big)=3.$$

解法2： $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$,

则 $S(x)=\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\int_0^x x^{n-1}\mathrm{d}x\Big)'=\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\Big)'=\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'=\frac{1}{(1-x)^2}$, $x\in(-1,1)$,

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=S\big(\frac{1}{2}\big)=4$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=4-1=3$.

3. 令 $x+1=t$, 则原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$, $a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{3+(-2)(-\frac{2}{3})^n}{1+(-\frac{2}{3})^n}=3,\ \text{收敛半径}R=\frac{1}{3}.$$

收敛区间为 $t\in\big(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big)$, 即 $x\in\big(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\big)$.

当 $x=-\frac{4}{3}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(\frac{2}{3}\big)^n$, 两个级数都收敛, 故原级数收敛;

当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big(-\frac{2}{3}\big)^n$, 一个收敛一个发散，故原级数发散;

所以级数的收敛域为 $\big[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\big)$.

4. 原方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+5=0$, 解之得 $\lambda=1\pm 2i$, 因此所求通解为 $y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

5. 原方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}+1}$, 这是一个齐次方程. 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u$, 原方程化为 $u\mathrm{d}x+x\mathrm{d}u=\frac{u^2}{u+1}\mathrm{d}x$, 分离变量得 $\big(1+\frac{1}{u}\big)\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, 两边积分得 $u+\ln|u|=-\ln|x|+C$, 所以原方程的通积分为 $\frac{y}{x}+\ln|y|=C$. 另外 $y=0$ 是奇解. (或者原方程的通积分为 $ye^{\frac{y}{x}}=C$.)

6. $$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\Big)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\Bigg|_2^A=\frac{2}{3}\ln 2.$$

7. 计算曲面积分 $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外侧在 $x\geq 0, y\geq 0$ 的部分.

解法1 记 $S_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y)\in D_{xy}$, 取上侧; $S_2: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y)\in D_{xy}$, 取下侧; 其中 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\}$, 则

$$\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{S_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{S_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}} xy\big(-\sqrt{1-x^2-y^2}\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}\rho=\frac{2}{15}.$$

解法2　曲面 S 的方程为 $x=\sqrt{1-y^2-z^2}$，$(y,z)\in D_{yz}$，$D_{yz}=\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\le 1, y\ge 0\}$.

$$\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2-z^2}\cdot yz\cdot(-x'_z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}} yz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\cos\theta\cdot\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{2}{15}.$$

8.　$P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，$(x,y)\ne(0,0)$, 令 $c: x^2+y^2=1$, 取逆时针方向，则由格林公式可得 $\displaystyle\int_{l+c^-}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0$, 所以 $\displaystyle\int_l\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_c\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi$.

9.　设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 则 $z_0=\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2$, 点 M_0 处的法向量为 $\overrightarrow{n_0}=(x_0,2y_0,-1)$, 平面 $2x+2y-z=0$ 的法向量为 $\overrightarrow{n}=(2,2,-1)$，$\overrightarrow{n_0}//\overrightarrow{n}$, 所以 $x_0=2, y_0=1, z_0=3$, 故所求切平面方程为 $2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$, 即 $2x+2y-z=3$.

10.　用球坐标变换将 Ω 变为 Ω'，Ω'：$0\le r\le 4\cos\varphi$，$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$，$0\le\theta\le 2\pi$,

$$\text{原式}=\iiint\limits_{\Omega'} r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{4\cos\varphi}r^3\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{56}{3}\pi.$$

二、　采用柱坐标变换，则　$\displaystyle F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{d}\rho\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}z=2\pi t\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^5}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t f(\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho}{t^4}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi t f(t^2)}{4t^3}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2-0}=\frac{\pi}{2}f'(0)=\pi.$$

三、(10分)　将 $x=0$ 代入 $\displaystyle\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$, 可得 $f(0)=1$.

$\displaystyle\int_0^x(x+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$　化简得　$\displaystyle(x+1)\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t=x^2+e^x-f(x)$,

两边对 x 求导数得　$\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t+(x+1)f'(x)-xf'(x)=2x+e^x-f'(x)$,

即　$f(x)-f(0)+f'(x)=2x+e^x-f'(x)$，化简得　$f'(x)+\dfrac{1}{2}f(x)=x+\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{1}{2}$,

这是一阶线性非齐次方程，解之得　$f(x)=e^{\int-\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\Big(C+\displaystyle\int\big(x+\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\big)e^{\int\frac{1}{2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=Ce^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{3}e^x+2x-3$

又因为 $f(0)=1$, 所以 $C=\dfrac{11}{3}$, 所以 $f(x)=\dfrac{11}{3}e^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{3}e^x+2x-3$.

四、解法1　记 $P=x^2-yz$, $Q=y^2-xz$, $R=z^2-xy$, 则 $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=0$，$\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$,

所以积分与路径无关，取直线段 $L:\begin{cases}x=a,\\ y=0\end{cases}$　$0\le z\le h$，则　原式$=\displaystyle\int_0^h z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3}h^3$.

解法2　记 $P=x^2-yz$, $Q=y^2-xz$, $R=z^2-xy$, 则 $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=0$，$\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=0$,

$$(x^2-yz)\,\mathrm{d}x+(y^2-xz)\,\mathrm{d}y+(z^2-xy)\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}\Big(\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-xyz\Big),$$

原式 $=\left(\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-xyz\right)\Big|_{(a,0,0)}^{(a,0,h)}=\frac{1}{3}h^3.$

五、 (1) 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0(n=1,2,\dots)$. $\quad a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5.$

$$\begin{aligned}a_n&=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}\sin n\pi x\\&=\frac{2}{n\pi}(x+2)\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],\qquad n=1,2,\cdots\end{aligned}$$

$$f(x)=\frac{5}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2}\cos(2n+1)\pi x.\qquad x\in[-1,1].$$

(2) 在上式中令 $x=0$, 得 $f(0)=\frac{5}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-4}{(2n+1)^2\pi^2}\Longrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$

六、证明：因为 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^{A}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_1^{[A]}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x\right)$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{[A]-1}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{A\to+\infty}\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

要证广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，只需证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

因为 $\int_1^{+\infty}|f'(x)|\mathrm{d}x$ 收敛, 所以 $\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 而 $\int_1^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-f(1)$, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

$$\min_{x\in[[A],A]}f(x)\cdot(A-[A])\le\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x\le\max_{x\in[[A],A]}f(x)\cdot(A-[A]),$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\min\limits_{x\in[[A],A]}f(x)=\lim\limits_{A\to+\infty}\max\limits_{x\in[[A],A]}f(x)=0$. 而 $|A-[A]|\le1$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{[A]}^{A}f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

令 $a_n=\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x-f(n)$,

$$\begin{aligned}|a_n|&=\left|\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x-f(n)\right|=\left|\int_n^{n+1}(f(x)-f(n))\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_n^{n+1}\left(\int_n^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|\\&\le\int_n^{n+1}\left(\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}|a_k|=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x-f(k)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x=\int_1^{n+1}|f'(x)|\,\mathrm{d}x$ 有上界，

部分和数列有上界，所以正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+f(n))=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

大学数学理一(II)期末试卷(A卷)参考答案 (2012.6.20)

一、1. $\pi a(a^2-h^2)$.

2. $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$, 由高斯公式，

$$原式=\iiint\limits_V\Big(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\Big)\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_V(y-z)\,\mathrm{d}V=-\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}V=\int_0^3 z\,\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{9}{2}\pi.$$

3. $\dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\dfrac{1}{8}\Big(\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\Big)$

$S_n=\dfrac{1}{8}\Big(\Big(1-\dfrac{1}{3^2}\Big)+\Big(\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{5^2}\Big)+\cdots+\Big(\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\Big)\Big)=\dfrac{1}{8}\Big(1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\Big)$, 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{8}$.

4. $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$, 所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{l}=1$. $x=1$ 时级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$，这是莱布尼茨型的交错级数，收敛；当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{1}{n}$, 此级数发散，故收敛域为 $(-1,1]$.

5. 通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$

6. 原方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$, 这是一个齐次方程. 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 原方程化为 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u-1}{u+1}$, 分离变量得 $\Big(\dfrac{u+1}{1+u^2}\Big)\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$, 两边积分得 $\ln(1+u^2)+2\arctan u=-2\ln|x|+\ln|C|$, 所以原方程的通积分为 $x^2+y^2=Ce^{-2\arctan\frac{y}{x}}$.

7. $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}x^n\quad(-1<x\le 1)$, $\quad\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\dfrac{1}{n}x^n\quad(-1\le x<1)$, 因此

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1}\quad(-1<x<1),$$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p\cdot\dfrac{\arctan x}{1+x^p}=\dfrac{\pi}{2}$, 所以 $p>1$ 时原广义积分收敛，$0<p\le 1$ 时，原广义积分发散.

9. 方法1： 设曲线 C 的参数方程为 $x=a\sin\theta\cos\theta, y=a\sin^2\theta\ (0\le\theta\le\pi)$, 则

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta}\sqrt{a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2+4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{\pi}a\sin\theta\sqrt{a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}a^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=2a^2.$$

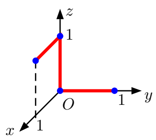
方法2： 设曲线 C 的参数方程为 $x=\dfrac{a}{2}\cos\theta, y=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\sin\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$, 则

$$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\sin\theta)}\sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2\theta+\frac{a^2}{4}\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2}{2}\Big(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\Big)^2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2\sqrt2}\int_0^{2\pi}\Big|\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\Big|\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{a^2}{2\sqrt2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\Big(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\Big)\,\mathrm{d}\theta+\frac{a^2}{2\sqrt2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\Big(-\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\Big)\,\mathrm{d}\theta=2a^2.$$

10. 采用柱坐标，原式 $=\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{2\rho}^2\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{10}$.

二、 $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$, 所以 $\left(\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{1}{n}\right)^p = \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{6n^3} + o(\dfrac{1}{n^3})\right)^p \sim \dfrac{1}{6^p n^{3p}}$, 所以原式当 $3p > 1$ 即 $p > \dfrac{1}{3}$ 时收敛, 当 $3p \le 1$ 即 $p \le \dfrac{1}{3}$ 时发散.

三、 $P = (x^2 - f(x))y + \dfrac{1}{2}g(x)y^2$, $Q = f(x)y - g(x)$, $R = 1$, 积分与路径无关的充要条件是 $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, 即 $f'(x)y - g'(x) = x^2 - f(x) + g(x)y$, 整理得 $(f'(x) - g(x))y = g'(x) - f(x) + x^2$ 此式对所有的 x, y 都成立, 必有 $f'(x) - g(x) = 0, g'(x) - f(x) + x^2 = 0$. 整理得 $f''(x) - f(x) = -x^2$, 这是二阶非齐次线性常系数微分方程, 且有初始条件 $f(0) = 0, g(0) = f'(0) = 0$, 解得 $f(x) = -e^{-x} - e^x + x^2 + 2, g(x) = f'(x) = e^{-x} - e^x + 2x$.



因为积分与路径无关, 沿如图所示折线积分, 可得

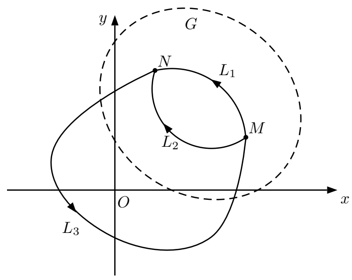
原式 $= \displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}z + \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 1.$

四、 1. 显然 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x)$ 连续. 所以 $b_n = 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4}{3}\pi^2$,

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\dfrac{4}{n^2}$, 故 $f(x) = \pi^2 - x^2 = \dfrac{2\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{4}{n^2}\cos nx$, $(-\pi \le x \le \pi)$.

在上式中分别令 $x = 0$, $x = \pi$ 可得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

五、 证明: (1) 如图所示, 设 M, N 是 G 内任意两点, L_1, L_2 是 G 内连接 M, N 的任意两条曲线, 只需要证明



$$\int_{L_1}\frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{L_2}\frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$$

取 L_3 为连接 M, N 的曲线, 使得 $L_1 + L_3$ 为包围原点的简单闭曲线, 则 $L_2 + L_3$ 也是包围原点的简单闭曲线, 据题意可知

$$\int_{L_1+L_3}\frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{L_2+L_3}\frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = A,$$

所以 $$\int_{L_1}\frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_{L_2}\frac{1}{f(x) + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

(2) $P = \dfrac{-y}{f(x) + 8y^2}$, $Q = \dfrac{x}{f(x) + 8y^2}$, 因为积分和路径无关, 所以 $Q'_x = P'_y$, 即

$$\frac{8y^2 - f(x)}{(f(x) + 8y^2)^2} = \frac{f(x) + 8y^2 - xf'(x)}{(f(x) + 8y^2)^2},$$

可得 $xf'(x) = 2f(x)$, 分离变量解得 $f(x) = Cx^2$, 又 $f(1) = 1$, 所以 $f(x) = x^2$.

取 $l: x^2 + 8y^2 = \varepsilon^2$, 即 $x = \varepsilon\cos\theta, y = \frac{1}{\sqrt{8}}\varepsilon\sin\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, 则

$$A = \int_L \frac{1}{x^2 + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_l \frac{1}{x^2 + 8y^2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{8}}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

六、见教材163页例7.6.6.