2016 离散数学

1、(10 分)阿拉丁在山洞中发现两个柜子 A 和 B. 他知道每个柜子中要么是无价的珍宝要么是致命的机关.

柜子 A 上写着:"这两个柜子中至少有一个装着珍宝."

柜子 B 上写着:"柜子 A 里是致命的机关."

阿拉丁知道这两句话要么都对,要么都错.

问阿拉丁是否可以安全地打开装着珍宝的柜子?如果可以,该选哪个柜子?

2、(10 分)安妮从 11 到 21 的自然数中选 8 个不同的数. 试证明他选的数中必有两个数中必有两个数其和为 30.

3、(12 分)设 A 为一非空集合,f 是一个以 A 为定义域的函数. 定义 A 上的关系 R 为所有满足 f(x)=f(y)的有序对(x,y)的集合.

(a)证明 R 是 A 上的一个等价关系.

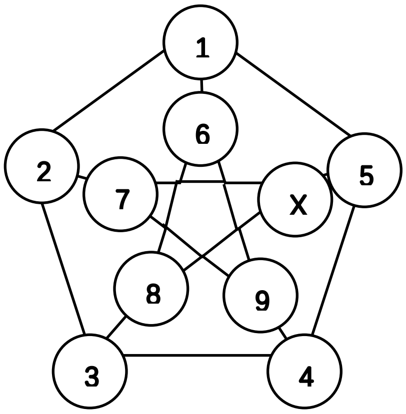
(b)试描述 R 下的各个等价类.

4、（12 分）（a）试证明若（A，R）是一个偏序集，则（A，R^{-1}）也是一个偏序集.

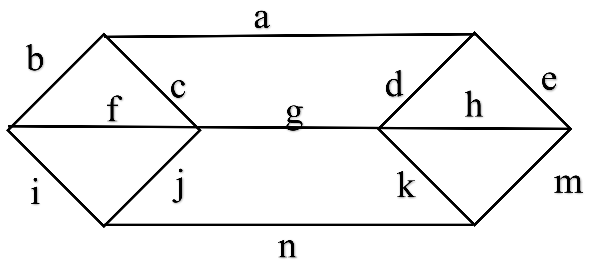
（b）试证明一个 10 个元素的格不可能是一个有补分配格.

5、（12 分）（a）今有 n 个顶点的简单图 G，已知其无环，但未必连通. 假设其含有 k 个连通分支. 试证明其有 n-k 条边.

（b）考虑右边的 Peterson 图. 它是否为二部图？若否，至少要删除几条边才能使其成为二部图？给出理由.



6、（12 分）（a）下图 G 有 13 条边。其各边权重列于下表中



Edge	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	m	n
Weight	1	1	3	3	6	4	5	6	2	4	2	7	2

试用 Prim 算法找出一个 G 的最小生成树 S. 按算法中的加入顺序给出 S 的各条边.

（b）令 G 为一无向带权连通图，且假设图中存在一个回路. 试证明：在此回路上，若存在一个边 e 其权重严格大于此回路上的其他的边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中.

7、（5 分）令 $f(x)=(x^2+5x+3)(x+2\log x)$, $x>0$. 判断以下说法对错：

（1）f（x）是 O（x^4）

（2）f（x）是 O（x^3）

（3）f（x）是 O（x^2）

（4）f（x）是 O（$x^3\log x$）

（5）f（x）是 O（$x^2\log x$）

8、（12 分）（a）试用容斥原理计算从 0000 到 9999 中随机选择一个数，其至少含有一个数字“1”的概率.

（b）某次考试由一些四选一的选择题构成. 学生要么真会，要么随机勾选. 假设某学生有 60%的题是真会. 若该生第一题答案正确，她这题真会的概率是多少？

9、（15 分）（a）设（M，∘）和（N，*）为半群. 试证明笛卡尔积 M×N 在运算 • 下也是一个半群，其中（m_1，n_1）•（m_2，n_2）:= （$m_1∘m_2$，n_1*n_2）；若 M 和 N 都是单元半群，其单位元分别为 e_M 和 e_N，则 M×N 亦是以（e_M，e_N）为单位元的单元半群.

（b）以上讨论可推广至任意有限多个半群 M_1，…，M_n：我们可定义直和 M=$\oplus_{i=1}^{n} M_i$，也就是相应集合的笛卡儿积，运算定义为及各分量上分别做运算；若各 M_i 均为单元半群，则 M 也是单元半群. 进而，推广至无限个半群$\{M_i\}_{i\in I}$，其下标集合为 I，我们可在笛卡儿积$\Pi_{i\in I}M_i$ 上类似地定义一个半群结构，且若各 M_i 均为单元半群（单位元为 e_i），则上述结构$\Pi_{i\in I}M_i$（称为直积）也是一个以 I-元组（e_i）$_{i\in I}$ 为单位元的单元半群（注意 I 是无限集合，这个元组“无限长”）. 若各 M_i 均为单元半群，可定义直和$\oplus_{i=1} M_i$，为直积$\Pi_{i\in I}M_i$ 的一个子单元半群，其元素为满足下列条件的 I-元组（$m_i\in M_i$）$_{i\in I}$：除有限个 i 之外，对于其他的 i 都必须有 $m_i= e_i$.

试证明：正整数及其乘法构成的单元半群（$\mathbb{Z}^+$, •）同构于可数无限个自然数及其加法单元半群（$\mathbb{N}^+$, •）. [提示：考虑所有素数的集合 P，这是一个可数无限集. 证明（$\mathbb{Z}^+$, •）$\cong \oplus_{p\in P}$（$\mathbb{N}, +$）即可.]

2018 离散数学

1、 句子:“如果Rob能得到车开,他会带Sue去看电影”以下哪个句子与上述句子逻辑等价?

（e） 要么Rob得不到车，要么Rob将带Sue去看电影。

（f） 如果Rob带Sue去看电影，那么他就能得到车开。

（g） 如果Rob不带Sue去看电影，那么Rob得不到车开。

（h） 如果Rob得不到车开，他就不会带Sue去看电影。

2、 对 $n \in Z$，考虑下列谓词：P(n): $n^2<4$. Q(n): $n^3=n$. 用自然语言表示以下公式.

（a）$\forall n \in Z, P(n)$

（b）$\sim(\exists n \in Z, Q(n))$

（c）The contrapositive of $P(n) \Rightarrow Q(n)$

3、 洛杉矶警察Klumbo一整天在调查一起谋杀案中的4个嫌疑人:Adams,Benjamin,Carter,Dickens. 每个人都声称自己发案时不在现场而是在拉斯维加斯。经过调查，Klumbo 确认以下事实：

(1) If Adams went to Las Vegas, so did Benjamin.

(2) Benjamin and Carter did not both go to Los Angeles.

(3) If Carter went to Las Vegas, then Adams stayed in Los Angeles.

(4) Carter and Dickens did not both stay in Los Angeles.

(5) If Adams stayed in Los Angeles, so did Dickens.

(6) If Dickens went to Los Angeles, then Benjamin stayed in Los Angeles.

结果Klumbo决定释放4个人中的一个。他放了谁，为什么？

4、设 S={1,2,3,4,5}. 举一个 S 上的等价关系的例子 R，有 4 个不同的等价类。并列出所有的等价类。

5、f：A→B 是函数. 对于 B 的子集 B1，其逆像 $f^{-1}(B_1)$定义为 $f^{-1}(B_1)=\{a\in A|f(a)\in B_1\}$. 对 B 的任意子集 B_1 和 B_2 证明：$f^{-1}(B_1\cup B_2)= f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

6、函数 f：Z→Z 定义如下：

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & if\ \ n \geq 0 \\ n-1 & if\ \ n < 0\ \ and\ \ n \neq -10 \\ n & if\ \ n = -10 \end{cases}$$

f 是否为一对一函数？是否为满射？为什么？

7、n 是正整数，S={1, 2, …, 2n}.

（a） 证明：S 包含子集合 S'，|S'|=n，且对 S'中任意不同元素 a 与 b，$a\nmid b$ 且 $b\nmid a$.

（b） 证明：对 S 的任意子集 A，若|A|=n+1，则存在不同的 a，b 属于 A 满足 $a|b$。

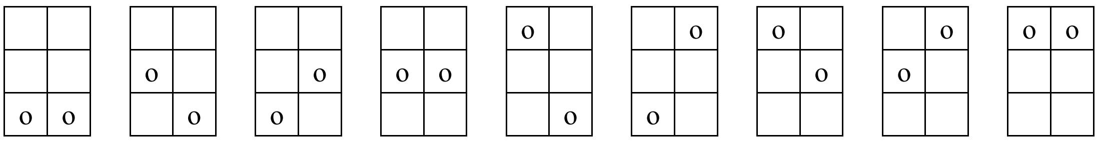
8、 假设每出生一个婴儿，是女孩的概率是 0.49，并且一个家庭出生的每个孩子的性别是独立的。如果一个家庭有 5 个孩子，确定如下事件的概率：

（a） 恰好 3 个女孩

（b） 至少 1 个女孩

（c） 5 个全是男孩或者 5 个全是女孩

9、 在如下的矩形框中最下面两格中各放一个硬币。此格式称为位置 1，用 P_1 表示，如下图所示。允许每次将 1 个硬币移动到上方相邻的方格。可能形成的位置有 9 个。

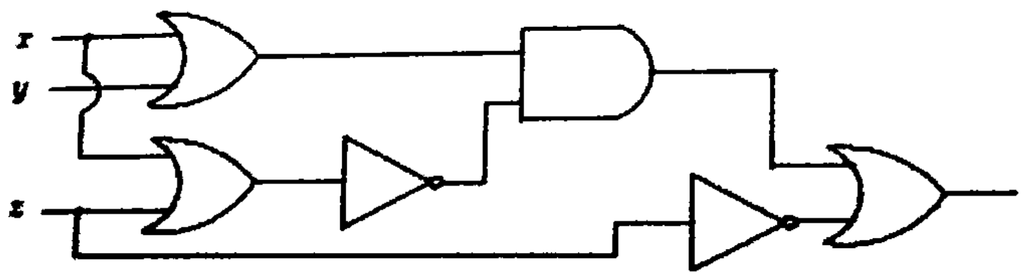


P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8 P_9

设 S={P_1，P_2，…，P_9}. 定义 S 上的关系≺: 如果达到位置 P_i 前必须先达到 P_i，则 $P_i \prec P_i$。证明:（S，≺）是偏序集。画出它的 Hasse 图。它是格吗？

10、设 S 是有限集合，$|S|=n\geq 2$。假设 R 是 S 上的等价关系。对任意的 $x\in S$，$n_x=|\{y\in S|(x,y)\in R\}|$. 若函数 f：$S\rightarrow\{1,2,\ldots,n\}$定义为 $f(x)=n_x$，$x\in S$。证明：如果 R 是等价关系，则 f 不可能是双射。

11、写出与如下组合电路对应的布尔表达式，并在每个逻辑门上标出其输出。



12、假设 P 是联通图 G 中的最长路。若 P 是 uv-路，证明 u 不是图中的割点。

13、假设 G 是联通带权图，T 是 G 的最小生成树。证明：T 是唯一最小生成树当且仅当 G 中任一不在 T 中的边 e 的权大于回路 T+e 中任何其它边的权。

14、Q 是有理数集，定义 Q 上的运算*为：a*b=a+b-ab（a，b∈Q，等号右边为普通算术运算）

（a）计算：（i）3*4；（ii）2*（-5）；（iii）7*（1/2）

（b）（Q，*）是否为半群？可交换吗？

（c）*的单位元是什么？

（d）Q 中什么元素有逆元素？逆元素是什么？

15、G 是可交换群，n 是给定的正整数。定义函数 f：G→G 为 f（a）=a^n。证明 f 是 G 上的同态映射。

考试科目名称 离散数学2020 （A卷）

考试方式：开卷 考试日期____年 ___月___日 教师 赵建华，姚远

系（专业） 软件学院（软件工程） 年级________ 班级________

学号________ 姓名________ 成绩________

注意：所有作答请写在答题纸上。

1. (8 points) Let p be the statement “It’s raining”, q be the statement “The field is wet”, r be the statement “The flowers need watering”. Please represent the following statements as logical formulas.
   a) It’s raining, the filed is wet, and the flowers need watering.
   b) It is not raining, the field is wet, and the flowers need watering.
   c) If it is raining and the filed is wet, the flowers need watering.
   d) If the flowers don’t need watering, then it is not raining or the field is not wet.

2. (8 points) Suppose there are 10 persons and each of them flips a coin. We know that the probability of the ‘HEAD’ outcome of the i-th person is 1/(2i+1). What is probability that the number of ‘HEAD’ outcomes is even?

3. (8 points) Let relation R be a reflexive and transitive relation on the set A. Define relation R' as x R' y if and only if x R y and y R x.
   a) Prove that R' is an equivalence relation.
   b) Let R_P be a relation on the quotient set A/R' defined as:
   [x] R_P [y] if and only if x R y
   Prove that R_P is a partial order relation on A/R'.

4. (8 points) Define relation $\mathrm{R} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) | y = x + 1\}$ on the set of all integers. Give and prove the transitive closure of R.

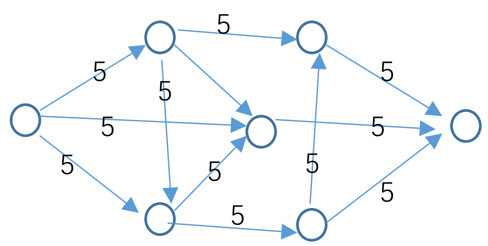
5. (8 points) Prove the following properties by mathematical induction.
   a) For any two elements a, b in a communitive group (S,*), and any positive integer n, $ab^n=b^na$.
   b) Using the above property to prove that $a^mb^n=b^na^m$ holds for any two elements a, b in S, and any two positive integers m, n.

6. (8 points) Given a sequence of m numbers, prove that there must be a continuous subsequence such that the sum of this subsequence can be divided by m.

7. (8 points) Prove that a connected graph G has a unique minimal span tree if the weights of the edges of G are mutually different with each other.

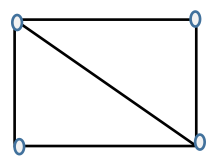
8. (10 points) A subset of set A = {1, 2, 3,... , n} is called *alternating*, if the first number is odd and odd numbers and even numbers alternatingly appear after we sort all its elements in ascending order. For example, {1} and {1,2,3,4} are alternating; {2}, {1,3,4} and {1,4,6} are not alternating. Define that the empty set is alternating. Find the number of alternating subsets of A.

9. (8 points) Given the following network:



a) Calculate the maximal flow of this network.
b) Give the minimal cut of this network.

10. (8 points) Calculate the number of different ways to color the following graph with 5 different colors such that any two adjacent vertexes have different colors. The calculation process is required.



11. (8 points) Prove that: on a 4*n Chinese chessboard, it is impossible for "horse" to traverse each grid exactly once and return to the origin.

12. (10 points) For a set S with n elements, let $A_1, A_2, \dots, A_n$ be n mutually unequal subsets of S. Prove that: there exists an element x in S such that $A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \dots, A_n \cup \{x\}$ are still n mutually unequal subsets.

中文参考

1. (8 分) 假设 p 表示“天正在下雨”，q 表示“地上是湿的”，r 表示“花需要浇水”，请用逻辑公式表示下列命题：
   a) 天正在下雨，地上不是湿的，并且花需要浇水
   b) 天不在下雨，地上是湿的，花需要浇水
   c) 如果天在下雨并且地上是湿的，那么花不需要浇水
   d) 如果花需要浇水，那么天不在下雨或者地上不是湿的

2. (8 分) 假设第 i 个人抛硬币正面向上的概率是 1/(2i+1)。10 个人抛硬币，正面向上的个数是偶数的概率是多少？

3. (8 分) 假设集合 A 上的关系 R 是自反的和传递的。定义 A 上的关系 R'如下：

   x R' y 当且仅当 x R y 且 y R x。

   a) 请证明 R'是一个等价关系。
   b) A 的商集 A/R'上的关系 R_P 定义如下：

   [x] R_P [y] 当且仅当 x R y

   请证明 R_P 是 A/R'上的偏序关系。

4. (8 分) 定义整数集上的关系$\mathrm{R} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) | y = x + 1\}$，请给出 R 的传递闭包并证明之。

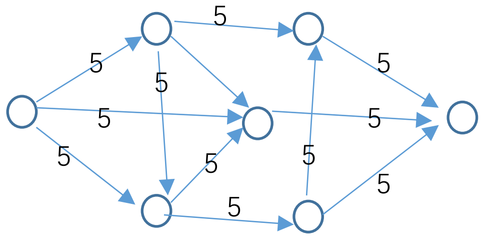
5. (8分) 使用数学归纳法证明下列性质：
   a) 可交换群(S,*)的元素a和b，对于任意的正整数n，都有$ab^n=b^na$。
   b) 利用这个性质证明对于S中的任意元素a,b和任意正整数m,n，$a^mb^n=b^na^m$。

6. (8分) 给定m个数组成的序列，请证明一定能够从该序列中选出一个连续子序列，使得这个子序列的和能够被m整除。

7. (8分) 请证明如果图G中各条边的权重各不相同，那么G的最小生成树是唯一的。

8. (10分) 集合$\mathrm{A} = \{1, 2, 3, \dots, \mathrm{n}\}$的某个子集称为是交替的，如果其元素按照升序排列时是奇数、偶数交替出现的，且第一个数是奇数。例如$\{1, 2, 3, 4\}$是交替的，$\{1, 3, 4\}$与$\{1, 4, 6\}$不是交替的。规定空集是交替的。求A的交替子集的个数。

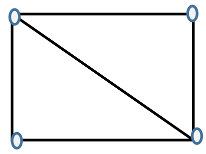
9. (8分) 已知网络如下:



a）请计算出这个图的最大流。

b）给出这个图的最小割。

10. (8分) 要使用5种颜色对下图中顶点进行染色并使得相邻顶点的颜色不同。请问总共有多少种染色方法。请给出演算过程。



11. (8分) 试证明：在4*n的中国象棋棋盘上，“马”不可能不重复的遍历每一个格子并回到原点。

12. (10分) 对于一个含有n个元素的集合S，令$A_1, A_2, \ldots, A_n$为S的n个互不相等的子集。试证明：存在S的元素x，使得$A_1 \cup \{x\}, A_2 \cup \{x\}, \ldots, A_n \cup \{x\}$依然是n个互不相等的子集。

考试科目名称 离散数学2020 （A卷）

考试方式：开卷 考试日期______年 ___月___日 教师______赵建华，姚远______

系（专业）__软件学院（软件工程）__ 年级____________ 班级________________

学号____________________ 姓名____________________ 成绩________________

注意：所有作答请写在答题纸上。

1. (8 points) Let *p* be the statement “It’s raining”, *q* be the statement “The field is wet”, *r* be the statement “The flowers need watering”. Please represent the following statements as logical formulas.
   a) It’s raining, the filed is wet, and the flowers need watering.
   b) It is not raining, the field is wet, and the flowers need watering.
   c) If it is raining and the filed is wet, the flowers need watering.
   d) If the flowers don’t need watering, then it is not raining or the field is not wet.

   参考答案：
   a） p∧q∧r
   b） ~p∧q∧r
   c） p∧q => r
   d） ~r => ~q∨~r
   注：如果学生使用了其它可理解的符号来表示逻辑运算，例如∧写成 and，~写成 ¬，都可以。

2. (8 points) Suppose there are 10 persons and each of them flips a coin. We know that the probability of the ‘HEAD’ outcome of the *i*-th person is 1/(2i+1). What is probability that the number of ‘HEAD’ outcomes is even?

   参考答案（其他解也可以，过程对结果错了可酌情给分）：
   定义 f(x)=(2/3+1/3x) (4/5+1/5x) … (20/21+1/21x) （4'）
   上式可以展开成 $f(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{10}x^{10}$ 形式。
   显然，f(x)的展开式中 x 偶数次方（包括 0 次方）前的系数和即为所求。
   于是，偶数次方前的系数和可以通过下式求得：
   (f(1)+f(-1))/2 = 1/2（1+ 1/3*3/5*…*19/21） = 11/21 （4'）

3. (10 points) Let relation R be a reflexive and transitive relation on the set A. Define

relation R' as x R' y if and only if x R y and y R x.

a) Prove that R' is an equivalence relation.

b) Let R_P be a relation on the quotient set A/R' defined as:

$$[x]\ R_P\ [y] \text{ if and only if } x\ R\ y$$

Prove that R_P is a partial order relation on A/R'.

参考答案：

a) 实际上要证明 R’具有自反、传递、对称的性质。
   - 对称：如果 x R’ y，根据定义 x R y 且 y R x 都成立，因此 y R’ x 成立；
   - 自反：因为 R 是自反的，因此对于 A 中的任意 x，x R x，因此 x R’ x；
   - 传递：如果 x R’ y 和 y R’ z 都成立，根据 R’的定义，x R y, y R x, y R z, z R y 都成立。因为 R 是自反的，因此 x R z 和 z R x 都成立，因此 x R’ z 成立。

b) 要证明 Rp 是偏序，只要证明 Rp 具有自反、传递和反对称性质。
   - 自反：因为 R 具有自反性，因此对于 A 中的任意 x，x R y 成立，根据 R_p 的定义，[x] R_p [y]成立。
   - 传递：如果[x] R_p [y]且[y] R_p [z]，根据定义，x R y 和 y R z 成立，根据 R 的传递性质可知 x R z 成立。根据 Rp 的定义，[x] Rp [z]。
   - 反对称：如果[x] Rp [y]和[y] Rp [x]都成立，根据 Rp 的定义，x R y 和 y R x 都成立。根据 R’的定义可知 x R’ y。因此[x] == [y]。
   - 注意：这个证明实际上还需要考虑 Rp 定义的合理性，也就是 Rp 是 well-defined。但是因为 Rp 的定义已经在题目中给出，所以如果学生没有证明 Rp 的良定义，不扣分。
     具体证明如下：
     因为 Rp 是根据等价类中的元素之间是否具有 R 关系来定义的。因此需要证明对于 A/R’中的等价类[x]、[y]，可以选取[x]、[y]中的任意元素 x’和 y’来确定[x]和[y]之间的关系。也就是说要证明：
     如果 x’,y’分别是[x]和[y]中的元素，那么 x R y 当且仅当 x’ R y’。证明如下：
     - x R y => x’ R y’：因为 x’ R’ x 和 y’ R’ y，根据 R’的定义可知 x’ R x 且 y R y’。根据 R 的传递性可知：x’ R y’成立。
     - 同样易证 x’ R y’ => x R y。

4. (8 points) Define relation $R = \{(x, y) | y = x + 1\}$ on the set of all integers. Give and prove the transitive closure of R.

参考答案：

R 的传递闭包是<关系。 (2')

证明：（1）显然<满足传递性 (2')

（2）显然 R⊆< (2')

（3）假设存在传递关系 R’包含 R，显然有<⊆R’ (2')

5. (10 points) Prove the following properties by mathematical induction.

a) For any two elements a, b in a communitive group (S,*), and any positive integer n, $ab^n=b^na$.

b) Using the above property to prove that $a^mb^n=b^na^m$ holds for any two elements a, b in S, and any two positive integers m, n.

参考答案：

a) BASE:当n = 1时，因为S是communitive的，所以ab = ba

INDUCTION: 假设当n=k时，$ab^k=b^ka$。

那么当n = k + 1时，$ab^{k+1} == ab^kb = b^kab = b^kba = b^{k+1}a$

b) 可以对m使用数学归纳法证明。

BASE: 当m=1的时候，根据a的结论$ab^n = b^na$

INDUCTION: 假设当m=k时,$a^kb^n = b^na^k$.

那么当m = k + 1的时候，$a^{k+1}b^n = aa^kb^n = ab^na^k=b^naa^k = b^na^{k+1}$

但是也可以这么做：因为S是一个群，因此am仍然是S中的一个元素。直接使用a的结论，可得$a^mb^n=b^na^m$

6. (8 points) Given a sequence of m numbers, prove that there must be a continuous subsequence such that the sum of this subsequence can be divided by m.

参考答案：

这个序列总共有m个前缀，长度分别为1，2，…，m。假设Si表示第i个前缀中所有整数的和。考虑Si出以m的余数。如果有某个余数为0，那么对应的前缀的和能够被m整除；如果所有和的余数都不为0，那么总共有m-1中可能的取值：1,2,…,m-1。根据鸽巢原理，必然有两个余数相同。假设Si和Sj的余数相同（i<j），那么从第i+1到第j个元素组成的子序列的和等于Sj – Si，该子序列的和能够被m整除。

7. (8 points) Prove that a connected graph G has a unique minimal span tree if the weights of the edges of G are mutually different with each other.

参考答案：

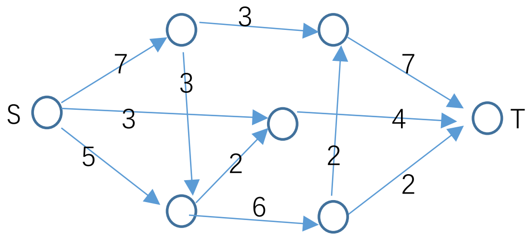
假设 G 有两棵不同的 MST，其边的集合按照权值从小到大排列分别是 e1,e2,…,em 和 e’1,e’2,…,e’m。假设 i 是最小的、使得 ei 和 e’i 不相同的边。不失一般性，假设 ei 的权值小于 e’i。将 ei 加入到第二棵树的边集合中，得到 e’1,e’2,…ei, e’i, … ,e’m,ei。新的边集必然存在包含 ei 的回路。根据 i 的定义可知，e’1 = e1，e’2 = e2, … e’i-1 == ei-1。因为 e1,e2,…,em 是一棵树，因此这个回路中必然包含了不同于 e1,e2,…,ei-1，在 T2 中的边。假设这条边是 e’。根据假设可知：e’的权值大于 ei 的权值。因此我们可以从 T2 中删除 e’得到一棵更小的生成树。这和 T2 是 MST 树矛盾。

思路二：数学归纳法
当 G 只有 1 个顶点的时候，命题成立；
对于具有 n 个顶点的图 G，首先证明最小的边 e 一定在 G 的 MST 树中。将 e 的两端合并后得到的图 G‘，G 的 MST 就是 e 加上 G’的 MST。而 G’有 n-1 个顶点，且边的权值也是各不相同的，因此 G‘的 MST 树也是唯一的。由此可知 G 的 MST 是唯一的。

8. (10 points) A subset of set A = {1, 2, 3,... , n} is called *alternating*, if the first number is odd and odd numbers and even numbers alternatingly appear after we sort all its elements in ascending order. For example, {1} and {1,2,3,4} are alternating; {2}, {1,3,4} and {1,4,6} are not alternating. Define that the empty set is alternating. Find the number of alternating subsets of A.

参考答案：
将 A 的子集分成两部分，第一部分是不含 n 的，即为{1，2，3,... ，n-1}的子集；第二部分是含有 n 的，可以看成{1，2，3,... ，n-1}的每个子集加个 n 后得到的子集。（2’）
令 f(n)表示{1， 2， 3,... ， n-1}的交替子集个数，则第一部分的交替子集个数显然为 f(n-1)；第二部分中，可以看成是{1， 2， 3,... ， n-2}的交替子集加入{n-1，n}（当最后一个数与 n 同奇偶），或{1， 2， 3,... ， n-2}的交替子集加入{n}（当最后一个数与 n 不同奇偶），因此第二部分的交替子集个数为 f(n-2)。（4’）
于是有 f(n)= f(n-1)+ f(n-2)（2’）
再由 f(1)=2，f(2)=3，可得 f(n)=F(n+2)（2’）

9. (10 points) Given the following network:

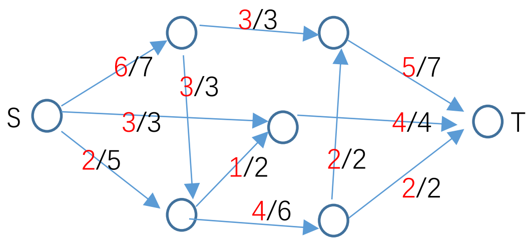


a) Calculate the maximal flow of this network.

b) Give the minimal cut of this network.

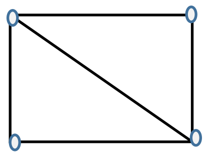
参考答案：

a) 最大流值是11，具体流值如下图所示。如果有过程，但是结果不准确，可酌情给分。如果没有过程或过程不全，答案正确可给全部分数。



b）最小割是11。如果答案错误，但是和上面的最大流值相同，可给一半分。因为我们主要考的是最小割和最大流的关系。

10. (10 points) Calculate the number of different ways to color the following graph with 5 different colors such that any two adjacent vertexes have different colors. The calculation process is required.



参考答案：

假设图中从左上角开始，按照顺时针顺序，四个顶点分别是A,B,C,D。考虑边AC，删除该边后得到一个4个顶点的环路，其染色方法个数是：

$$(5-1)^4 + (-1)^4(5-1) = 256 + 4 = 260$$

而合并AC后得到一个3个顶点的线性图，其不同的染色方法数量是

$$5(5-1)^2 = 80$$

因此，总的染色方法数量是

$$280 – 80 = 180$$

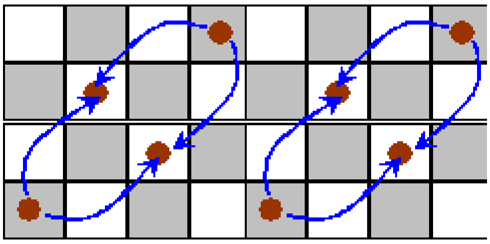
注：其它方法也可以计算。只要有正确的过程即可。例如可以考虑A,C首先染色，它们的颜色必然不同。因此A,C的染色方法总共有5*4=20种；对于AC的每一种染色方法，B，D各有3中选择，因此总共有20*3*3=180种选择。

11. (10 points) Prove that: on a 4*n Chinese chessboard, it is impossible for "horse" to traverse each grid exactly once and return to the origin.

参考答案:

即证明以每个格子为点，马的走动路线为边的图中不存在汉密尔顿回路。

（4'）



以如右图所示的方式给 4*n 的棋盘着色。显然，上下两排的黑色空格，必然会走到中间两排的白色空格上。 （2'）

因此，如果删除中间两排的白色空格公共 n 个，则得到了上下两排的 n 个孤立的黑色空格。即删除 n 个节点后，得到了至少 n+1 个连通分支。由汉密尔顿回路存在的必要条件得知，一定不存在汉密尔顿回路。 （4'）

中文参考

1. (8 分) 假设 p 表示“天正在下雨”，q 表示“地上是湿的”，r 表示“花需要浇水”，请用逻辑公式表示下列命题:
   a) 天正在下雨，地上不是湿的，并且花需要浇水
   b) 天不在下雨，地上是湿的，花需要浇水
   c) 如果天在下雨并且地上是湿的，那么花不需要浇水
   d) 如果花需要浇水，那么天不在下雨或者地上不是湿的

2. (8 分) 假设第 i 个人抛硬币正面向上的概率是 1/(2i+1)。10 个人抛硬币，正面向上的个数是偶数的概率是多少?

3. (10 分) 假设集合 A 上的关系 R 是自反的和传递的。定义 A 上的关系 R'如下:

   x R' y 当且仅当 x R y 且 y R x。

   a) 请证明 R'是一个等价关系。
   b) A 的商集 A/R'上的关系 R_P 定义如下:

   [x] R_P [y] 当且仅当 x R y

   请证明 R_P 是 A/R'上的偏序关系。

4. (8 分) 定义整数集上的关系$\mathrm{R} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) | y = x + 1\}$，请给出 R 的传递闭包并证明之。

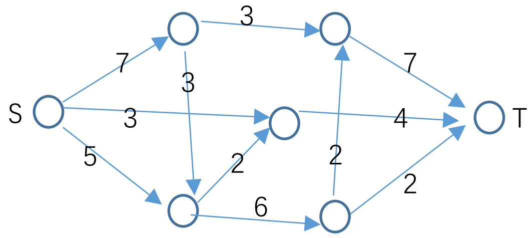
5. (10分) 使用数学归纳法证明下列性质:
   a) 可交换群(S,*)的元素a和b，对于任意的正整数n，都有$ab^n=b^na$。
   b) 利用这个性质证明对于S中的任意元素a,b和任意正整数m,n，$a^mb^n=b^na^m$。

6. (8分) 给定m个数组成的序列，请证明一定能够从该序列中选出一个连续子序列，使得这个子序列的和能够被m整除。

7. (8分) 请证明如果图G中各条边的权重各不相同，那么G的最小生成树是唯一的。

8. (10分) 集合$A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$的某个子集称为是交替的，如果其元素按照升序排列时是奇数、偶数交替出现的，且第一个数是奇数。例如$\{1, 2, 3, 4\}$是交替的，$\{1, 3, 4\}$与$\{1, 4, 6\}$不是交替的。规定空集是交替的。求A的交替子集的个数。

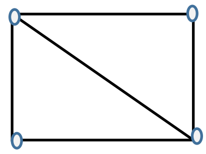
9. (10分) 已知网络如下:



a）请计算出这个图的最大流。

b）给出这个图的最小割。

10. (10分) 要使用5种颜色对下图中顶点进行染色并使得相邻顶点的颜色不同。请问总共有多少种染色方法。请给出演算过程。



11. (10分) 试证明: 在4*n的中国象棋棋盘上,“马”不可能不重复的遍历每一个格子并回到原点。

考试科目名称 离散数学2020 （B 卷）

考试方式：开卷　考试日期＿＿年＿月＿日　教师＿赵建华，姚远＿

系（专业）＿软件学院（软件工程）＿　年级＿＿　班级＿＿

学号＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　成绩＿＿＿＿

注意：所有作答请写在答题纸上。

1. (10 points) Symbolize the following propositions, and provide the logic reasoning steps:
   "Natural numbers are all integers, and integers are all rational numbers; some rational numbers are not integers. So, natural numbers are all rational numbers, and there are rational numbers that are neither natural numbers nor integers."

2. (8 points) A player rolls three dices. Calculate the probability that two of them have same point and the other one has a strictly larger point.

3. (8 points) Let S be the set $\{a, b, c, d, e, f\}$, and A, B be two relations defined on S as follows.
   A={ (a,c), (a,d), (a,e), (b,a), (b,d), (b,e), (b,f), (c,a), (c,b), (c,e), (c,f), (d,c), (d,d), (e,f), (f,f), (f,a)}
   B ={(a,c), (a,f), (b,b), (b,e), (b,f), (c,b), (c,c), (d,e), (e,c), (e,f)}
   Please give the relations $A°B$ and A^2.

4. (8 points) Given a set A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Give the Hasse diagram of A in terms of the divisibility relation on A, and list all the minimal value(s) and maximal value(s) of A on the divisibility.

5. (8 points) Suppose set A has four elements. Give the total number of equivalence relations on A.

6. (8 points) Assume that n is a positive even number.
   (1) How many functions $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ are there satisfying $\forall x: f(x) \neq x$.
   (2) For $x \in \{0,1\}^n$, let x^r be the reverse string of x. How many strings are there satisfying $x^r = x$.

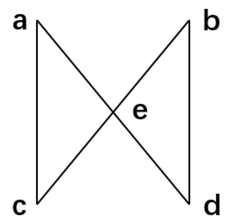
7. (8 points) Let $Z_m=\{0,1,\ldots,m-1\}$, $+_m$ be the addition modulo m, and $*_m$ be the multiplication modular m.

   (1) Prove that $(Z_m, +_m)$ is a group.

   (2) Give and prove the sufficient and necessary condition of $(Z_m-\{0\}, *_m)$ being a group.

8. (8 points) Given a simple graph G with a limited number of vertices, and assume that we can delete vertices in G step by step as follows: we can delete only vertices with degrees less than 2. Prove that: all the vertices in G can be deleted if and only if there is no circuit in G.

9. (10 points) Consider a simple Euler graph G (|G|>2). A vertex *v* in G is called *extendible* if any simple path from *v* can be extended to an Euler circuit. For example, as shown in the figure below, vertex *e* is extensible; vertex *a* is not extendible, as the simple path *aec* cannot be extended to an Euler circuit. Prove that: vertex *v* is extensible if and only if G-*v* is a forest.



10. (8 points) Represent the expression (a-b) * (c + d) + (e / f) * g as a rooted binary tree. Then, give the sequences travelling this tree in preorder and postorder, respectively.

11. (8 points) Let G be an Abelian group. Prove that the function f: G→G defined as $f(a) = a^3$ is a homomorphism.

12. (8 points) Let $(L, \leq)$ be a lattice. For any element x, y, z in L, prove the following formulas:

   (1) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

   (2) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$

中文参考

1. (10 分) 符号化以下命题，并给出推理的证明过程。
自然数都是整数，整数都是有理数，有些有理数不是整数，所以自然数都是有理数，并且存在既不是自然数也不是整数的有理数。

2. (8 分) 计算掷出三个骰子后，有两个骰子点数相同，且另外一个的点数大于这个点数的概率。

3. (8 分) 已知集合 S={a,b,c,d,e,f}和 S 上的关系 A，B 如下：
A={ (a,c), (a,d), (a,e), (b,a), (b,d), (b,e), (b,f), (c,a), (c,b), (c,e), (c,f), (d,c), (d,d), (e,f), (f,f), (f,a)}
B ={(a,c), (a,f), (b,b), (b,e), (b,f), (c,b), (c,c), (d,e), (e,c), (e,f)}
请给出关系 A°B，和 A^2。

4. (8 分) 已知整数集合 A={1，2，3，4，5，6，7，8，9，10}，画出 A 相对于整除关系的 Hasse 图。并指出 A 中相对于整除关系的所有极小值和极大值。

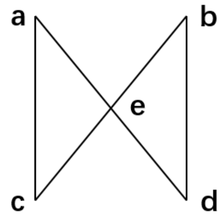
5. (8 分) 若集合 A 有四个元素，给出 A 上的所有等价关系的个数。

6. (8 分) 假设 n 是一个正偶数，试分别回答以下问题：
(1) 存在多少函数$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$，满足$\forall x: f(x) \neq x$.
(2) 对于$x \in \{0,1\}^n$，令x^r表示x的倒序串，存在多少这样的x满足$x^r = x$.

7. (8分) 设Z_m={0,1,⋯,m-1}，$+_m$是模m加法运算，$*_m$是模m乘法运算。
(1) 证明（Z_m，$+_m$）是群。
(2) 给出（Z_m-{0}, $*_m$）是群的充要条件，并证明之。

8. (8分) 给定一个顶点个数有限的简单图G，假定我们只可以通过如下方式逐步删除G中的顶点：每一步可以删除度数小于2的顶点。试证明：如果G中的所有顶点能被删除当且仅当G中没有回路。

9. (10分) 简单图G是满足|G|>2的欧拉图，定义G中的节点v是可延展的(extendible)指：从节点v出发的任意简单通路都可以继续延展成欧拉回路。例如下图所示，只有节点e是可延展的；对于节点a，aec这条简单通路无法继续延展成欧拉回路。试证明：节点v是可延展的当且仅当G-v是一个森林。



10. (8分) 给出表达式(a-b) * (c + d) + (e / f) * g的二叉树表示，然后分别给出按照preorder和postorder遍历这棵树得到的序列。

11. (8分) 假设G是一个阿贝尔群，函数f:G->G定义为$f(a) = a^3$，请证明f是一个同态映射。

12. (8分) 设(L, ≤)为格，对于L的任意元素x, y, z，证明下式成立：

(1) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(2) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$

考试科目名称 离 散 数 学2021 （A 卷评分标准）

2020—2021 学年第 二 学期　　教师＿＿＿＿＿　　考试方式 闭 卷

系（专业） 计算机科学与技术系　　年级 一　　班级＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿　　成绩＿＿＿＿＿

题 号	一	二	三	四	五	六	七	八	九
得 分									

得分	

一、（本题满分 12 分）

设P, Q, R为命题，命题联结词IF ⋯ THEN ⋯ ELSE ⋯的真值表定义如下．证明：

(1) IF A THEN B ELSE C $\Leftrightarrow$ IF $\neg A$ THEN C ELSE B；

(2) 命题联结词$\neg$、$\wedge$、$\vee$均可通过命题联结词IF ⋯ THEN ⋯ ELSE ⋯等效表达．

P	Q	R	IF P THEN Q ELSE R
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

【参考解答与评分标准】

(1) 证明：根据真值表，IF P THEN Q ELSE R $\Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (\neg P \to R)$【3 分】，因此IF A THEN B ELSE C $\Leftrightarrow$ IF $\neg A$ THEN C ELSE B $\Leftrightarrow (A \to B) \wedge (\neg A \to C)$．【3 分，直接证明相等也可得 6 分】□ 注：用真值表证明也可给 6 分

(2) 证明：将每个基本联结词构成的基本命题表达式写为IF ⋯ THEN ⋯ ELSE ⋯的命题形式即可．如：$\neg P \Leftrightarrow$ IF P THEN $\boldsymbol{F}$ ELSE $\boldsymbol{T}$【2 分】；$P \wedge Q \Leftrightarrow$ IF P THEN Q ELSE P【2 分】；$P \vee Q \Leftrightarrow$ IF P THEN P ELSE Q【2 分】；注：用真值表证明也可给 6 分

得分	

二、(本题满分 10 分)

证明：对集合A,B若$\mathcal{P}(A)\in\mathcal{P}(B)$，则$A\in B$.　（注：$\mathcal{P}(A)$，$\mathcal{P}(B)$分别表示集合$A,B$的幂集）

【参考解答与评分标准】

$$\mathcal{P}(A)\in\mathcal{P}(B)\Longrightarrow\mathcal{P}(A)\subseteq B\Longrightarrow\forall X\in\mathcal{P}(A)\to X\in B\Longrightarrow obviously\ A\in\mathcal{P}(A)\to A\in B$$

【3 分】　【3 分】　【2 分】　【2 分】

其它证明方式也可给分，注意若混淆“∈”和“⊆”，全题最多给 3 分。

得分	

三、(本题满分 10 分)

设G为群，$x,y\in G$，$x\neq e$，y为二阶元；若$yxy^{-1}=x^2$，求x的阶.

【参考解答与评分标准】

$|x|=3$ 【3 分】若无过程仅给 3 分；

证明： 首先，由于 y 是二阶元，所以有 $y^{-1}=y$。同时：

$$
\begin{aligned}
& yxy^{-1}=x^2 \\
\Longleftrightarrow\ & yx=x^2y && \text{(右乘 } y\text{)} \\
\Longleftrightarrow\ & x=y^{-1}x^2y && \text{(左乘 } y^{-1}\text{)} \\
\Longrightarrow\ & x^2=(y^{-1}x^2y)(y^{-1}x^2y) && \text{(两边取平方)} \\
\Longleftrightarrow\ & x^2=y^{-1}x^4y && (yy^{-1}=e) \\
\Longleftrightarrow\ & x^2=yx^4y^{-1} && (y=y^{-1})
\end{aligned}
$$

从而有 $yx^4y^{-1}=x^2=yxy^{-1}$。由消去律知 $x^3=e$。从而 $|x|\mid 3$。因为 x 不是单位元，所以 $|x|\neq 1$，因此只能有 $|x|=3$。 □

【证明过程 7 分，不一定每一步都要写，大体思路正确即可给 7 分；从$x^3=e$直接得到$|x|=3$酌情扣 1—2 分。】

得分	

四、（本题满分 10 分）

证明：不大于自然数n且与n互素的自然数的计数为：$\varphi(n)=n\cdot\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

（注：$p|n$指素数p可被n整除，即$\{p\}$为n的全体素因子．提示：可考虑用容斥原理技术）

【参考解答与评分标准】

设 $n(n\geq 2)$ 为自然数，$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是 n 的全部质因数，r 是任一不大于 n 的自然数。r 与 n 互质当且近当 r 不能被 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 中的任一个整除。因此，$\varphi(n)$ 等于由 1 到 n 的 n 个整数中不能被 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 中的任一个整除的整数个数。由容斥原理可直接得到

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=n+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq m}\left[\frac{n}{\operatorname{lcm}(p_{i_1},p_{i_2},\cdots,p_{i_k})}\right]\\&=n+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq m}\left[\frac{n}{p_{i_1},p_{i_2},\cdots,p_{i_k}}\right]\\&=n-\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots+\frac{n}{p_m}\right)+\left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{m-1}p_m}\right)+\cdots+(-1)^m\frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\\&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)\end{aligned}$$

【只要能说明用容斥原理并写出容斥原理基本交替式给 4 分，述文字说明 2 分，过程 4 分】

得分	

五、（本题满分 12 分）

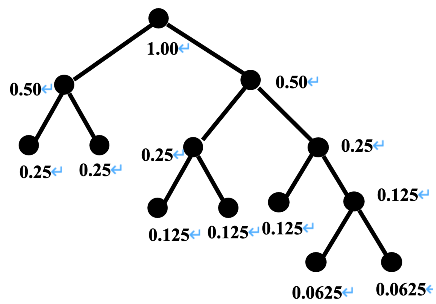
(1) 请给出在通信中以对应频率出现的下列字符的最优二元前缀编码树（即 Huffman 树），给出各字符对应的最优二元前缀编码码字（例如 01011 为一个码字），并求出按所求得的码字传输 100 个按给定频率出现的字符所需要的总比特数（二进制位数）；

$$a(25\%),b(25\%),c(12.5\%),d(12.5\%),e(12.5\%),f(6.25\%),g(6.25\%)$$

(2) 若某 Huffman 树共有 215 个顶点，则其最优二元前缀编码共应包含多少个不同的码字？

【参考解答与评分标准】

(1) 按照 Huffman 编码算法构造最优二叉树如下图所示【5 分】。



传输 100 个字符的总码长为：100*(0.25*2+0.25*2+0.125*3+0.125*3+0.125*3+0.0625*4+0.0625*4) = 262.5（bits）

【2 分】只要数对上述树即为正确【直接给 7 分】。

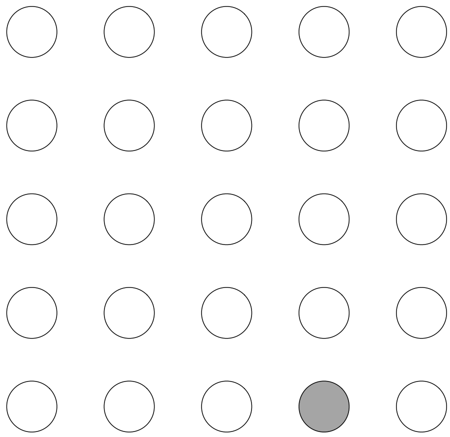
(2) 根据 Huffman 树的构造算法，Huffman 树必为满二叉树（即除叶顶点外无 1 度分支点）【2 分】，而每个码字必被编码在叶顶点上，因此所求即为此 Huffman 树的也顶点计数。设此 Huffman 树中的叶顶点数、分支顶点数分别为 n_1和n_2，则有 $n_1=n_2+1$【2 分】。因此叶顶点数为 （215 + 1）/ 2 = 108 个【1 分】，因此共有 108 种不同的码字。注：只要数对即可给 5 分。

得分	

六、 （本题满分 12 分）

(1) 证明：一个非平凡图是二部图当且仅当其无奇圈（即长度为奇数的初级回路）.

(2) 下图中是否存在仅通过水平、垂直的笔画（不可斜向行走）不重复地经过所有白色圆且不经过灰色圆的一笔画法？若存在请给出具体方案，若不存在请证明原因.



第六（2）题图

【参考解答与评分标准】

(1)

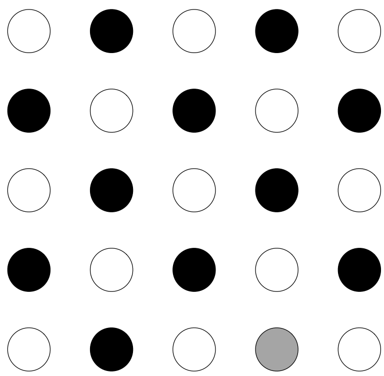
证明：必要性是显然的，因为如果存在奇圈就不可能完成上述染色。充分性：不妨设图是连通图，否则对每个连通分支分别考虑即可。设 u 是图中任意一点，设 $S=\{v\in V|d(u,v)\text{为奇数}\},T=\{v\in V|d(u,v)\text{为偶数}\}$，其中 $d(u,v)$ 是从 u 到 v 的最短路径的长度。现在证明S和T即为该二分图的划分，即证明不存在这样的边：它的端点都在 S 内或者 T 内。假设存在这样的边 e，设其端点为 m,n，那么图中就存在这样一个圈：$u->...->m->n->...->u$，并且 u 到 m 和 n 到 u 的距离同为奇数或者偶数，因此这是一个奇圈，从而矛盾。证毕。

【基本思路对即可给 6 分，一般用反证法，直接证明能说清楚也可以】

（2）

不存在所要求的一笔画画法【2 分】。

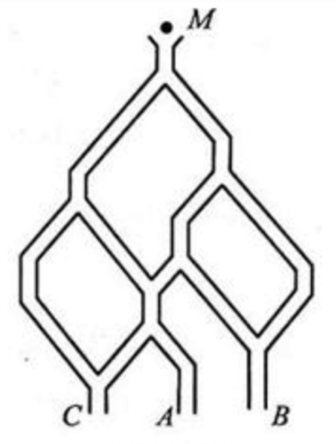
证明：建立二部图模型【1 分】：根据要求的一笔画方式，连线必将以或纵或横的方式穿过每个白点，因此每个白点对应的可能经过的邻接点着色为黑色，将顶点按照着色方式分为V_1（白色），V_2（黑色）两个集合，连线可以经过两个圆圈则对应两个点（分属V_1与V_2）之间有边。下图为一种着色方式【1 分】。如存在一笔画的方案，则路径中必须黑白顶点交替，这样要么黑点数和白点数一样，要么黑点数仅比白点数少 1【1 分】，但由于灰色圆为孤立顶点（不在二部图中），因此二部图中共有 13 个白点和 11 和黑点【1 分】，不满足上述条件，因此不存在所要求的一笔画方案。



得分	

七、（本题满分 10 分）

教育超市举行投球游戏促销活动，如右图所示：一个小球从M处投入，通过管道必然自上而下落在A或B或C三处之一；若小球落在A处，则获得 50%折扣率，即只要付款实际货品价格的 50%；若落B处，付款 70%（折扣率为 70%）；落C处付款 90%（折扣率为 90%）．假设小球从每个交叉口落入左右两个管道的可能性均等，同学甲购物后投球一次，求甲预期获得的购物折扣率。



第七题图

【参考解答与评分标准】

首先设置获得（$k_1=50\%$、$k_2=70\%$、$k_3=90\%$）折扣率的离散随机变量为K【2 分】，则根据图易见$p(k_1)=\frac{3}{16}, p(k_2)=\frac{3}{8}, p(k_3)=\frac{7}{16}$，【4 分】 因此可以求出：

$$E(K)=\frac{3}{16}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{7}{10}+\frac{7}{16}\times\frac{9}{10}=\frac{3}{4}$$

【4 分，答案正确即可给 10 分】

得分	

八、（本题满分 12 分）

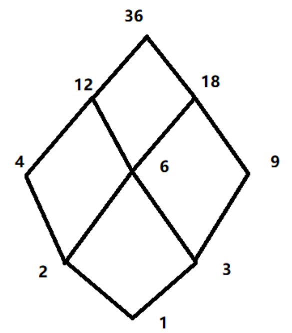
给定由集合$S=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$及整除关系“$|$”构成的偏序集$(S,|)$，

(1) 画出$(S,|)$的哈斯图，并判定集合$A=\{2,3,4,6\}$的上确界、下确界是否存在，如存在请给出；

(2) 判定该偏序集$(S,|)$是否构成格；若是格，是否构成分配格、有补格；

(3) 若$(S,|)$为格，请判定$(\{1,2,4,36\},|)$和$(\{3,6,9,36\},|)$是否为$(S,|)$的子格.

【参考解答与评分标准】



(1) 如图右，集合 A 的上下确界均存在。

$\sup(A)=12$，$\inf(A)=1$【图 2 分，上下确界各 1 分】

(2) 偏序集$(S,|)$构成偏序格，（可通过格公理说明，也可说明每两个因子都存在上下确界，无需严格证明）【2 分】；不是有补格：如 2 没有补元【1 分】；是分配格，因为上下确界运算（lcm，gcd）相互满足分配律，或者说明不含有与M_3与N_5同构的子格均可。【1 分，或者说明如果S为有补格，则其为布尔代数，但不符合布尔代数的基数特性，因此非有补格亦可】

(3) $(\{1,2,4,36\},|)\le(S,|)$【2 分】，但$(\{3,6,9,36\},|)$并非$(S,|)$的子格，因为$6\vee 9=18\notin\{3,6,9,36\}$【2 分】

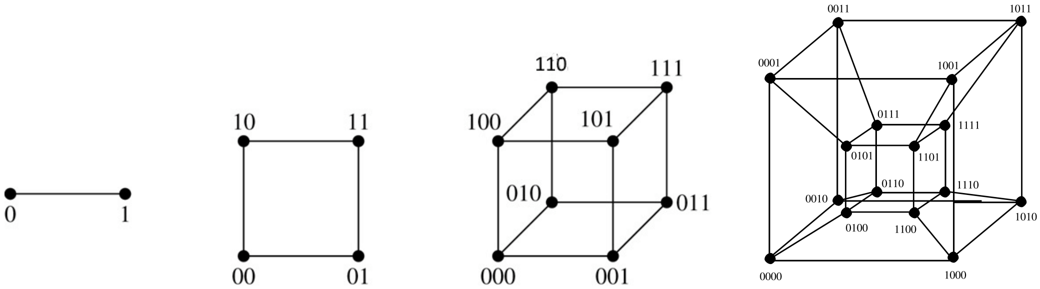
得分	

九、 （本题满分 12 分）

n维超立方体图（Q_n）的顶点是长度为n的$0-1$序列，两个顶点之间有边当且仅当$0-1$序列之间恰好只有一位不同.如下图所示.

(1) 具有$k(k\geq 1)$个原子的布尔代数B_k的 Hasse 图若视为无向图是否与超立方体图Q_k同构？

(2) 证明：$Q_k(k\geq 1)$的点连通度等于k.



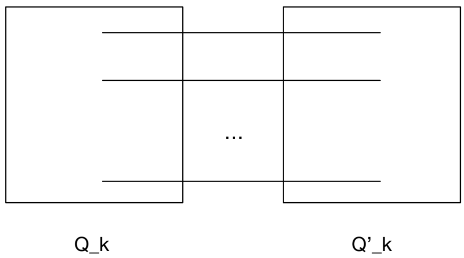
Q_1 Q_2 Q_3 Q_4

第九题图

【参考解答与评分标准】

（1）$B_k\simeq Q_k$【3 分】

（2）证明：证法一：对维度k进行归纳【2 分】:



Basis: 对$k=1$，$Q_1=L_2$,显然$\kappa(Q_1)=1$;

I.H.:对$k\geq 2$，假设$\kappa(Q_k)=k$;

I.S.：对Q_{k+1}，因为$\delta(Q_{k+1})=k+1$，故显然有$\kappa(Q_{k+1})\leq k+1$(Whitney)【2 分】，根据超立方体图的结构，Q_{k+1}即为 2 个Q_k中的顶点通过一个完美匹配M中的边相邻【1 分】，如右图所示. 假设S为Q_{k+1}的一个点割集，根据超立方体图的结构，假设$V(Q_{k+1})-S$至少在Q_k和Q'_k中各留有一个顶点（否则$|S|\geq 2^{k+1}\geq k+1$），那么：

Case 1: 若Q_k-S与Q'_k-S均连通：除非S中包含M中各边的至少一个端点，则在Q_k-S与Q'_k-S之间必有一条边使得$Q_{k+1}-S$连通，那么$|S|\geq|M|=2^{k+1}\geq k+1\ (k\geq 1)$;【2 分】

Case 2: 若Q_k-S与Q'_k-S中至少有一个不连通，不妨设Q_k-S非连通，由归纳假设，$|S\cap V(Q_k)|\geq k$;如若$|S\cap Q'_k|=0$，那么$Q_{k+1}-S$将包含所有Q'_k，因此连通，此时有$|S\cap Q'_k|\geq 1$，因此$|S|\geq k+1$.【2 分】

综合以上两种情况，$\kappa(Q_{k+1})\geq k+1$，又由 Whitney 定理$\kappa(Q_{k+1})\leq k+1$，因此$\kappa(Q_{k+1})=k+1$，由归纳法得证.

证法二：直接证明法（证明梗概）：只需证明对于$|S|\leq k$，$Q_{k+1}-S$均连通即可【2 分】。也是分两种情形：1）S是其中一个Q_k的割集【证法与上述类似，2 分】 2）证明两个Q_k-S都连通。注意Q_{k+1}中两个Q_k之间的边有2^k条边（$k\geq 1$）。【2 分】

离散数学2022期末试卷（学生整理版）

1. （5 分）用 Venn 图表示下列集合
   a）$A \cap (B \cup \overline{C})$
   b）$(A \cap C)U(B \cap \overline{C})$

2. （15 分）已知地铁线路图：

一号线	A、F、H、G、B
二号线	C、G、F、D
三号线	H、E

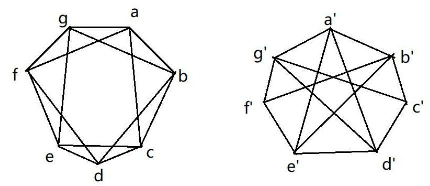
其中 H、F、G 为换乘站，其余为终点站。(X,Y)∈R 当且仅当 X、Y 无需换成即可到达。

1） 分别用集合、矩阵、有向图表示关系 R

2） R 是等价关系，给出理由

3） 给出 R○R 的物理含义，并用矩阵表示

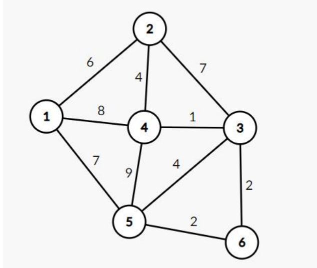
3. （10 分）图 G 和 G’同构吗？若同构，给出证明；若不同构，给出理由。



4. （15 分）一个四边形可以沿对角线划分成两个三角形（如果是凹四边形只能有一条对角线）。n 边形可以划分成多少个互不相交的三角形？给出结论并用数学归纳法证明。提示：n 边形的内角和为(n-2)Π

5. （10 分）一个房间里有 10 个人，年龄都大于等于 1 岁，最大不超过 60 岁。求证：总能找到两组人（两组人中人不能重复），两组人中每组的年龄之和相同。

6. （10 分）用 Kruskal 算法给出下图的最小生成树，还有其他的最小生成树吗，说明理由。



7.（10 分） f(x)的定义域是全体实数，对$\forall a,b$

$$aRb \quad \mathrm{i}ff \quad f(a)=f(b)$$

求证：R 是等价关系

8.（15 分）G 是一个群。若 f：$\mathrm{G}->\mathrm{G}, f(x)=x^2$是一个同态映射，判断 G 是不是阿贝尔群。若是，给出证明；若不是，给出理由。

9. （10 分）用渐进复杂性的定义证明：若$f \in 0(g)$,则$f+g \in 0(g)$