5.1

5. $\forall a \in A = \mathbb{Z}$. 都有唯一 $b = a^2 \in \mathbb{Z} = B$

6. $\forall a \in A = \mathbb{R}$. 都有唯一 $b = e^a \in \mathbb{R} = B$

7. $\forall a \in A = \mathbb{R}$. 都有唯一 $b = 0$ 或 $1 \in B$

8. $\forall a \in A = \mathbb{R}$. 都有唯一 $b = \lfloor a \rfloor \in \mathbb{Z} = B$.

11 (a) 都是　　(b) 都不是

12 (a) 单射　　(b) 满射

13 (a) 都是　　(b) 满射

14 (a) 满射　　(b) 都不是

15 (a) 都是　　(b) 满射

29. n^m 个

30. g 是单射. f 是单射.

31. C, B, A

33. $\forall c \in C$. 因为 $g \circ f$ 是满射. $\exists a \in A$, s.t. $g(f(a)) = c$.
又 $f(a) \in B$. 故 $\forall c \in C$. $\exists b = f(a) \in B$. s.t. $g(b) = c$
故 g 是满射.

34. 由 $O(a_1, f) \cap O(a_2, f) \neq \phi$. 故 $\exists z \in O(a_1, f) \cap O(a_2, f)$
即 $\exists m, n \in \mathbb{Z}$. $f^m(a_1) = f^n(a_2) = z$.
① $\forall y \in O(a_1, f)$　$\exists k \in \mathbb{Z}$. s.t $y = f^k(a_1)$
由 $z = f^m(a_1)$. $a_1 = f^{-m}(z)$
$y = f^k(f^{-m}(z)) = f^{k-m}(z)$. 又 $z = f^n(a_2)$.
$y = f^{k-m+n}(a_2)$. 故 $O(a_1, f) \subseteq O(a_2, f)$
② 类似地, 同理可证 $O(a_2, f) \subseteq O(a_1, f)$

故 $O(a_1, f) = O(a_2, f)$.

40 (a) $f(a_1+a_2) = (a_1+a_2)^2$. $f(a_1)+f(a_2) = a_1^2+a_2^2$

当 $a_1 . a_2$ 不全为 0 时. 命题为假.

(b) $f(s_1 \cdot s_2) = s_1.\text{length} + s_2.\text{length} = f(s_1)+f(s_2)$. 为真.

41. $f(a \diamond b)$

	$a=0$	$a=1$
$b=0$	T	F
$b=1$	F	T

$f(a) \vee f(b)$

	$a=0$	$a=1$
$b=0$	F	T
$b=1$	T	T

$f(a) \wedge f(b)$

	$a=0$	$a=1$
$b=0$	F	F
$b=1$	F	T

(a)、(b) 均为假命题

S.2

7. 设个数为 $\lambda \in \mathbb{N}^*$ 有 $k, 2k, 3k, \cdots, \lambda k \le n$. 但 $(\lambda+1)k > n$.

得 $\frac{n}{k}-1 < \lambda \le \frac{n}{k}$. 即 $\lambda = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$

8. 设 $n = 2k+1$. $\frac{n^2}{4} = k^2+k+\frac{1}{4}$. $\lceil \frac{n^2}{4} \rceil = k^2+k+1$

$\frac{n^2+3}{4} = k^2+k+1 = \lceil \frac{n^2}{4} \rceil$

18 (a) 对于 A^*. 每个元素都有一个长度.

(b) $l(a) = l(b) = 1$. 故不是单射.

(c) $\forall z \in \mathbb{Z}$. 均可构造长度为 z 的子符串 $s \in A^*$. 故 l 是满射.

20. 4. 16

28. 设 $f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

由 $|A|=n$. A中有n个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$\forall x_i \in A$, $f_A(x_i)=0$或1.

在构造A的子集时，每个子集对应一个序列 $f_A(x_1), f_A(x_2), \cdots, f_A(x_n)$.

此序列共有2^n种可能. 故 $|pow(A)|=2^n$.

29、表示集合A.

5.3

11 $f_1(n)$ $f_{12}(n)$ 在$O(n\lg n)$类

$f_{10}(n)$, $f_{11}(n)$, $f_6(n)$ 在$O(n)$类

12、f_5 f_7 f_4 f_6 f_{10} f_{11} f_{12} f_1 f_8 f_2 f_3 f_9

13、f_1 $\Theta(n\lg n)$ f_2 $\Theta(n^2)$ f_4 $\Theta(\lg n)$ f_5 $\Theta(1)$

f_6 $\Theta(n)$ f_{10} $\Theta(n)$ f_{11} $\Theta(n)$

20、$O(N)$

21、$O(NQM)$

22、$O(n)$

23 (a) $F(n)=F(n-1)+2n-5$ $F(3)=1$.

(b) $\Theta(n)$

24、当 $n\to\infty$. $\frac{n^a}{n^b}=n^{a-b}$ 由 $a-b<0$. $\frac{n^a}{n^b}\to 0$.

25、当 $n\to\infty$, $\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$ 由 $\frac{a}{b}<1$. $\frac{a^n}{b^n}\to 0$.

26、当 $n\to\infty$，$\frac{rf(n)}{f(n)}=r$，故 $O(rf)=O(f)$.

27、因 $f=O(g)$，$\exists C, n_1$，s.t $|f(n)|\le C|g(n)|$ 对 $n\ge n_1$ 成立。
又 $h\ne 0$，设 $|h(n)|\ge c>0$ 对 $n>n_2$ 成立，取 $n_0=\max\{n_1,n_2\}$.
则 $|f(n)h(n)|\le c\,|f(n)g(n)|$ 对 $n\ge n_0$ 成立.
即 $fh=O(gh)$.

28、由 $O(f)=O(g)=O(h)$，$\exists C_1, n_1$，$\forall n\ge n_1$，$|f(n)|\le C_1|h(n)|$
同时 $\exists C_2, n_2$，$\forall n\ge n_2$ $|g(n)|\le C_2|h(n)|$
取 $n_0=\max\{n_1,n_2\}$.
$\forall n\ge n_0$，$|f(n)+g(n)|\le|f(n)|+|g(n)|\le(C_1+C_2)|h(n)|$.
故 $f+g$ 是 $O(h)$ 的.

29、由 $O(f)=O(g)$，$\exists C_1, C_2, n_0$，$\forall n\ge n_0$，$C_1|g(n)|\le|f(n)|\le C_2|g(n)|$.
由 $C\ne 0$，$|cf(n)|=|c||f(n)|$，故 $\forall n\ge n_0$，
$\frac{C_1}{|C|}|cf(n)|\le|g(n)|\le\frac{C_2}{|C|}|cf(n)|$，故 $O(cf)=O(g)$.

5.4

12 (a) $(1,4,5)\circ(2,3)\circ(6,8)$
(b) $(1,2,3,4)\circ(5,7,8,6)$

13 (a) $(1,6,3,7,2,5,4,8)$
(b) $(1,2,3)\circ(5,6,7,8)$

14 (a) (a,g,e,c,b,d)
(b) (a,d,b,e,g,c)

15 (a) $(2,1)\circ(2,4)\circ(2,5)\circ(2,8)\circ(2,6)$
(b) $(3,1)\circ(3,6)\circ(4,8)\circ(4,2)\circ(4,5)$

16. UYEDEARHRW

20(a) $(1,4,6,8,3)=(1,4)\circ(1,6)\circ(1,8)\circ(1,3)$

(b) $(1,7,6,8,5)\circ(2,3,4)=(1,7)\circ(1,6)\circ(1,8)\circ(1,5)\circ(2,3)\circ(2,4)$

26 ①设 $a,b\in A$. $(p\circ p)(a)=(p\circ p)(b)$.

故 $p(p(a))=p(p(b))$. 由 p 是单射. $p(a)=p(b)$. $a=b$.

故 $p\circ p$ 是单射.

② $\forall c\in A$. 由 p 是满射. $\exists b\in A$. s.t. $p(b)=c$

对于 b, $\exists a\in A$. s.t. $p(a)=b$.

故 $(p\circ p)(a)=p(p(a))=p(b)=c$.

即 $\forall c\in A$. $\exists a\in A$. s.t. $(p\circ p)(a)=c$.

故 $p\circ p$ 是满射.

综上. $p^2=p\circ p$ 是 A 的一个置换

28(a) $p=(1,4)\circ(2,3,5)$

(b) $p^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&5&2&1&3&6\end{pmatrix}$

(c) $p^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&5&2&4&3&6\end{pmatrix}$

(d) $k=3$.

29(a) 当 $n=1$ 时. $p^1=p$. 成立

假设 p^k 是 A 的一个置换. $p^{k+1}=p\circ p^k$ 仍是 A 的置换.

故 $\forall n\in\mathbb{Z}^+$. p^n 均是 A 的一个置换.

(b) 由 p^n 均为 A 上的置换. 而 A 上的置换共有 $|A|!$ 种.

根据鸽巢原理. 一定存在 $i.j$. s.t. $p^i=p^j$.

令 $m=i-j$. 得 $p^m=I_A$.

30. 自反性：$\forall a\in A$，$p^0(a)=a$　故 aRa.

对称性：若 aRb，则 $\exists n\in\mathbb{Z}$，s.t. $p^n(a)=b$，则有 $p^{-n}(b)=a$，bRa.

传递性：若 aRb，bRc，则 $\exists m,n\in\mathbb{Z}$，s.t. $p^m(a)=b$，$p^n(b)=c$.

故 $p^{m+n}(a)=c$．故 aRc．

等价类为 a 通过 p 的所有整数次幂得到的集合.

37 (a) $(1,3,2)$　$(2,3,1)$　2个

(b) $C_4^2=6$个

38. $C_5^3=10$个

39. A的增-减置换数为 $C_n^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}$．后者也是 $C_n^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}$．相等.