

# Estimación de modelos mediante respuesta en frecuencia

Javier Dario Sanjuan De Caro

Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia,  
jdecaro@uninorte.edu.co

## 1 Introducción

El método de respuesta en frecuencia analiza la dinámica de un sistema a partir de su respuesta a entradas senoidales. Ante una señal senoidal, la salida también es senoidal, con la misma frecuencia pero distinta amplitud y fase. Esta metodología permite obtener la función de transferencia por una vía alternativa y, además, aporta información adicional sobre la estabilidad del sistema.

## 2 Definición de respuesta en frecuencia

Consideremos la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (1)$$

para una entrada sinusoidal  $x(t) = X_0 \sin \omega t$ , se tiene:

$$X(s) = \frac{X_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2)$$

Luego:

$$Y(s) = \frac{X_0 \omega}{s^2 + \omega^2} G(s) \quad (3)$$

Si expandimos con fracciones parciales tenemos:

$$Y(s) = \frac{A}{s + i\omega} + \frac{B}{s - i\omega} + [\text{Términos de polos de } G(s)] \quad (4)$$

Para obtener A usamos:

$$A = \lim_{s \rightarrow -i\omega} \frac{(s + i\omega)X_0 \omega G(s)}{s^2 + \omega^2} = \frac{G(-i\omega)X_0 \omega}{-2i\omega} \quad (5)$$

note que  $G(i\omega)$  es un número complejo, luego  $A$  se puede representar de la siguiente forma:

$$A = \frac{X_0 \|G(i\omega)\| e^{-i\theta}}{-2i} \quad (6)$$

Analogamente:

$$B = \lim_{s \rightarrow i\omega} \frac{(s - i\omega)X_0 \omega G(s)}{s^2 + \omega^2} = \frac{X_0 \|G(i\omega)\| e^{i\theta}}{2i} \quad (7)$$

Substituyendo en la ecuación 4:

$$Y(s) = \frac{X_0 \|G(i\omega)\|}{2i} \left[ \frac{-e^{-i\theta}}{s + i\omega} + \frac{e^{i\theta}}{s - i\omega} \right] + [\text{Términos de polos de } G(s)] \quad (8)$$

Invirtiendo la transformada de laplace se tiene:

$$Y(t) = \frac{X_0 \|G(i\omega)\|}{2i} [-e^{-i\theta} e^{-i\omega t} + e^{i\theta} e^{i\omega t}] + [\text{Términos transitorios de } G(s)] \quad (9)$$

Cuando  $t \rightarrow \infty$  los términos transitorios de  $G(s)$  desaparecen, luego:

$$Y(t) = X_0 \|G(i\omega)\| \frac{e^{i(\omega t + \theta)} - e^{i(\omega t - \theta)}}{2i} \quad (10)$$

o en otra forma:

$$Y(t) = X_0 \|G(i\omega)\| \sin(\omega t + \theta) \quad (11)$$

Note que si  $X_0$  es la amplitud de la entrada del sistema, se tiene que el radio de amplitud (AR) está dado por:

$$AR = \frac{Y_0}{X_0} = \frac{X_0 \|G(i\omega)\|}{X_0} = \|G(i\omega)\| \quad (12)$$

y el ángulo de fase está definido como:

$$\theta = \angle G(i\omega) \quad (13)$$

Lo cuál prueba que la magnitud y el ángulo de fase depende solamente de la frecuencia de la entrada ( $\omega$ )

### 3 Diagrama de Bode

El diagrama de Bode es una representación gráfica que permite visualizar la respuesta de un sistema frente a señales senoidales de diferente frecuencia. Se compone de dos gráficos superpuestos que, en conjunto, caracterizan la respuesta en frecuencia del sistema:

1. El gráfico de **magnitud**, que representa  $|G(j\omega)|$  en decibelios (dB) frente a la frecuencia angular  $\omega$ , utilizando una escala logarítmica.
2. El gráfico de **fase**, que muestra el ángulo  $\angle G(j\omega)$ , expresado en grados, también como función logarítmica de la frecuencia.

#### 3.1 Diagrama de Bode de un intercambiador de calor

Consideremos el intercambiador de calor presentado en la figura 1. Para determinar la respuesta en frecuencia del sistema utilizaremos un generador de señal, y mediremos la frecuencia de la salida, el arreglo se presenta en la figura 2. En este caso, el generador de señal variará la frecuencia de la señal de entrada de la válvula, lo que variará el flujo de esta. Por otra parte, el recolector de señal, estará haciendo mediciones de la salida del sensor. La figura 3 muestra la comparación entre la señal generada por el generador de señal y la obtenida del recolector de señales. La figura 3 a su vez también presenta la diferencia entre las magnitudes, así como también el desfase entre las curvas. Para generar el diagrama de bode se obtiene la magnitud como:

$$M = 20 \log_{10} \left( \frac{y_0}{x_0} \right) \quad (14)$$

Supongamos que el comportamiento del proceso es el descrito en el diagrama de bloques de la figura 4. De este diagrama de bloques obtenemos la función de transferencia:

$$\frac{C(s)}{M(s)} = \frac{8.88 \times 10^{-4}}{s^3 + 0.466s^2 + 0.0477s + 1.11 \times 10^{-3}} \quad (15)$$

De esta forma, el diagrama de Bode de esta planta se presenta en la figura 5. La figura muestra la variación del ángulo de fase y de la magnitud para diferentes frecuencias. Note que, a medida que la frecuencia sube, también decae la magnitud de la planta, mientras que el desfase se incrementa.

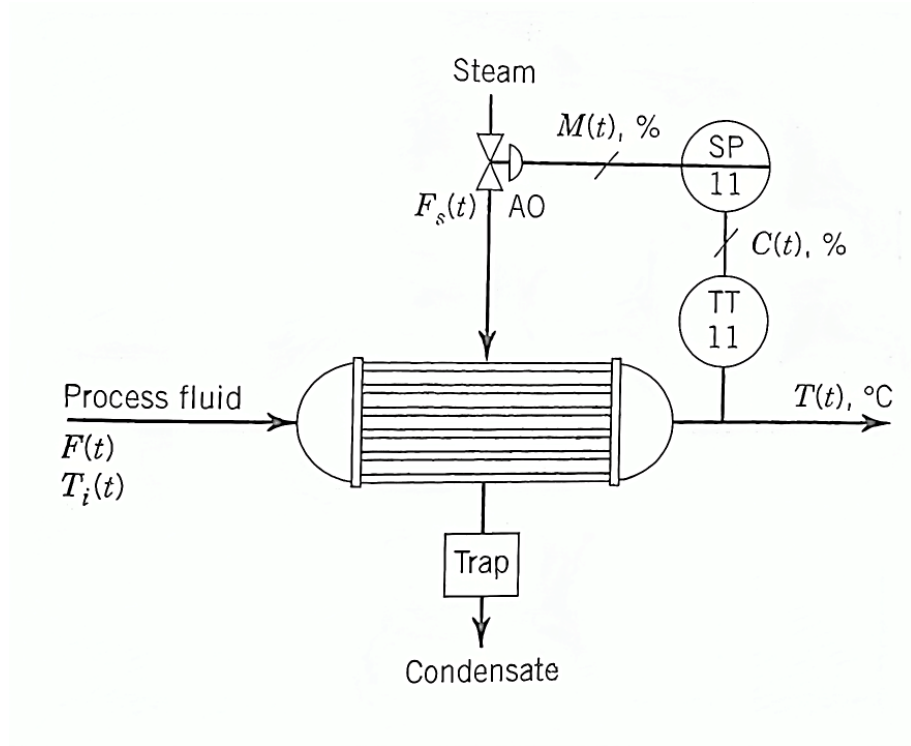


Fig. 1. Intercambiador de calor

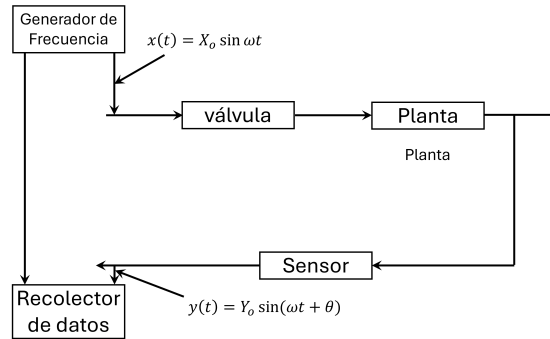


Fig. 2. Generador de frecuencia utilizado para variar el flujo de de la válvula y recolector de datos para medir las señales del sensor de temperatura

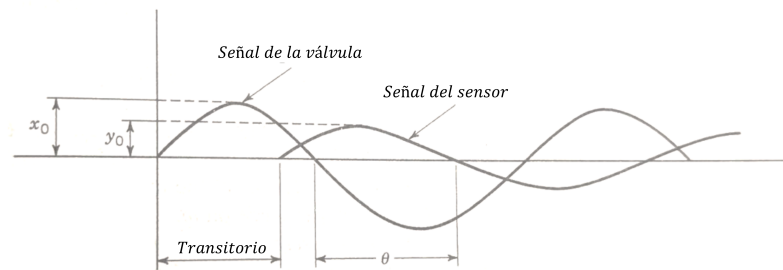


Fig. 3. Comparación entre la respuesta generada por el generador de señal y la medida por el recolector de datos.

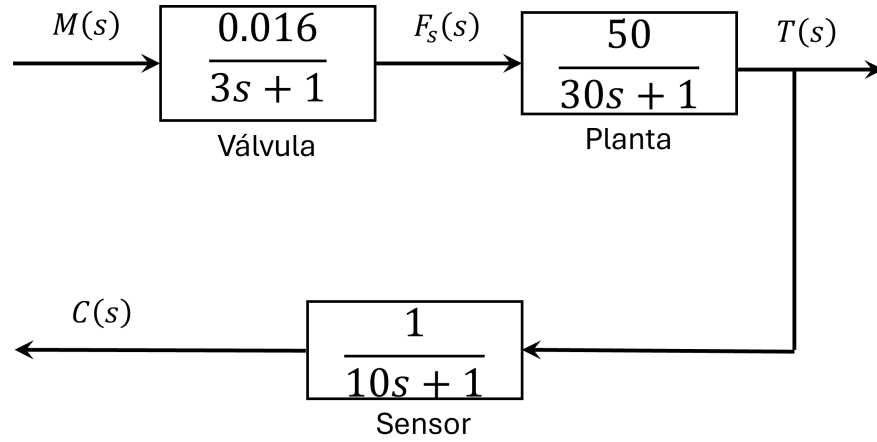


Fig. 4. Diagrama de bloques del intercambiador de calor

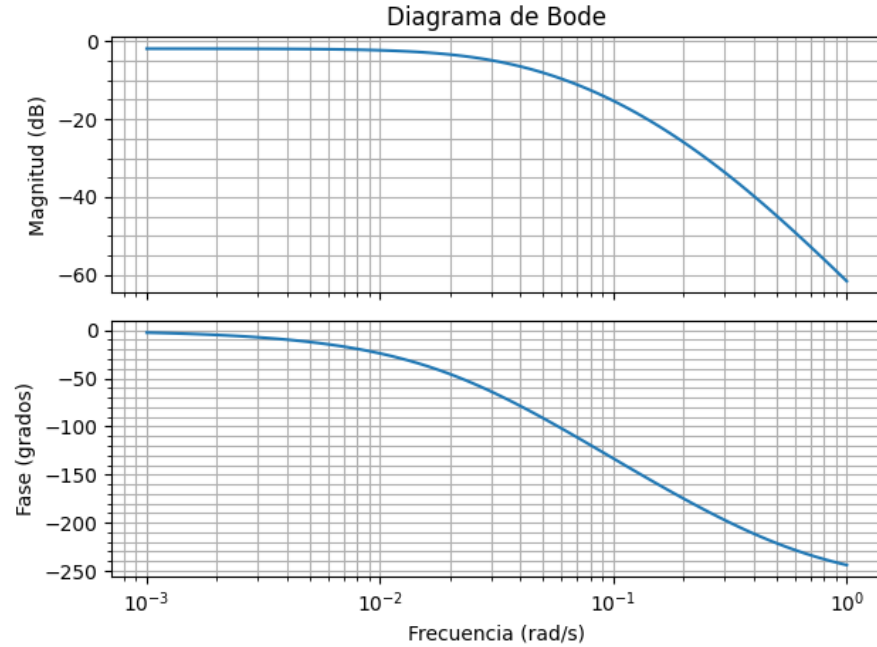


Fig. 5. Diagrama de Bode del intercambiador de calor

#### 4 Generar modelo de la respuesta en frecuencia

Una de las ventajas que tiene la respuesta en frecuencia es que nos permite aproximar un modelo bastante preciso de la planta. Existen diversas técnicas para hacerlo; en esta lectura utilizaremos un enfoque basado en optimización metaheurística. En particular, implementamos el algoritmo `AproximaciónG.py`, el cual emplea el método *Dual Annealing* de la biblioteca `SciPy` para estimar la función de transferencia que mejor se ajusta a los datos experimentales.

El modelo se define como una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_ms^m}{1 + a_1s + \cdots + a_ns^n}$$

donde  $\{b_i\}$  y  $\{a_i\}$  son los coeficientes a optimizar. El numerador representa los ceros y el denominador los polos del sistema. A partir de esta estructura, el algoritmo explora combinaciones posibles de coeficientes mediante el método *Dual Annealing*, con el fin de minimizar una función objetivo definida como:

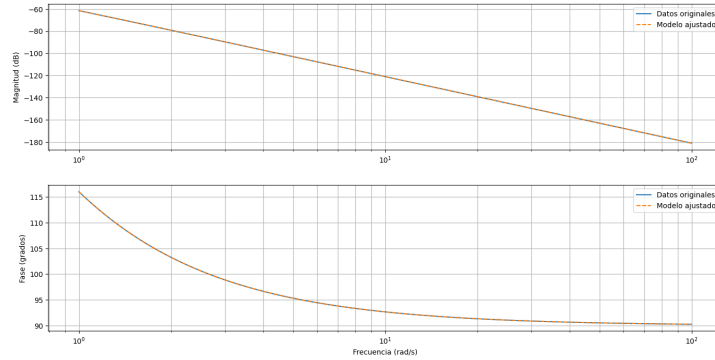
$$\text{Error} = \sum_{k=1}^N \left[ |M_{\text{exp}}(\omega_k) - M_{\text{mod}}(\omega_k)|^2 + |\phi_{\text{exp}}(\omega_k) - \phi_{\text{mod}}(\omega_k)|^2 \right]$$

donde:

- $M_{\text{exp}}(\omega_k)$ ,  $\phi_{\text{exp}}(\omega_k)$ : magnitud y fase medidas experimentalmente a la frecuencia  $\omega_k$ ,
- $M_{\text{mod}}(\omega_k)$ ,  $\phi_{\text{mod}}(\omega_k)$ : magnitud y fase del modelo estimado para la misma frecuencia.

La optimización se realiza dentro de un espacio restringido de parámetros, definido por cotas inferiores y superiores sobre los coeficientes  $a_i$  y  $b_i$ . En el caso específico de nuestro algoritmo, se permite que los coeficientes del numerador (ceros) tomen valores negativos, mientras que los del denominador (polos) se restringen a valores positivos, garantizando estabilidad potencial del modelo.

En una de las ejecuciones del algoritmo, se obtuvo un ajuste cuya respuesta en frecuencia modelada se superpone visualmente con la experimental, como se muestra en la Figura 6. Esta gráfica demuestra la alta precisión que puede lograrse con este enfoque.



**Fig. 6.** Comparación entre la respuesta en frecuencia experimental (línea discontinua) y el modelo ajustado mediante Dual Annealing (línea continua).

Sin embargo, al tratarse de un método metaheurístico, la calidad del resultado puede depender de factores como la aleatoriedad inicial y los límites definidos para los parámetros. En ocasiones, el algoritmo puede no converger a una solución adecuada, especialmente si el número de iteraciones o el espacio de búsqueda es limitado. Por ello, es recomendable ejecutar el algoritmo varias veces o ajustar cuidadosamente los parámetros de búsqueda para mejorar la confiabilidad del modelo resultante.

## References

1. NISE, Norman S. *Control systems engineering*. John Wiley & Sons, 2020.
2. FRANKLIN, Gene F., et al. *Feedback control of dynamic systems*. Prentice Hall, 2002.