El Sistema

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta S}{N}(E + A + \eta I)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta S}{N}(E + A + \eta I) - \sigma E$$

$$\frac{dA}{dt} = \alpha\sigma E - \gamma_A A$$

$$\frac{dI}{dt} = (1-\alpha)\sigma E - \gamma_I I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma(A + I)$$ ← No cuenta porque no está acoplada

---

Escribiremos el sistema en términos de cantidades acumuladas para poder relacionarlo con los datos.

1) La ec. $\frac{dI}{dt} = (1-\alpha)\sigma E - \gamma I$

es equivalente al par

$$\frac{dC_I}{dt} = (1-\alpha)\sigma E$$

$$\frac{dR_I}{dt} = \gamma_I I$$

ya que

$$I = C_I - R_I$$

o bien

$$\frac{dC_I}{dt} = (1-\alpha)\sigma E$$

$$\frac{dR_I}{dt} = \gamma_I(C_I - R_I)$$

2) La ecuacion

$$\frac{dA}{dt} = \alpha\sigma E - \gamma_A A$$

es equivalente al par

$$\frac{dC_A}{dt} = \alpha\sigma E$$

$$\frac{dR_A}{dt} = \gamma_A A$$

ya que

$$A = C_A - R_A$$

o bien

$$\frac{dC_A}{dt} = \alpha\sigma E$$

$$\frac{dR_A}{dt} = \gamma_A[C_A - R_A]$$

Finalmente, la ec

3) $$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta}{N} S(E + A + \eta I) - \sigma E$$

es equivalente a

$$\frac{dC_E}{dt} = \frac{\beta}{N} S(E + A + \eta I)$$

$$\frac{dR_E}{dt} = \sigma E$$

con

$$E = C_E - R_E$$

4) Adicional, vemos que

$$\frac{dC_E}{dt} = -\frac{dS}{dt}$$

$$\Rightarrow C_E = N - S \Rightarrow S = N - C_E$$

Finalmente, tenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{dC_E}{dt} = \dfrac{\beta}{N}(N - C_E)\left[(C_E - R_E) + (C_A - R_A) + \eta(C_I - R_I)\right] \\ \dfrac{dR_E}{dt} = \sigma(C_E - R_E) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dC_A}{dt} = \alpha\sigma(C_E - R_E) \\ \dfrac{dR_A}{dt} = \gamma_A(C_A - R_A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dC_I}{dt} = (1-\alpha)\sigma(C_E - R_E) \\ \dfrac{dR_I}{dt} = \gamma_I(C_I - R_I) \end{cases}$$

Notamos que las ec. estan relacionadas en pares.

Por ejemplo:

$$\frac{dC_I}{dt} = (1-\alpha)\sigma(C_E - R_E)$$

$$\frac{dR_I}{dt} = \gamma_I(C_I - R_I)$$

Esta relación nos permite expresar la solución de R_I en términos de la solución de C_I.

Veamos:

$$\underbrace{\frac{dR_I}{dt} + \gamma_I R_I = \gamma_I C_I}$$

Ec. lineal no homogénea para R_I cuya solución es

$$R_I(t) = e^{-\gamma_I t} \int_0^t e^{\gamma_I \tau} \gamma_I C_I(\tau)\, d\tau$$

Podemos integrar por partes: $\left(\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du\right)$

$$R_I(t) = \gamma_I e^{-\gamma_I t} \underbrace{\int_0^t e^{\gamma_I \tau} C_I(\tau)\,d\tau}_{C_I \frac{e^{\gamma_I t}}{\gamma_I} - \int_0^t \frac{e^{\gamma_I \tau}}{\gamma_I} \frac{dC_I}{dt}\,d\tau}$$

$$R_I(t) = \gamma_I e^{-\gamma_I t} \left\{ \frac{e^{\gamma_I t}}{\gamma_I} C_I - \frac{1}{\gamma_I} \underbrace{\int_0^t e^{\gamma_I \tau} \frac{dC_I}{dt}\,d\tau}_{\text{Integrando por partes}} \right\}$$

$$\left.\frac{dC_I}{dt} \frac{e^{\gamma_I \tau}}{\gamma_I}\right|_0^t - \int_0^t \frac{e^{\gamma_I \tau}}{\gamma_I} \frac{d^2 C_I}{dt^2}\,d\tau$$

$$R_I(t) = C_I(t) \underbrace{- \frac{1}{\gamma_I} \frac{dC_I}{dt}}_{\text{Se ha asumido}} + e^{-\gamma_I t} \underbrace{\int_0^t \frac{e^{\gamma_I \tau}}{\gamma_I} \frac{d^2 C_I}{dt^2}\,d\tau}_{\text{Integrando por partes}}$$

$$\left.\frac{dC_I}{dt}\right|_{t=0} = 0 \qquad \frac{1}{\gamma_I}\left[\left.\frac{e^{\gamma_I \tau}}{\gamma_I} \frac{d^2 C_I}{dt^2}\right|_0^t - \int_0^t \frac{e^{\gamma_I \tau}}{\gamma_I} \frac{d^3 C_I}{dt^3}\,d\tau \right]$$

$$R_I(t) = C_I(t) - \frac{1}{\gamma_I} \frac{dC_I}{dt}(t) + \frac{1}{(\gamma_I)^2} \frac{d^2 C_I}{dt^2} - \frac{e^{-\gamma_I t}}{\gamma_I^2} \int_0^t e^{\gamma_I \tau} \frac{d^3 C_I}{dt^3}\,d\tau$$

La serie se puede extender indefinidamente, y vemos de es una expansión en serie de Taylor

$$\boxed{R_I(t) = C_I\left(t - \frac{1}{\gamma_I}\right)}$$

$R_I(t)$ es igual a C_I pero desplazada $-\frac{1}{\gamma_I}$ tiempo.

De manera similar

$$R_A(t) = C_A\left(t - \frac{1}{\gamma_A}\right)$$

y

$$R_E(t) = C_E\left(t - \frac{1}{\sigma}\right)$$

Los datos que se tienen son para la variable

$$C_I^{(obs)} \approx C_I$$

~~Como no se tiene información~~

Esto quiere decir, que si se fija el valor de γ_I se puede deducir la variable

$$I^{(obs)}(t) = C_I^{(obs)}(t) - \underbrace{C_I^{(obs)}\left(t - \frac{1}{\gamma_I}\right)}_{\sim R_E}$$

De manera análoga, si se asume constante y se fija el valor de γ_A

$$A^{(obs)}(t) = C_A^{obs}(t) - C_A^{obs}\left(t - \frac{1}{\gamma_A}\right)$$

y finalmente

$$E^{(obs)}(t) = C_E^{obs}(t) - C_E^{obs}\left(t - \frac{1}{\sigma}\right)$$

¿Pero de donde sacamos

$C_A^{obs}(t)$ y C_E^{obs}?

Notamos que

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{dC_I}{dt}$$

por lo que si α es constante

$$C_A = \frac{\alpha}{1-\alpha} C_I + kte$$

o porque ambos son cero en $t=0$

y por lo tanto

$$C_A^{(obs)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} C_I^{(obs)}$$

De manera similar notamos que

$$\frac{dR_E}{dt} = \frac{1}{(1-\alpha)}\frac{dC_I}{dt}$$

(si $\alpha = cte$)

$$\Rightarrow R_E^{obs} = \frac{1}{1-\alpha} C_I^{(obs)} \quad \text{si } C_I = R_E = 0$$

para $t=0$

Pero además sabíamos que

$R_E(t) = C_E\left(t - \frac{1}{\sigma}\right)$ ∴

$$\boxed{C_E\left(t - \frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{1-\alpha} C_I(t)}$$

- Conclusión. Con los datos que tenemos solo podemos ajustar a muchos de forma "segura"

$\beta(t)$ y $\eta(t)$.

1) Por hacer: Graficar I^{obs} y I predicho con el ajuste

A^{obs} y A

E^{obs} y E

Nuevo esquema mas cencillo

2) Para predecir se puede ajustar β (η?) en un periodo de tiempo y tomar como condición inicial para el periodo de ajuste

$$S(t_i) = N - C_E^{obs}(t_i)$$

$$E(t_i) = C_E^{obs}(t_i) - R_E^{obs}(t_i)$$

$$\vdots$$

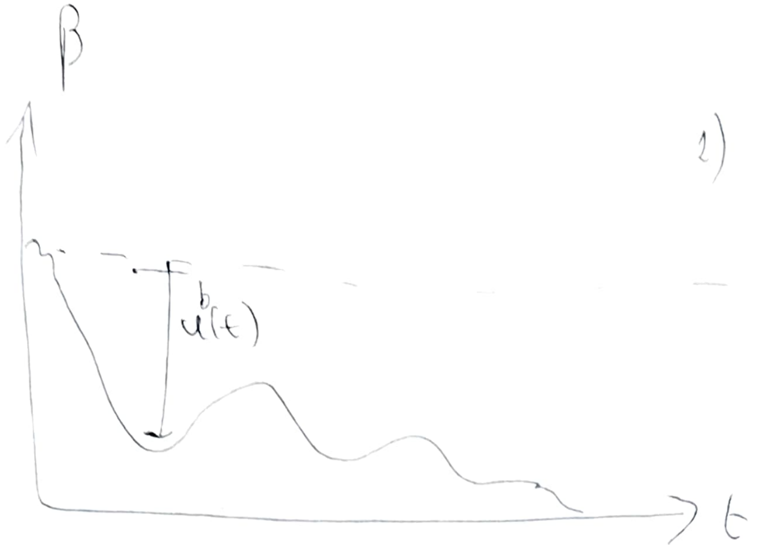
o de forma equivalente a justar las ecuaciones para

$C_E, R_E, C_A, R_A, C_I, R_I$ empleando

$C_E^{obs}, R_E^{obs}, C_A^{obs}, R_A^{obs}, C_I^{obs}, R_I^{obs}$.

Esto permitirá tener una predicción aceptable.

—



1) Definimos el control base que se aplicó como $u^b(t)$

2) Definimos costo en términos de muertes y infectados (sólamente)

3) Definimos otro costo "económico" en términos de u^b

- Simulamos una "realidad" fluctuante

$(\beta_0 + f(t;\theta)) \leftarrow$ función periódica? ~~sigmoide~~?

Calculamos nuevamente $u^b(t;\theta,w)$

- Simulamos control óptimo "multiobjetivo" basado en el ajuste de las primeras semanas
- Simulamos MPC ~~con ajuste~~

$$\boxed{\min_{\theta_s} J(u(\theta_s)) \quad \text{subjet to } C(u(\theta_s)) \leq C(u^b)}$$