Giải Thích Cơ Sở Toán Học Của Mô Hình Black-Scholes Trong Định Giá Quyền Chọn Tài Chính

Ung Hoàng Long
Khoa Khoa Học Và Kỹ Thuật Thông Tin
Trường Đại học Công nghệ thông tin Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
23520892@gm.uit.edu.vn

Lương Đắc Nguyên
Khoa Khoa Học Và Kỹ Thuật Thông Tin
Trường Đại học Công nghệ thông tin Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
23521041@gm.uit.edu.vn

Bùi Trương Thái Sơn
Khoa Khoa Học Và Kỹ Thuật Thông Tin
Trường Đại học Công nghệ thông tin Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
23521350@gm.uit.edu.vn

Nguyễn Hoàng Long
Khoa Khoa Học Và Kỹ Thuật Thông Tin
Trường Đại học Công nghệ thông tin Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
23520882@gm.uit.edu.vn

Abstract—Kể từ khi sàn giao dịch chứng khoán đầu tiên trên thế giới Amsterdam được thành lập cho tới một một thị trường hiện đại, năng động như ngày nay, các chủ thể tham gia thị trường luôn mong muốn tìm kiếm cho mình lợi nhuận thông qua việc mua bán cổ phiếu, nhưng có lẽ bởi những rủi ro từ hình thức truyền thống này vẫn khiến một số nhà đầu tư phân vân. Và với động lực đó rất nhiều các sản phẩm tài chính kiểu mới ra đời như các hợp đồng quyền chọn, phái sinh, hoán đổi nợ - cổ phiếu... Mặc dù bản chất của chúng vẫn dựa trên cơ chế giao dịch mua bán nhưng những hình thức này mang tới một sự đảm bảo cho các chủ thể sở hữu chúng, do đó chúng nhanh chóng được ưa chuộng bởi bộ phận nhà đầu tư an toàn. Và trong bài báo cáo này, chúng tôi xin được trình bày mô hình định giá quyền chọn nổi tiếng Black-Scholes, cũng như là các lý thuyết toán học đứng đằng sau giải thích và biện luận cho mô hình như chuyển động Brownian, quá trình winner, bổ đề Ito, phương trình vi phân ngẫu nhiên, ...

Key words—BS - Black-Scholes, ODE - Ordinary Differential Equation, SDE - Stochastic Differential Equation, Ito's lemma - bổ đề Ito, GBM - Geometric Brownian Motion.

Introduction

Công thức Black-Scholes (BS) để định giá tài chính định lượng nói chung và quyền chọn nói riêng rất nổi tiếng. Các thành phần chính cấu tạo nên công thức BS bao gồm chuyển động Brownian, bổ đề Ito và phương trình vi phân ngẫu nhiên. Cụ thể, chuyển động Brownian (tiêu chuẩn) là quá trình ngẫu nhiên liên tục. Trong đó quá trình dao động giá của tài sản là một loại quá trình ngẫu nhiên, dựa trên hàm số từ quá trình ngẫu nhiên này mà ta định giá được các công cụ phái sinh. Bổ đề Ito cung cấp cho chúng ta một khuôn mẫu quan trọng để tính vi phân của hàm số trên (điều mà giải tích cổ điển trước đó không làm được do tính không khả vi của chuyển động Brownian thể hiện cho sự dao động ngẫu nhiên của giá cổ phiếu), từ đó rút ra được phương trình vi phân ngẫu nhiên. Bằng cách giải phương trình này, chúng ta thu được công thức Black-Scholes, một công thức biểu diễn giá của quyền chọn như một hàm của các yếu tố cơ bản.

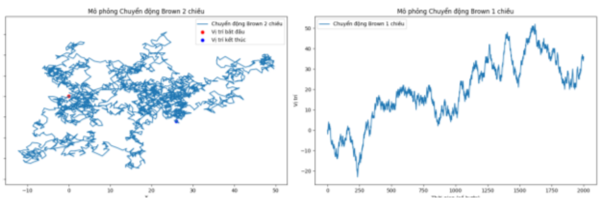
I. BROWNIAN MOTION

A. *Sự phát triển và định nghĩa*

Năm 1827, khi thả các hạt phấn hoa vào trong nước, nhà thực vật học người Scotland Robert Brownian đã nhận thấy chuyển động ngẫu nhiên của các chúng thông qua kính hiển vi, nhưng không thể xác định được cơ chế gây ra chuyển động này. Albert Einstein vào năm 1905 đã giải thích chi tiết chính xác chuyển động mà Brownian quan sát được là kết quả của việc phấn hoa được di chuyển bởi từng phân tử nước. Sự phát triển của chuyển động Brownian trong vật lý ngày càng được cải thiện.[1]

Ngược lại, sự phát triển của nó trong toán chậm hơn. Định nghĩa toán của chuyển động Brownian chưa phát triển cho đến tận năm 1923 bởi Norbert Winner. Do đó, chuyển động Brownian còn được gọi là quá trình Wiener.[1]

Chuyển động Brownian là một quá trình ngẫu nhiên theo thời gian liên tục hoặc một quá trình ngẫu nhiên theo không-thời gian liên tục. Khác với các quá trình rời rạc, nơi giá trị chỉ được xác định tại các thời điểm cụ thể (ví dụ: giá cổ phiếu được ghi nhận hàng ngày), chuyển động Brownian có thể thay đổi tại mọi thời điểm.



Hình bên trái mô tả chuyển động Brownian hai chiều trong không gian, trong khi bên phải mô tả chuyển động một chiều theo thời gian (rất giống với dao động của giá cổ phiếu)

Chuyển động Brownian tuân theo các điều kiện sau[2]:

1. Giá trị khởi đầu luôn là 0: $B(0) = 0$
2. Ổn định: với mọi $0 \le s < t$, phân phối của $B(t) - B(s)$ là phân phối chuẩn với giá trị trung bình là 0 và phương sai là $t - s$
3. Gia số độc lập: các biến ngẫu nhiên $B(t_i) - B(s_i)$ độc lập lẫn nhau nếu các khoảng $[s_i, t_i]$ không chồng chéo.

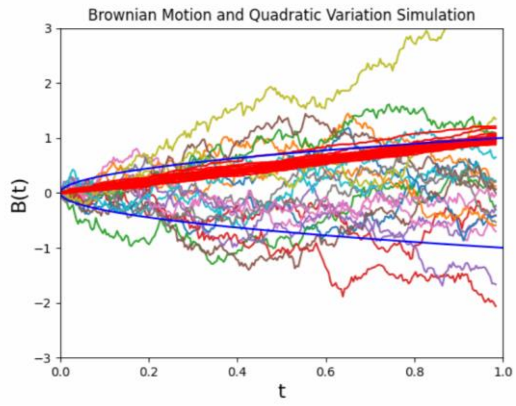
➔ Chúng ta gọi quá trình $B(t)$ như vậy là chuyển động Brownian tiêu chuẩn.

B. *Tính chất của chuyển động Brownian*

Chuyển động Brownian có các tính chất sau[3]:

1. Đường chuyển động đi qua trục thời gian t vô số lần
2. Giá trị $B(t)$ tại bất kì thời gian t nào cũng không lệch quá xa với đường cong $t = y^2$
3. Không khả vi (quan trọng)

Tính chất cuối cùng lại được đánh giá là quan trọng nhất vì chuyển động Brownian là dù liên tục nhưng nó không khả vi ở mọi. Điều này rất trực quan. Chúng ta hãy xem các đường mô phỏng chuyển động Brownian. Mỗi đường đều dao động lên xuống, thể hiện tính ngẫu nhiên của nó. Rõ ràng là quỹ đạo của chuyển động Brownian hoàn toàn khác với bất kỳ quỹ đạo liên tục và "trơn tru" nào mà chúng ta từng gặp, ở đây nó có sự gấp khúc hay những sự biến động liên tục ngay cả trong những khoảng thời gian rất nhỏ, khiến ta khó có thể



Hình B.1 mô tả chuyển động Brownian và biến thiên bậc hai đánh giá được xu hướng đi lên hoặc đi xuống của đồ thị. Tính chất này đóng vai trò mấu chốt trong việc chúng ta không thể sử dụng giải tích cổ điển để xử lí đến bài toán liên quan chuyển động Brownian do yêu cầu tính khả vi. Vì thế ta cần một giải pháp khác, đó chính là bổ đề Ito, thứ sẽ được chúng tôi bàn luận sâu hơn ở những phần sau.

C. *Biến thiên bậc hai*

Quá trình biến thiên bậc hai cũng được xem là một trong những điểm làm chuyển động Brownian khác biệt so với các hàm số thông thường khác, từ đó rút ra được thêm một biểu thức quan trọng giúp xây dựng bổ đề Ito. Đối với các hàm f(t) quen thuộc, khả vi và liên tục,cùng với định lý giá trị trung bình, ta thấy biến thiên bậc hai của chúng sẽ hội tụ về 0,tuy nhiên, điều này không đúng với chuyển động Brownian do có tính biến động cao ngay cả trong Δt rất nhỏ (liên tục nhưng không khả vi, minh họa đường thẳng màu đỏ ở hình B.1)[3]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}}-B_t)^2 = T$$

Biến thiên bậc hai có thể viết ở dạng vô cùng nhỏ (vi phân)

$$(dB)^2 = dt *$$

*Sẽ được sử dụng cho việc xây dựng bổ đề Ito

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN

Trước khi định nghĩa phương trình vi phân ngẫu nhiên (SDE), một khái niệm không tường minh, hãy chiêm nghiệm lại phương trình vi phân cổ điển mà chúng ta hay sử dụng (ODE)

A. *Phương trình vi phân cổ điển ODE*

ODE mô tả sự thay đổi của một biến số phụ thuộc vào một biến độc lập (thường là thời gian) dựa trên một quy luật xác định.

Tuy nhiên khi áp dụng vào các bài toán thực tế, phương trình vi phân cổ điển lại không đủ cơ sở để mô hình hóa và tính toán nghiệm trong bối cảnh luôn có yếu tố ngẫu nhiên tác động.

Để giải quyết vấn đề này, Kiyoshi Itô đã phát triển phương trình vi phân ngẫu nhiên (SDE), tích hợp thêm yếu tố ngẫu nhiên vào mô hình, giúp mô phỏng và phân tích tốt hơn các hệ thống thực tế có tính không chắc chắn cao.

B. *Phương trình vi phân ngẫu nhiên SDE*

Phương trình vi phân ngẫu nhiên kết hợp việc mô tả sự thay đổi của một hệ thống theo thời gian giống như ODE, đồng thời tích hợp các yếu tố ngẫu nhiên vào mô hình, giúp mô phỏng những biến động và nhiễu động khó dự đoán.

Định nghĩa: Phương trình vi phân ngẫu nhiên có dạng tổng quát là:

$$dX_t = \mathrm{a}(X_t,t)\,dt + \mathrm{b}(X_t,t)\,dB_t$$

Trong đó:

- X_t: Biến ngẫu nhiên mô tả sự thay đổi của hệ thống theo thời gian t.
- $a(X_t,t)\,dt$: Thành phần drift (trôi dạt), mô tả xu hướng chính của quá trình.
- $b(X_t,t)\,dB_t$: Thành phần diffusion (khuếch tán), biểu diễn yếu tố ngẫu nhiên, trong đó:
    - B_t: Quá trình chuyển động Brownian.
    - $a(X_t,t)$: Hệ số độ lớn của khuếch tán
    - $b(X_t,t)$: Hệ số trôi dạt

Ta thấy SDE khác với ODE ở chỗ có thêm một đại lượng B_t trong phần diffusion để mô tả yếu tố ngẫu nhiên. Lưu ý các đại lượng còn lại (nếu có) như $a(X_t,t)$ hoặc $b(X_t,t)$ có thể là hằng số, hàm tuyến tính, hàm phi tuyến như hàm mũ, hàm logarit,... Thậm chí chính chúng cũng có thể là 1 hàm ngẫu nhiên.

Chính vì sự phức tạp của các thành phần cấu thành SDE nên chỉ trong một số trường hợp SDE đơn giản, ta mới có thể giải ra được nghiệm tường minh - nghiệm có thể biểu diễn chính xác bằng công thức hoặc giải tích mà không cần phương pháp số (ch. 5, sec. 5.3) [1]

C. *Các trường hợp có nghiệm tường minh*

Trước khi đi đến các trường hợp SDE cụ thể có nghiệm tường minh, hãy tìm hiểu các tính chất để phân loại chúng[1].

SDE có nghiệm tường minh khi:

- Hệ số không đổi hoặc tuyến tính (ví dụ: chuyển động Brown hình học - GBM).
- Không có thành phần không tuyến tính phức tạp.
- Phương trình có thể giải được bằng phương pháp biến đổi phù hợp.

SDE không có nghiệm tường minh khi:

- Hệ số không tuyến tính hoặc phức tạp.
- Quá trình ngẫu nhiên nhiều chiều hoặc nhiều nguồn ngẫu nhiên.
- Sự phụ thuộc mạnh vào các biến khác làm cho việc giải trực tiếp trở nên khó khăn.

Khi nghiên cứu về công thức BS chúng tôi chỉ xét tới trường hợp SDE tiêu biểu có nghiệm tường minh, cụ thể là phương trình của chuyển động Brow chuẩn và Brow hình học GBM. Vì để tìm nghiệm cho SDE tích phân cổ điển vô hiệu như trình bày ở trên, nên bổ đề Ito sẽ là cơ sở toán học thay thế—thứ sẽ được giải thích rõ hơn ở chương sau.

1. Phương trình chuyển động Brown chuẩn—là dạng cơ bản nhất của SDE

$$dX_t = \sigma dW_t$$

với $X_0 = x_0$, trong đó:

- W_t: là chuyển động Brown,
- σ: là hằng số (độ biến động)

Nghiệm của phương trình này là:

$$X_t = X_0 + \sigma W_t$$

Mô hình này là một quá trình ngẫu nhiên thuần túy, không có xu hướng hoặc "định hướng", chủ yếu chịu ảnh hưởng của các yếu tố ngẫu nhiên.

2. Phương trình chuyển động Brown hình học—một dạng SDE đặc trưng cho mô hình Black-Scholes[4]

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dB(t)$$

Trong đó:

- μ là tỷ lệ tăng trưởng kỳ vọng (độ trôi)
- σ là độ biến động (độ biến động)

Mặc dù hiện tại chúng ta có chuyển động Brown với độ trôi, nhưng nó vẫn không phải là quá trình ngẫu nhiên tốt nhất để mô hình hóa chuyển động giá cổ phiếu. Điều này là do X(t) hoặc B(t) có thể có giá trị âm. Tuy nhiên, giá cổ phiếu không thể âm. Nhưng lợi nhuận của cổ phiếu có thể âm hoặc dương. Do đó, chúng ta có thể sử dụng X(t) để mô hình hóa lợi nhuận cổ phiếu (xem thêm tại file Brownian-Hinh-Hoc.ipynb)

Giả sử S_t là giá cổ phiếu, ta có phương trình vi phân:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$$

Nghiệm của phương trình này là:

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

Mô hình giả định tỷ lệ tăng trưởng kỳ vọng μ (drift) xác định xu hướng dài hạn của giá tài sản, trong khi độ biến động σ mô tả sự thay đổi ngẫu nhiên của giá.

Dù rằng giá của tài sản có bị tác động bởi yếu tố ngẫu nhiên, nhưng trong thực tế, nhân tố quyết định lợi nhuận trong dài hạn lại phụ thuộc vào tỷ lệ tăng trưởng— μ. Nên so với chuyển động Brownian chuẩn, GBM được xem là một mô hình phù hợp hơn trong bối cảnh này, và vì lý do đó GBM đã được ứng dụng vào Black-Scholes, và được xem là xương sống của công thức này.

III. BỔ ĐỀ ITÔ VÀ NGHIỆM TƯỜNG MÌNH CỦA GBM.

Ở phần này chúng tôi sẽ trình bày sâu hơn về mặt toán học, cách tìm phương trình vi phân của một hàm số khả vi của một quá trình ngẫu nhiên bằng bổ đề Itô. Nói cách khác, nếu chúng ta có một quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ và muốn biết phương trình vi phân của một hàm $f(X(t),t)$, bổ đề Itô sẽ giúp ta làm điều đó. Đây là nền tảng quan trong trong việc xây dựng Black-Scholes Model mà chúng tôi sẽ đề cập ở phần sau.[5]

Ngoài ra chúng tôi cũng đề cập đến nhưng tính chất đặc biệt của nghiệm tường minh $S(t)$ đã được đề cập ở phần II.

A. *Bổ đề Itô*

Giả sử $f(X(t),t)$ là một hàm khả vi của quá trình ngẫu nhiên tổng quát X(t) và thời gian t. Trong đó SDE của X(t) là:

$$dX(t) = a(X(t),t)dt + b(X(t),t)dB(t)$$

Khai triển Taylor cho f ta có:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(\Delta X)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t}\Delta t \Delta X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \cdots$$

Hay viết cách khác:

$$df = \frac{\partial f}{\partial X}dX + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(dX)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial t}dtdX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \cdots$$

Khi $dt \to 0$ $và$ $(dB)^2 = dt$ (tính chất biến thiên bậc 2 của Brownian Motion), và kết hợp với SDE của X ta có vi phân của f:[2]

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdB(t) \text{ (bổ đề Ito)}$$

Khi so sánh các biểu thức của dX và df, chúng ta thấy rằng cả X và f đều bị ảnh hưởng bởi cùng một nguồn bất định cơ bản, dB. Nói cách khác, tính ngẫu nhiên mà các quá trình ngẫu nhiên X và f sở hữu xuất phát từ cùng một chuyển động Brown. Điều này rất quan trọng trong việc suy ra công thức BS.

B. *Nghiệm tường minh của GBM*

Như đã đề cập ở phần II, chúng tôi mô hình hóa giá của một cổ phiếu bằng cách sử dụng chuyển động Brown hình học. Giả sử S biểu thị giá của cổ phiếu, khi đó nó thỏa mãn SDE sau:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB(t)$$

μ: là tỷ lệ hoàn vốn kỳ vọng hàng năm của cổ phiếu
σ: là độ lệch chuẩn của tỷ lệ hoàn vốn đó

Trong mô hình Black-Scholes, μ và σ được giả định là các hằng số để đơn giản hoá quá trình tính toán và phân tích. Tuy nhiên trong thực tế μ và σ thường thay đổi theo thời gian và các yếu tố khác như tình hình kinh tế, chính sách.

Mục tiêu của ta là tìm ra biểu thức gần đúng hay chính xác cho giá trị của S theo thời gian, tức tìm S(t). Hay nói cách khác là giải SDE của Geometric Brownian Motion. Trước tiên hãy giả sử $f(S) = \ln(S)$, ta áp dụng Itô's Lemma để suy ra SDE của ln(S), với a = μS và b = σS:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(\sigma S)^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dB(t)$$

$$\Rightarrow df = d(\ln(S)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB(t)$$

Kết quả trên cho thấy lnS là chuyển động Brown với hệ số trôi $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ và hệ số khuếch tán σ.

Để tìm $\ln S(T)$ tại thời điểm T, ta tích phân 2 vế từ t = 0 đến t = T như sau:

$$\int_0^T d(lnS) = \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \int_0^T \sigma dB(t)$$

Với: $\int_0^T \sigma dB(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sigma\left(B(t_{i+1}) - B(t_i)\right) = \sigma B(T)$ [tích phân Itô]

$$\Rightarrow \ln S(T) = lnS(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma B(T)$$

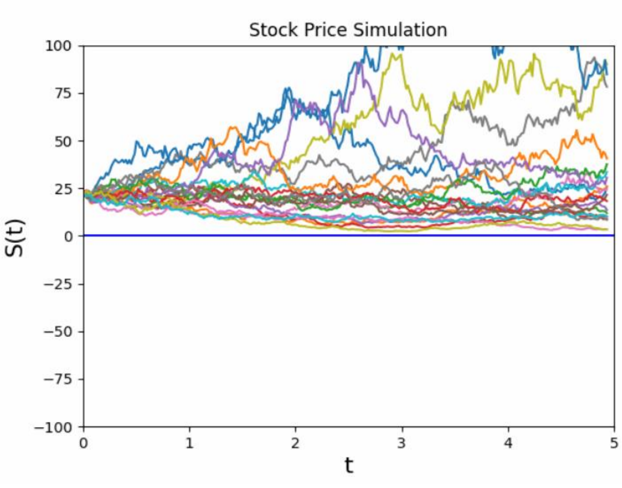
Dễ thấy: $lnS(T) \sim \phi\left[lnS(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T,\ \sigma^2 T\right]$

Logarit tự nhiên của 2 vế, ta suy ra được:

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma B(T)\right)$$

Ý nghĩa của công thức trên:

- Công thức này là một trong những kết quả quan trọng nhất khi giải phương trình Black-Scholes, mô tả sự biến động của giá cổ phiếu theo thời gian. Nó cung cấp cho chúng ta một cái nhìn sâu sắc về hành vi của giá cổ phiếu trên thị trường tài chính.
- Vì lnS(T) có phân phối chuẩn. Do đó S(T) có Log-Normal Distribution, cho thấy giá cổ phiếu tăng trưởng theo cấp số nhân chứ không phải theo cấp số cộng. Điều này có nghĩa là mức tăng của giá cổ phiếu trong tương lai không phải là một con số cố định mà phụ thuộc vào giá hiện tại và biến động của thị trường.



Với mỗi đường trong hình là giá của mỗi cổ phiếu S theo thời gian t

IV. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BLACK-SCHOLES

A. *Xây dựng phương trình vi phân Black-Scholes*

Nội dung phần này sẽ giới thiệu về phương trình vi phân Black-Scholes. Lưu ý rằng, phương trìsnh BS được nhắc tới ở đây không tồn tại yếu tố ngẫu nhiên. Ngoài ra cũng cần đảm bảo một vài yếu tố nhất định để mô hình có thể hoạt động tốt.

Với C là giá của quyền chọn mua phụ thuộc vào S (giá trị ban đầu của cổ phiếu) và t (thời gian). Áp dụng lập luận của Itô cho $C(S,t)$ với quyền chọn mua kiểu châu Âu để xây dựng phương trình vi phân Black-Scholes như sau:

$$dC = \left(\frac{\delta C}{\delta S}\mu S + \frac{\delta C}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 C}{\delta S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\delta C}{\delta S}\sigma S dB$$

Ta xét sự thay đổi của S và C trong một khoảng thời gian thay đổi Δt vô cùng nhỏ:

$$\Delta C = \left(\frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S\Delta B$$

$$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\Delta B$$

Giả sử P là giá trị của danh mục đầu tư, ta có:

$$P = S - C \Rightarrow \Delta P = \Delta S - \Delta C$$

$$\Delta P = (\mu S\Delta t + \sigma S\Delta B) - \left(\frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t - \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S\Delta B \quad (1)$$

Để khử các thành phần chứ ΔB để loại bỏ các yếu tố rủi ro (chuyển động Brown), ta có điều kiện[6]:

$$\sigma S - \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial C}{\partial S} = 1 (2)$$

Lúc này $(*)$ trở thành:

$$\Delta P = \left(\mu S - \frac{\partial C}{\partial S}\mu S - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \quad (3)$$

Ở đây, ta giả sử P là giá trị của danh mục đầu tư, được tạo ra bằng cách bán khống một quyền chọn và mua một lượng cổ phiếu bằng $\frac{\partial C}{\partial S}$ để triệt tiêu yếu tố rủi ro ngẫu nhiên.

Danh mục đầu tư này có dạng:

$$P = \frac{\partial C}{\partial S}S - \boldsymbol{C} \quad (\mathbf{4})$$

Mặt khác, trong một thị trường phi chênh lệch giá, danh mục đầu tư này phải kiếm được lợi nhuận phi rủi ro là r, và do đó

$$\Delta P = rP\Delta t \quad (5)$$

Thay (3) và (4) vào (5) ta có:

$$\left(\mu S - \frac{\partial C}{\partial S}\mu S - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(\frac{\partial C}{\partial S}S - C\right)\Delta t$$

hay

$$\mu S - \frac{\partial C}{\partial S}\mu S - \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 = \frac{\partial C}{\partial S}Sr - Cr$$

Sử dụng điều kiện (2) ta có:

$$rC = \frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

Phương trình trên là phương trình vi phân Black-Scholes [7], giờ đây là một phương trình vi phân thường do đã loại bỏ yếu tố ngẫu nhiên. Với quyền chọn mua châu Âu, ta xét tại thời điểm biên, tức $t = T$, $C = \max(S(T) - K, 0)$, với K là giá thực hiện.

B. *Định giá trung lập rủi ro*

Trong lĩnh vực tài chính, định giá trung lập rủi ro (risk-neutral valuation) là một khái niệm cốt lõi được ứng dụng rộng rãi[8], ví dụ trong đề tài của chúng tôi là công cụ định giá quyền chọn. Phương pháp này dựa trên giả định rằng các nhà đầu tư bỏ qua yếu tố rủi ro khi đánh giá giá trị hiện tại của một tài sản tài chính, tức chỉ họ chỉ tập trung vào giá trị tăng trưởng thực tế của lợi nhuận, bất kể mức độ rủi ro liên quan. Đây cũng chính là một tính chất quan trọng của phương trình vi phân BS.

Ở phần trên, phương trình BS được thiết lập dựa trên một giả định đặc biệt, giúp nó không phụ thuộc vào mức độ chấp nhận rủi ro của nhà đầu tư. Có thể thấy, phương trình vi phân BS chỉ chứa các biến số liên quan tới giá cổ phiếu hiện tại, thời gian, biến động giá cổ phiếu và lãi suất phi rủi ro và các yếu tố ấy độc lập với mức độ chấp nhận rủi ro của các nhà đầu tư.

Chúng ta cũng thấy phương trình kết quả cuối cùng không có yếu tố μ (kỳ vọng tăng trưởng mong muốn của nhà đầu tư). Vì vậy, điều này giúp loại bỏ hoàn toàn sự phụ thuộc vào sở thích rủi ro của nhà đầu tư, biến nó thành một công cụ mạnh mẽ và phổ quát trong tài chính, đặc biệt khi giả định rất đơn giản rằng tất cả các nhà đầu tư đều trung lập với rủi ro có thể được đưa ra.

Để định giá bất kỳ công cụ phái sinh nào, chúng ta cần phải biết rõ các yếu tố:

1. *Giá dự kiến của nó khi đáo hạn. Vì giá của một công cụ phái sinh là một hàm của giá của tài sản cơ sở, do đó nó phụ thuộc vào lợi nhuận kỳ vọng của tài sản cơ bản, μ.*
2. *Sau khi chúng ta biết giá dự kiến của nó khi đáo hạn, chúng ta phải tính giá trị hiện tại của nó tại t = 0. Nó có nghĩa là chúng ta phải biết tỷ lệ chiết khấu cho phái sinh.*

Tuy nhiên, trong thực tế, những điều kiện này hầu như không thể đạt được, do đó mô hình Black-Scholes được sử dụng để giải quyết vấn đề này, như tính chất*: Trong một thế giới mà các nhà đầu tư trung lập với rủi ro, lợi nhuận kỳ vọng của tất cả các tài sản đầu tư sẽ bằng với lãi suất phi rủi ro. Điều này là do các nhà đầu tư trung lập với rủi ro không yêu cầu thêm phí bảo hiểm để bù đắp rủi ro mà họ chấp nhận. Đồng thời, giá trị hiện tại của bất kỳ dòng tiền nào trong thế giới này có thể được tính bằng cách chiết khấu giá trị kỳ vọng của dòng tiền đó với lãi suất phi rủi ro. Nhờ giả định về một thế giới trung lập với rủi ro, việc phân tích các công cụ phái sinh được đơn giản hóa đáng kể.*

Một công cụ phái sinh có thể định giá trung lập rủi ro thông qua sử dụng quy trình sau:

1. Giả sử rằng lợi nhuận kỳ vọng từ tài sản cơ bản là lãi suất phi rủi ro, r (nghĩa là giả sử μ = r).
2. Tính toán lợi nhuận dự kiến từ phái sinh.
3. Chiết khấu khoản thanh toán dự kiến với lãi suất phi rủi ro.

Định giá trung lập rủi ro giúp chúng ta giả định một thế giới "giả định" đơn giản hơn, nơi giá cổ phiếu tăng với lãi suất phi rủi ro thay vì lợi nhuận tăng trưởng thực tế. Dù vậy, kết quả tính toán từ thế giới giả định này vẫn áp dụng được trong thế giới thực nhờ sự cân bằng giữa lợi nhuận kỳ vọng của cổ phiếu (μ) và tỷ lệ chiết khấu cho các khoản thanh toán tương lai. Từ đó, chúng ta có thể dễ dàng tính giá quyền chọn (như quyền chọn mua châu Âu) mà không cần lo lắng về thái độ rủi ro hoặc lợi nhuận kỳ vọng thực tế.[8]

C. Sử dụng công thức Black-Scholes để định giá quyền chọn

Trong phần trước, ta đã xác định giá trị của quyền chọn mua châu Âu khi đáo hạn là

$$E[\max(S(T)-K,0)]$$

Với $S(T)$ là giá cổ phiếu tại t, và K là giá thực hiện , lãi suất phi rủi ro (hay lãi suất chiết khấu cho quyền chọn) là r, ta có, tại thời điểm đáo hạn ($t = T$), giá của quyền chọn mua là:

$$C = e^{-rT}E[\max(S(T) - K, 0)]$$

Việc sử dụng công thức trên để định giá quyền chọn mua và bán kiểu châu Âu, đồng thời khi định giá bất kỳ quyền chọn nào, ta cần xem xét:

1. *Quyền chọn có sinh lời khi đáo hạn hay không. Ví dụ nếu mua quyền chọn, nhưng giá tài sản cơ sở S thấp hơn giá thực hiện K tại thời điểm T thì quyền chọn này không có giá trị (tức $E[max(S(T) - K, 0)] = 0$).*
2. *Nếu quyền chọn có sinh lời, ta cần biết quyền chọn ấy sẽ sinh lời bao nhiêu. Ví dụ, nếu giá cổ phiếu là $110 và giá thực hiện là $100, ta thu được $10 mỗi cổ phiếu; nếu giá cổ phiếu là $120, ta thu được $20 mỗi cổ phiếu.*

Để tính kỳ vọng $E[\max(S(T) - K, 0)]$, ta cần biết xác suất rằng $S(T) > K$. Ta chuyển điều kiện này thành dạng logarit để đơn giản hóa, tức:

$$S(T) - K > 0 \Leftrightarrow ln\left(\frac{S(T)}{K}\right) > 0$$

Thay biểu thức của $S(T)$ vào ta có:

$$\ln\left(\frac{S(0)e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}Z}}{K}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Z > 0$$

Tiếp theo, ta tiến hành chuẩn hóa theo phân phối chuẩn của Z, tức chia cả 2 vế cho $\sigma\sqrt{T}$, ta thu được:

$$Z > \frac{-\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = -d_2$$

$$\Rightarrow P(Z > -d_2) = P(Z < d_2) = \Phi(d_1) = N(d_2)$$

với d_2 là một yếu tố đo lường xác suất để giá tài sản gốc $S(T)$ sẽ vượt qua giá thực hiện K khi quyền chọn đáo hạn.

Nhằm giúp xác định xác suất giá tài sản vượt quá giá thực hiện được điều chỉnh theo rủi ro và độ biến động, ta sẽ cộng thêm $\sigma\sqrt{T}$, cụ thể

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$$

Vậy, với quyền chọn mua và bán, giá trị của C và P là:

$$C = S(0)N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

$$P = Ke^{-rT}N(-d_2) - S(0)N(-d_1)$$

Trong đó:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Cùng với máy tính, ta chỉ cần 5 giá trị ban đầu bao gồm: giá cổ phiếu hiện tại $S(0)$, giá thực hiện K, thời gian đáo hạn T, lãi suất phi rủi ro r, và độ lệch chuẩn của độ biến động giá cổ phiếu σ.

Phân tích sâu hơn, giá trị của quyền chọn mua có thể được hiểu là giá trị kỳ vọng của tài sản trong tương lai trừ đi giá trị hiện tại của chi phí thực hiện trong tương lai, tức:

$$C = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

Phần tử thứ hai $Ke^{-rT}N(d_2)$ là giá trị hiện tại của chi phí thực hiện quyền chọn khi đáo hạn. Hạng tử đầu tiên $S_0N(d_1)$ trong công thức định giá giá trị kỳ vọng tài sản trong tương lai ở hiện tại.

Mặt khác, phần tử đầu tiên $S_0N(d_1)$ chính là giá trị kỳ vọng của tài sản ở hiện tại khi quyền chọn được thực hiện tại thời điểm T, chỉ xảy ra khi $S(T) > K$. Vì vậy, kỳ vọng tương ứng là $E[S(T)|S(T) > K]$, nhân với xác suất thực hiện quyền chọn $N(d_2)$ và chiết khấu về hiện tại sẽ tạo thành phần tử đầu tiên của C. Từ đó, ta có:

$$e^{-rT}E[S(T)|S(T) > K]N(d_2) = S(0)N(d_1)$$

Thay $S(0) = e^{(-rT)}E[S(T)]$ ta được:

$$N(d_1) = \frac{E[S(T)|S(T) > K]}{E[S(T)]}N(d_2)$$

Vì $E[S(T) \mid S(T) > K] > E[S(T)]$, nên $N(d_1) > N(d_2)$. Do đó, $N(d_1)$ được hiểu là xác suất thực hiện quyền chọn, có tính đến yếu tố giá cổ phiếu trong thế giới trung lập rủi ro, bởi giá trị kỳ vọng của khoản thanh toán phụ thuộc vào S(t). [9]

Công thức định giá Black-Scholes chỉ cung cấp giá lý thuyết dựa trên các giả định nghiêm ngặt, vậy nó có hữu ích trong thực tế không? Liệu có thể xây dựng chiến lược sinh lời từ chênh lệch giữa giá lý thuyết và giá thực tế không?

Như đã nhấn mạnh ở các phần trước, Black-Scholes là công cụ tuy đơn giản nhưng cung cấp cơ chế phân tích mạnh mẽ mức độ rủi ro các quyền chọn được đưa ra rất quan trọng cho các nhà đầu tư sử dụng quyền chọn. Công thức BS sẽ góp phần làm đơn giản hóa quá trình tính toán ảnh hưởng của giá tài sản cơ sở, thời gian, lãi suất và độ biến động đến giá phái sinh, đồng thời xác định mức độ phơi nhiễm của phái sinh đối với các yếu tố rủi ro này.

REFERENCES

[1] F. C. Klebaner, *Introduction to stochastic calculus with applications*, Third edition. London: ICP, Imperial College Press, 2012.
[2] B. Washburn and M. DiK, "Derivation of Black-Scholes Equation Using Itô's Lemma," *Proc. Int. Math. Sci.*, vol. 3, no. 1, pp. 38–49, Jun. 2021, doi: 10.47086/pims.956201.
[3] C. Lee, "Stochastic Processes II".
[4] "Geometric Brownian motion," *Wikipedia*. Nov. 21, 2024. Accessed: Nov. 27, 2024. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometric_Brownian_motion&oldid=1258845153
[5] Y. Yoo, "STOCHASTIC CALCULUS AND BLACK-SCHOLES MODEL".
[6] M. H. A. Davis, V. G. Panas, and T. Zariphopoulou, "European Option Pricing with Transaction Costs," *SIAM J. Control Optim.*, vol. 31, no. 2, pp. 470–493, Mar. 1993, doi: 10.1137/0331022.
[7] "Black–Scholes equation," *Wikipedia*. Nov. 07, 2024. Accessed: Nov. 27, 2024. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Black%E2%80%93Scholes_equation&oldid=1255993216
[8] T. T. CEPF® BSc, "Risk Neutral | Definition, Importance, Valuation, & Limitations," Finance Strategists. Accessed: Nov. 27, 2024. [Online]. Available: https://www.financestrategists.com/wealth-management/risk-profile/risk-neutral/
[9] T. Ngo Van, "Định giá quyền chọn sử dụng Garch và mô hình Black-Scholes: nghiên cứu thực nghiệm tại Việt Nam," Jul. 2019.