Exercice 17 – Arbre de niveau de congestion minimal

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté connexe valué à n sommets possédant m arêtes et soit $c(a)$ le poids de l'arête a.
Etant donné $T = (S, A_T)$ un arbre couvrant de G, le *niveau de congestion* de T est défini par le poids de l'arête de poids maximal dans A_T.
On s'intéresse à la recherche d'un *arbre couvrant de niveau de congestion minimal* dans G.

Q 17.1 L'arbre couvrant défini par les arêtes en gras pour le graphe de la Figure 6 est-il un arbre couvrant de niveau de congestion minimal ?

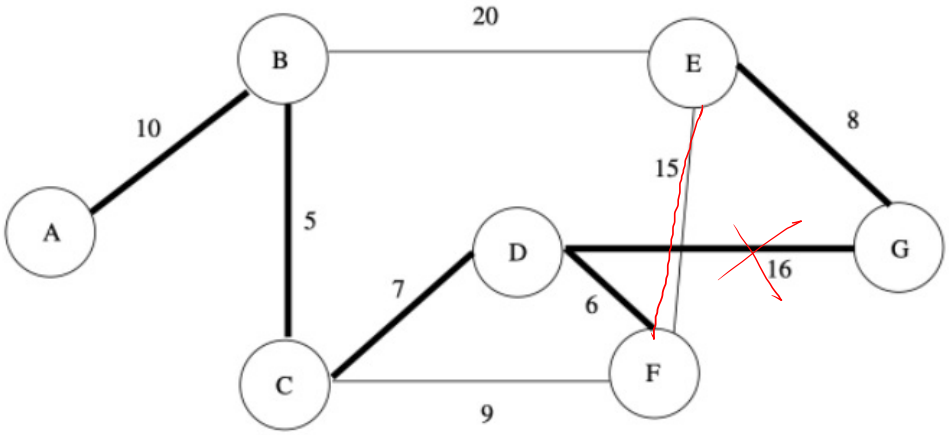


FIGURE 6 – Graphe non orienté valué et arbre couvrant

Non, car en échangeant {D, G} et {E, F} on obtient un arbre de niveau de congestion 15.

Q 17.2 Calculer un arbre couvrant de poids minimum du graphe représenté à la Figure 7. Vous préciserez le sous-graphe partiel obtenu à chaque itération.

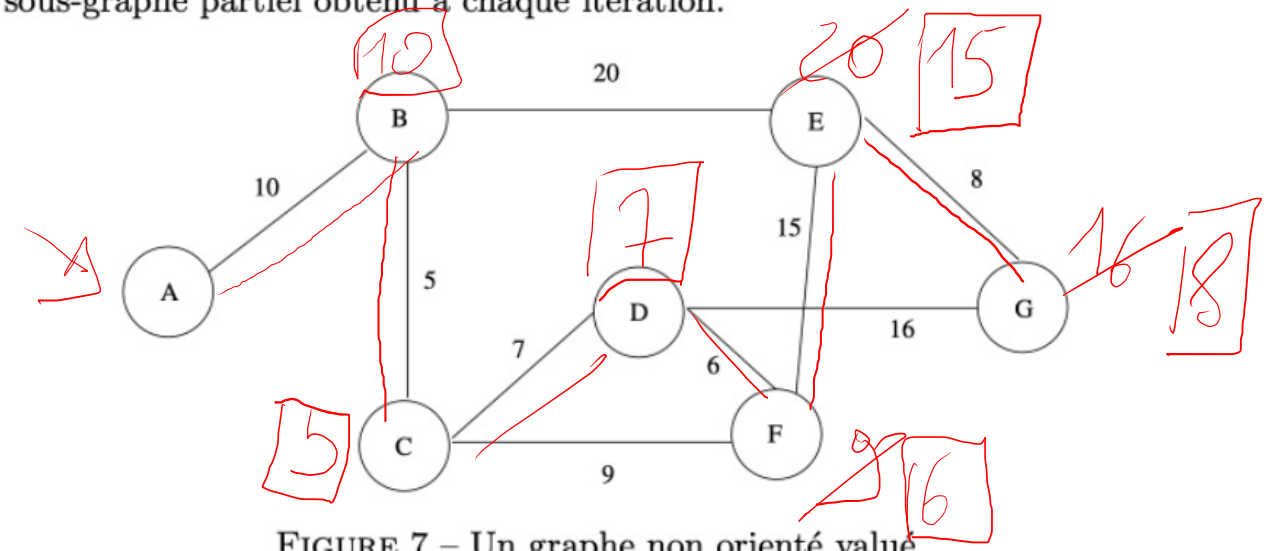


FIGURE 7 – Un graphe non orienté valué

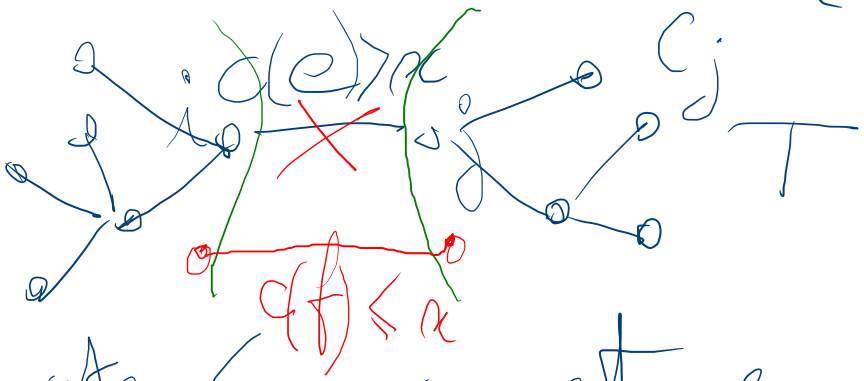
(A, B, C, D, F, E, G)

Q 17.3 Dans le cas général, tout arbre couvrant de niveau de congestion minimal est-il un arbre couvrant de poids minimum ? Si oui, fournir une preuve. Si non, donner un contre-exemple.

Dans l'exemple ci-dessus, l'arbre couvrant obtenu en échangeant {C,D} et {C,F} est de niveau de congestion minimal mais n'est pas un ACPM.

Q 17.4 Réciproquement, tout arbre couvrant de poids minimum est-il un arbre couvrant de niveau de congestion minimal ? Si oui, fournir une preuve. Si non, donner un contre-exemple.

Vrai. Par l'absurde, soit T un ACM qui ne soit pas de niveau de congestion min. Notons x le niveau de congestion min. Dans T, il existe nécessairement une arête e avec $c(e) > x$.



Il existe nécessairement une arête f avec une extrémité dans C_i et l'autre dans C_j telle que $c(f) \leq x$. L'arbre $T \cup \{f\} \setminus \{e\}$ vérifie $c(T \cup \{f\} \setminus \{e\}) < c(T)$. Contradiction avec T ACM

Q 17.5 En déduire un algorithme pour calculer un arbre couvrant de niveau de congestion minimal. Préciser sa complexité temporelle.

Algorithme de Prim en $\Theta((n+m)\log n)$.