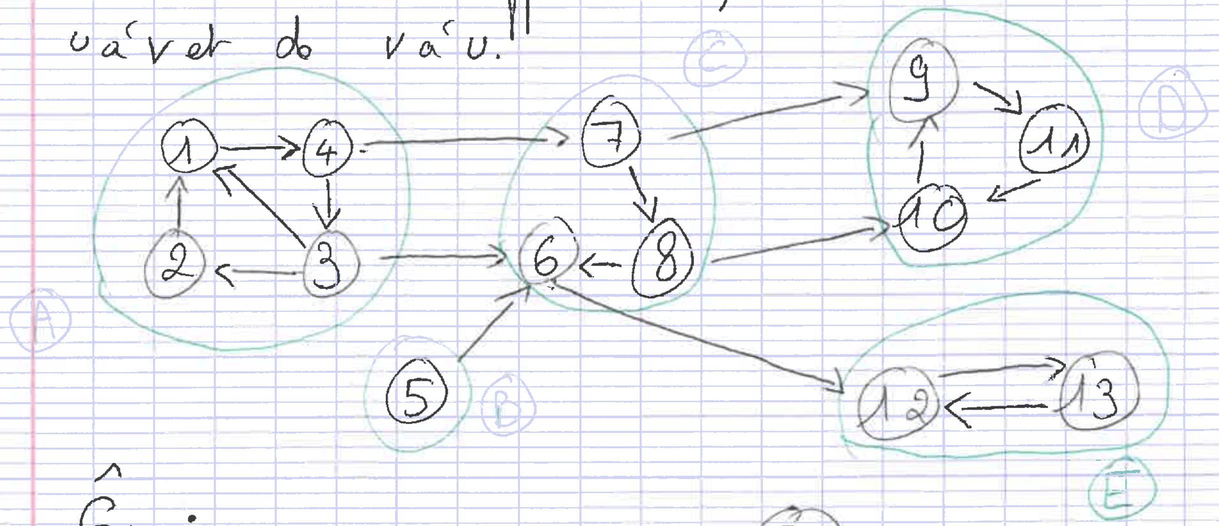
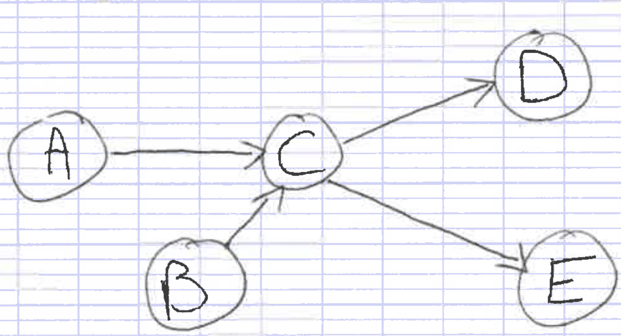
Introduction aux graphes

Exercice 7:

1. Un ensemble de points est fortement connexe si pour tout u et v lui appartenant, il existe un chemin de u à v et de v à u.



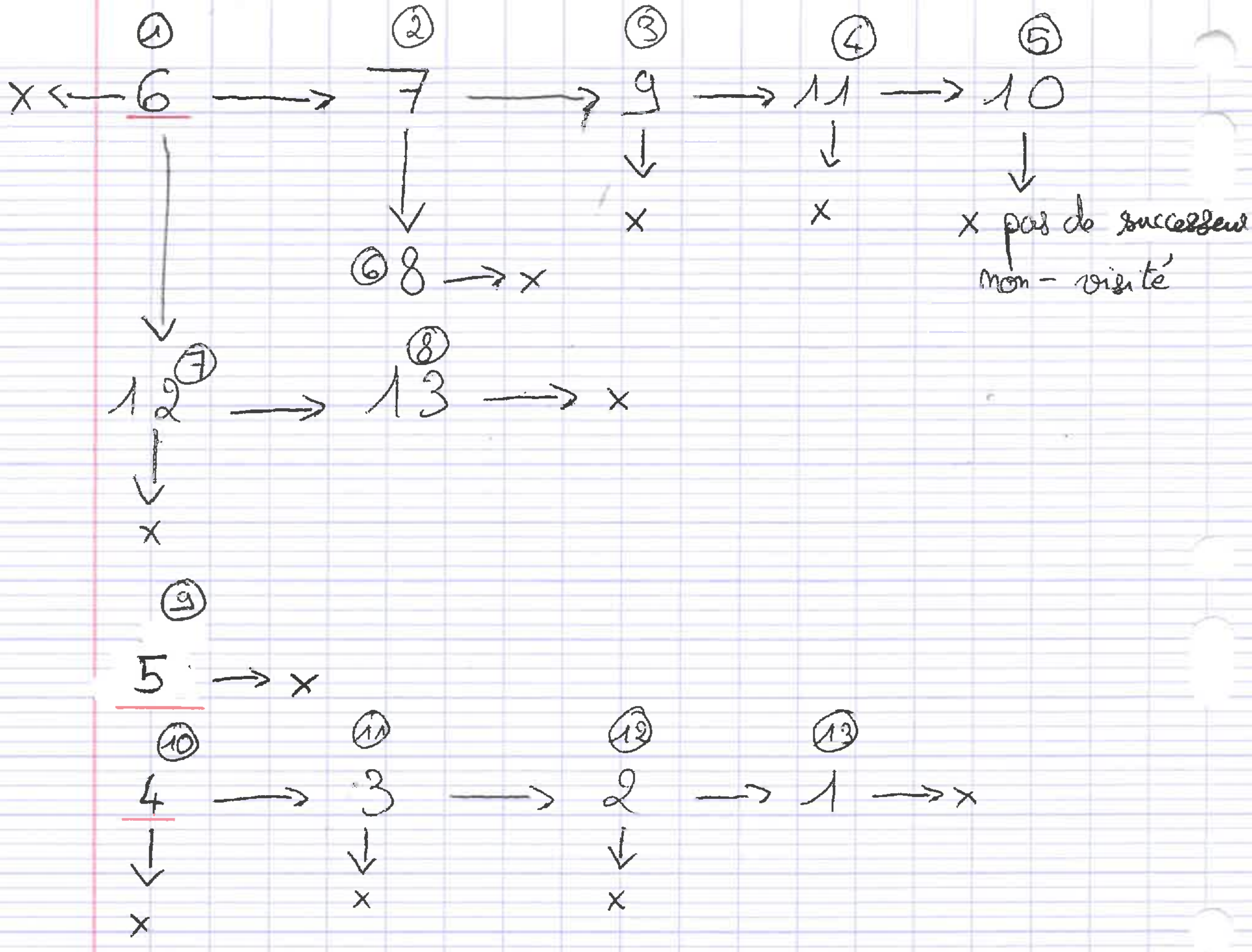
$\hat{G}_1$:



2. Soit L un parcours de G. Alors : L est de taille n (où n est le nombre de points du graphe G) ;
$\{L[k] \mid k \in [\![1, n]\!]\} = V$;
$\forall k \in [\![1; n]\!]$, $L[k] \in succ\{L[1; \dots; k[\}$;
ou $\mathcal{B}(L[1; \dots; k[) = \emptyset$

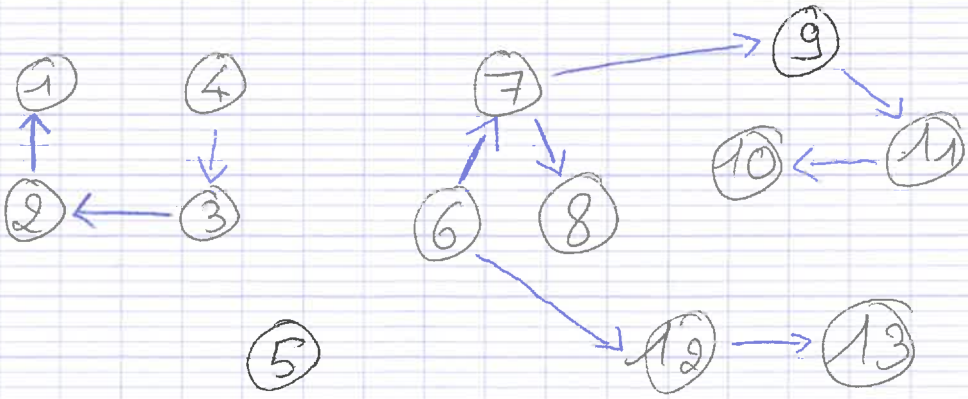
Ici, on constate que L = (6, 7, 9, 11, 10, 8, 12, 13, 5, 4, 3, 2, 1) contient tous les points de G sans jamais les répéter. C'est un parcours en longueur.

①② .... ordre des étapes



Les points de régénération de L sont 6, 5 et 4.

La forêt couvrante associée à L est :



3. • Le nombre de points de régénération est inférieur au nombre de composantes fortement connexes.
Donc tout parcours de G_1 a au plus 5 points de

re génération.

Ex : (12, 13, 10, 9, 11, 6, 7, 8, 5, 4, 3, 2, 1)

• Le nombre de points de régénération est supérieur au nombre de composantes fortement connexes sans prédécesseur dans G_1.
Donc tout parcours de G_1 a au moins 2 points de régénération.

Ex : $L = (5, 6, 7, 12, 8, 9, 13, 10, 11, 3, 1, 2, 4)$

↳ c (B) ↳ c (A)

C'est un parcours en largeur.

4. Voir réponse précédente.

Exercice 9 :

1. Si les sommets de R sont infectés, alors j sera infecté s'il appartient à R ou si il est accessible depuis un sommet de R.

Ici avec $R = \{1, 7, 9\}$, les sommets 10 et 11 ne seront pas infectés.

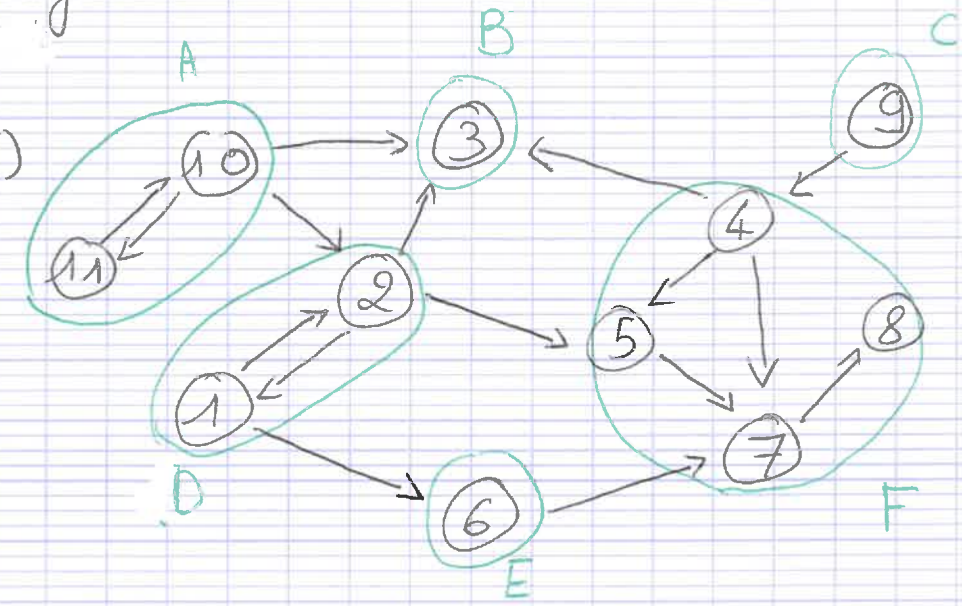
2.1) Par la définition de racine, lorsqu'on infecte, le virus se propage à tout l'arbre associé (car tous les sommets de l'arbre sont accessibles depuis la racine).
Ainsi, en infectant toutes les racines d'une forêt couvrante, on infecte tous les sommets de la forêt, càd ceux du graphe.

2) $R^* = \{1\}$ $L = [s_n ; s_{n-1} ; \dots ; 1]$

Ici, tous les points sont points de régénération.
On choisirait donc $R = V$ avec la stratégie proposée, c-à-d n sommets. C'est donc une mauvaise stratégie.

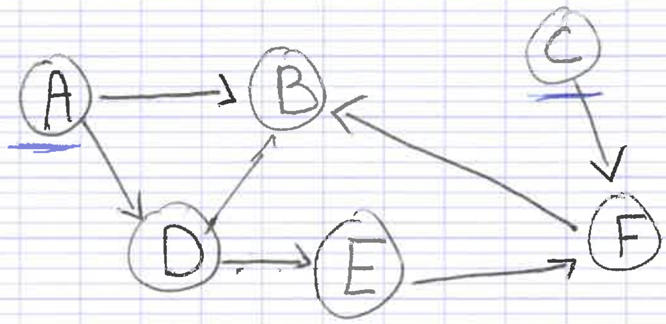
3.

1)



2)

G'_2 :



3) A et C sont prédécesseurs, donc doivent être infectés.

$R = \{\underset{\in A}{11}, \underset{\in C}{9}\}$

4. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté.
Soit $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ son graphe réduit.
On note $X \subseteq \hat{V}$ les composantes fortement connexes de G sans prédécesseur dans $\hat{G}$.
On considère $R \subseteq V$ qui contient exactement un

sommet dans chaque composante fortement connexe de X, ainsi $|R| = |X|$.

R est donc une solution faisable car tous les sommets de G sont accessibles depuis un sommet d'une composante fortement connexe sans prédecesseur, et donc depuis un sommet de R.

Montrons maintenant que R est optimal en raisonnant par l'absurde.
On suppose qu'il existe $R' \subseteq V$ tel que
- tous les sommets de V sont accessibles depuis R'
- $|R'| < |R| = |X|$

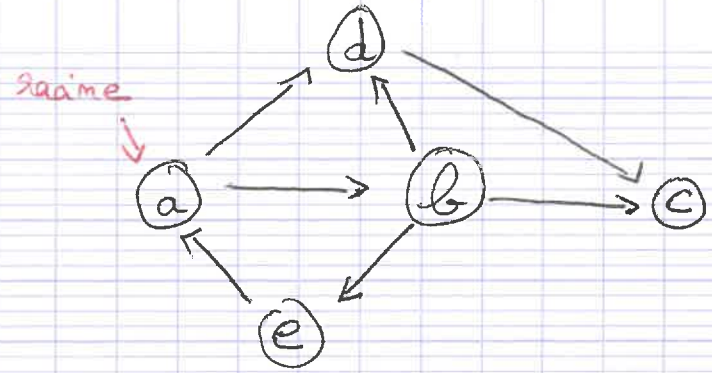
Il existe nécessairement $C \in X$ tel que $R' \cap X = \emptyset$ (comme $|R'| < |X|$, on ne peut couvrir toutes les composantes fortement connexes de X avec des sommets de R').

C contient au moins un sommet s.

Par hypothèse, s est accessible depuis un sommet $s' \in R'$, donc la composante fortement connexe de s' est un prédécesseur de C dans $\hat{G}$.
Absurde.

Exercice 11 :

1. On modélise le problème : →



On constate qu'il est possible d'atteindre tous les points d'intérêt de la ville depuis a.

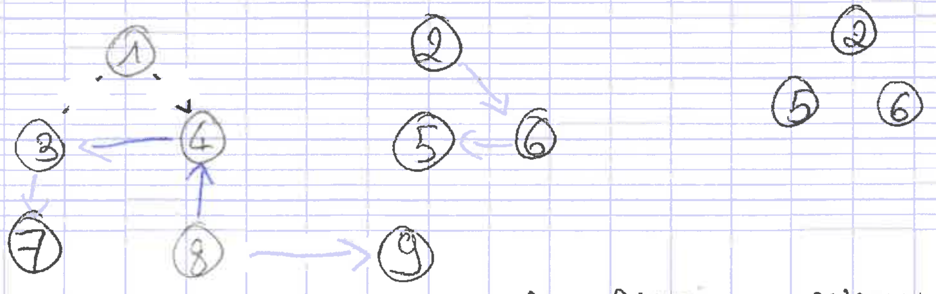
2. temps (G)

sommet	a	b	c	d	e	File
profondeur	0	+∞	+∞	+∞	+∞	{a}
		1		1		{b, d}
			2		2	d, c, e
						c, e
						∅

Parcours en largeur : calculer le chemin le + court en nb d'arc.

Exercice 10 :

2. L_1 non
L_2 oui



non pas unique au parcours, mais oui au parcours profondeur