Exercice 8 – Coloration des sommets d'un graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté à n sommets. Une coloration c de G consiste à affecter à chaque sommet s une couleur $c(s)$ de telle sorte que pour chaque arête $\{x, y\}$, les couleurs $c(x)$ et $c(y)$ soient distinctes.

L'exemple de la figure 10 montre une coloration d'un graphe G_1 en 3 couleurs blanc, gris, noir.

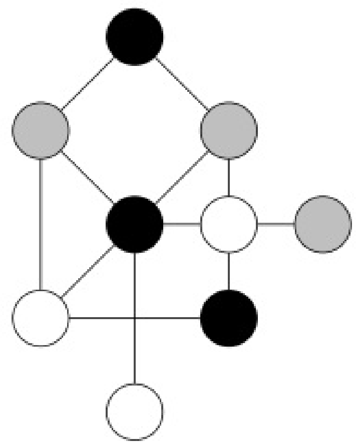

FIGURE 10 – Une coloration d'un graphe G_1.

Soit $\nu : S \mapsto \{1, \ldots, n\}$ une numérotation des sommets de G. On définit le graphe orienté $G(\nu) = (S, A(\nu))$ pour lequel chaque arête $\{x, y\}$ est transformée en l'arc (x, y) si $\nu(x) < \nu(y)$ ou en l'arc (y, x) si $\nu(x) > \nu(y)$. Par abus de langage, dans $G(\nu)$, on identifiera un sommet x et son numéro $\nu(x)$.

Q 8.1 Déterminer le graphe $G_1(\nu_1)$ pour le graphe G_1 et la numérotation ν_1 des sommets de la figure 11 où le numéro $\nu_1(x)$ est inscrit à l'intérieur du cercle associé à x.

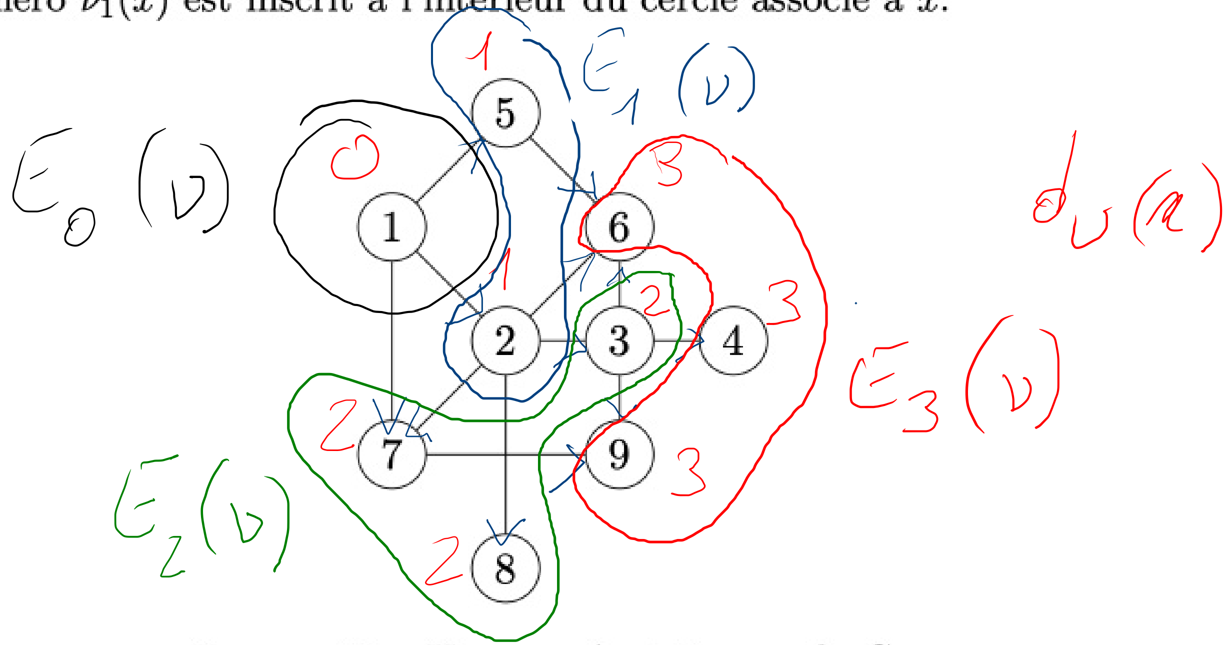

FIGURE 11 – Une numérotation ν_1 de G_1.

(1,2,3,4,5,6,7,8,9) est toujours un tri topologique valide

Q 8.2 Prouver que pour toute numérotation ν, le graphe $G(\nu)$ est sans circuit.

par définition de $G(\nu)$

Q 8.3 Donner un tri topologique de $G(\nu)$, valide pour toute numérotation ν.

2) Par l'absurde. Soit $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p = x_1)$ un circuit dans $G(\nu)$. Par définition de $G(\nu)$, on a alors :

$\nu(x_1) < \nu(x_2) < \nu(x_3) \dots < \nu(x_p) = \nu(x_1)$. Contradiction !

3) Tri topologique : tri des sommets x par ordre ↗ de $\nu(x)$

Pour chaque sommet x de $G(\nu)$, on note $d_\nu(x)$ la longueur en nombre d'arcs d'un plus long chemin d'extrêmité x dans $G(\nu)$ (c'est-à-dire que $d_\nu(x)$ est la longueur maximale d'un chemin dont le dernier sommet est x). On note également $D(\nu)$ la plus grande valeur des $d_\nu(x)$.

Q 8.4 A la manière de la relation de récurrence à l'origine de l'algorithme de Bellman, donner une relation de récurrence permettant de déterminer $d_\nu(x)$ pour tout x. Comment initialiser la récurrence ?

$d_\nu(1) = 0$

$d_\nu(x) = \max\{d_\nu(y)+1 : (y,x) \in A\}$

Q 8.5 A l'aide de la relation de récurrence précédente, indiquer pour chaque sommet x du graphe $G_1(\nu_1)$ (sommet identifié par son numéro $\nu_1(x)$) sa valeur $d_{\nu_1}(x)$. Quelle est la valeur de $D(\nu_1)$?

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$d_{\nu_1}(x)$	0	1	2	3	1	3	2	2	3

Voir page précédente

Q 8.6 0.5 En considérant un chemin de $G(\nu)$ de longueur $D(\nu)$, montrer que pour chaque valeur de l dans $\{0, \ldots, D(\nu)\}$, il existe au moins un sommet x tel que $d_\nu(x) = l$.

↳ longueur d'un plus long chemin dans $G(\nu)$

Soit $C = (x_0, x_1, \ldots, x_{D(\nu)})$ un plus long chemin de $G(\nu)$.

On vérifie que $d_\nu(x_i) = i \quad \forall i \in \{0, \ldots, D(\nu)\}$.

On note $E_l(\nu)$ l'ensemble des sommets x tel que $d_\nu(x) = l$.

Q 8.7 Déduire de ce qui précède que les ensembles $E_l(\nu)$ ($l \in \{0, \dots, D(\nu)\}$) forment une partition de S. (On rappelle qu'une partition de S est famille des parties de S non vides, disjoints deux à deux, et dont l'union est égale à S.)

- $E_l(\nu) \ni x_l$ de la question 8.6 $\Rightarrow E_l(\nu) \neq \emptyset$ $\forall l \in \{0, \dots, D(\nu)\}$
- $E_l(\nu) \cap E_{l'}(\nu) = \emptyset$ pour $l \neq l'$ car chaque sommet n'a qu'un seul numéro
- $\bigcup_{l \in \{0, \dots, D(\nu)\}} E_l(\nu) = S$ car $d_\nu(x) \in \{0, \dots, D(\nu)\}$ $\forall x \in S$ et chaque sommet a un numéro

Q 8.8 Soit $l \in \{0, \dots, D(\nu)\}$. Montrer que si x et y ($x \neq y$) appartiennent à $E_l(\nu)$, alors il ne peut exister ni un arc (x, y) ni un arc (y, x) dans $G(\nu)$.
En déduire que dans le graphe G, on peut colorier, quel que soit l dans $\{0, \dots, D(\nu)\}$, tous les sommets de $E_l(\nu)$ avec une même couleur.

Par l'absurde. Soit (x, y) un arc entre 2 sommets x et y de $E_l(\nu)$. Alors $d_\nu(y) \geq d_\nu(x) + 1$ car $d_\nu(y) = \max\{d_\nu(x) + 1 : (x, y) \in A\}$. Contradiction avec $d_\nu(x) = d_\nu(y)$. Même raisonnement pour un arc (y, x).

Q 8.9 Appliquer les résultats des questions précédentes pour déterminer la partition des sommets de G_1 en sous-ensembles de sommets de même couleur, partition obtenue pour la numérotation ν_1.

Voir graphe de la question 8.1 : on obtient une coloration en quatre couleurs noir, bleu, rouge, vert.

La coloration retournée n'est toutefois pas nécessairement optimale !

Sur l'exemple, on voit qu'on obtient 4 couleurs alors que le graphe est 3-colorable.

Un plus petit exemple :

$$\overset{0}{1} \to \overset{1}{2} \to \overset{2}{3}$$

3 couleurs alors que le graphe est 2-colorable

Par contre, $\overset{1}{2} \leftarrow \overset{0}{1} \to \overset{1}{3}$ aurait marché !