Exercice 2 :

$\bullet\!-\!\!-\!\!-\!\bullet \; \{c_1, c_2\}$

$\bullet \longrightarrow \bullet \; (c_1, c_2)$

1) On considère le graphe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des capteurs et où

$E = \{ \{c_1, c_2\} \mid (c_1, c_2) \in V^2, \ \text{dist}(c_1, c_2) \leq 500\,m \}$

paire pas couple car graphe non-orienté

Deux capteurs peuvent communiquer s'ils correspondent à 2 sommets reliés dans G (il existe une chaîne de sommets entre l'un et l'autre).

Donc "tout couple de capteurs peut communiquer" revient à "tout couple de sommet est relié par une chaîne". Autrement dit : G connexe.

2) La contrainte sur les capteurs revient à dire que chaque sommet a au moins $\frac{n}{2}$ voisins, autrement dit $\forall v \in V, \deg(v) \geq \frac{n}{2} = \frac{|V|}{2}$

La question est donc :

$\boxed{\forall v \in V, \ \deg(v) \geq |V|/2 \Rightarrow G \text{ connexe ?}}$

On le montre pour un graphe non orienté $G = (V, E)$ quelconque.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté tq.

$\forall v \in V, \ \deg(v) \geq \frac{|V|}{2}$.

Par l'absurde on suppose que G n'est pas connexe : il admet alors au moins 2 composantes connexes C_1 et C_2 ($C_1 \subseteq V$, $C_2 \subseteq V$)

- C_1 contient 1 sommet et donc ses $\frac{|V|}{2}$ voisins (minimum), donc $|C_1| \geq \frac{|V|}{2} + 1$
- C_2 pareil $\rightarrow |C_2| \geq \frac{|V|}{2} + 1$. Donc : $|C_1 \cup C_2| = |C_1| + |C_2| \geq |V| + 2 > |V|$

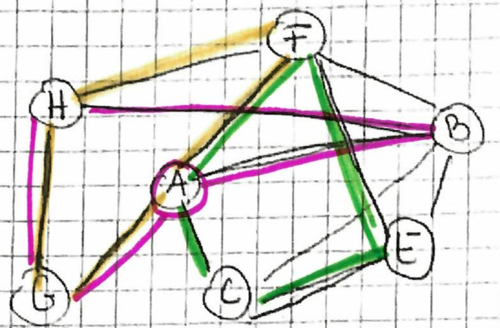
union disjointe car des composantes connexes sont disjointes

Absurde ! car $(C_1 \cup C_2) \subseteq V$.

Donc G est connexe.

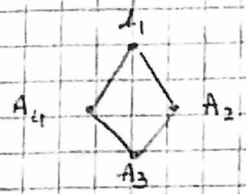
Exercice 3 :

1)



(En couleur : exemples de cycles sans corde de longueur 4.
D'après 2) $\Rightarrow$ faut un cycle avec corde
A est le pt commun entre les 2 cycles
$\Rightarrow$ pb avec A (Ann ment).)

2) On suppose que personne ne ment, c-à-d que chaque femme est venue une seule fois.
Par l'absurde, on suppose qu'il existe dans G un cycle de longueur 4 sans corde.
Notons (A_1, A_2, A_3, A_4) ce cycle.



Pour $i \in [1,..4]$, on note :

d_i la date de début de visite de A_i
f_i ——— fin de visite de A_i.

Quitte à renommer les sommets du cycle, on suppose que $d_1 = \min(d_1, d_2, d_3, d_4)$

Puisque $\{A_1, A_2\} \in E$, $d_2 \leq f_1$
$\{A_1, A_4\} \in E$, $d_4 \leq f_1$

A_1 est parti avant l'arrivée de A_3
$\Rightarrow$ ne se sont pas vues

Comme nous n'avons pas de corde : $\{A_1, A_3\} \notin E$, $d_3 > f_1$

$\Rightarrow d_3 > d_2$ et $d_3 > d_4$

Par ailleurs $\{A_2, A_3\} \in E$, comme $d_3 > d_2$, on en déduit que $d_3 \leq f_2$
$\{A_4, A_3\} \in E$, Comme $d_3 > d_4$, $d_3 \leq f_4$

$\Rightarrow$ si $d_2 \leq d_4$, ~~comme~~ on a $d_2 \leq d_4 < d_3 \leq f_2$ donc $d_4 \in [d_2, f_2]$ donc A_4 et A_2 se sont rencontrées, or $\{A_1, A_2\} \notin E$
ABSURDE

$\Rightarrow$ si $d_2 > d_4$, on a $d_4 \leq d_2 < d_3 \leq f_4$ donc $d_2 \in [d_4, f_4]$ donc A_4 et A_2 se sont rencontrées
ABSURDE

Conclusion : Il n'existe pas de cycle de longueur 4 sans corde dans G.

3) Dans G il y a 3 cycles de longueur 4 sans corde : (A, F, E, C) ; (A, F, H, G) et (A, B, H, G). Comme Ann se retrouve dans les 3 cycles et qu'une seule femme a menti alors : Ann a tué le Duc.