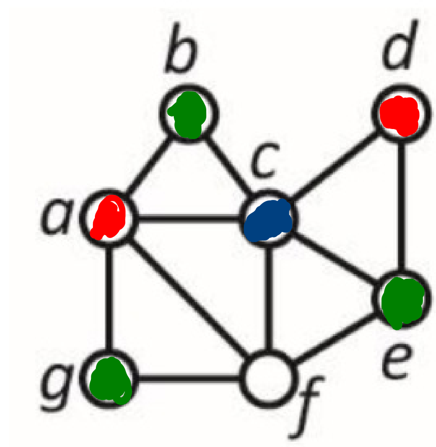
Exercice 5 – Coloration d'un graphe

Considérons un graphe $G = (S, A)$ non orienté, de degré maximal Δ. Le nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$, est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorier le graphe, c'est-à-dire pour colorier chaque sommet de telle façon que deux sommets distincts et adjacents aient toujours des couleurs différentes.

Q 5.1 Notons $\{1, 2, \ldots, n\}$ les couleurs. Donnez un algorithme glouton, qui parcourt tous les sommets du graphe et attribue une couleur à chaque sommet.

1 2 3 4



a, b, c, d, e, f, g

Algorithme

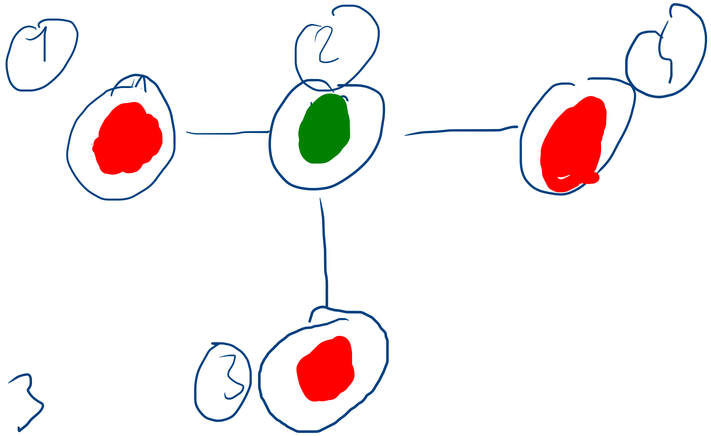
Tant qu'il reste un sommet s non examiné
colorer s avec la plus "petite" couleur compatible
avec les voisins de s déjà colorés

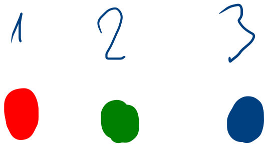
Q 5.2 Montrez que cette approche permet de majorer le nombre chromatique par $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Q 5.3 Donnez un exemple de graphe pour lequel l'algorithme précédent nécessite $\Delta + 1$ couleurs, mais pour lequel 2 couleurs seulement sont nécessaires pour colorier le graphe.

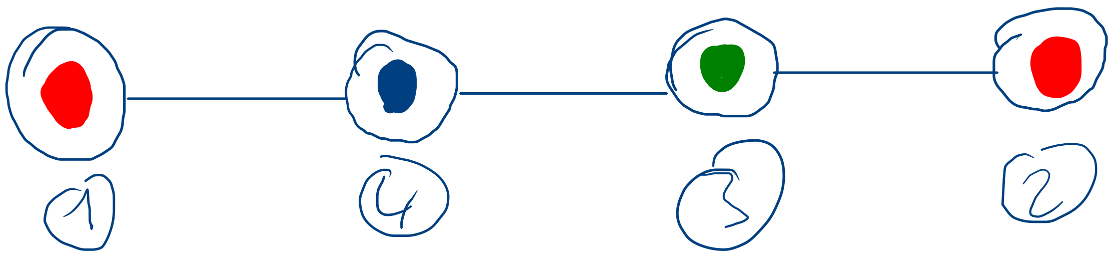
2) À chaque étape de l'algorithme glouton, le sommet considéré a <u>au plus</u> Δ voisins. Il y a donc toujours une couleur disponible parmi les $\Delta+1$ couleurs (car, dans le pire cas, les Δ voisins sont de couleurs distinctes). Par conséquent, l'algorithme colorie le graphe entier en utilisant au plus $\Delta+1$ couleurs. D'où le résultat, dont l'algorithme glouton de la question 1 est une preuve constructive.

3)





← Exemple où l'algorithme glouton est optimal



Ici, on a $\Delta = 2$ et l'algorithme glouton retourne une coloration avec $\Delta + 1 = 3$ couleurs, alors que c'est possible en 2 couleurs :