

---

## Exercice 6 – Playoffs NBA

---

Les playoffs NBA (appelés séries éliminatoires au Canada) sont les séries éliminatoires de la National Basketball Association (NBA). Une série éliminatoire est une série de matchs deux équipes, au terme de laquelle l'une des deux équipes est éliminée. Chaque série se joue au meilleur d'une série de sept matchs, c'est-à-dire que la première équipe qui gagne 4 matchs remporte la série.

Plus généralement, considérons deux équipes  $A$  et  $B$  qui s'affrontent dans une série de matchs jusqu'à ce que l'équipe  $A$  remporte  $i$  victoires ou que l'équipe  $B$  remporte  $j$  victoires. Supposons que la probabilité de victoire de  $A$  sur un match (contre l'équipe  $B$ ) est  $p$ , et que la probabilité de défaite de  $A$  est donc  $q = 1 - p$  (il n'y a pas de match nul). Soit  $P(i, j)$  la probabilité que  $A$  remporte la série (i.e.  $A$  a remporté  $i$  victoires et  $B$  moins de  $j$  victoires).

**Q 6.1** Etablir une relation de récurrence pour  $P(i, j)$  qui puisse être utilisée dans un algorithme de programmation dynamique.

$$P(i, j) = pP(i-1, j) + (1-p)P(i, j-1)$$

$$P(i, 0) = 0 \text{ pour } i > 0$$

$$P(0, j) = 1 \text{ pour } j > 0$$

**Q 6.2** Déterminer la probabilité que l'équipe A remporte une série au meilleur des sept matches si  $p = 0.4$  (ceci signifie que A gagne si elle est la première équipe à gagner 4 matches).

i\j	0	1	2	3	4
0		1	1	1	1
1	0	0,4	0,64	0,78	0,87
2	0	0,16	0,35	0,52	0,66
3	0	0,06	0,18	0,32	0,46
4	0	0,03	0,09	0,18	0,29

$P(i-1, j) \times 0,4$   
 $P(i, j-1) \times 0,6$   
 proba que A remporte la série

**Q 6.3** Ecrire un algorithme de programmation dynamique pour calculer la probabilité de gagner une série au meilleur des  $n$  matches ( $n$  impair). Quel est sa complexité?

pour  $i$  allant de 1 à  $\lceil n/2 \rceil$  faire  $P[i, 0] \leftarrow 0$   
 pour  $j$  allant de 1 à  $\lceil n/2 \rceil$  faire  $P[0, j] \leftarrow 1$   
 pour  $i$  allant de 1 à  $\lceil n/2 \rceil$  faire  
   pour  $j$  allant de 1 à  $\lceil n/2 \rceil$  faire  
      $P[i, j] \leftarrow p * P[i-1, j] + (1-p) * P[i, j-1]$   
 retourner  $P(\lceil n/2 \rceil, \lceil n/2 \rceil)$

Complexité:  $\Theta(n^2)$