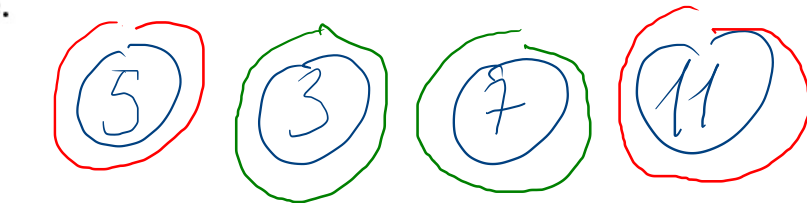


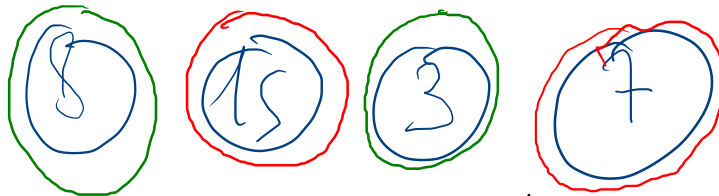
Exercice 5 – Jeu à deux joueurs

Considérons une rangée de n pièces de valeurs v_1, \dots, v_n et le jeu suivant à deux joueurs : à chaque tour, le joueur peut prendre soit la pièce la plus à gauche, soit la pièce la plus à droite. Le jeu s'arrête quand il n'y a plus de pièce. On cherche à calculer le gain optimal du joueur qui commence; on considérera que les deux joueurs adoptent une stratégie qui maximise leur profit final. Par exemple, pour 5, 3, 7, 11 le gain optimal pour celui qui commence est $16(11 + 5)$; pour 8, 15, 3, 7 ce sera $22(7 + 15)$.

Q 5.1 Indiquer une rangée de pièces pour laquelle il n'est pas optimal pour le premier joueur de commencer par prendre la pièce de plus grande valeur. Autrement dit, cette stratégie gloutonne n'est pas optimale.



$$16 - 10 = 6$$



$$22 - 11 = 11$$

le deuxième exemple montre bien qu'il n'est pas toujours optimal pour le premier joueur de commencer par prendre la pièce de plus grande valeur.

Q 5.2 Donner un algorithme en $O(n^2)$ pour calculer une stratégie optimale pour le premier joueur. Etant donnée la rangée initiale, l'algorithme calculera en $O(n^2)$ les informations nécessaires, et ensuite le premier joueur pourra déterminer en $O(1)$ le choix optimal à chaque tour en consultant les données précalculées.

Soit $\text{opt}(i, j)$ la différence $\text{score}_1 - \text{score}_2$ si les deux suivent leur stratégie optimale sur la rangée v_i, \dots, v_j

$$\text{opt}(i, j) = v_i \quad \text{si } i = j$$

$$\text{opt}(i, j) = \max \{ v_i - \underbrace{\text{opt}(i+1, j)}_{\text{score}_2 - \text{score}_1 \text{ sur la rangée } v_{i+1}, \dots, v_j}, v_j - \text{opt}(i, j-1) \}$$

$$\text{opt}(i, j) = \begin{cases} i & \text{si il faut choisir } v_i \\ j & \text{si il faut choisir } v_j \end{cases}$$

pour i allant de 1 à n faire

$opt[i, i] \leftarrow v_i$

$s[i, i] \leftarrow i$

pour l allant de 2 à n faire

pour i allant de 1 à $n-l+1$ faire

si $v[i] - opt[i+1, j] \geq v[j] - opt[i, j-1]$ alors

$opt[i, j] \leftarrow v[i] - opt[i+1, j]$

$s[i, j] \leftarrow i$

sinon

$opt[i, j] \leftarrow v[j] - opt[i, j-1]$

$s[i, j] \leftarrow j$

retourner s

Complexité

$\text{nb de sous-ps} \times \text{Complexité par sous-ps}$

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\times O(1)$$

$$\rightarrow O(n^2)$$