

Exercice 4 – Le coût de la panne sèche

Le professeur Midas conduit une voiture entre Amsterdam et Lisbonne sur l'europléenne E10. Son réservoir d'essence plein lui permet de parcourir n kilomètres, et sa carte lui donne les distances entre les stations-service sur la route. Le professeur souhaite faire le moins d'arrêts possible pendant le voyage.

Q 4.1 Donnez une méthode efficace permettant au professeur Midas de déterminer les stations-service où il peut s'arrêter.

Une méthode naturelle et efficace consiste à rouler le plus loin possible avant panne d'essence, autrement dit s'arrêter à la "dernière station avant panne d'essence", et itérer ainsi jusqu'à arriver à Lisbonne.

Q 4.2 Montrez que votre stratégie aboutit à une solution optimale.

Pour certains problèmes, il existe des algorithmes gloutons qui retournent des solutions optimales. On a alors les propriétés :

Propriété de choix glouton : il existe toujours une solution optimale qui contient un premier choix glouton.

→ On peut toujours arriver à une solution optimale en faisant un choix localement optimal.

Propriété de sous-structure optimale : trouver une solution optimale contenant le premier choix glouton se réduit à trouver une solution optimale pour un sous-problème de même nature.

Règle de choix glouton: s'arrête à la dernière station avant panne d'essence.

Propriété de choix glouton: Il existe une solution optimale où le premier arrêt se fait à la dernière station avant panne d'essence.

Supposons que le choix glouton soit la k -ème station service. Il n'existe pas de solution réalisable où le premier arrêt est au-delà de la k -ème station, par définition de choix glouton. Considérons une solution optimale où le premier arrêt se fait en $j < k$. On peut alors substituer l'arrêt k à l'arrêt j pour construire une solution opt qui comporte le choix glouton.

propriété de sous-structure optimale.

Considérons une solution optimale comportant s arrêts dont le premier est la station R . La séquence d'arrêts depuis la station R doit elle-même être optimale de R à Lisbonne. Dans le cas contraire, si il y avait une solution comportant $< s - 1$ arrêts de la station R à Lisbonne, alors on pourrait construire une solution comportant $< s$ arrêts pour aller d'Amsterdam à Lisbonne, en concaténant l'arrêt R à la séquence de $< s - 1$ arrêts de R à Lisbonne, ce qui contredirait l'optimalité de la solution.