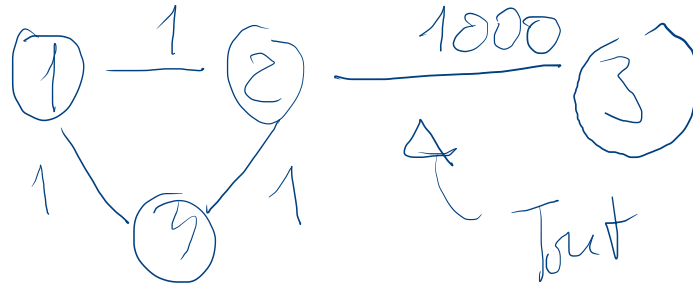


Exercice 16 – Vrai ou faux ?

Indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie (dans ce cas là, le prouver), ou fausse (donner un contre-exemple). On supposera que $G = (S, A, v)$ est un graphe non-orienté connexe, avec $n = |S|$ et $m = |A|$.

- a) Si le graphe G a plus de $n - 1$ arêtes, et s'il y a une seule arête de coût maximum, alors cette arête ne peut pas faire partie d'un arbre couvrant de poids minimum.

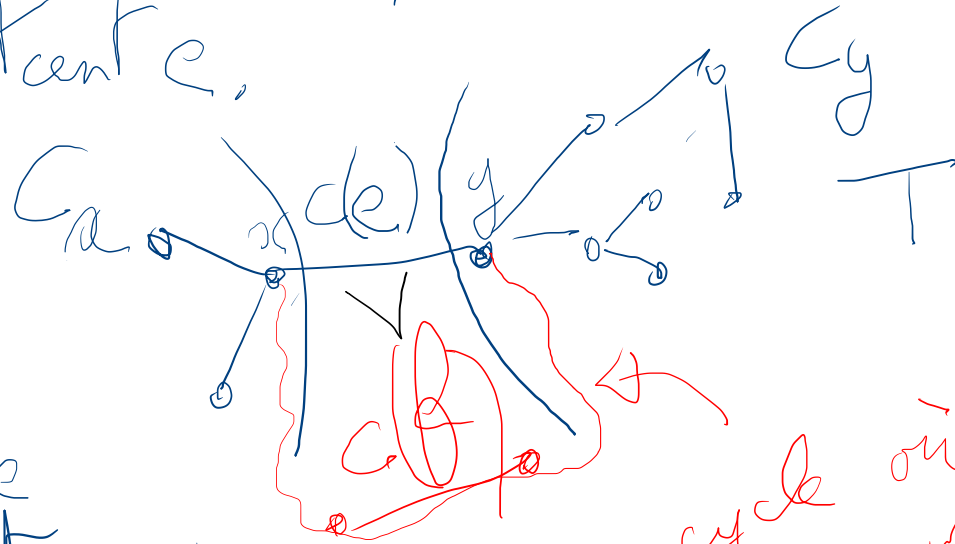
Faux,



Tout ACM de ce
graphe comporte
l'arête $\{2,3\}$ qui est
de coût max unique

b) Si G contient un cycle avec une unique arête e de coût maximum, alors e ne peut pas faire partie d'un arbre couvrant de poids minimum.

Vrai. Par l'absurde, soit T un ACM comportant e .



En échangeant e et f , on obtient un nouvel arbre couvrant $T' = T \cup \{f\} \setminus \{e\}$ avec $c(T') < c(T)$

cycle où e est maximum unique
arête f dont l'une des extrémités $\in C_x$ et l'autre $\in C_y$

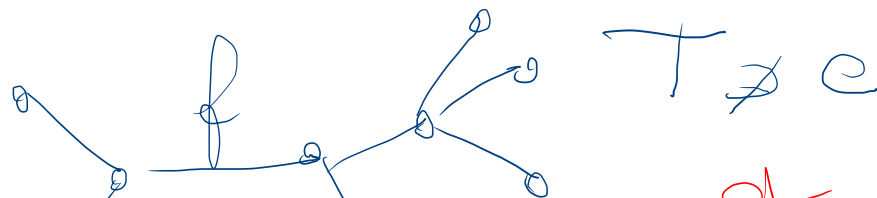
Contradiction avec T est un ACM!

c) Soit $e \in A$ une arête de coût minimum. Alors e appartient à un arbre couvrant de poids minimum de G .

Soit $e = \{x, y\}$. En demandant à "parcours" de Prim en visitant en premier le sommet x puis en deuxième le sommet y qui est bien de \oplus ~~petite~~ priorité dans la bordure de x puisque $\{x, y\}$ est de coût min, on construit un ACP qui contient l'arête e . La proposition est donc vraie.

d) Si l'arête de coût minimum de G est unique, alors elle fait nécessairement partie de tout arbre couvrant de poids minimum.

Vrai. Par l'absurde. Soit un T un ACPM $e \notin T$.

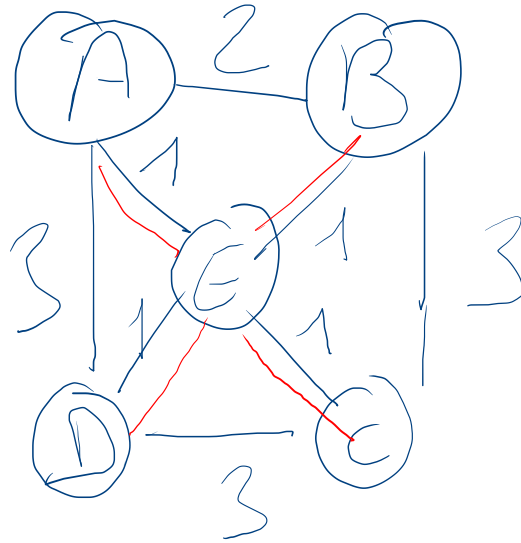


e arête de coût min unique dans G

$T \cup \{e\}$ comporte un cycle C . En supprimant n'importe quelle arête $f \in C$, on obtient un arbre $T' = T \cup \{e\} \setminus \{f\}$ avec $c(T') < c(T)$.
Contradiction avec T est un ACPM !

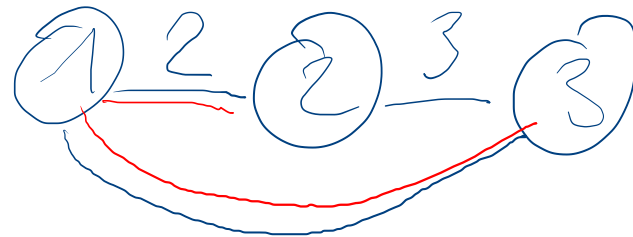
e) Si G contient un cycle avec une unique arête e de coût minimum, alors e fait partie de tout arbre couvrant de poids minimum.

Faux



f) La plus courte chaîne entre deux sommets fait nécessairement partie d'un arbre couvrant de poids minimum.

Faux.



la plus ² courte chaîne entre 2 et 3
se fait pas partie d'un ACM.

g) L'algorithme de Prim est valide même quand les coûts des arêtes sont négatifs.

Prim est valide avec des poids ≥ 0 .

On a vu dans l'exercice 15 qu'on peut
ajouter ou retrancher une même constante
au coût de chaque arête sans
changer le ACM d'un graphe.
La proposition est donc vraie.