LICENCE D'INFORMATIQUE

Sorbonne Université

3I003 – Algorithmique

Cours 4 : Parcours de graphes

Année 2020-2021

Responsables et chargés de cours

Fanny Pascual

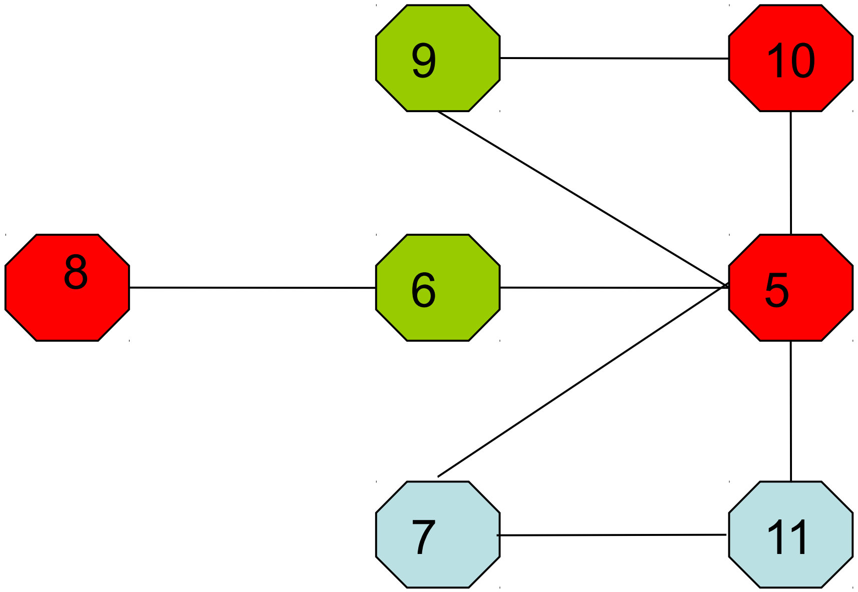
Olivier Spanjaard

Parcours : définitions et notations

Soit G=(S,A) un graphe.

B(T) : Bordure de T $\subset$ S

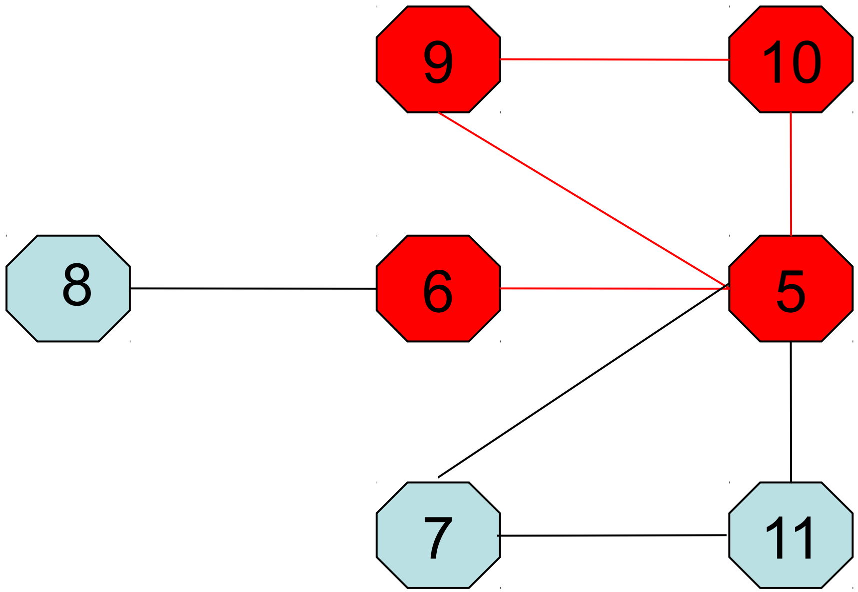
Sous-ensemble des sommets de S-T dont au moins un voisin est dans T.



Bordure de {6,9} = {8,10,5}

Soit $L=(s_1,s_2,\ldots,s_p)$ une liste de sommets distincts :

L[i..j] est la sous-liste $(s_i,\ldots,s_j)$



L = (8,6,5,9,10,7,11)

L[2..5] = (6,5,9,10)

Parcours du graphe G=(S,A) :
liste $L=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ des n sommets de G telle que :
pour tout i=2..n, le sommet s_i appartient à la bordure de $\{s_1,s_2,\ldots,s_{i-1}\}$, si cette bordure n'est pas vide.

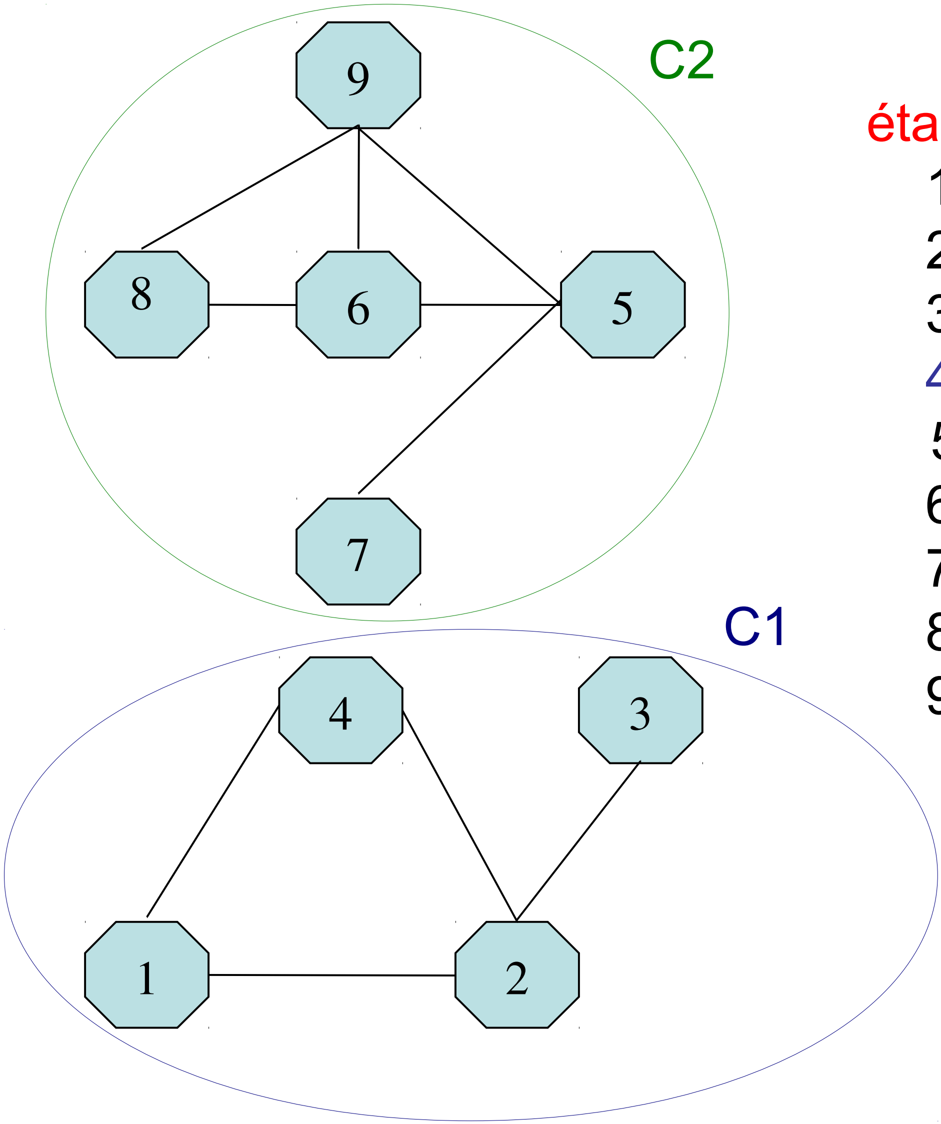
Soit $L=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ un parcours de G.

Si $B(\{s_1,s_2,\ldots,s_{i-1}\})$ est vide, alors s_i est appelé point de régénération de L.
Par convention, s_1 est un point de régénération.

L'étape i du parcours consiste à ajouter s_i (nouveau sommet visité) à la sous-liste L[1..i-1] des sommets déjà visités.

A la fin de l'étape i :
un sommet de L[1..i] est dit ouvert s'il possède au moins un voisin non visité ; dans le cas contraire, il est dit fermé.

Exemple (graphe non orienté) :



étape i	L[1..i]	B(L[1..i])
1	(1)	(2,4)
2	(1,2)	(3,4)
3	(1,2,4)	(3)
4	(1,2,4,3)	∅
5	(1,2,4,3,8)	(6,9)
6	(1,2,4,3,8,6)	(5,9)
7	(1,2,4,3,8,6,5)	(9,7)
8	(1,2,4,3,8,6,5,7)	(9)
9	(1,2,4,3,8,6,5,7,9)	∅
	C1 C2	

A la fin de l'étape 3, les sommets visités 1 et 4 sont fermés, le sommet visité 2 est ouvert.

Propriétés des parcours : connexité

Soit $L=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ un parcours de G.
Soit $(i_1,\ldots,i_r)$ les indices des points de régénération de L.

$G[i_1..i_2-1]$, $G[i_2..i_3-1],\ldots$, $G[i_r..n]$ sont les sous-graphes induits par les composantes connexes de G ;
$L[i_1..i_2-1]$, $L[i_2..i_3-1],\ldots$, $L[i_r..n]$ sont des parcours des sous graphes induits par les composantes connexes de G.

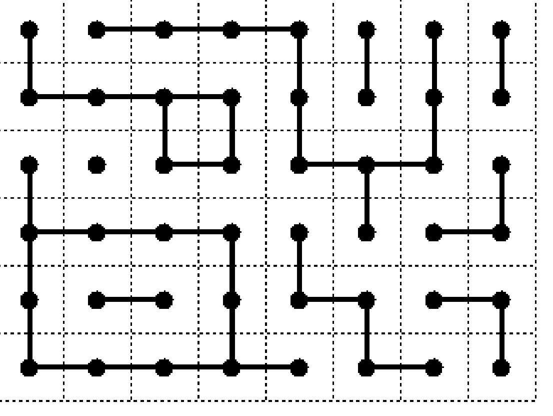
Preuve: simple par récurrence sur le nombre r de points de régénération.

Remarque : un parcours de G permet donc de calculer les composantes connexes de G.

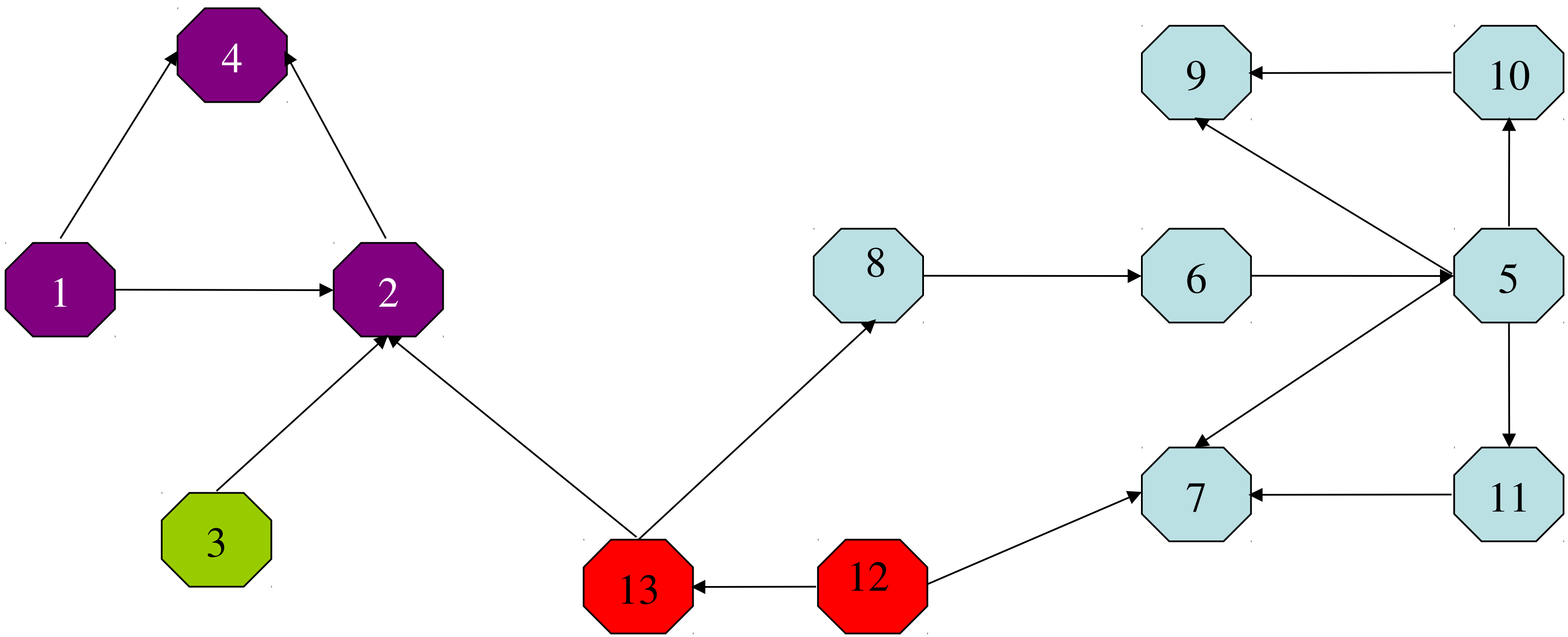
Application en infographie

L'algorithme de remplissage par diffusion est un algorithme classique en infographie qui change la couleur d'un ensemble connexe de pixels de même couleur délimités par des contours.

A	C	C	C	C	A	C	B
A	A	A	A	C	A	C	B
B	C	A	A	C	C	C	A
B	B	B	B	A	C	A	A
B	C	C	B	A	A	C	C
B	B	B	B	B	A	A	C



Exemple (graphe orienté) :



Un parcours : L= (1,2,4,3,8,6,5,9,10,7,11,12,13)

Points de régénération : {1,3,8,12}

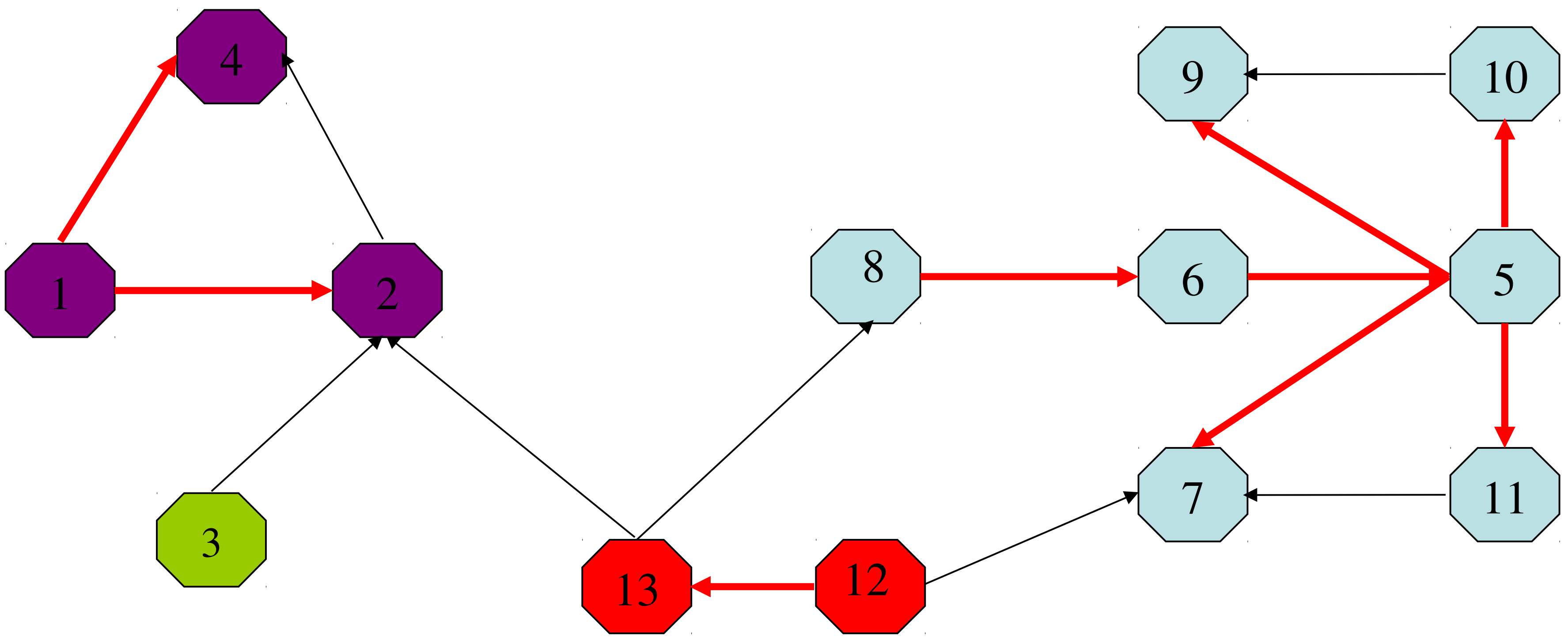
Forêt couvrante associée à un parcours.

Soit $L=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ un parcours de G.

On choisit pour chaque sommet s_j (non point de régénération) un prédécesseur s_k avec $1 \leq k \leq j-1$.
On note alors $père_L(s_j)$ le prédécesseur de s_j choisi.

Le graphe partiel de G formé des arêtes (arcs) $(père_L(s_j),s_j)$ est une forêt couvrante de G notée F(L).

F(L) est formée de r arborescences $A_1(L), A_2(L),\ldots,A_r(L)$ où $A_k(L)$ est une arborescence dont la racine est le $k^{ième}$ point de régénération.



Un parcours : L= (1,2,4,3,8,6,5,9,10,7,11,12,13)

Points de régénération : {1,3,8,12}

Le graphe partiel des arcs rouges est une forêt F(L) couvrante de G.

Quiz : Composantes connexes

Au terme d'un parcours d'un graphe non-orienté G, le nombre d'arêtes de la forêt couvrante associée est k. Quel est le nombre de composantes connexes de G ?

A) k
B) k+1
C) n-k-1
D) n-k

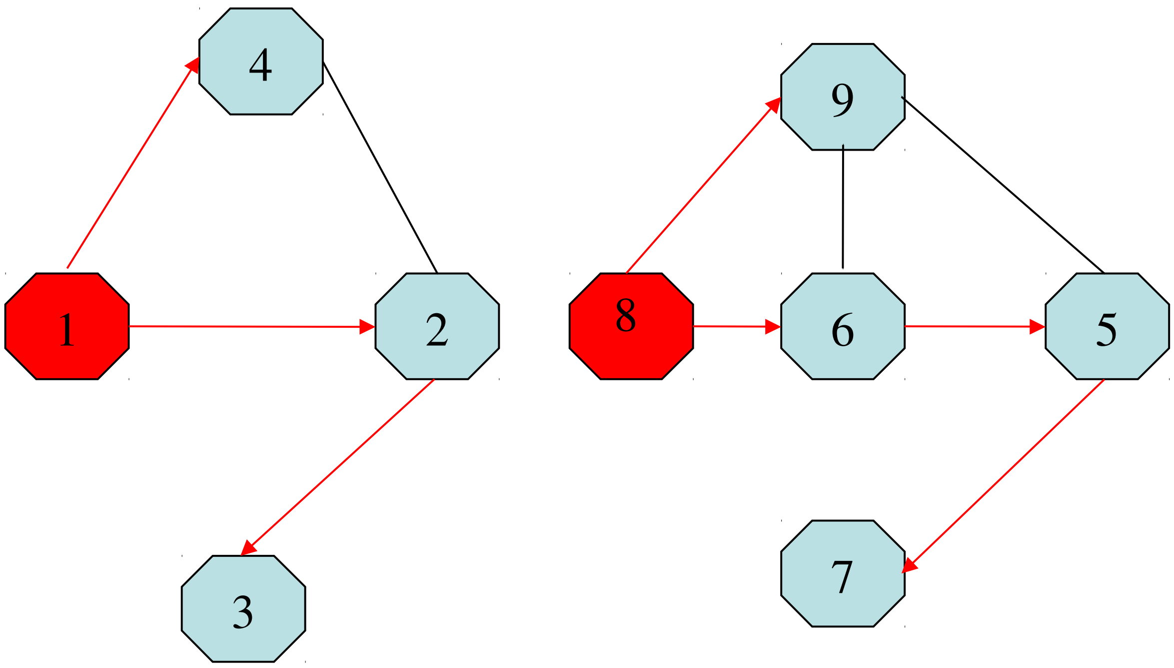
Parcours en largeur
Parcours en profondeur

Soit $L=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ un parcours de G.

L est un parcours en largeur de G si tout sommet visité s_i,
qui n'est pas un point de régénération,
est voisin du premier sommet visité ouvert de L[1..i-1].
Remarque : $\text{père}_L(s_i)$ est le premier sommet visité ouvert de L[1..i-1].

L est un parcours en profondeur de G si tout sommet visité s_i,
qui n'est pas un point de régénération,
est voisin du dernier sommet visité ouvert de L[1..i-1].
Remarque : $\text{père}_L(s_i)$ est le dernier sommet visité ouvert de L[1..i-1].

Exemple de parcours en largeur



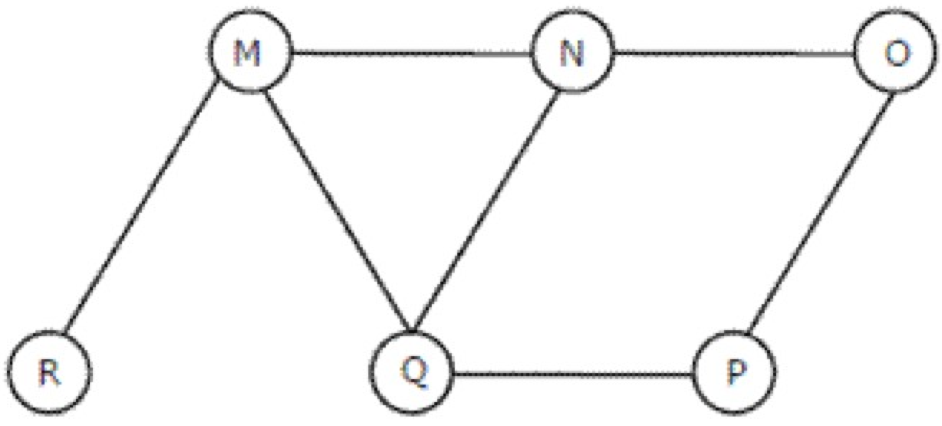
(1)
(1,2)
(1,2,4)
(1,2,4,3)
(1,2,4,3,8)
(1,2,4,3,8,6)
(1,2,4,3,8,6,9)
(1,2,4,3,8,6,9,5)
(1,2,4,3,8,6,9,5,7)

Après chaque étape :
- premier sommet visité ouvert en rouge ;
- autres sommets visités ouverts en vert.

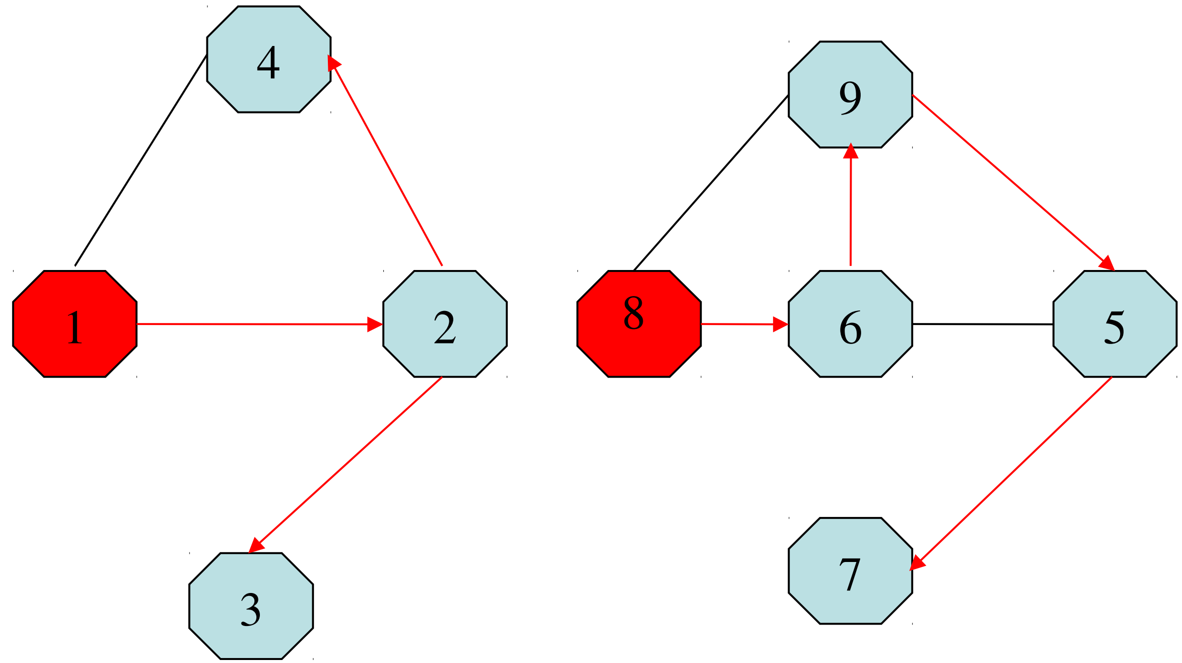
Quiz : Parcours en largeur

Laquelle des listes de sommets est un parcours en largeur possible du graphe ?

A) (M,N,O,P,Q,R)
B) (N,Q,M,P,O,R)
C) (Q,M,N,P,R,O)
D) (Q,M,N,P,O,R)



Exemple de parcours
en profondeur



(1)
(1,2)
(1,2,4)
(1,2,4,3)
(1,2,4,3,8)
(1,2,4,3,8,6)
(1,2,4,3,8,6,9)
(1,2,4,3,8,6,9,5)
(1,2,4,3,8,6,9,5,7)

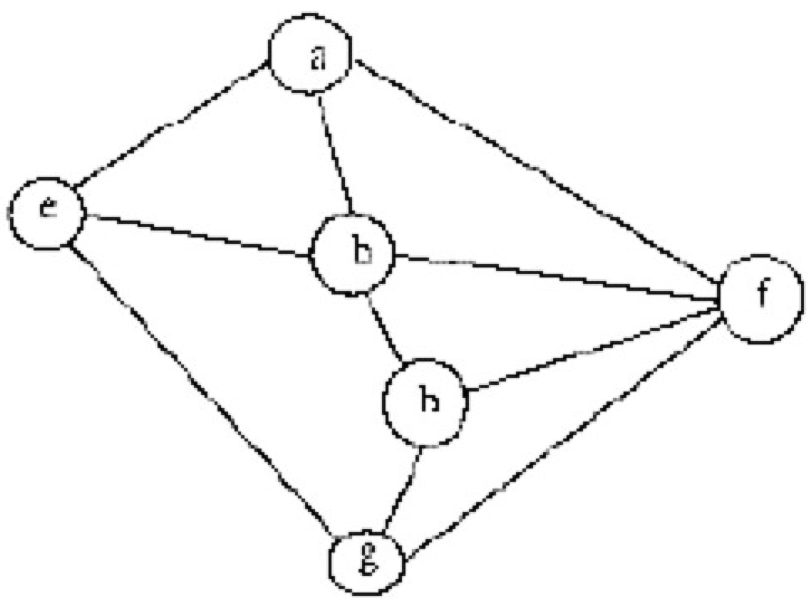
Après chaque étape :
- dernier sommet visité ouvert
  en rouge ;
- autres sommets visités
  ouverts en vert.

Quiz : Parcours en profondeur

Parmi les listes suivantes, lesquelles sont des parcours en profondeur du graphe ?

1. (a,b,e,g,h,f) 2. (a,b,f,e,h,g) 3. (a,b,f,h,g,e) 4. (a,f,g,h,b,e)

A) 1, 2 et 3 seulement
B) 1 et 4 seulement
C) 2, 3 et 4 seulement
D) 1, 3 et 4 seulement



Récapitulatif
(graphe orienté)

- La bordure $B(T)$ d'un sous-ensemble T de sommets est constituée de l'ensemble des sommets de S-T dont au moins un prédécesseur est dans T.
- Parcours : rangement $L = (s_1,\ldots,s_n)$ des sommets du graphe où tout sommet $s_i \in B(\{s_1,\ldots,s_{i-1}\})$ ou $B(\{s_1,\ldots,s_{i-1}\}) = \emptyset$
- Un sommet s_i tel que $B(\{s_1,\ldots,s_{i-1}\}) = \emptyset$ est un point de régénération (par convention, s_1 est un point de régénération)
- On choisit pour chaque sommet s_j (non point de régénération) un prédécesseur s_k avec $1 \leq k \leq j-1$. On note alors $père_L(s_j)$ le prédécesseur de s_j choisi.
- Le graphe partiel de G formé des arcs $(père_L(s_j),s_j)$ est une forêt couvrante de G notée $F(L)$.

Récapitulatif
(graphe orienté)

- Un sommet s_i est dit ouvert dans $\{s_1,\ldots,s_k\}$ si il comporte un successeur dans $S - \{s_1,\ldots,s_k\}$.
- Parcours en largeur : tout sommet s_i (non point de régénération) est successeur du premier sommet ouvert dans $\{s_1,\ldots,s_{i-1}\}$.
- Parcours en profondeur : tout sommet s_i (non point de régénération) est successeur du dernier sommet ouvert dans $\{s_1,\ldots,s_{i-1}\}$.
- A un parcours en largeur ou en profondeur correspond une unique forêt couvrante.

Quiz : Nombre d'itérations

Quelle est la valeur de la variable *compteur* au terme de l'algorithme ci-dessous, pour un graphe orienté *G=(S,A)* à *n* sommets et *m* arcs représenté sous forme de listes de successeurs ?

compteur ← *0*
pour tout sommet x dans S faire
        pour tout successeur y de x faire
                compteur ← *compteur+1*

A) n
B) m
C) n+m
D) nm

Quiz : Complexité

Quelle est la complexité de l'algorithme ci-dessous, pour un graphe orienté $G=(S,A)$ orienté à n sommets et m arcs représenté sous forme de listes de successeurs ?

compteur ← 0
pour tout sommet x dans S faire
    pour tout successeur y de x faire
        compteur ← compteur+1

A) O(n)
B) O(m)
C) O(n+m)
D) O(nm)

Algorithme de parcours en largeur

(graphe orienté)

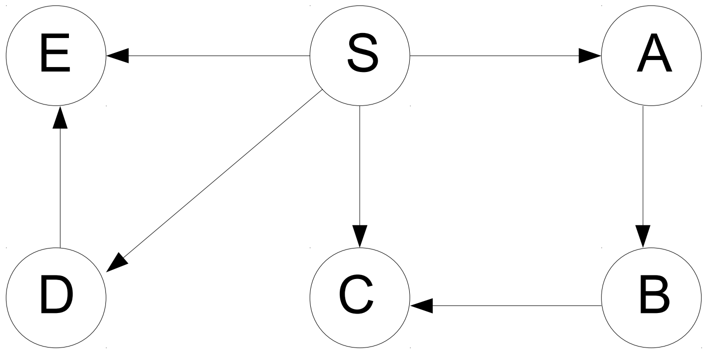
```
Procédure Largeur(G)
début
      pour chaque sommet de s de G  faire
            visité[s]:=0;
      compteur:=0;
      pour chaque sommet s de G  faire
            si visité[s]==0 alors Explorer(G,s);
fin

Procédure Explorer(G,s)
début
      F:=FileVide(); compteur++; visité[s]:=compteur; Enfiler(F,s);
      tant que F n'est pas vide faire
            x:=Defiler(F);
            pour chaque y successeur de x faire
                  si visité[y]==0 alors
                        compteur:=compteur+1; visité[y]:=compteur;
                        Enfiler(F,y);
fin
```

compteur est une variable globale.

A la fin de **Explorer(G,*s*)**, on a **visité[*s′*]>0** pour tout sommet ***s′*** accessible à partir de ***s*** par un chemin de sommets non visités.
L'algorithme numérote chaque sommet ***s*** par son rang dans le parcours en largeur, qui est indiqué dans **visité[*s*]**.

Exemple



Ordre de visite des sommets	F après visite du sommet
	[S]
S	[A C D E]
A	[C D E B]
C	[D E B]
D	[E B]
E	[B]
B	[ ]

Analyse de complexité

- On suppose une représentation du graphe G par des listes de successeurs
- Il y a au plus un appel **`Explorer(G,s)`** par sommet ***s***, du fait du tableau **`visité`**
- Lors d'un appel **`Explorer(G,s)`**, il y a les pas suivants :

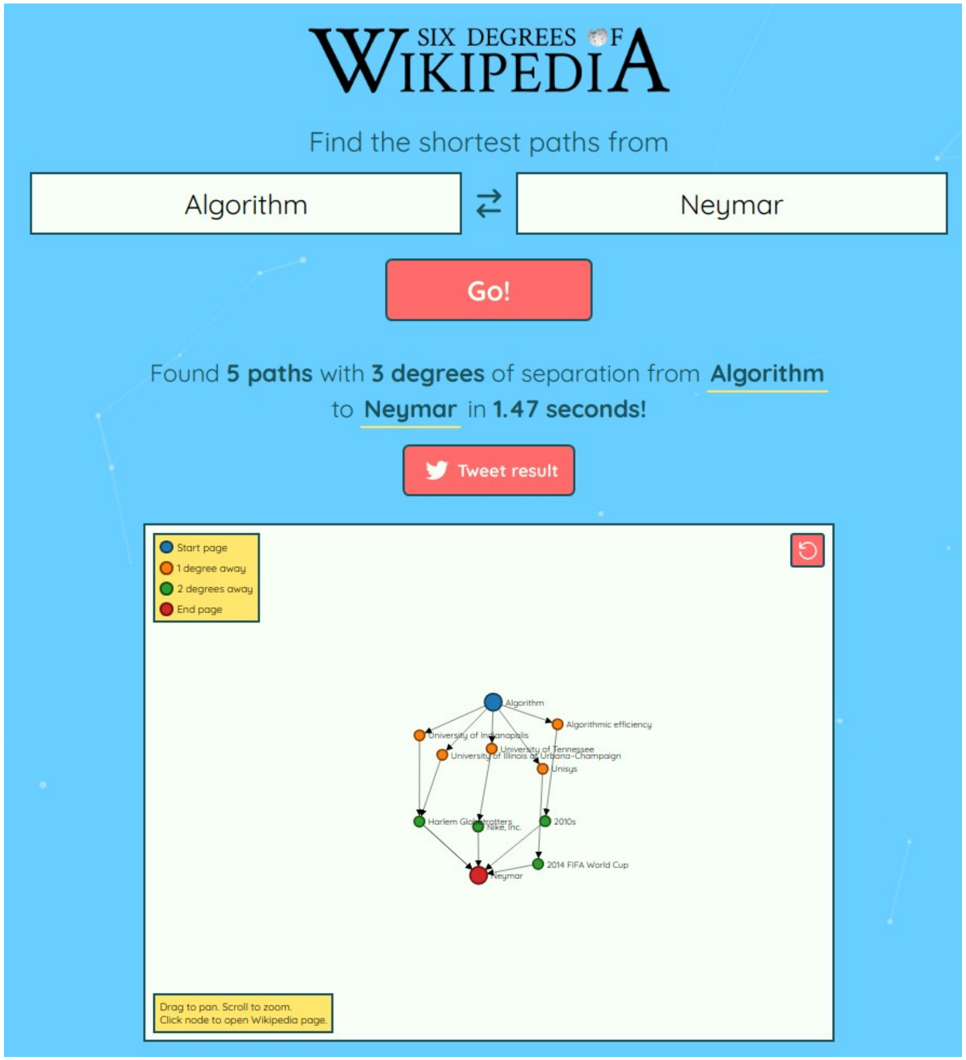
  1. Des opérations en temps constants (création de **`F`**, incrémentation de **`compteur`**, mise à jour de **`visité[s]`**, insertion dans **`F`**)
  2. Une boucle **`pour`** qui scanne les arcs issus de ***x***, imbriquée dans une boucle **`tant que`** sur les sommets ***x***

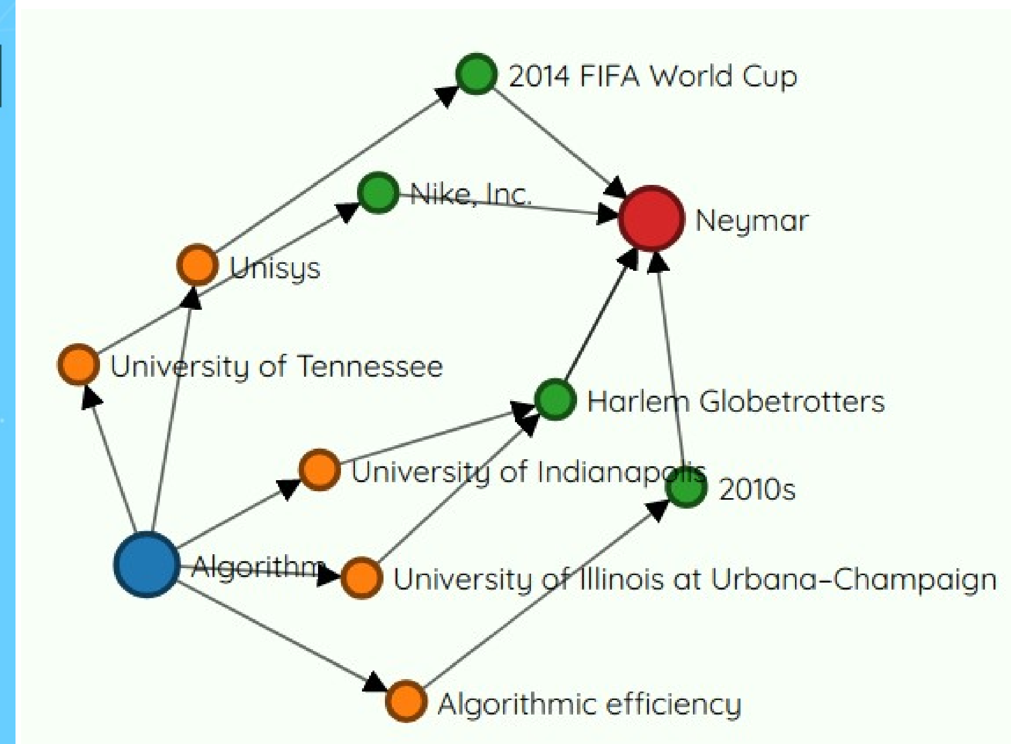
  - La complexité cumulée du pas 1, en comptant tous les appels, est O(*n*) où *n* le nb de sommets de G, car il y a au plus *n* appels à la procédure **`Explorer`**
  - La complexité cumulée du pas 2, en comptant tous les appels, est O(*n*+*m*) où *m* le nb d'arcs de G, puisque chaque sommet de G est inséré une seule fois dans la file **`F`** (du fait de la condition **`visité[y]==0`**) et chaque arc de G est examiné une fois

- La complexité globale de l'algorithme est donc O(n+m)

Remarque : la complexité cumulée en O(n+m) du pas 2 est liée à l'utilisation de listes de successeurs

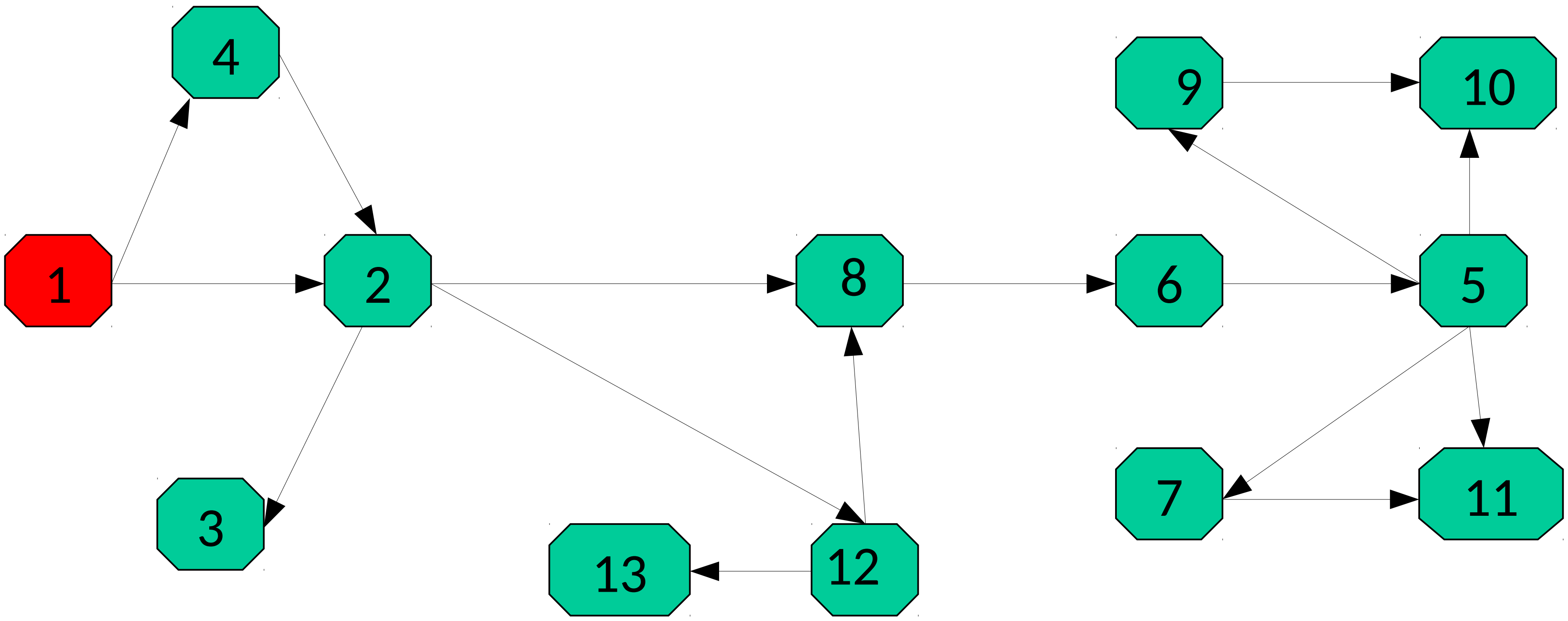
Six degrés de Wikipédia





Déterminer la distance minimale entre deux sommets peut se faire à l'aide d'un parcours en largeur.

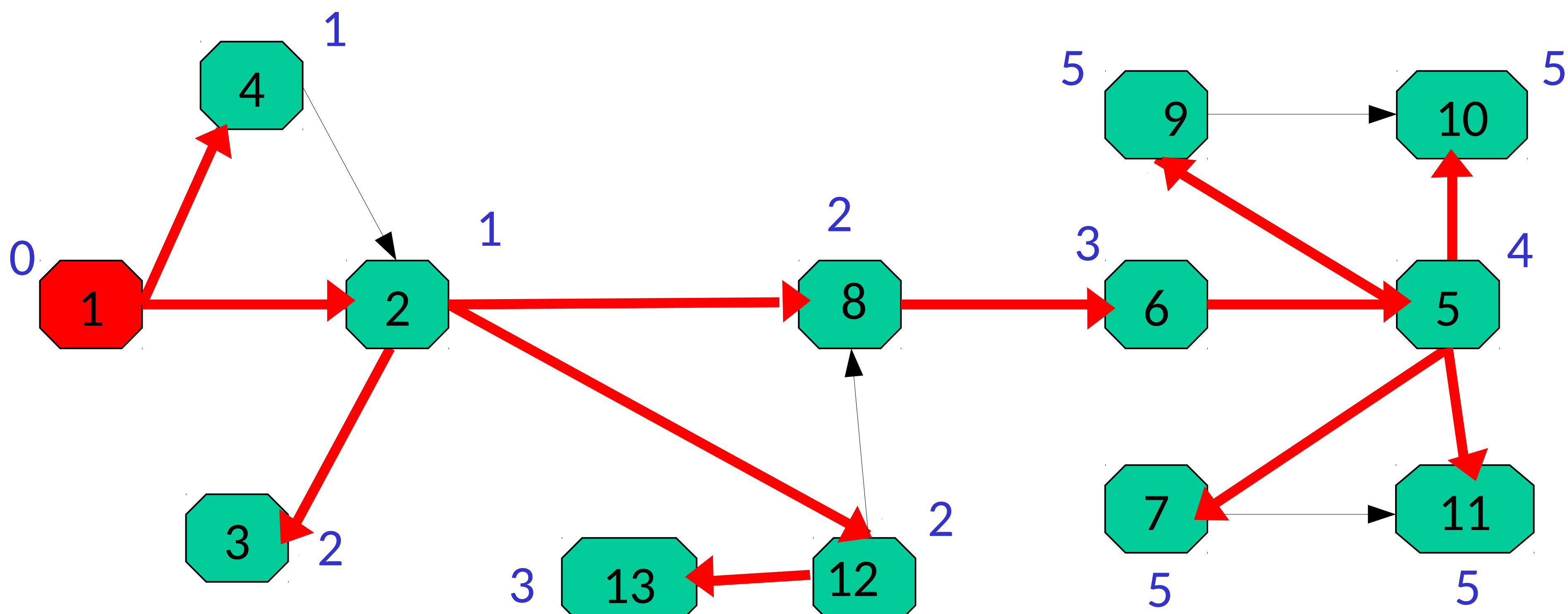
Exemple de calcul des distances



d[x] : longueur d’un chemin min en nombre d’arcs de 1 à x
Calcul de d[x] : lors de la visite du sommet x, on fait

$$d[x] = d[\text{père}_L(x)]+1.$$

Exemple de calcul des distances



Parcours en largeur : (1,2,4,3,8,12,6,13,5,7,9,10,11)
d[x] : longueur d'un chemin min en nombre d'arcs de 1 à x
Calcul de d[x] : lors de la visite du sommet x, on fait

$$d[x] = d[père_L(x)]+1.$$

Pseudo-code et idée de la preuve

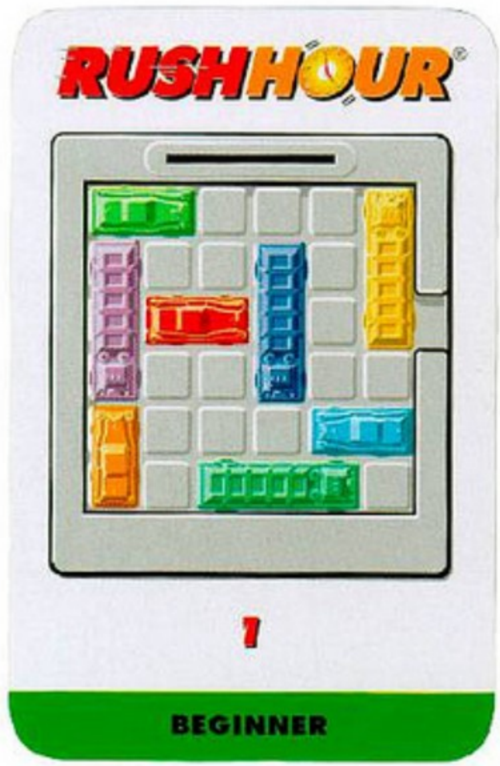
On suppose que le tableau **d** est initialisé à **d[*x*]:=-1** pour tout sommet ***x***. On cherche à déterminer les distances en nombre d'arcs depuis un sommet ***s*** racine du graphe orienté **G**.

```
Procédure Distance(G,s)
début
      F:=FileVide(); d[s]:=0; Enfiler(F,s);
      tant que F n'est pas vide faire
            x:=Defiler(F);
            pour chaque y successeur de x faire
                  si d[y]==-1 alors
                        d[y]:=d[x]+1; Enfiler(F,y);
fin
```

Idée de la preuve. On peut prouver par récurrence la propriété suivante :

Pour chaque δ=0,1,..., il y a une étape de l'algorithme au terme de laquelle
(1) tous les sommets à distance ≤ δ de *s* ont leur distance correctement fixée,
(2) tous les autres sommets ont leur distance fixée à -1,
(3) la file contient exactement les sommets à distance δ.

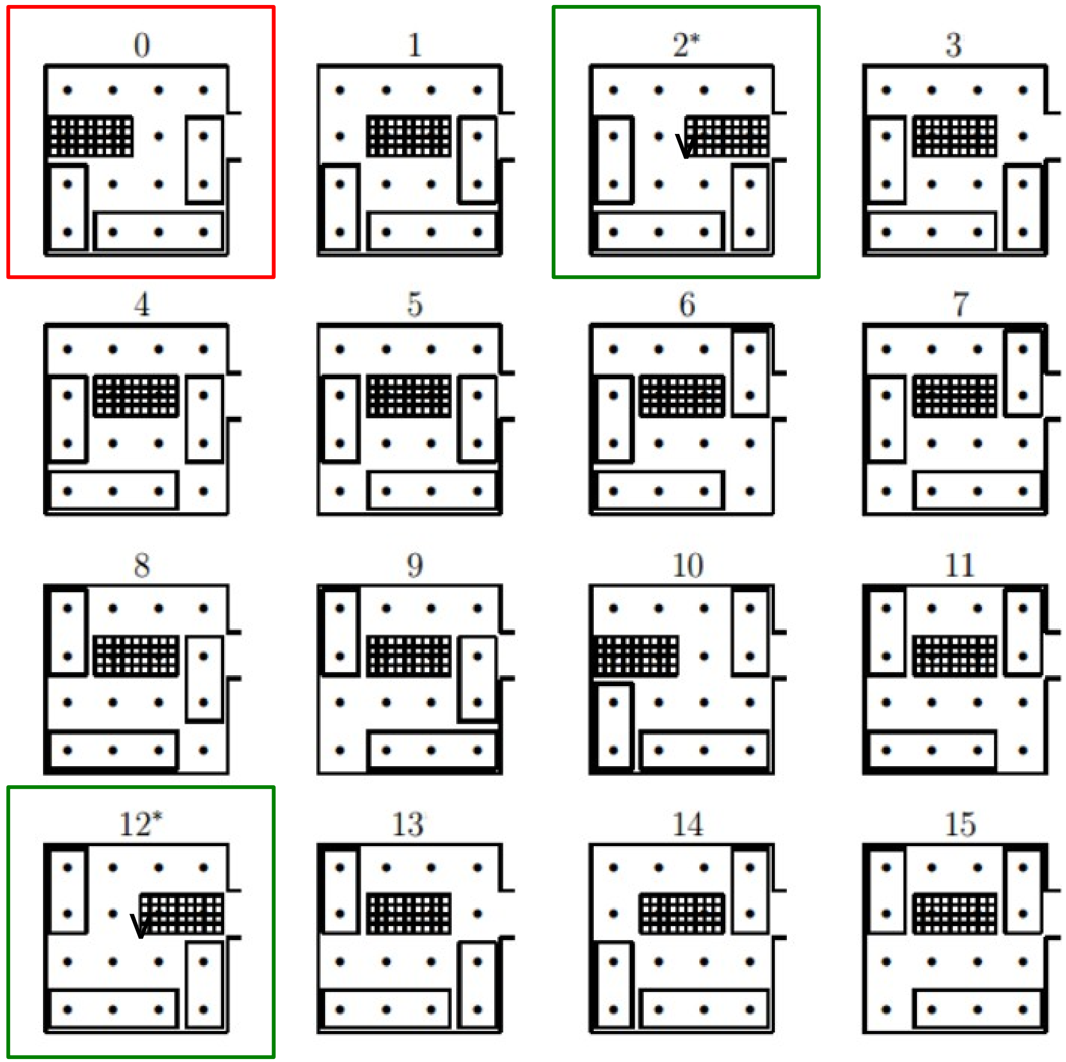
Résolution de Rush hour®



Objectif : minimiser le nombre de déplacements de véhicules pour faire sortir la voiture rouge de l’embouteillage.

Configurations possibles

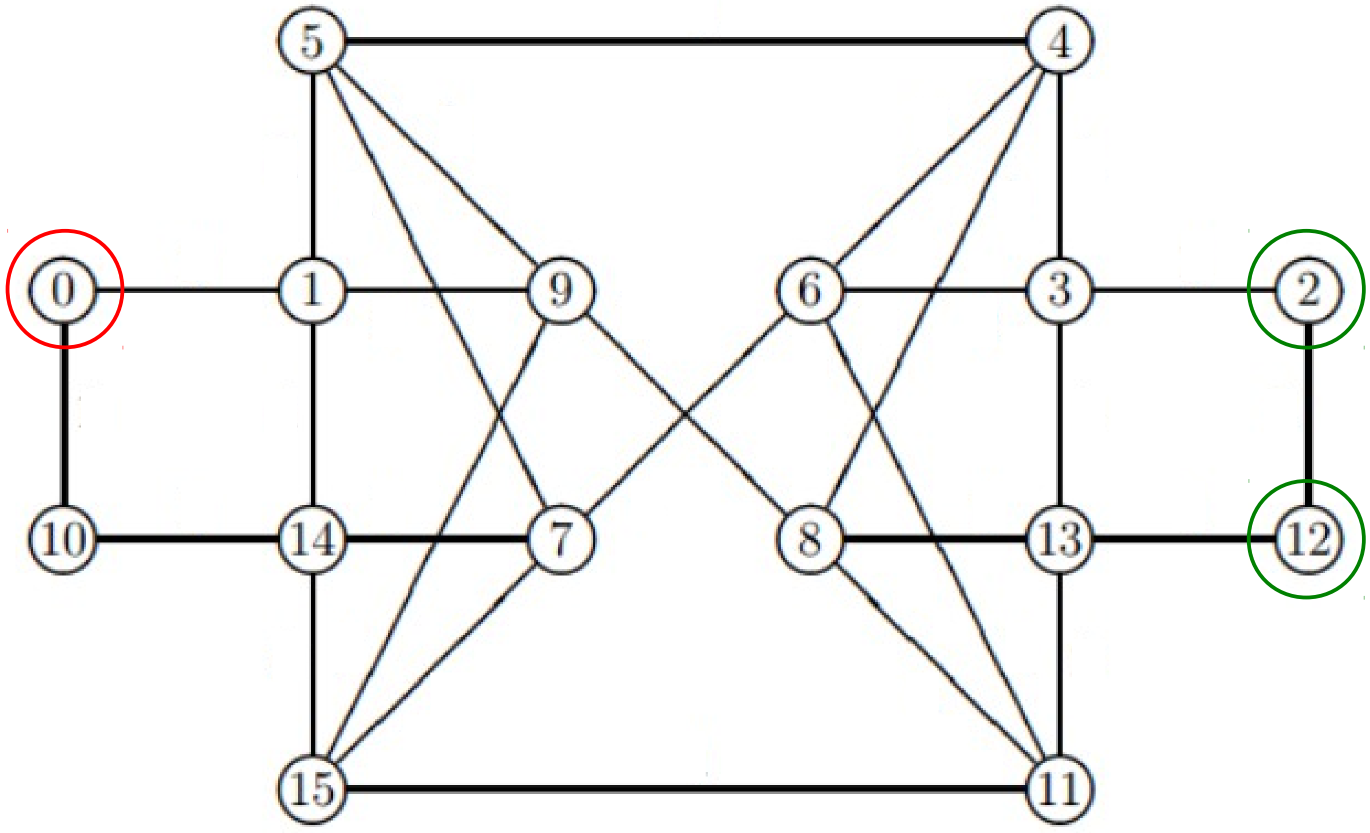
Configuration de départ Configuration but



Configuration but

Graphe des configurations

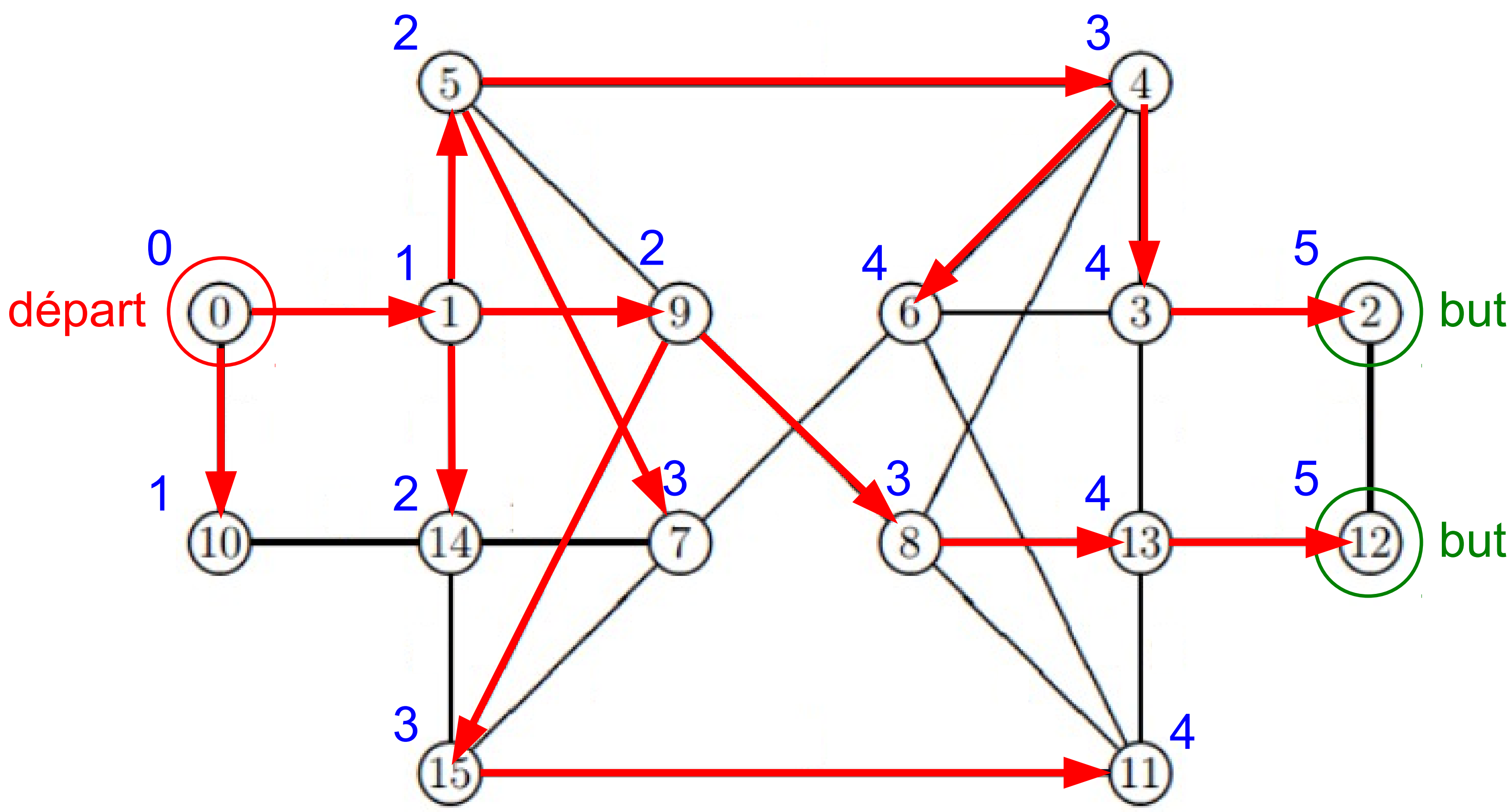
Graphe non-orienté G=(S,A) défini par :
S = {configurations possibles}
A = {{i,j} : on peut passer de i à j ou de j à i en un déplacement de véhicule}



On recherche une plus courte chaîne en nombre d'arêtes entre le sommet 0 et le sommet 2 ou le sommet 12.

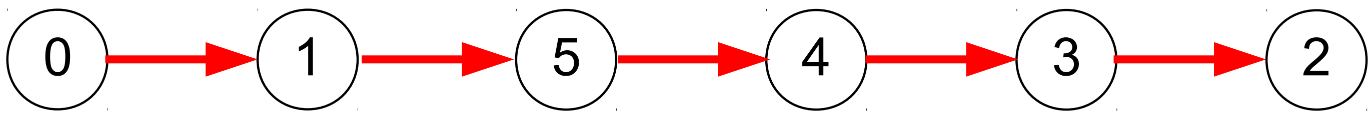
Parcours en largeur

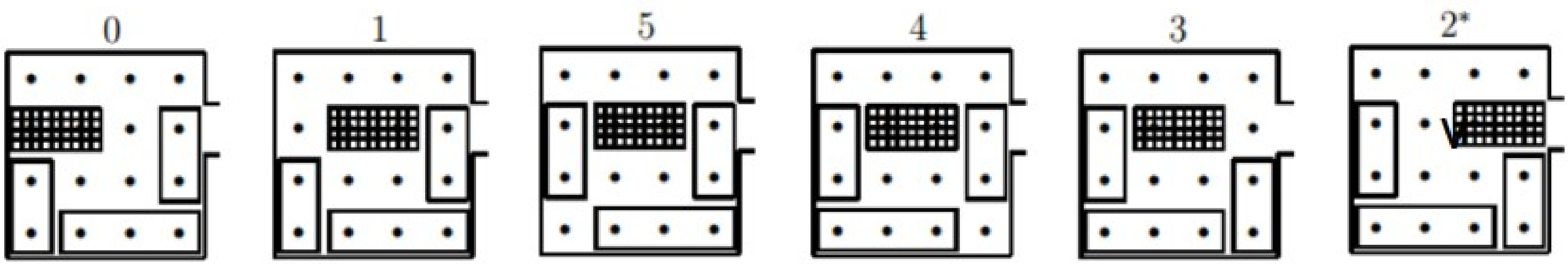
Parcours : (0, 1, 10, 5, 9, 14, 4, 7, 8, 15, 3, 6, 11, 13, 2, 12)



Une solution optimale

Le chemin de 0 à 2 dans la forêt couvrante associée au parcours en largeur est une solution optimale au problème.





Les 40 configurations de départ proposées dans le jeu, dont la grille est de taille fixée, peuvent toutes être résolues par parcours en largeur.

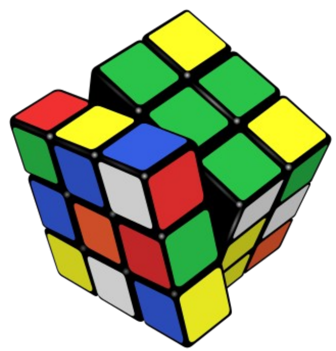
Remarque : en pratique, le graphe des configurations est généré « à la volée », au fur et à mesure du parcours.

Résolution de casse-têtes par parcours en largeur

Autres exemples de casse-têtes :

Taquin

Rubik's Cube



Le loup le chou et la chèvre

En notant b le facteur de branchement et d la distance minimum de la configuration de départ à une configuration but, et en se plaçant dans le cas où le graphe des configurations est un arbre, le nombre de configurations générées, et donc la complexité, s'écrit :

$$1 + b + b^2 + \ldots + b^d = (b^{d+1}-1) / (b-1) \rightarrow O(b^d)$$

Autrement dit, approche praticable sur des petits problèmes.

Quiz : Parcours en largeur

Soit *G* un graphe non-orienté représenté par une matrice d'adjacence. Quelle est la complexité d'un parcours en largeur de *G* ?

A) $O(n)$
B) $O(n+m)$
C) $O(n^2)$
D) $O(nm)$

Algorithme de parcours en profondeur

(graphe orienté)

```
Procédure Prof(G)
début
      pour chaque sommet de s de G  faire
            visité[s] := faux ;
      pour chaque sommet s de G  faire
            si non visité[s] alors Explorer(s) ;
fin

Procédure Explorer(G,s)
début
      visité[s] := vrai ;
      prévisite(s) ;
      pour chaque t successeur de s faire {
            action éventuelle sur l'arc (s,t) ;
            si non  visité[t]  alors Explorer(G,t) ; }
      postvisite(s) ;
fin
```

A la fin de `Explorer(G,s)`, on a visité[v]=vrai pour tout sommet v accessible à partir de s par un chemin de sommets non visités.

Les procédures **`prévisite`** et **`postvisite`** sont optionnelles, et correspondent à des opérations qu’on réalise quand l’appel récursif sur un sommet débute, et quand il se termine.

Prévisite et postvisite

Pour chaque sommet s, on va noter les moments de deux événements importants :

- Le moment du début de l'appel récursif Explorer(s)
- Le moment de la fin de l'appel récursif Explorer(s)

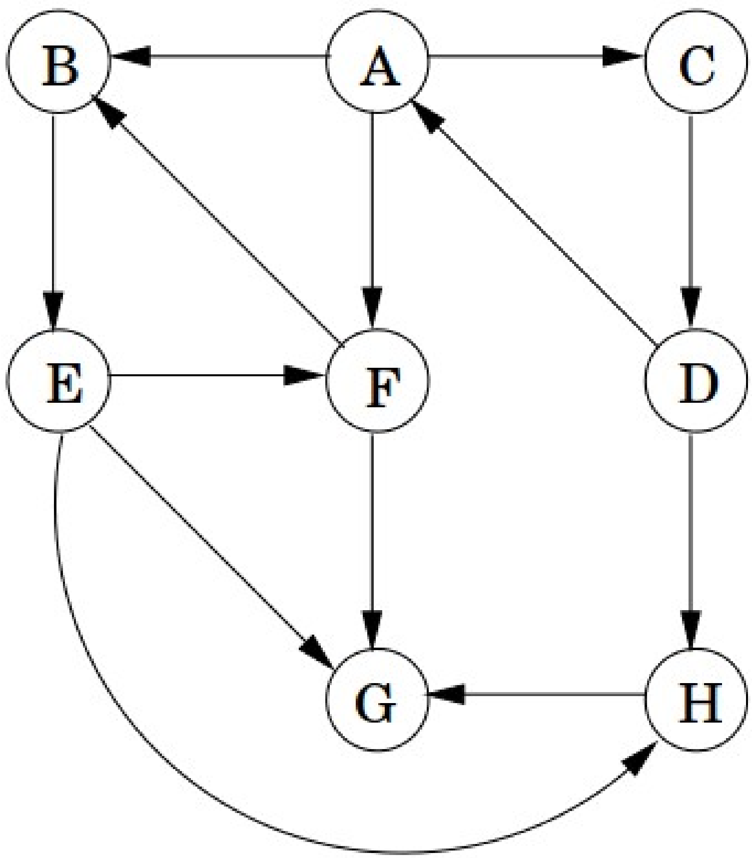
```
Procédure prévisite(s)
pre[s] := num
num := num + 1
```

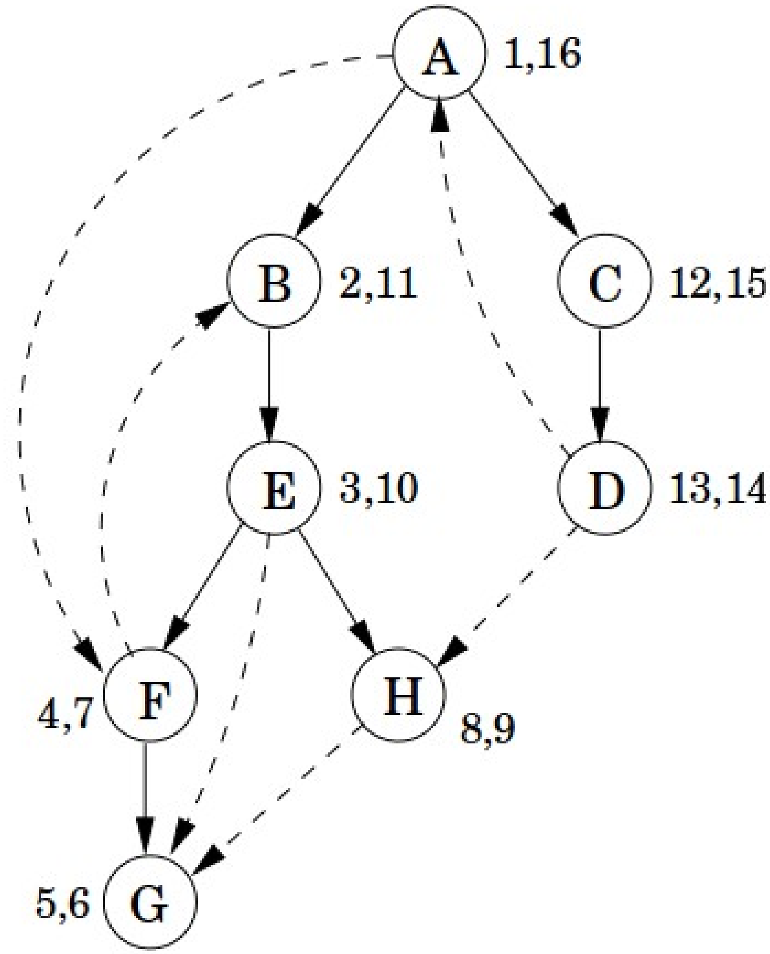
```
Procédure postvisite(s)
post[s] := num
num := num + 1
```

(**num** est une variable globale initialisée à 1)

Propriété. A l'issue du parcours en profondeur, pour tout couple (s_1,s_2) de sommets :
- soit les deux intervalles $[pre(s_1),post(s_1)]$ et $[pre(s_2),post(s_2)]$ sont disjoints,
- soit l'un est contenu dans l'autre.

Exemple





Les arcs en pointillés n'appartiennent pas à la forêt sous-jacente.

Analyse de complexité

- On suppose une représentation du graphe G par des listes de successeurs
- Il y a un appel récursif **`Explorer`**(s) par sommet s, du fait du tableau **`visité`**
- Lors d'un appel récursif **`Explorer`**(s), il y a les pas suivants :

  1. Des opérations en temps constants + opérations de **`pré/postvisite`**
  2. Une boucle qui scanne les arcs issus de s

  – La complexité cumulée du pas 1, en comptant tous les appels récursifs, est $O(n)$ où n le nb de sommets, puisque chaque sommet est visité une seule fois

  – La complexité cumulée du pas 2, en comptant tous les appels récursifs, est $O(m)$ où m le nb d'arcs de G, puisque chaque arc du graphe G est examiné une fois
- La complexité globale de l'algorithme est donc $O(n+m)$
- **Remarque :** la complexité cumulée en O(m) du pas 2 est liée à l'utilisation de listes de successeurs

Quiz : Parcours d’un arbre

Quelle est la complexité d'un algorithme de parcours dans un arbre (choisir la réponse la plus précise possible), représenté sous forme de listes d'adjacence ?

A) $O(n^2)$
B) $O(n)$
C) $O(m)$
D) $O(n+m)$

Quiz : Parcours d'une clique

Quelle est la complexité d'un algorithme de parcours dans un graphe complet (choisir la réponse la plus précise possible), représenté sous forme de listes d'adjacence ?

A) $O(n)$
B) $O(m)$
C) $O(n^2)$
D) $O(m^2)$

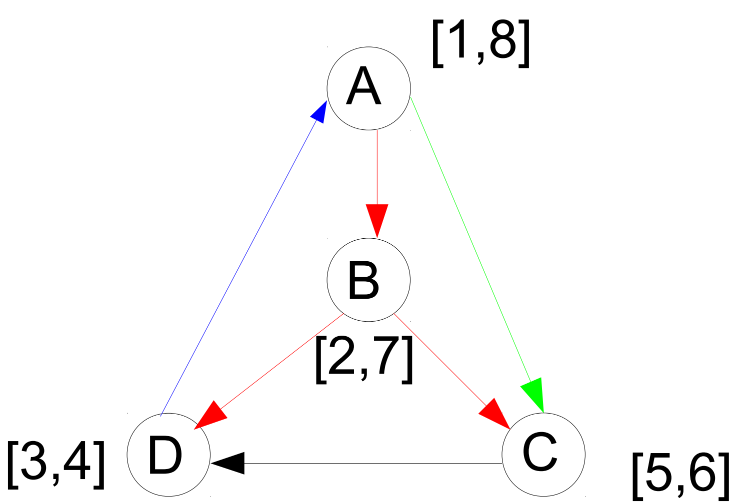
Arcs associée à un parcours en profondeur

Soit $L=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ un parcours en profondeur de G .

Soit F(L) sa forêt sous-jacente.

Les arcs de G sont classés en 4 groupes :

1) les arcs de F(L) ;
2) les arcs 'avant' (s_i,s_j) : s_j est un descendant de s_i dans F(L) ;
3) les arcs 'arrière' (s_i,s_j) : s_i est un descendant de s_j dans F(L) ;
4) les arcs 'transverses' (s_i,s_j) : tous les autres arcs.



arc (u,v)	groupe
$[_u \quad [_v \qquad]_v \quad]_u$	F(L) / arc 'avant'
$[_v \quad [_u \qquad]_u \quad]_v$	arc 'arrière'
$[_v \quad]_v \qquad [_u \quad]_u$	arc transverse

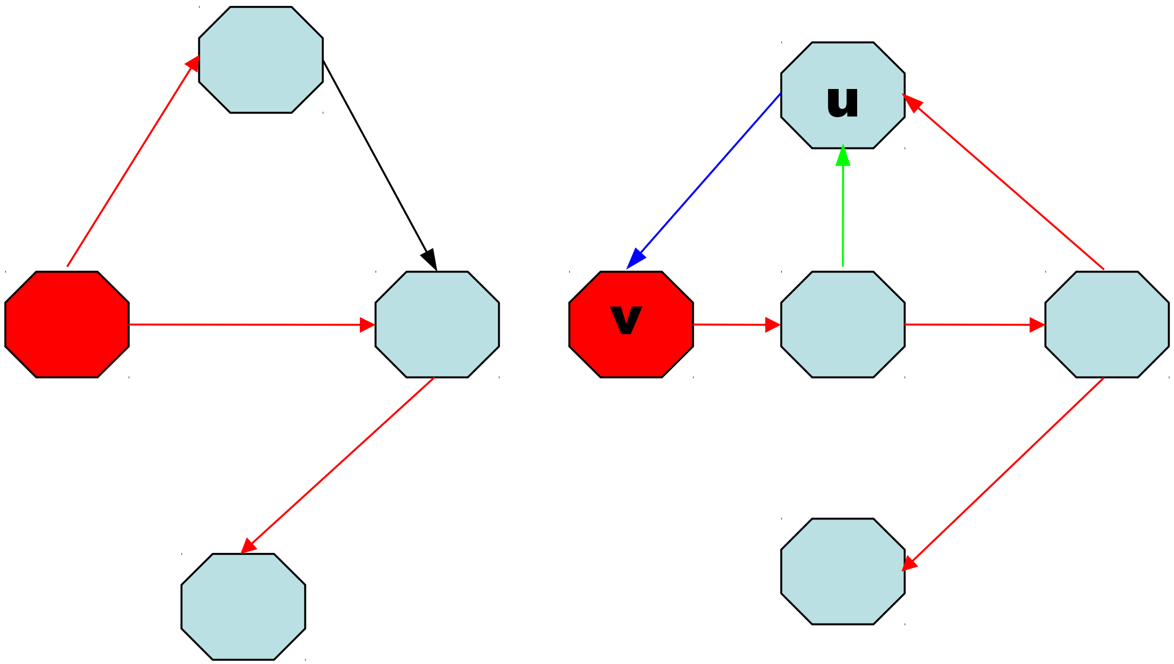
Existence d'un circuit

Problème :
Soit G= (S,A) un graphe orienté.
Existe t-il un circuit dans G ?

Existence de circuit :
Soit $L=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ un parcours en profondeur de G
et soit F(L) sa forêt sous-jacente.
G est sans circuit si et seulement s'il n'existe pas d'arc arrière pour L.

Graphe sans circuit → pas d'arc arrière

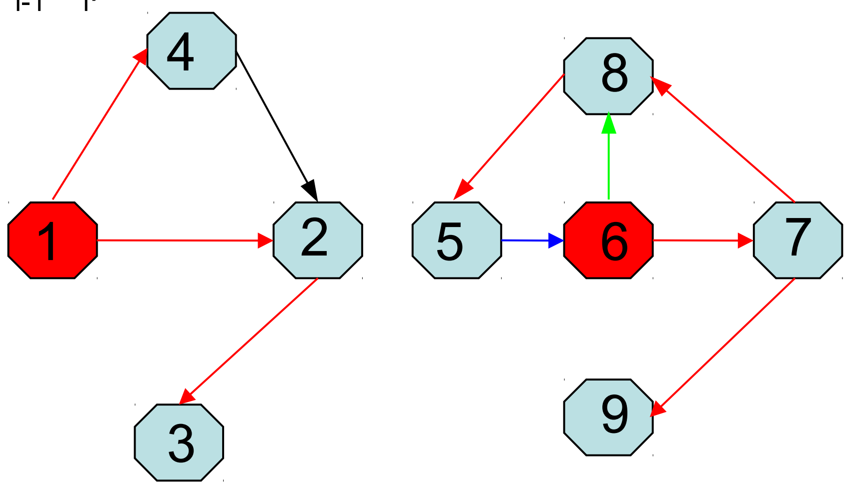
Par contraposée : si il existe un arc arrière (u,v), on construit un circuit en concaténant (u,v) et le chemin de v à u dans F(L)



Graphe avec circuit → arc arrière

Lemme des sommets accessibles
Soit L un parcours en profondeur de G et s un sommet de G.
A l'instant même où le sommet s est visité par L, on peut *caractériser l'ensemble exact* des sommets de G qui seront **les descendants de s dans F(L)** : il s'agit de l'ensemble des sommets de G accessibles depuis s par un chemin de sommets non-visités (s exclus).
Les descendants de s dans F(L) ne dépendent donc pas de l'ordre de visite des sommets venant après s dans L.

Soit $C=(s_1,...,s_k)$, un circuit dans G. Soit s_i le premier sommet de C visité dans le parcours en profondeur.
D'après le lemme des sommets accessibles, les autres sommets de C sont des descendants de s_i dans F(L).
Donc (s_{i-1},s_i) est un arc arrière.

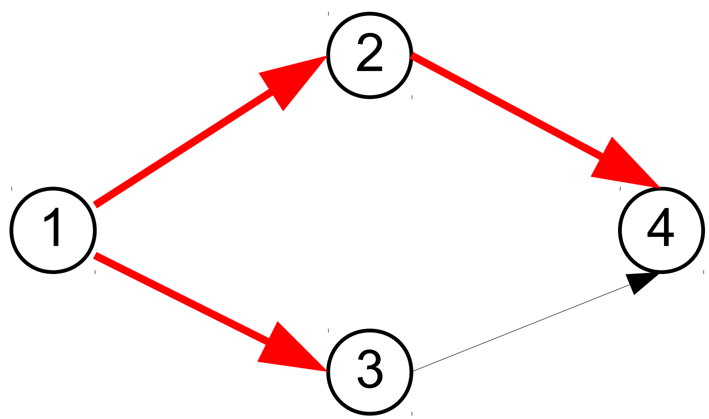


C=(5,6,7,8)
6 visité en 1er
(5,6) arc arrière

Remarque importante

Le lemme des sommets accessibles n'est pas valide pour un parcours en largeur.

Exemple :



On considère le parcours en largeur L=(1,2,3,4). La forêt couvrante associée F(L) est indiquée en rouge sur la figure.

Le sommet 4 est accessible par le chemin (3,4) lorsque le sommet 3 est visité dans le parcours en largeur, et pourtant le sommet 4 n'est pas descendant du sommet 3 dans F(L).

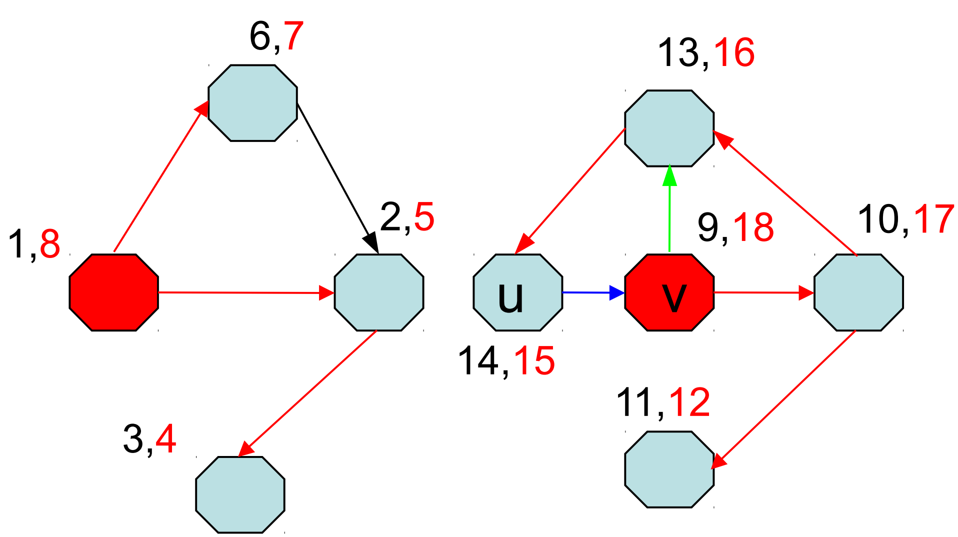
Algorithme de détection de circuit

Algorithme de détection de circuit

Pour détecter s'il existe un circuit dans un graphe il suffit donc de faire un parcours en profondeur de ce graphe et détecter si l'on trouve un arc arrière.

Détection d'un arc arrière

A l'issue du parcours en profondeur, on parcourt les listes de successeurs (en O(n+m)) pour détecter si il existe un arc (u,v) tel que post(u)<post(v).



arc (u,v)	**groupe**
$[_u \quad [_v \quad]_v \quad]_u$	F(L) / arc 'avant'
$[_v \quad [_u \quad]_u \quad]_v$	arc 'arrière'
$[_v \quad]_v \quad [_u \quad]_u$	arc transverse

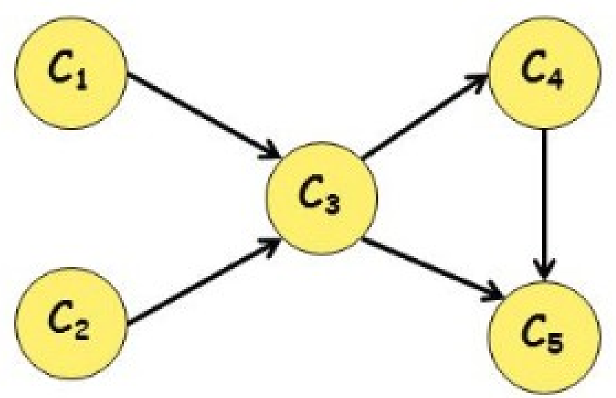
(les numérotations pré/postfixe sont indiquées sur le graphe)

Ordonnancement

Ensemble de 5 UEs : $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$

- C_1 et C_2 n'ont pas de prérequis
- Il vaut mieux avoir suivi C_1 et C_2 pour suivre C_3
- Il vaut mieux avoir suivi C_3 pour suivre C_4
- Il vaut mieux avoir suivi C_3 et C_4 pour suivre C_5

Le graphe représentant ces contraintes de précédence :

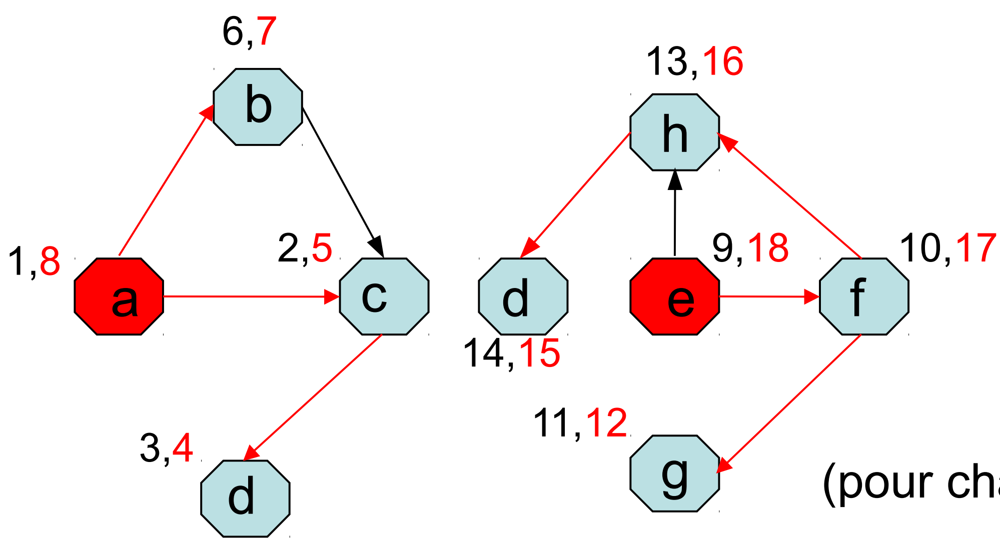


Un ordre réalisable dans lequel suivre les UEs : C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.

Tri topologique

- **Rappel :** un tri topologique de G est un rangement des sommets de G tel que v figure après u pour tout arc (u,v) de G.
- Un tri topologique est obtenu en rangeant les sommets dans l'ordre inverse de la numérotation postfixe d'un parcours en profondeur. Ce rangement peut être obtenu en $O(n+m)$ à l'aide d'une pile sur laquelle on empile chaque sommet s lorsque l'appel récursif `Explorer`(G,s) se termine.

> **Propriété**
> Dans un graphe orienté sans circuit, pour tout arc (u,v), post(u)>post(v).



tri topologique

e	f	h	d	g	a	b	c	d
18	17	16	15	12	8	7	5	4

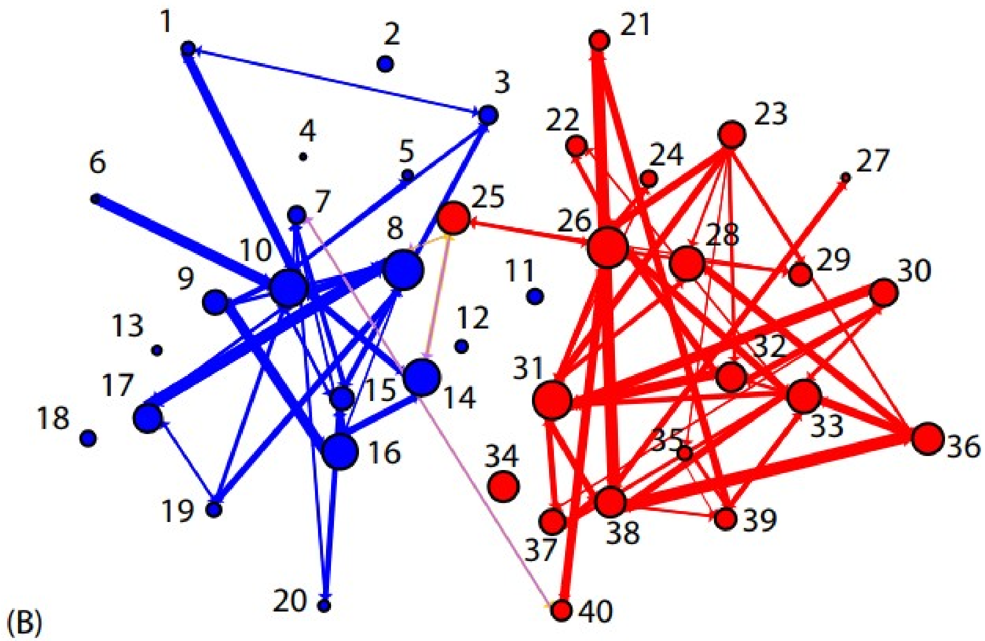
(pour chaque sommet s, post(s) est indiqué en rouge)

Détection de communautés

L'identification de composantes fortement connexes dans un graphe orienté permet de détecter des communautés.

Exemple : réseaux sociaux
On considère le graphe dont les sommets sont les utilisateurs du réseau social, et on met un arc d'un utilisateur auteur d'une publication vers un utilisateur qui y a répondu

Une grande composante fortement connexe indique la présence d'une communauté où de nombreux utilisateurs interagissent, directement ou indirectement.



Analyse des interactions dans la blogosphère politique américaine lors de l'élection présidentielle de 2004 (Adamic et Glance, 2005).

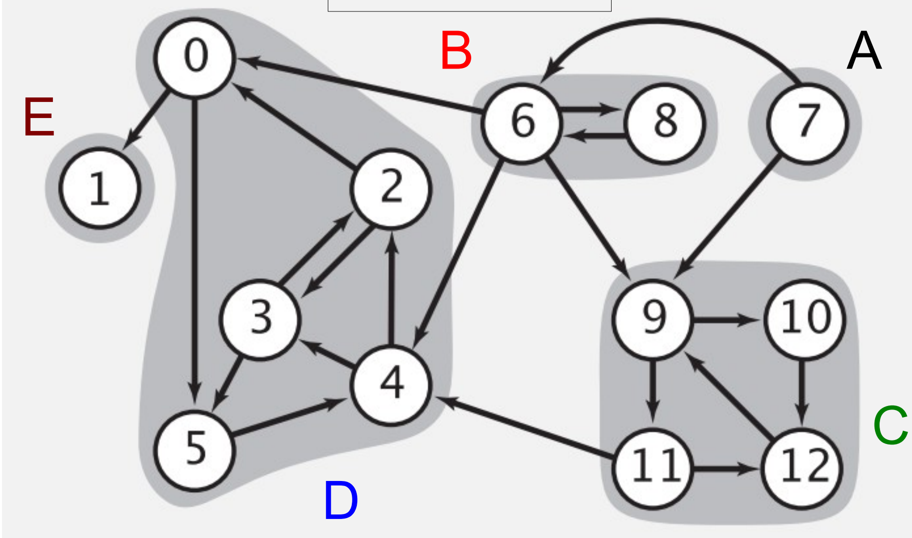
Détection des composantes fortement connexes

Algorithme pour déterminer les composantes fortement connexes (abrégées par CFC) d'un graphe G.

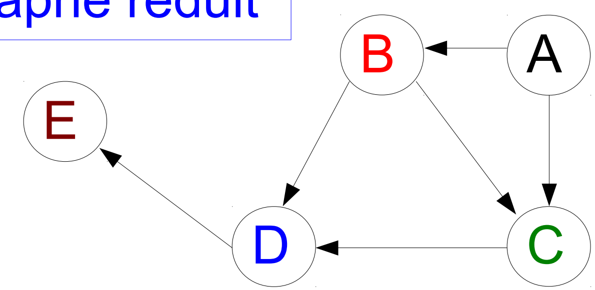
Composante fortement connexe terminale : une CFC est terminale si le sommet correspondant dans le graphe réduit n'a pas de successeur.

Idée : faire un parcours en profondeur de G en faisant en sorte que chaque point de régénération appartient à une composante fortement connexe terminale du sous-graphe des sommets non visités.

Graphe G



Graphe réduit

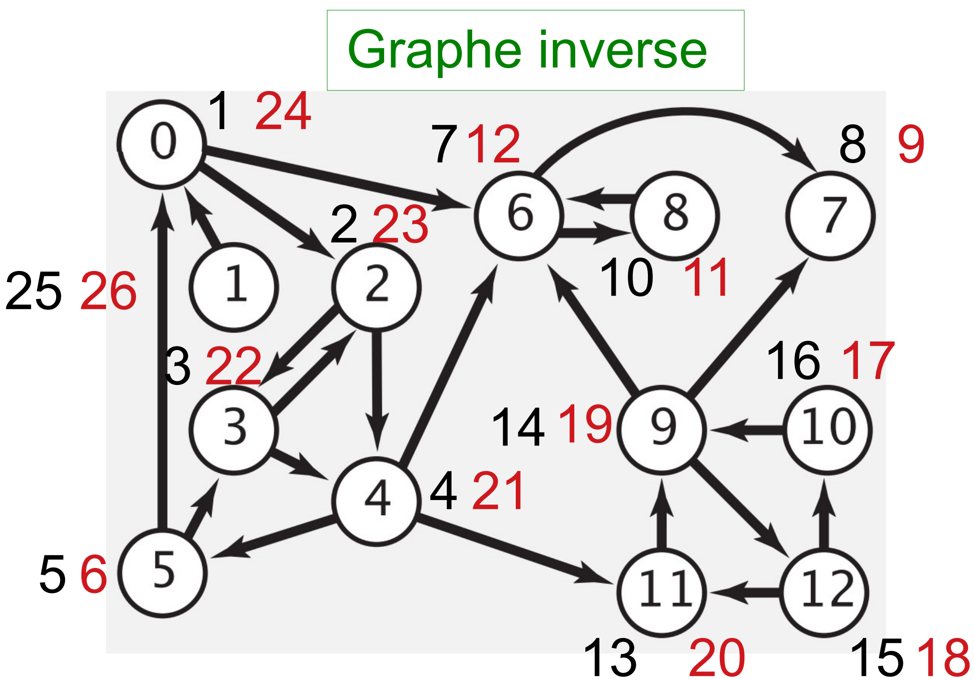


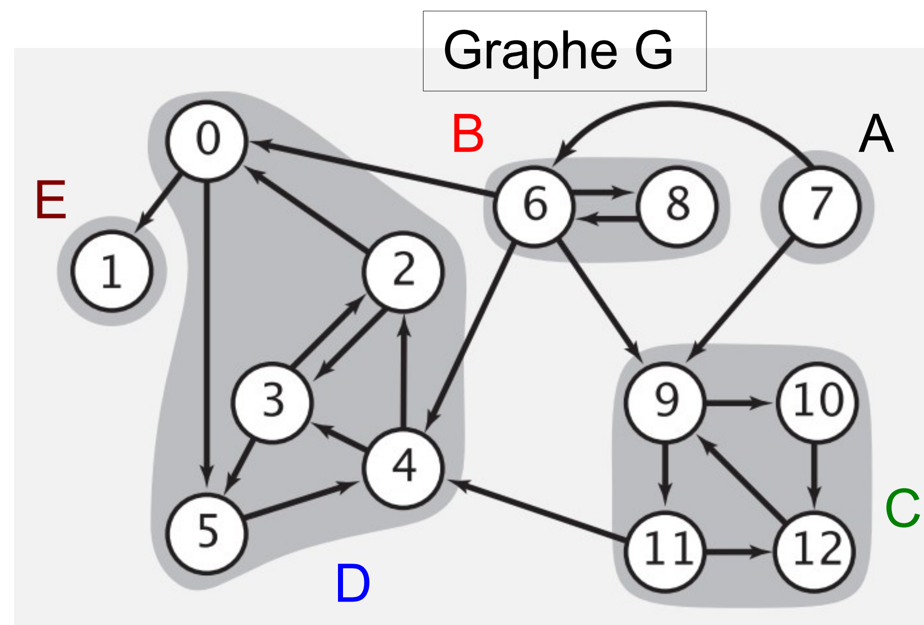
Un parcours en profondeur :
(1,0,5,4,2,3,11,12,9,10,6,8,7)
E D C B A

Algorithme de Kosaraju-Sharir

L'algorithme comporte trois étapes pour un graphe G :

1. Déterminer le graphe inverse de G.
2. Faire un parcours en profondeur du graphe inverse en effectuant une numérotation postfixe des sommets.
3. Faire un parcours en profondeur de G en démarrant par le sommet de plus grand numéro postfixe et en choisissant comme point de régénération, quand nécessaire, le sommet de plus grand numéro postfixe parmi les sommets non visités.





Parcours : (1,0,5,4,2,3,11,12,9,10,6,8,7)

Analyse de complexité

Etape 1 : La construction de la représentation du graphe inverse de G sous forme de listes de successeurs se fait en Θ(n+m) si G est lui même représenté sous forme de listes de successeurs.

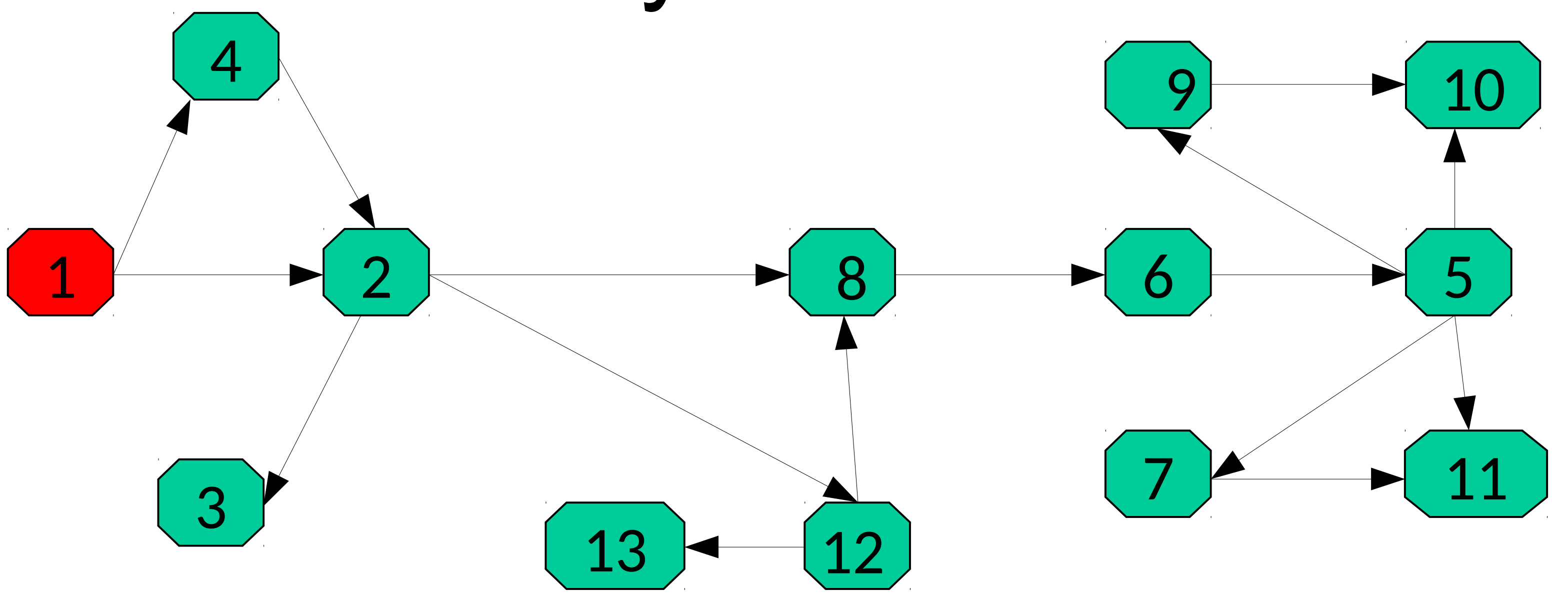
```
Ginverse:=GrapheVide()
Pour tout sommet s de G faire
    Pour tout successeur t de s faire
        insérer s dans la liste de succ de t dans Ginverse
```

Etape 2 : Parcours en profondeur du graphe inverse de G en Θ(n+m).

Etape 3 : Parcours en profondeur de G en Θ(n+m).

L'algorithme de Kosaraju-Sharir est donc de complexité Θ(n+m).

Synthèse



- Parcours générique en Θ(n+m)
  L = (1, 2, 8, 4, 3, 12, 13, 6, 5, 9, 10, 7, 11)
  Applications : reconnaissance d'un graphe non-orienté biparti (voir TD), détection des composantes connexes

- Parcours en largeur en Θ(n+m)
  L = (1, 2, 4, 3, 8, 12, 6, 13, 5, 7, 9, 10, 11)
  Applications : plus court chemins en nombre d'arcs

- Parcours en profondeur en Θ(n+m)
  L = (1, 2, 3, 8, 6, 5, 7, 11, 9, 10, 12, 13, 4)
  Applications : détection de circuit, liste topologique, détection des composantes fortement connexes

Quiz : Existence d’un chemin

Etant donnés deux sommets *s* et *t* dans un graphe orienté *G*, quel algorithme de parcours est-il possible d'utiliser pour déterminer si il existe un chemin de *s* à *t* dans *G* ?

A) Parcours générique
B) Parcours en largeur
C) Parcours en profondeur
D) Les trois

Quiz : Make

Make est un logiciel qui construit automatiquement des fichiers, souvent exécutables, à partir d'éléments de base tel que du code source. A quel algorithme de graphe fait appel Make ?

A) Algorithme de Kosaraju-Sharir
B) Parcours générique
C) Parcours en largeur
D) Parcours en profondeur