TD2 - Algo

Exercice 8

8.1) Preuve de la terminaison

~~Soient~~ $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$
Supposons par l'absurde que Multiplie1(a, b) ne se termine pas. Notons la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de valeurs que prendra la variable m.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = M_n + 1$ d'après le code.
Donc $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
On a aussi que $\forall n \in \mathbb{N}$ $M_n < a$ (condition de boucle)

Donc (M_n) est une suite strictement croissante majorée. Absurde.
Donc l'algo se termine avec a tours de boucle.

Preuve de la validité

Notons $(P_n)_{n \in [0 \dots a]}$ les valeurs de p et $(M_n)_{n \in [0, \dots a]}$

Montrons que $H_n : P_n = n \times b$ pour tout n ~~de~~ $\in [0 \dots a]$

Base : On a $P_0 = 0$ donc H_0 est vraie

Induction : Soit $n \in [1, \dots a]$. On suppose H_{n-1} vraie et on veut montrer que H_n aussi

On a $P_n = P_{n-1} + b$ d'après le code

$= (n-1)b + b$

$= nb$

donc H_n est vraie.

En sortie de boucle la valeur de p est $P_a = a \times b$ par H_a donc la valeur retournée (p) correspond bien au résultat attendu.

8.2)

La boucle tant que de Multiplie1(a, b) fait a itérations. Pour chaque itération, deux ~~itérations~~ additions sont réalisées.

- la première est en $O(\log(ab))$ car la variable p prend des valeurs inférieures ou égales à $a \times b$.

- la deuxième est en $O(\log(a))$ car la variable m vaut toujours moins que a.

$\Rightarrow$ $O(a \log(ab))$

Exercice 9

$a = 4$, $b = 11$

9.1)

k	prod	x	y
0	0	4	11
1	4	8	10 5
2	4+8=12	16	4 2
3	12	32	1
4	44	64	0

$\hookrightarrow$ prod = 44

9.2)

~~Soient~~ $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.
On suppose par l'absurde que l'algo M2(a, b) ne se termine pas. On aurait alors une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de valeurs que prend la variable y qui vérifierait

$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$
$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} \leq y_n / 2 < y_n$

$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \in \mathbb{N}$ car la variable y est divisée par 2 lorsqu'elle a une valeur paire grâce au "si y impair".

On aurait une suite d'entiers strictement décroissante minorée. Absurde. Donc M2 termine

~~On a~~

On note N le nombre de tours de boucle.
Pour $k \in [1 .. N]$, on note
y_k la valeur de la variable après le k ième tour de boucle y
x_k la valeur de la variable x après le k ième tour de boucle
p_k la valeur de la variable prod après le k ième tour de boucle.

et x_0, y_0, p_0 les valeurs initiales de ces variables

On montre par récurrence que pour tout $k \in [0 .. N]$

$$p_k + x_k \times y_k = a \times b \quad (H_k)$$

Initialisation : $y_0 = b$, $x_0 = a$, $p_0 = 0$

donc $p_0 + x_0 \times y_0 = 0 + a \times b = a \times b$

donc H_0 est vraie.

Soit $k \in [0 .. N-1]$. On suppose (H_k) vraie

→ Si y_k est pair alors $y_{k+1} = y_k / 2$

$x_{k+1} = 2 x_k$

$p_{k+1} = p_k$

donc $p_{k+1} + x_{k+1} \times y_{k+1} = p_k + \cancel{2} x_k \times \frac{y_k}{\cancel{2}}$
$= a \times b$ par H_k

→ Si y est impair alors

$y_{k+1} = (y_k - 1) / 2$

$x_{k+1} = 2 x_k$

$p_{k+1} = p_k + x_k$

donc $p_{k+1} + x_{k+1} \times y_{k+1} = p_k + \underbrace{x_k + 2 x_k \times \frac{y_k - 1}{2}}_{x_k \times y_k}$

$= ab$ par H_k

Donc H_{k+1} est vraie.

Ainsi, on a montré par récurrence que $\forall k \in [0 .. N]$, H_k

En particulier, H_N donne

$p_N + x_N y_N = a \times b$

→ Si $b = 0$, y est initialisé à 0, la boucle tant que n'est pas exécutée càd $N = 0$.
Dans ce cas, la valeur retournée est la valeur initiale de prod, càd 0 qui est bien $a \times b$.

→ Sinon la boucle est exécutée et on sort avec la variable y égale à 0 autrement dit $y_N = 0$.
La propriété H_N donne alors $p_N = a \times b$ et l'algo retourne bien $a \times b$.