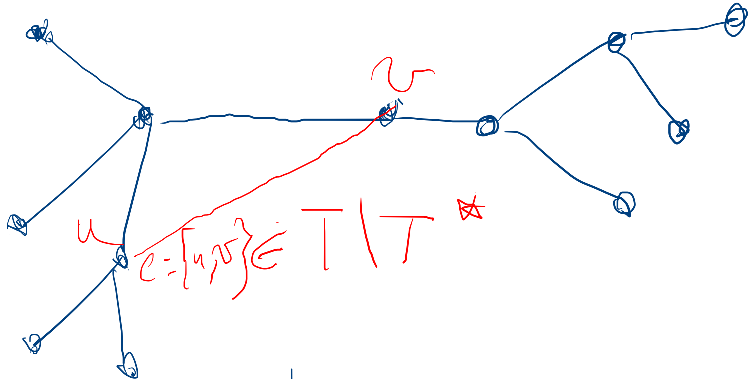
Exercice 2 – Deuxième meilleur arbre couvrant de poids minimum

Soient $G = (S, A)$ un graphe connexe non orienté avec $n = |S|$ et $m = |A|$. On suppose que $m \geq n$. On considère une fonction de pondération c définie sur A et on suppose que tous les poids des arêtes sont distincts.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble de tous les arbres couvrants de G et soit T^* un arbre couvrant minimum de G. On appelle deuxième meilleur arbre couvrant minimum, un arbre couvrant T tel que $c(T) = \min_{T' \in \mathcal{T}, T' \neq T^*} \{c(T')\}$.

Q 2.1 Montrer que l'arbre couvrant de poids minimum est unique.



T^*

Par l'absurde. Soit T^* un ACM, T le deuxième meilleur arbre et supposons que $c(T) = c(T^*)$. Soit $e = \{u,v\} \in T \setminus T^*$. La chaîne C qui relie u à v dans T^* étant minimax, on a $c(e') \leq c(e)$ $\forall e' \in C$.

Comme tous les coûts sont distincts, on a $c(e') < c(e)$ $\forall e' \in C$.
En supprimant l'arête e de T, on obtient deux composantes connexes C_u (celle du côté de l'extrémité u) et C_v (celle du côté de l'extrémité v).
Soit Γ le cocycle entre C_u et C_v.
On a $C \cap \Gamma \neq \emptyset$. Soit $f \in C \cap \Gamma$.
En remplaçant e par f dans T, on obtient un nouvel arbre couvrant $T' = T \cup \{f\} \setminus \{e\}$ avec

$$c(T') = c(T) + c(f) - c(e) < c(T) \text{ car } c(f) < c(e).$$

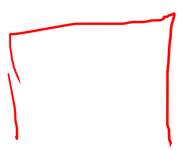
Contradiction avec T de coût minimum.

Q 2.2 Montrer que le deuxième meilleur arbre couvrant de poids minimum de G n'est pas forcément unique.

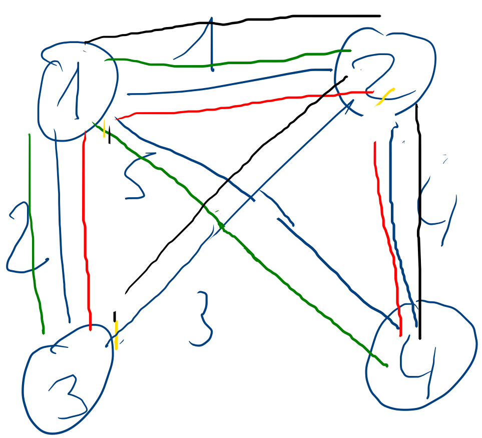
Soit T_1 le meilleur arbre couvrant
T_2 le deuxième meilleur) même coût
T_3 le troisième meilleur)

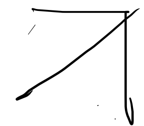
$|T_2 \setminus T_3| = |T_3 \setminus T_2| = 2$

$3+4=5+2$

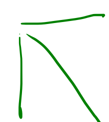


$2+1+4=7$





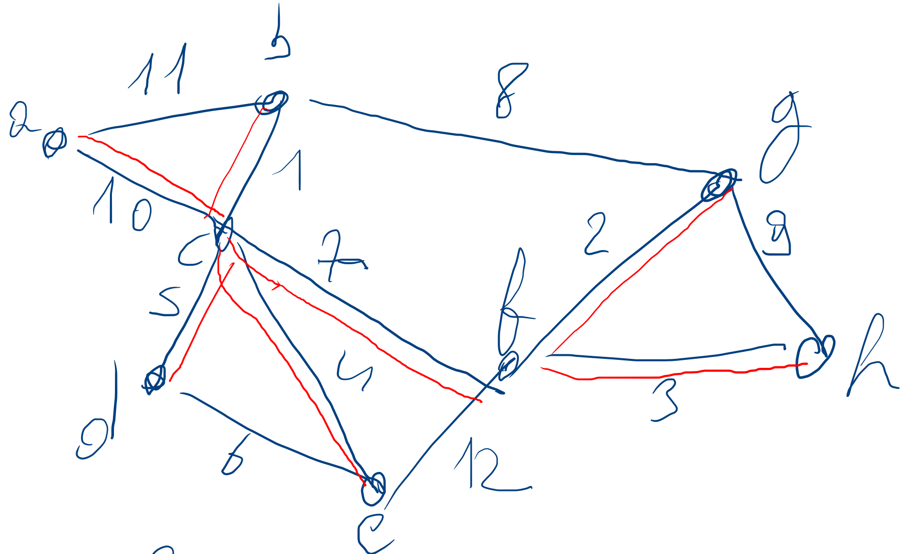
$1+3+4=8$



$1+5+2=8$

RAPPEL

arbre couvrant de coût min



Chaîne qui relie b à g dans l'ACM :

$$C = (b, c, f, g)$$

Coût max : $c_{max}(C) = \max\limits_{e \in C} c(e)$

$$= \max\{1, 7, 2\} = 7$$

$\boxed{\text{La chaîne qui relie deux sommets dans un ACM est minimax parmi toutes les chaînes entre ces sommets de } G.}$