# 4 Pièces d'or

On dispose de $n$ pièces d'or toutes de même poids, sauf une défectueuse qui est plus légère, et on suppose $n = 3^p$.

**4.1** Nommons les trois tas A, B et C. Il suffit de peser A contre B (par exemple).

- Si A et B ont le même poids, alors la pièce défectueuse est dans C.
- Si le poids de A est inférieur au poids de B, alors la pièce est dans A.
- De même, si le poids de B est inférieur au poids de A, alors elle est dans B.

**4.2** L'algorithme suivant permet de résoudre le problème :

1. Diviser le tas en 3.
2. Effectuer une pesée (comme décrit dans **4.1**) pour trouver le tas qui contient la pièce défectueuse.
3. Sélectionner ce tas et retourner en 1.

L'algorithme s'arrête quand chaque tas comporte une seule pièce.

**4.3** On note $T(n)$ le nombre de pesées nécessaires pour trouver la pièce défectueuse dans un ensemble de $n = 3^p$ pièces.

1. $T(n)$ vérifie la relation ci-dessous :

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + \underbrace{1}_{\text{1 pesée}} \tag{1}$$

2. **Résolution directe.** Pour simplifier les notations, on introduit la fonction $\widetilde{T}$ définie par $\widetilde{T}(p) = T(n) = T(3^p)$.
L'équation (1) se réécrit alors :

$$\widetilde{T}(p) = \widetilde{T}(p-1) + 1$$

Par récurrence, on obtient :

$$\widetilde{T}(p) = \widetilde{T}(0) + p$$

Or $\widetilde{T}(0) = T(3^0) = T(1)$ et $T(1) = 0$ car on n'a pas de pesée à faire s'il reste une seule pièce. On a donc $\widetilde{T}(p) = p$. L'égalité $T(n) = \widetilde{T}(p)$ donne finalement :

$$T(n) = p = \log_3 n$$

**Résolution avec le théorème maître.** On retrouve aisément le résultat précédent en appliquant le théorème maître :

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$
$$T(1) = 0$$
$$T(2) = 1 > 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ d = 0 \end{cases} \implies a = b^d \implies T(n) = \Theta(\log_3 n)$$