Exercice 10 – Résolution d'un système d'inéquations

Q 10.1 Dans cette question, on s'intéresse au système de 4 variables et 5 contraintes suivant :

$$\begin{array}{rcl} x_4 - x_3 & \le & 5 \\ x_3 - x_1 & \le & 8 \\ x_1 - x_4 & \le & -10 \\ x_1 - x_2 & \le & -11 \\ x_2 - x_3 & \le & 2 \end{array}$$

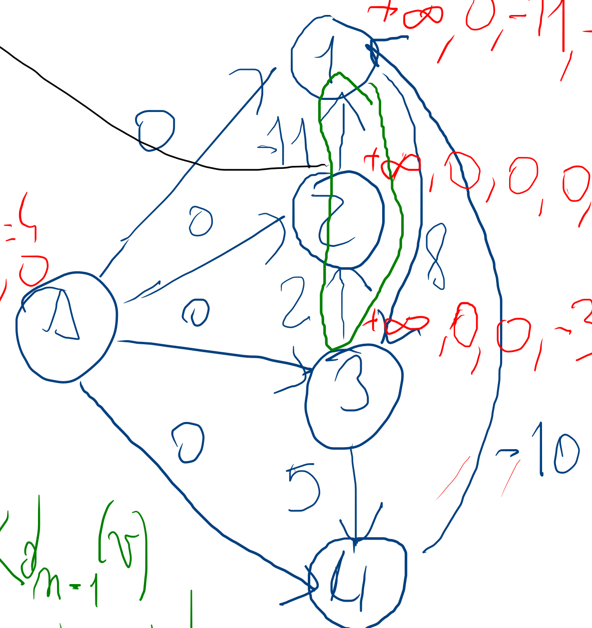
Soit H une arborescence couvrante de racine s dans G.
Soit d(x) le coût du chemin de s à x dans H.

Propriété :
H est une arborescence des chemins de coût minimum pour G si et seulement si pour tout arc (x,y) de G on a :

$d(y) \le d(x) + c(x,y)$.

$n = 5$

circuit absorbant ! (1,3,2,1) de coût -1



$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$, $k=4$: 0, 0, 0, 0, 0, 0

1 : $+\infty$, 0, -11, -11, -11, -12

2 : $+\infty$, 0, 0, 0, -1, -1

3 : $+\infty$, 0, 0, -3, -3, -3

4 : $+\infty$, 0, 0, 0, 0, 0

$d_k(v)$: longueur d'un plus court chemin de s à v parmi ceux comportant $\le k$ arcs

$d_0(s) = 0$ $\quad d_0(v) = +\infty$ pour $v \ne s$

$d_k(v) = \min\{d_{k-1}(v') + c(v',v) : (v',v) \in A\}$ si $v \ne s$

Relation de récurrence de Bellman-Ford

Si $\exists v$ tq $d_n(v) < d_{n-1}(v)$ → circuit absorbant !

$O(n(n+m))$ si G représenté par liste préd.

À l'itération $k=5$ de l'algorithme de Bellman-Ford, on remarque qu'il existe un circuit absorbant car $d_5(1) = -12 < -11 = d_4(1)$.

Le circuit absorbant est $(1,3,2,1)$. Il correspond aux contraintes incompatibles suivantes :

$$
\begin{array}{rl}
 & x_3 - x_1 \leq 8 \\
+ & x_2 - x_3 \leq 2 \\
+ & x_1 - x_2 \leq -11 \\
\hline
 & 0 \leq -1
\end{array}
$$

Incompatible !

Q 10.2 On s'intéresse maintenant à un système quelconque à n variables et m contraintes et à son graphe associé (on ne considère donc plus le système donné dans la question 1).

a. Enoncez une condition nécessaire sur le graphe associé pour que le système possède une solution admissible. Prouvez que cette condition est bien une condition nécessaire.

b. Montrez que cette condition est suffisante.

a) la condition nécessaire est l'absence de circuit absorbant dans le graphe associé. En effet, soit $(s_1, s_2, \dots, s_p = s_1)$ un circuit absorbant du graphe associé. Alors :

$$
\begin{array}{l}
x_2 - x_1 \leq c(s_1, s_2) \\
x_3 - x_2 \leq c(s_2, s_3) \\
\quad \vdots \\
x_1 - x_p \leq c(s_p, s_1) \\
\hline
0 \leq \underbrace{\text{coût du circuit}}_{<0} \rightarrow \text{Impossible}
\end{array}
$$

b) En posant $x_i = d(i)\ \forall i$, on obtient des valeurs qui vérifient le système d'inéquations d'après la propriété rappelée sur la 1ère page.