Exercice 1 – Algorithme de Kruskal

Algorithme de Kruskal
Trier les arêtes par coût croissant;
H = arbre vide;
Examiner dans l'ordre chacune des arêtes {x,y} :
S'il n'existe pas de chaîne de x à y dans H :
H = H U {x,y}
FinSi

Q 1.1 Montrer que T est un arbre couvrant. On pourra pour cela montrer que l'ensemble des arêtes T est une forêt, est couvrant, et tel qu'il y ait une seule composante connexe.

- À chaque insertion d'une arête $\{x,y\}$, on s'assure que l'arête ne crée pas de cycle → le graphe des arêtes sélectionnées est donc une forêt.
- T est couvrant. Par l'absurde. Soit v un sommet non couvert au terme de l'algorithme. Il y a au moins une arête incidente à v dans G car G est connexe. La première arête incidente à v examinée par l'algorithme ne crée pas de cycle et aurait donc dû être insérée dans H. Contradiction.

• Il ne contient qu'une seule composante connexe au terme de l'algorithme. Par l'absurde. Supposons qu'il existe deux composantes connexes. Comme G est connexe, il existe au moins une arête entre les deux composantes connexes. La première arête examinée parmi celles-ci par l'algorithme ne crée pas de cycle et aurait donc dû être sélectionnée. Contradiction

Soit T^* un arbre couvrant de coût minimum. Si $T = T^*$ alors T est un arbre couvrant de poids minimum. Sinon, soit e l'arête de plus petit coût dans $T^* \backslash T$. Soit $c(e)$ le coût de e.

Q 1.2 Montrer que $T \cup \{e\}$ contient un cycle $\mathcal{C}$ tel que :

a) Chaque arête de $\mathcal{C}$ a un coût inférieur ou égal à $c(e)$.

b) Il existe dans $\mathcal{C}$ une arête f qui n'appartient pas à T^*.

a) $\forall f \in \mathcal{C}$, $c(f) \leq c(e)$ car on examine les arêtes par ordre croissant de coûts dans l'algorithme de Kruskal (toutes les arêtes de $\mathcal{C}$ ayant été sélectionnées, elles ont donc été examinées avant e).

b) Par l'absurde. Si toutes les arêtes de $\mathcal{C}$ appartenaient à T^*, alors T^* comporterait un cycle. Contradiction avec T^* arbre couvrant (autrement dit, sans cycle).

Q 1.3 Soit T_1 l'arbre $T\backslash\{f\}\cup\{e\}$. Montrer que :

- T_1 est un arbre couvrant
- T_1 a plus d'arêtes en commun avec T^* que T n'en a.
- Le coût de T_1 est supérieur ou égal au coût de T.

– L'insertion de e crée un cycle, qui est "cassé" en supprimant f. Donc T_1 est un arbre couvrant.

– On échange $f \in T\backslash T^*$ par $e \in T^*\backslash T$ $\rightarrow$ une arête en commun en plus entre T_1 et T^* qu'entre T et T^*.

– $c(f) < c(e)$ (voir question précédente). Donc $c(T_1) = c(T) - c(f) + c(e) \geq c(T)$.

Q 1.4 Conclure.

Si $|T\backslash T^*| = |T^*\backslash T| = k$, alors en k échanges on peut "transformer" T en T^*, avec $c(T) \leq c(T_1) \leq c(T_2) \leq \dots \leq c(T_k) = c(T^*)$. Or, T^* est de coût min.

Donc $c(T) = c(T^*)$ et T est de coût min.