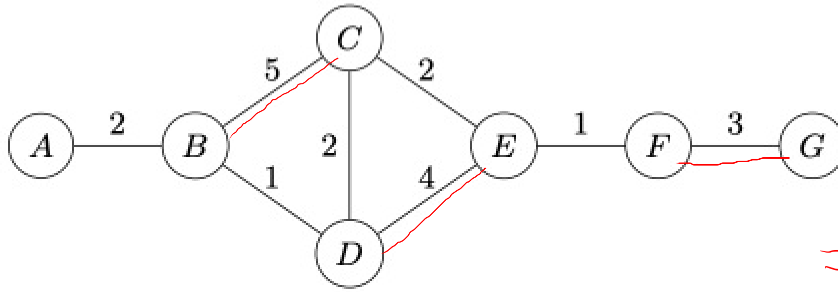
Exercice 9 – Couplage de poids maximum

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté pondéré avec des poids strictement positifs. On appelle *couplage* de G un ensemble d'arêtes de A qui n'ont aucun sommet en commun. Par exemple, $M_1 = \{\{A, B\}, \{E, F\}\}$ et $M_2 = \{\{B, C\}, \{D, E\}, \{F, G\}\}$ sont des couplages du graphe G_2.

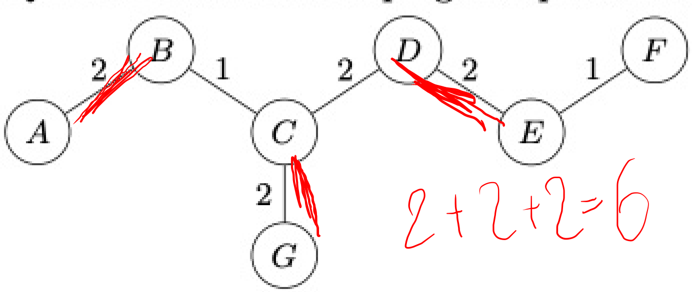


$M_2 = \{\{B,C\},\{D,E\},\{F,G\}\}$

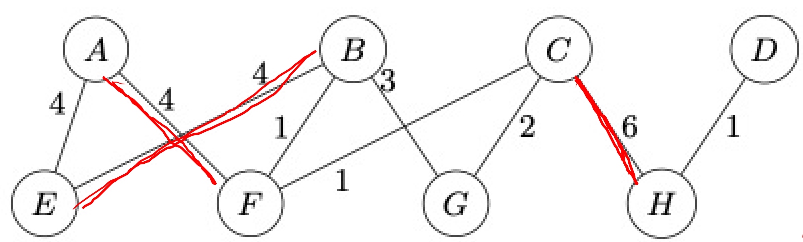
FIGURE 9 – Graphe G_2.

Un couplage M d'un graphe pondéré $G = (S, A)$ est dit *de poids maximum* s'il n'existe pas de couplage dans G dont la somme des poids (ou coûts) des arêtes est supérieure à la somme des poids des arêtes de M. Par exemple, le couplage M_2, de poids $5 + 4 + 3 = 12$, est de poids maximum pour G_2.

Q 9.1 Donner un couplage de poids maximum pour les graphes suivants :



$2+2+2=6$



$6+4+4=14$

Q 9.2 On considère l'algorithme 3 pour construire un couplage. Quelle est la complexité de cet algorithme ? Justifiez votre réponse.

> $M \leftarrow \emptyset$
> **pour** *toutes les arêtes* $\{u, v\} \in A$ *examinées par poids décroissant* **faire** — m itérations
>   **si** $\nexists\ \{u, v'\} \in M$ *et* $\nexists\ \{u', v\} \in M$ **alors** — $O(1)$
> $M \leftarrow M \cup \{\{u, v\}\}$
> **retourner** M

Algorithme 3 : COUPLAGEGLOUTON$(G = (S, A))$

L'identification des arêtes se fait en $O(n+m)$ si le graphe est représenté par des listes d'adjacence.

Le tri des arêtes par poids décroissant se fait en $O(m \log m)$.

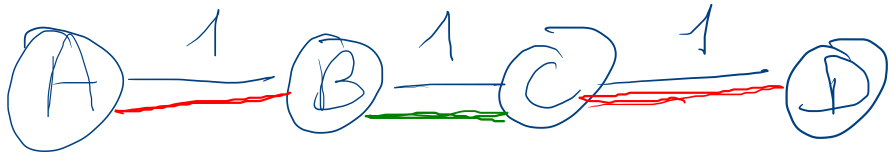
En maintenant un tableau qui indique pour chaque sommet s'il est déjà couvert par une arête de M, le test $\nexists \{u,v'\} \in M$ et $\nexists \{u',v\} \in M$ peut se faire en $O(1)$.

La boucle se fait alors en $O(m)$

Complexité : $O(n + m + m \log m + m) \rightarrow O(n + m \log m)$

On note M_g le couplage produit par l'algorithme glouton sur un graphe G et $c(M_g) = \sum_{e \in M_g} c(e)$ le poids de ce couplage, où $c(e)$ est le poids de l'arête e. On note M^* un couplage de poids maximum, et $c(M^*)$ son poids. Nous allons maintenant chercher à montrer que $c(M^*) \leq 2c(M_g)$ (autrement dit, le poids du couplage retourné par l'algorithme glouton est au moins 50% du poids maximum).

Q 9.3 Donnez un exemple de graphe et de couplage M_g pour lequel cette borne est effectivement atteinte, c'est-à-dire $c(M^*) = 2c(M_g)$.



Si $\{B, C\}$ est placée en première position du tri des arêtes, alors l'algorithme glouton retourne le couplage vert, qui vaut $\frac{1}{2}$ du poids du couplage rouge.

Q 9.4 Soit $e \in M^*$ et $M_e \subseteq M_g$ l'ensemble des arêtes de M_g ayant au moins un sommet en commun avec e.

a) Montrer qu'il existe au moins une arête $f_e \in M_e$ telle que $c(f_e) \geq c(e)$.

b) Soit h une fonction qui associe à chaque arête $e \in M^*$ une arête $f_e \in M_e$ telle $c(f_e) \geq c(e)$. Soit $f \in M_g$. Montrer qu'il ne peut pas exister plus de deux arêtes $e \in M^*$ telles que $h(e) = f$.

c) Déduire de a) et b) que $c(M^*) \leq 2c(M_g)$.

a) Deux cas :

- $e \in M_g \Rightarrow f_e = e$ vérifie bien $c(f_e) \geq c(e)$ et ses deux extrémités sont communes avec e
- $e \notin M_g \Rightarrow$ Il y a au moins une arête f_e de M_g qui a une extrémité commune avec e sinon e aurait été sélectionnée lors de l'examen des arêtes en ordre décroissant. Comme f_e a été examinée avant e, on en déduit que $c(f_e) \geq c(e)$.

b) Une même arête ne peut partager d'extrémité commune qu'avec au plus deux arêtes d'un couplage, car dans le cas contraire le couplage comportait nécessairement deux arêtes qui partage une extrémité commune (contradiction avec la définition d'un couplage).

c)

$$c(\Gamma^*) = \sum_{e \in \Gamma^*} c(e) < \sum_{e \in \Gamma^*} c(h(e))$$

Une fin arête $f \in \Gamma_g$ apparaît au plus en double dans la somme de droite d'après b. D'où $\sum_{e \in \Gamma^*} c(h(e)) \leq 2 \sum_{f \in \Gamma_g} c(f) = 2c(\Gamma_g)$