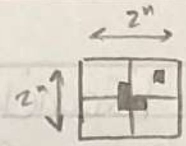


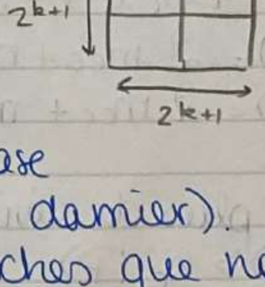
Exercice 7 - Triominos

1) Si le carré est de taille 2×2, il a 4 cases, dont une trouée. On pose le trinomino de façon à couvrir les 3 autres cases.
Sinon on découpe le carré en 4 carrés (on coupe horizontalement et verticalement au milieu).
Un seul de ces 4 carrés contient la case trouée, on place une pièce (= un trinomino) au milieu de manière à couvrir les 3 autres carrés.
On procède récursivement de même sur les quatre carrés en considérant que les cases couvertes par le trinomino sont trouées.

2) Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété :
H_k : notre algo couvre un échantillon de taille $2^k \times 2^k$

Montrons que H_1 est vraie :
Si on a un carré de taille $2^1 \times 2^1$, notre algo place le trinomino de manière à couvrir les cases non-trouées donc H_1 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que H_k est vraie et on montre que H_{k+1} est vraie.
Pour un échiquier de taille $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, on pose un trinomino qui couvre des cases non trouées et de sorte que l'on ait 4 carrés de taille $2^k \times 2^k$ contenant exactemt chacun une case couverte par la pièce ou la case trouée.
D'après H_k, notre algo va bien couvrir ces 4 cases donc H_{k+1} est vraie.



$2^{k+1} = 2\times 2^k$

3) Puisque l'échiquier a un nombre pair de cases, on peut colorier une case sur deux en noir/blanc (comme un damier).
On aura alors autant de cases blanches que noires.
Si on exclut deux cases diamétralements opposées, elles sont de même couleur, disons noires, il reste donc

plus de cases blanches à couvrir que de cases noires.
Or un domino couvre exactement une case noire et une case blanche. Il est donc impossible de proposer un algorithme.

Exercice 8

1) Une fois qu'on a identifié un civil, il suffit de le confronter au $(n-1)$ autres personnes (car il dit toujours la vérité) donc la complexité est $O(n)$

2) On confronte la personne au $n-1$ autres.
Si au moin $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ personnes déclarent que c'est un civil, alors c'est un civil, sinon un espion.
En effet, si n est pair, $n_c \geq \frac{n}{2}+1$ donc il y a au moins $\frac{n}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ civils dans les personnes interrogées et donc au plus $(n-1) - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ espions dans les personnes interrogées

si n impair: $n_c \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$

3) Au plus, on fait $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ fois la procédure en $O(n)$ donc de l'ordre de $\Theta(n^2)$ (dans le pire cas)

4) Initialement dans P, il y a strictement plus de civils que d'espion.
Puisque n est impair, si on fait un appel récursif sur P', c'est après avoir éliminé un espion, donc il reste dans P' strictement plus de civils que d'espions.

5) $\frac{n}{2} = m = m_{ee} + m_{cc} + m_{ce}$ (nombre de confrontations)

a) $(n_e(P) + n_c(P) = n)$
$n_e(P) = 2\, m_{ee} + m_{ce}$
$n_c(P) = 2\, m_{cc} + m_{ce}$

b) Il y a plus de civiles dans P que d'espions donc $n_c(P) > n_e(P)$

Donc d'après a) $2m_{cc} + m_{ce} > 2m_{ee} + m_{ce}$

donc $m_{cc} > m_{ee}$

c) Lors d'une confrontation c-c, les déclarations sont cc, on en garde 1 civil

———— e-e, les déclarat° possibles sont | cc " " 1 espion

| c-e
| e-e } on en garde aucun
| e-c

———— e-c, les déclarations possibles sont | e-c
| e-e } on en garde aucun

donc $n_c(P') = m_{cc}$ (chaque civil gardé pour l'appel récursif proviennent d'une confrontation c-c)

et $n_e(P') \leq m_{ee}$

donc $n_e(P') \leq m_{ee} < m_{cc} = n_c(P')$

on a bien $n_e(P') < n_c(P')$

6) $C(n) \leq \underbrace{(n-1) + \frac{n}{2}}_{\leq \frac{3n}{2}} + C(\frac{n}{2})$ → On résoud $T(n) = \frac{3n}{2} + T(\frac{n}{2})$

car $C(n) \leq T(n)$

$a = 1$, $b = 2$, $d = 1$ $\quad a < b^d$ (par théorème maître)

donc $T(n) \in O(n)$ et $C(n) \in O(n)$ aussi

À faire { TD1 : 11 (+ exo 9)
TD2 : 12