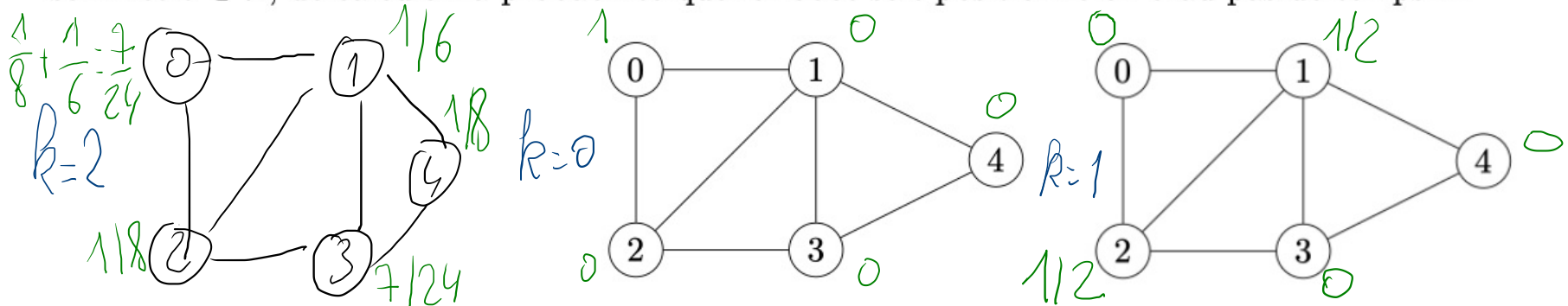


Exercice 9 – Déplacements d'un robot

On considère un graphe $G = (V, E)$ non-orienté, avec $V = \{0, \dots, n-1\}$ et $|E| = m$. Un robot est positionné initialement (au pas de temps 0) sur le sommet 0. Puis, entre chaque pas de temps k et $k+1$ ($k \in \{0, \dots, T-1\}$), il se déplace aléatoirement dans G en suivant la règle suivante : depuis le sommet $v \in V$ sur lequel il est positionné au pas de temps k , il se déplace vers un voisin v' de v , selon une loi de probabilité uniforme (il sera donc positionné sur le sommet v' au pas de temps $k+1$). Par

On vise à concevoir une procédure de programmation dynamique dont le but final est, pour chaque sommet $v \in V$, de calculer la probabilité que le robot soit positionné en v au pas de temps T .



Q 9.1 Soit $p_k(v)$ la probabilité que le robot soit positionné au sommet v au pas de temps k . A la manière de la relation de récurrence à l'origine de l'algorithme de Bellman-Ford, donner la relation de récurrence permettant de déterminer $p_k(v)$ connaissant les probabilités $p_{k-1}(u)$ ($u \in \{0, \dots, n-1\}$), en notant $d(u)$ le degré d'un sommet $u \in V$. Comment initialiser la récurrence ?

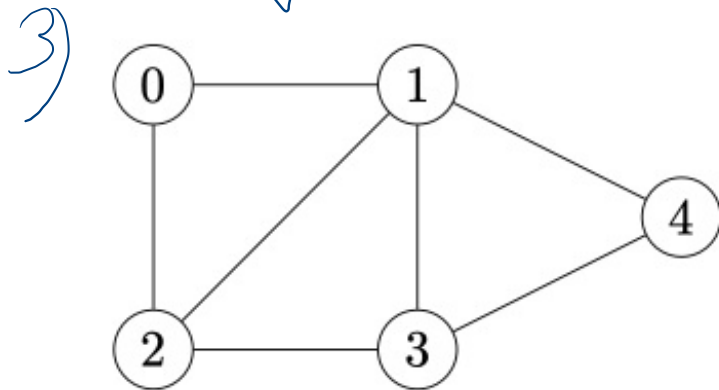
$$p_0(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_k(v) = \sum_{u \text{ voisin de } v} p_{k-1}(u) \frac{1}{d(u)}$$

Q 9.2 Analyser la complexité de l'algorithme qui met en œuvre cette récurrence (on ne demande pas d'écrire l'algorithme). On précisera la structure de données utilisée pour obtenir cette complexité.

Q 9.3 Appliquer cet algorithme au graphe de la figure 12 pour déterminer les différentes valeurs $p_k(v)$ ($v \in \{0, \dots, 4\}$) pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

2) Calculer $\{p_k(v) : v \in V\}$ pour un k donné, à l'aide de la formule de récurrence, se fait en $O(n+m)$ si le graphe est représenté par des listes d'adjacence. On le fait pour $k=1, \dots, T \rightarrow$ complexité $O(T(n+m))$



v	0	1	2	3	4
$p_0(v)$	1	0	0	0	0
$p_1(v)$	0	1/2	1/2	0	0
$p_2(v)$	1/24	4/24	3/24	7/24	3/24