LU3iN005
Stats

TD6

05/11/2020

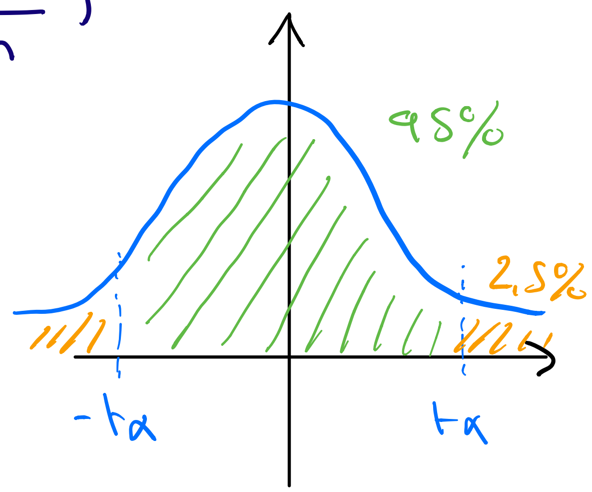
Exercice 35 : Sondages et intervalles de confiance

1) 1000 $X_i \sim \mathcal{B}(p_A)$ $\quad p_1 \simeq 0,52$

$Var(X_i) = p_A(1-p_A)$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(n p_A, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$$

$$Y_n = \frac{S_n/n - p_A}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$



$P(Y > z_\alpha) = \alpha = 2,5\%$

donc $z_\alpha = 1,96$

$$P(-z_\alpha < Y_n < z_\alpha) = 0,95$$

$$-z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + p_A < \frac{S_n}{n} < z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + p_A$$

$$\left[-1,96 \times \frac{\sqrt{0,52(1-0,52)}}{\sqrt{1000}} + 0,52 \ ; \ 1,96 \times \frac{\sqrt{0,52(1-0,52)}}{\sqrt{1000}} + 0,52\right]$$

$\hat{p}_A \in [0,489 ; 0,552]$

Il faut avoir strictement plus de 50% pour gagner, or l'intervalle de $\hat{p}_A$ n'est pas strictement supérieur à 0,50, donc on ne peut rien déduire sur la victoire du gagnant.

2) $p_A \simeq 0,52 \qquad n = 1000$

$$-z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + p_A = 0,5$$

$$\Leftrightarrow (p_A - 0,5)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} = z_\alpha$$

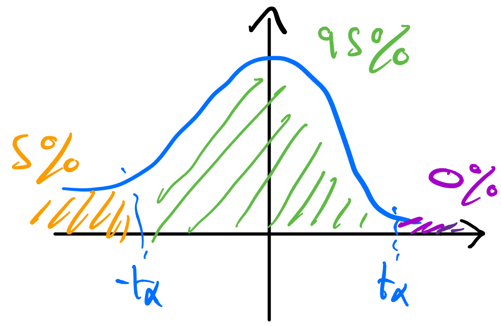
$$\Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{\sigma z_A}{p_A - 0,5} = \frac{1,96 \times \sigma}{0,52 - 0,5} = \frac{1,96 \times \sigma}{0,02}$$

$$n > 2397$$

Autre methode:

$$\hat{p_A} > 0,52 - \frac{1,96\,\sigma}{\sqrt{1000}}$$

$$\hat{p_A} > 0,494 \quad \Rightarrow \quad n > 1678$$



3) variance max quand $p_A = 0,5$:

$$\sigma^2 = 0,25 \Rightarrow \sigma = 0,5$$

$$\left[p - \frac{1,96\,\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; p + \frac{1,96\,\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$d_n = 2 \times \frac{1,96\,\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \times 1,96 \times \frac{0,5}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{2 \times 1,96 \times 0,5}{\sqrt{n}}$$

$$n > \frac{1,96^2}{d_n^2}$$

		ERREUR
pour $d = 0,06$	: $n \simeq 1067$	3%
$d = 0,04$	: $n \simeq 2401$	2%
$d = 0,02$	: $n \simeq 9604$	1%
$d = 0,01$	: $n \simeq 38416$	0,5%

Exercice 37 : Intervalles de confiance

1) $\bar{X} = \dfrac{\sum x_i}{n} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$\bar{x} = 2700$

$\bar{\sigma}^2 = \dfrac{\sum (x_i - 2700)^2}{\cancel{n}} \times \dfrac{\cancel{n}}{n-1}$

$\sigma \simeq 1158$

2) $\mu \in \left[\bar{x} - 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

$\mu \in [2113 ; 3286]$

$d = 2 \times 1{,}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1172{,}42$

3) $\sqrt{n} = \dfrac{2 \times 1{,}96 \times \sigma}{d}$

pour $d = 500$, $n \simeq 82{,}5$

FIN