LU3IN005
Stats

TD10

17/12/2020

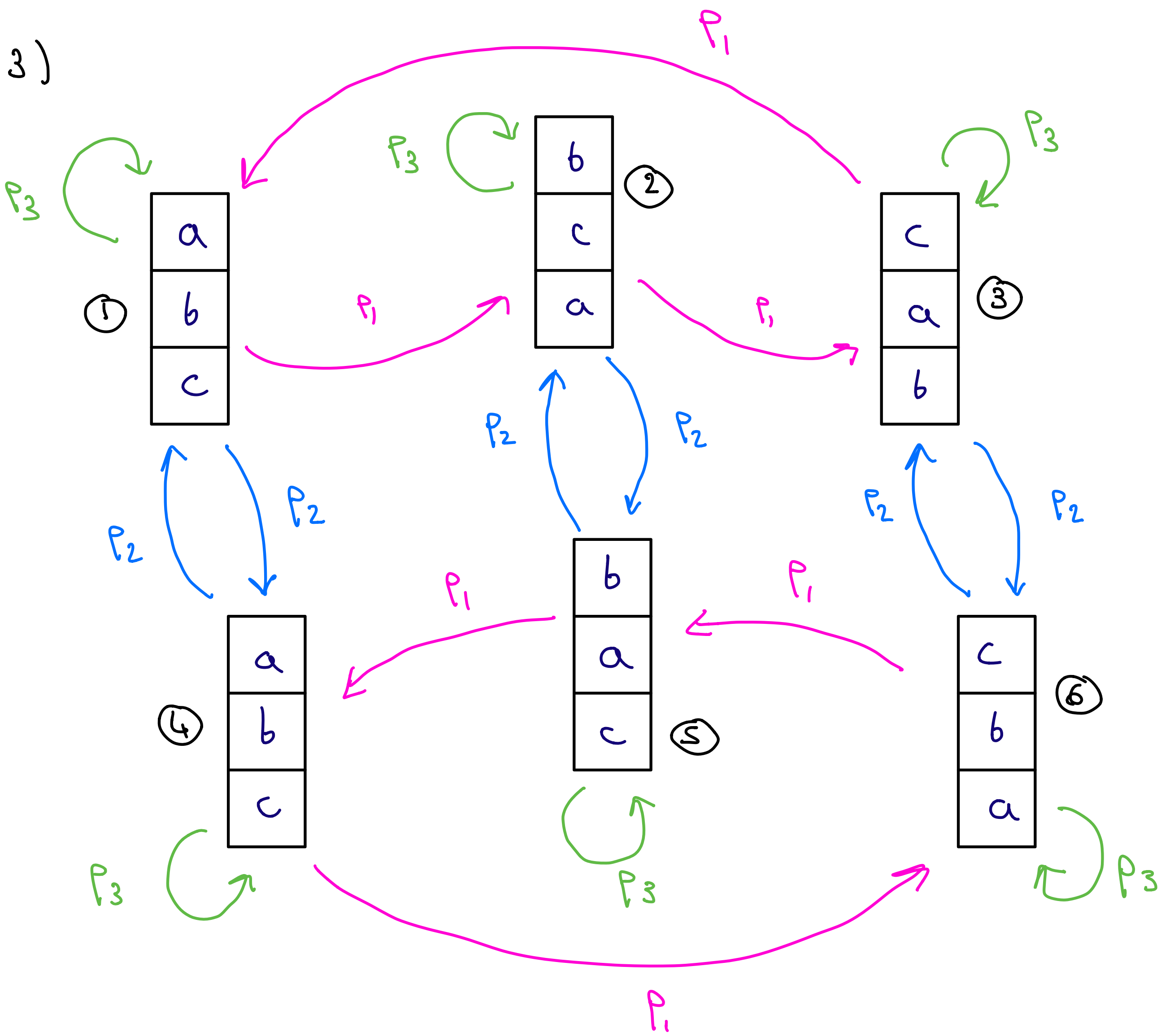
Exercice 57 : File aléatoire

57.1) Oui ex : si on fait $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$

57.2) . 6 états possible : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$

- c'est une chaine de Markov
  car l'état suivant ne dépend que de l'état où on est
- périodiq de période 3

57.3)



matrice de transition :

	1	2	3	4	5	6
1	p_3	p_1	0	p_2	0	0
2	0	p_3	p_1	0	p_2	0
3	p_1	0	p_3	0	0	p_2
4	p_2	0	0	p_3	0	p_1
5	0	p_2	0	p_1	p_3	0
6	0	0	p_2	0	p_1	p_3

57.4) . irréductible
. apériodiq
. états récurrents

57.5) symétrie : m̂ proba sortante, m̂ proba entrante et m̂ proba de boucler donc proba stationnaire

$$= \left(\frac{1}{6} \quad \dots \quad \frac{1}{6}\right)$$

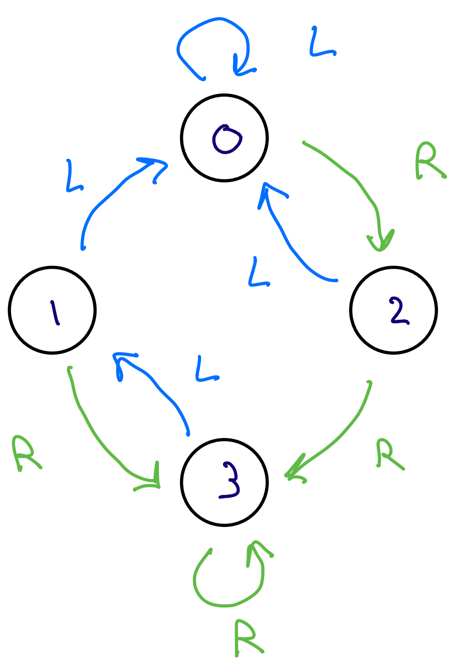
57.6) $p_3^3 + p_1^3 + p_2^2 p_3 + p_3 p_2^2 + p_2 p_3 p_2$

$$= p_3^3 + p_1^3 + 3(p_2^2 p_3)$$

Exercice 58 : Mono - Bestiole aléatoire

58.1) état suivant dépend que de l'état où on est (état précédent dépend que de la transition)

58.2)



	0	1	2	3
0	L	0	R	0
1	L	0	0	R
2	L	0	0	R
3	0	L	0	R

58.3) irréductible et apériodiq donc converge

symétrie sur les extrémités :

$$\alpha_0 = \alpha_3 \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \alpha_2 \quad \text{si} \quad L = R$$

$$\alpha T = \alpha$$

$$\begin{cases} \alpha_0 L + \alpha_1 L + \alpha_2 L = \alpha_0 & (1) \\ \alpha_3 L = \alpha_1 & (2) \\ \alpha_0 R = \alpha_2 & (3) \\ \alpha_1 R + \alpha_2 R + \alpha_3 R = \alpha_3 & (4) \\ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 & (5) \end{cases}$$

$$(1) \to \alpha_0 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_0 RL = \alpha_0$$

$$\iff \alpha_3 = \alpha_0 \left(\frac{1 - L - RL}{L^2} \right)$$

$$(4) \to \alpha_0 + \alpha_0 \left(\frac{1 - L - RL}{L} \right) + \alpha_0 R + \alpha_0 \left(\frac{1 - L - RL}{L^2} \right) = 1$$

$$\iff \alpha_0 \left(1 + \frac{1 - L - RL}{L} + R + \frac{1 - L - RL}{L^2} \right) = 1$$

$$\iff \alpha_0 \left(\cancel{L^2} + \cancel{L} - \cancel{L^2} - \cancel{RL^2} + \cancel{RL^2} + 1 - \cancel{L} - RL \right) = L^2$$

$$\iff \alpha_0 (1 - RL) = L^2$$

$$\iff \alpha_0 = \frac{L^2}{1 - RL}$$

$$(3) \to \alpha_2 = \frac{L^2 R}{1 - RL}$$

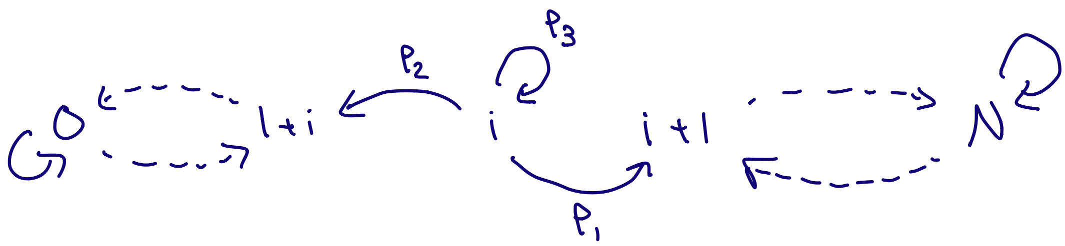
par symétrie : $\alpha_3 = \dfrac{R^2}{1 - LR}$ et $\alpha_1 = \dfrac{R^2 L}{1 - LR}$

Exercice 61 : Urnes aléatoires

61. 1)

	Urne 1	Urne 2
	N	N
Noir :	$X_n = Nb_n$	$N - X_n$
Blanc :	$Y_n = N - X_n$	X_n

61. 2)



	$B : bb \quad \frac{i}{N}$	$B : bn \quad \frac{N-i}{N}$
$A : bb \quad \frac{N-i}{N}$	$\frac{i(N-i)}{N^2}$	$\frac{(N-i)^2}{N^2}$
$A : bn \quad \frac{i}{N}$	$\frac{i^2}{N^2}$	$\frac{(N-i)\,i}{N^2}$

produit des deux car event indep

$$p_3 = \frac{2i(N-i)}{N^2} \qquad p_2 = \frac{i^2}{N^2}$$

61. 3) irréductible

bn , $n > (j-i)$, $P_n(i,j) > 0$

61. 4. 1) $\pi(i) = K(C_N^i)^2$ or $C_N^i = C_N^{N-i}$

$C_N^i C_N^{N-i}$ = nb config possible à l'état i

donc $\pi(i)$ donne proba d'être dans l'état i

61.4.2) $P(X_{n+2} = i) = \sum_{j=1}^{N} P(X_{n+1} = i \mid X_n = j) P(X_n = j)$

$= P(X_{n+1} = i \mid X_n = i-1) \, P(X_n = i-1) +$

$P(X_{n+1} = i \mid X_n = i) \, P(X_n = i) +$

$P(X_{n+1} = i \mid X_n = i+1) \, P(X_n = i+1)$

$= \pi(i)$ donc stationnaire

61.4.3) $\text{tps} = \dfrac{1}{\pi(i)}$

FiN