LU3IN005
Stats

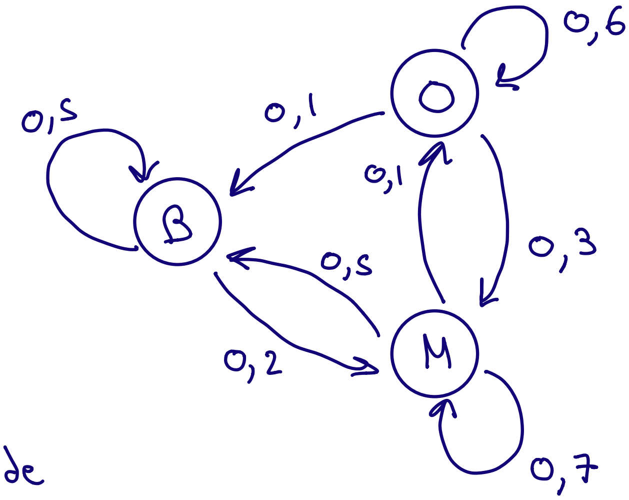
TD 9

10/12/2020

Exercice 54 : Simulation sociale

54.1)

54.2)



$P(C_t = x \mid C_{t-1} = y)$

état courant — précédent

$\sum P(C_t = x \mid C_{t-1} = y) = 1$

matrice de transition T

↱	B	O	M
B	0,5	0	0,5
O	0,1	0,6	0,3
M	0,2	0,1	0,7

$(1 \quad 0 \quad 0) \times T = (0{,}5 \quad 0 \quad 0{,}5)$

$(0{,}5 \quad 0 \quad 0{,}5) \times T$

$= (0{,}35 \quad 0{,}05 \quad 0{,}6)$

multiplier par T pour avoir la distribution de proba pour la génération suivante

$$(P_B \quad P_O \quad P_M) \times \begin{pmatrix} P(B|B) & P(O|B) & P(M|B) \\ P(B|O) & P(O|O) & P(M|O) \\ P(B|M) & P(O|M) & P(M|M) \end{pmatrix}$$

$$= \Big(P_B\, P(B|B) + P_O\, P(B|O) + P_M\, P(B|M), \dots$$

$$\dots$$

$$\dots \Big)$$

54.3) • irréductible

car on peut aller à n'importe quel état à partir de n'importe quel état

• apériodiq (période = 1)

forcém apériodiq quand boucle sur elle-m

période d'un état :
nb séquences pour aller d'un état au m état

période chaine :
PGCD(période état)

• états récurrents car irréductible

• nb états fini : 3

chaine de Markov ergodique

54.4) $v_0 T^n \Rightarrow v_n$

$$v_0 T^n \longrightarrow v^*$$

$$v^* T = v^*$$

$$\underbrace{(\pi_B \quad \pi_O \quad \pi_M)}_{v^*} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} = (\pi_B \quad \pi_O \quad \pi_M)$$

$$\begin{cases} 0,5\,\pi_B + 0,1\,\pi_O + 0,2\,\pi_M = \pi_B & (1) \\ 0,6\,\pi_O + 0,1\,\pi_M = \pi_O & (2) \\ 0,5\,\pi_B + 0,3\,\pi_O + 0,7\,\pi_M = \pi_M & (3) \\ \pi_B + \pi_O + \pi_M = 1 & (4) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow 0,4\,\pi_O = 0,1\,\pi_M \Rightarrow \pi_M = 4\,\pi_O$

$(4) \Rightarrow \pi_B + 5\,\pi_O = 1 \quad (*)$

$(1) \Rightarrow 0,5\,\pi_B + 0,9\,\pi_O = \pi_B$

$\Rightarrow 0,9\,\pi_O = 0,5\,\pi_B \quad \Rightarrow \quad \pi_B = 1,8\,\pi_O$

$(*) \Rightarrow 1,8\,\pi_O + 5\,\pi_O = 1$

$\Rightarrow \pi_O = \dfrac{1}{6,8} \qquad \pi_M = \dfrac{4}{6,8} \qquad \pi_B = \dfrac{1,8}{6,8}$

Donc $v^* = (0,26 \quad 0,14 \quad 0,58)$

54.5) $T^2 = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,6 & 0,05 \\ 0,25 & 0,62 & 0,13 \\ 0,17 & 0,44 & 0,39 \end{pmatrix}$

$P(X_t \neq X_{t+2}) = 1 - P(X_t = X_{t+2})$

$= 1 - P(X_t = O, X_{t+2} = O) - P(X_t = B, X_{t+2} = B)$

$- P(X_t = M, X_{t+2} = M)$

$= 1 - P(X_{t+2} = O \mid X_t = O)\, P(X_t = O) - \ldots$

car régime permanent

$= 0,5$

Exercice 55 : Chaîne de Markov

- M est irréductible

$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- période du nœud a : 3

M périodiq de période 3

• distribution stationnaire :

$v^* M = v^*$ (voir 54.4)

• T^{3n} , T^{3n+1} , T^{3n+2}

$\lim\limits_{k\to+\infty} T^k \to T^*$ matrice $\neq$ $\lim\limits_{k\to+\infty} vT^k \to v^*$ vecteur de distribution

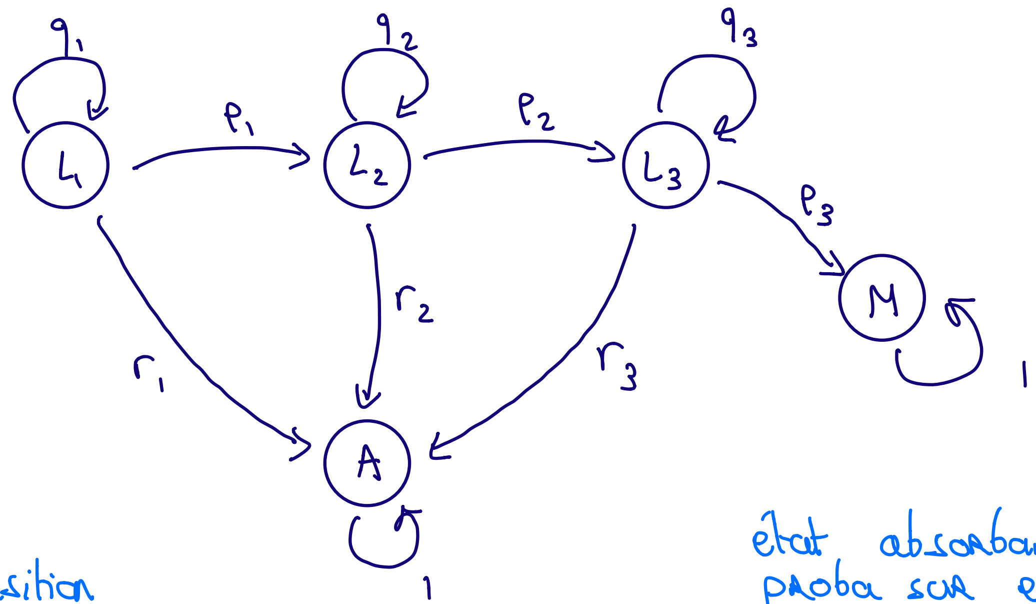
Exercice 56 : Cursus d'un étudiant

56.1) chaîne de Markov car

proba transition dépend que de l'état où on est

et pas ce qui s'est passé avant

56.2)



matrice transition

	L_1	L_2	L_3	A	M
L_1	q_1	p_1	0	r_1	0
L_2	0	q_2	p_2	r_2	0
L_3	0	0	q_3	r_3	p_3
A	0	0	0	1	0
M	0	0	0	0	1

état absorbant : proba sur elle-m̂ vaut 1

les autres sont des états transients

états absorbant $\Rightarrow$ acycliq

56.3) chaine réductible et acyclique

états transients : L_1 , L_2 , L_3

états absorbant : M , A

56.4) $\alpha_3^M(n) = q_3 \cdot \alpha_3^M(n-1)$ $\qquad \alpha_3^M(1) = p_3$

$\alpha_3^A(n) = q_3 \cdot \alpha_3^A(n-1)$ $\qquad \alpha_3^A(1) = r_3$

$\alpha_2^A(n) = q_2 \, \alpha_2^A(n-1) + p_2 \cdot \alpha_3^A(n-1)$ $\qquad \alpha_2^A(1) = r_2$

$\alpha_1^t(n) = q_1 \, \alpha_1^t(n-1) + p_1 \cdot \alpha_2^t(n-1)$ $\qquad \alpha_1^t(1) = r_1$

$\alpha_1^M(1) = 0 = \alpha_2^M(1)$

- $\alpha_3^t = \lim\limits_{N \mapsto +\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_3^t(N)$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_3^t(i) = \alpha_3^t(1) + \sum_{i=2}^{N} \alpha_3^t(i)$$

$$= \alpha_3^t(1) + q_3 \sum_{i=2}^{N} \alpha_3^t(i-1)$$

$$= \alpha_3^t(1) + q_3 \sum_{i=2}^{N-1} \alpha_3^t(i)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_3^t = \alpha_3^t(1) + q_3 \, \alpha_3^t$$

$$\alpha_3^t = \frac{\alpha_3^t(1)}{1 - q_3}$$

- $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_2^t(i) = \alpha_2^t(1) + \sum\limits_{i=2}^{N} \alpha_2^t(i)$

$$= \alpha_2^t(1) + q_2 \sum_{i=2}^{N-1} \alpha_2^t(i) + p_2 \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_3^t(i)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2^t = \alpha_2^t(1) + q_2 \, \alpha_2^t + p_2 \, \alpha_3^t$$

$$\alpha_2^t = \frac{\alpha_2^t(1) + p_2 \, \alpha_3^t}{1 - q_2}$$

$\bullet\ \alpha_1^L = \alpha_1^L(1) + q_1 \alpha_1^L + p_1 \alpha_2^L = \dfrac{\alpha_1^L(1) + p_1 \alpha_2^L}{1 - q_1}$

56. 5) $\alpha_3^M = 0{,}77$ $\alpha_2^M = 0{,}43$ $\alpha_1^M = 0{,}24$

56. 6) $\bullet$ p = proba réussir cursus :

atteindre M à partir de L_1

donc $p = \alpha_1^M$ $\Rightarrow$ $p = 0{,}24$

$\bullet$ p' = proba réussir en 3 ans :

$L_1 \to L_2 \to L_3 \to M$

donc $p' = p_1 \times p_2 \times p_3 = \alpha_{1,3}^M$ (récurrence)

$p' = 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}7$

$p' = 0{,}14$

$\bullet$ p'' = proba redoubler au moins une fois :

$p'' = 1 - (p' + p''')$

avec p' = proba réussir en 3 ans

p''' = proba rater sans redoubler

$p''' = r_1 + p_1(r_2 + p_2 r_3)$

$p''' = 0{,}5$

donc $p'' = 1 - (0{,}14 + 0{,}5)$

$p'' = 0{,}36$

FIN