LU3IN005
stats

18/10/2020

TD 3

Exercice 13 : Loi Binomiale

13.1) $X_4 \sim \mathcal{B}(p, 4)$

$P(X_4 = k) = C_4^k \, p^k (1-p)^{4-k}$

$X_2 \sim \mathcal{B}(p, 2)$

13.2) $P(X_4 \leq 2) = 1 - P(X_4 = 4) - P(X_4 = 3)$

$= 1 - p^4 - 4p^3(1-p)$

$= 1 + 3p^4 - 4p^3$

$P(X_2 \leq 1) = 1 - P(X_2 = 2) = 1 - 1 \times p^2$

$= 1 - p^2$

13.3) trouver un p tq :

$\underbrace{P(X_4 \leq 2)} > P(X_2 \leq 1)$

proba tq A n'arrive pas à destination

$\cancel{1} + 3p^4 - 4p^3 - \cancel{1} + p^2 > 0$

$p^2(3p^2 - 4p + 1) > 0$

Exercice 14 : Loi de Poisson

Loi de Poisson : $P(X=n) = \dfrac{\exp(-\lambda)\,\lambda^n}{n!}$

$E(X) = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$

14.1.1) $P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$P(Y=k \mid X=n) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$

nb pers qui sont rentrées

suit une loi Binomiale

k : nb pers qui ont choisi le guichet 1

n-k : nb pers qui ont choisi le guichet 2

donc on calcule :

$P(X=n, Y=k) = P(Y=k \mid X=n) \, P(X=n)$

14.1.2] il faut utiliser la définition de
$e^a = \sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n!}$

Exercice 16 : Les anniversaires

$$A_{365}^n = \frac{365!}{(365-n)!}$$

16.2) il y a 365^n possibilités

16.4) $P_n = \frac{A_{365}^n}{365^n}$

et donc on cherche $1 - P_n \geq \frac{1}{2}$

=> à partir de 23 personnes

Exercice 17 : Calendrier aléatoire

17.1) $X \to \{31, 30, 28\}$

le mois

$$P(X=k) = \sum_{i=1}^{12} P(X=k, M=i)$$

$$= \sum P(X=k \mid M=i)\, P(M=i) \qquad P(M=i) = \frac{1}{12}$$

$$P(X=31) = \frac{7}{12} \qquad P(X=30) = \frac{4}{12} \qquad P(X=28) = \frac{1}{12}$$

17.2) $E(X) = 31 \times \frac{7}{12} + 30 \times \frac{4}{12} + \frac{28}{12} = 30,42$

$$Var(X) = \begin{cases} E[X - E(X)^2] \\ E(X^2) - (E(X))^2 \end{cases}$$

$$= \frac{31^2 \times 7}{12} + \frac{30^2 \times 4}{12} + \frac{28^2}{12} - (30,42)^2$$

$Var(X) = 0,86$

17.3) $Y \to \{28, 30, 31\}$

$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{365} P(Y=k \mid J=i)\, P(J=i)$$

$$= P(Y=28) + P(Y=30) + P(Y=31)$$

$$= \frac{28}{365} + \frac{30}{365} + \frac{31}{365}$$

$E(Y) = 30,44$

Exercice 20 : Deux dés

20.1) $P(X_1 = k) = \frac{1}{6}$ $\qquad E(X) = 3,5$

20.2) $X = X_1 + X_2$ $\qquad E(X) = 7$

$Y = X_1 - X_2$ $\qquad E(Y) = 0$

$$E(XY) = E((X_1, X_2)(X_1 - X_2))$$
$$= E(X_1^2 - X_2^2)$$
$$= E(X_1^2) - E(X_2^2) = 0$$

car X_1 et X_2 ont la m̄ destination
donc m̄ espérance

corélation :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{E(XY)}{0} - E(X)\frac{E(Y)}{0} = 0$$

$\Rightarrow$ les deux variables sont décorélées

20.3) $U = \min(X_1, X_2)$ $\qquad V = \max(X_1, X_2)$

$P(U = i) = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$
$i = 1 \to 6$
$$= \left[\frac{11}{36}, \frac{9}{36}, \frac{7}{36}, \frac{5}{36}, \frac{3}{36}, \frac{1}{36}\right]$$

$E(U) = 2,6$

$U + V = X_1 + X_2$

$$E(V) = E(X_1) + E(X_2) - E(U)$$
$$= 4,5$$

FIN