L3INOOS stats

TD4

22/10/2020

Exercice 21 : RandomSort et RandomPerm

21.1.1) $n!$ possibilités donc $p = \frac{1}{n!}$

21.1.2) $P(k=1) = \frac{1}{n!}$

21.1.3) $P(X=k) = \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n!}\right)^{k-1}$

trié exactement au $k^{\text{ième}}$ coup donc pas vraiment ce qu'on veut

$$P(X \leq k) = 1 - P(X > k)$$
$$= 1 - \left(1-\frac{1}{n!}\right)^k$$

21.1.4) $P(X \leq k) > 0,5$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(1-\frac{1}{n!}\right)^k > 0,5$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n!}\right)^k < 0,5$$

$$\Leftrightarrow k \log\left(1-\frac{1}{n!}\right) < -\log(2)$$

$$\Leftrightarrow k > \frac{-\log 2}{\log\left(1-\frac{1}{n!}\right)}$$

$\log(0,5) = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2)$

$n \mapsto +\infty$

donc $\log\left(1-\frac{1}{n!}\right) \mapsto 0$

donc $\frac{-\log 2}{\log(\dots)} \mapsto +\infty$

Donc cet algorithme n'est pas efficace

20.2.1) Seul moment où on est sur la case $X[n]$, c'est à la 1ère tour de boucle, donc une seule possibilité pour que $X[n]=i$.
Et on a $n+1$ cases.
Donc $P[X[n]=i) = \frac{1}{n+1}$

20.2.2) De m̂, une seule possibilité pour que $X[n-1]=j$.
Cependant on a n cases, car $X[n]$ est fixé (on n'y touche plus)
Donc $P(X[n-1]=j \mid X[n]=i) = \frac{1}{n}$

Ainsi de suite pour les autres cases.
Donc $P(X[t]=i \mid X[t+1], \dots, X[n]) = \frac{1}{t+1}$

20.2.3) $P(X=[i_0, \dots, i_n]) = P(X[n]=i_n) \times P(X=[i_0, \dots, i_{n-1}] \mid X[n]=i_n)$

$= P(X[n]=i_n) P(X[n-1]=i_{n-1} \mid X[n]=i_n) \times P[X=[i_0, \dots, i_{n-2}] \mid X[n]=i_n, X[n-1]=i_{n-1})$

$= \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n} \times \dots \times 1$

$P(X=[i_0, \dots, i_n]) = \frac{1}{(n+1)!}$

Exercice 22 : Com à travers un canal bruité

22.1) X_k = nb erreurs pour k bits
$P(X_k \geq 1) = 1 - P(X_k = 0) = 1 - (1-p)^k$

22.2) $X_n \sim \mathcal{B}(p, n)$

$E(X_n) = np \qquad V(X_n) = np(1-p)$

22.3) $p_n = P(X_n > \frac{n}{2})$

22.4.1) $p_n = P(X_n - E(X_n) > \frac{n}{2} - E(X_n))$

$p_n = P(X_n - E(X_n) > \frac{n}{2} - np)$

$p_n = P(X_n - E(X_n) > n(\frac{1}{2} - p))$

$p_n = P(X_n - E(X_n) > \lambda)$ avec $\lambda = n(\frac{1}{2} - p)$

22.4.2) d'après l'inégalité de Tchebychev, on a :

$P(|X - E(X)| > \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2}$

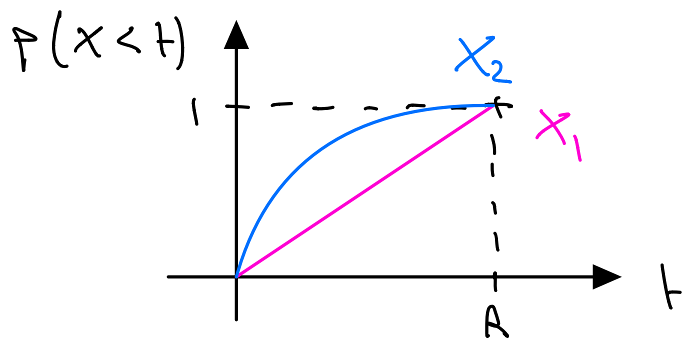
donc $p_n \leq \frac{V(X_n)}{\lambda^2}$

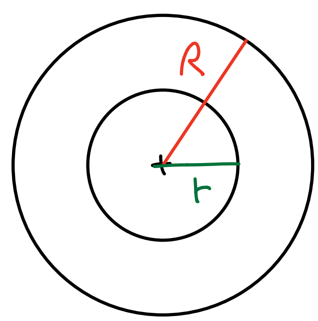
$\Leftrightarrow p_n \leq \frac{np(1-p)}{n^2(\frac{1}{2}-p)^2} \Leftrightarrow p_n \leq \frac{p(1-p)}{n(\frac{1}{2}-p)^2}$

22.5) $p = 0,001$ tq $p_n \leq \frac{p}{10} \Rightarrow n = 40,13$

22.6) $n \simeq 27$

Exercice 23 : Tir à l'arc





23.1) $P(X_1 \leq t) = k_1 t$ $\quad P(X_2 \leq t) = k_2 \sqrt{t}$

avec $t \in [0; R]$

$k_1 R = 1 \Leftrightarrow k_1 = \frac{1}{R}$ $\quad k_2 \sqrt{R} = 1 \Leftrightarrow k_2 = \frac{1}{\sqrt{R}}$

23.2) $P(X_1 = t) = 0$

car impossible de toucher exactem à t distance

23.3) $F_1(t) = P(X_1 < t) = \int_{-\infty}^{t} p_1(x)\,dx$

$F_1(t) = \int_0^t p_1(x)\,dx$ car distance positive donc de 0 à t

$F_1'(t) = p_1(t) = k_1 = R$

$F_2'(t) = p_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} k_2 = \frac{1}{2} k_2 t^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{R}} t^{-\frac{1}{2}}$

23.4) $E(X_1) = \int_0^R \frac{x}{R}\,dx = \frac{1}{R}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^R = \frac{R}{2}$

$E(X_2) = \int_0^R x \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{R}}\,dx = \int_0^R \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{R}}\,dx$

$= \left[\frac{\cancel{2}}{3} \times \frac{x^{3/2}}{\cancel{2}\sqrt{R}}\right]_0^R = \frac{R}{3}$

FIN