RELAZIONE – Gruppo E Traccia 4a

A cura di: Giuseppe Sergi, Luca Berardi, Marco Motamed, Davide Badini

Si vuole costruire un controllore per ottenere una velocità angolare ω costante nel tempo nonostante la deformazione su una delle pale dell'elica che provoca non-linearità.

Si hanno le seguenti equazioni della dinamica:

$$\dot{\theta} = \omega$$
$$(m_i e_i^2 + I_e)\dot{\omega} = -\beta\omega - g m_i e_i \, sin(\theta) + \tau$$

dove θ e ω sono rispettivamente l'angolo e la velocità di rotazione, τ è la coppia applicata al rotore (ingresso u del sistema), mentre i parametri fisici sono: I_e (il momento di inerzia), m_i (la massa concentrata dell'imperfezione), e_i (la distanza della massa dall'asse di rotazione), β, e g (l'accelerazione gravitazionale).

Individuiamo lo stato, l'uscita e l'ingresso del sistema da controllare:

$$x = (x_1, x_2) = (\theta, \omega)$$
$$\dot{x} = f(x, u)$$
$$y = h(x, u) = x_2 = \omega$$

Dalle equazioni della dinamica, otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{-\beta x_2 - g m_i e_i \sin x_1 + u}{m_i e_i^2 + I_e} \end{cases}$$

Prendiamo la coppia di equilibrio specificata nella traccia:

$$(x_e, u_e) = \left(\left(x_{e_1}, x_{e_2} \right), u_e \right)$$

Dove si ha $x_{e1} = \theta_e = 0$, $x_{e2} = \omega_e = 0$.

Dalla formula, ponendo

$\dot{x}_2 = 0$ otteniamo:

$u_e = \beta x_{e2} + g m_i e_i \sin x_{e_1}$ *e* sostituendo la coppia di equilibrio abbiamo $u_e = 0$.

Quindi: $(x_e, u_e) = \big((0,0), 0\big)$.

Procediamo con la linearizzazione.

Prendiamo una traiettoria a partire da stato iniziale $x_0 = xe + \Delta x_0$, abbiamo che:

$$x(t) = xe + \Delta x(t)$$

$$u(t) = ue + \Delta u(t)$$

$$y(t) = ye + \Delta y(t)$$

Con $x_e = (0, 0)$, $u_e = \tau_e = 0$, $ye = xe_2 = 0$.

Essendo una traiettoria vale

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(x_e + \Delta x(t)) = \Delta\dot{x}(t) = f(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t))$$

$$\Delta\dot{x}(t) = f\,(x_e + \Delta x(t), \Delta u(t))$$

$$y_e + \Delta y(t) = h\,(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t))$$

$$\Delta y(t) = h\,(x_e + \Delta x(t), \Delta u(t))$$

da cui si ottiene un sistema con stato *Δx(t)* e ingresso *Δu(t)*

$$\begin{cases} \Delta x(t) = f(xe + \Delta x(t), \Delta u(t)) \\ \Delta y(t) = h(xe + \Delta x(t), \Delta u(t)) \end{cases}$$

Si procede con lo sviluppo di Taylor

$$\Delta\dot{x}(t) = \left.\frac{df(x,u)}{dx}\right|_{(x_e,u_e)} * \Delta x(t) + \left.\frac{df(x,u)}{du}\right|_{(x_e,u_e)} * \Delta u(t) + o(t)$$

$$\Delta y(t) = \left.\frac{dh(x,u)}{dx}\right|_{(x_e,u_e)} * \Delta x(t) + \left.\frac{du(x,u)}{du}\right|_{(x_e,u_e)} * \Delta u(t) + o(t)$$

Ovvero

$$\Delta\dot{x}(t) \approx A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) \approx C\Delta x(t) + D\Delta u(t)$$

Dove le matrici A, B, C, D sono:

$$A = \left.\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{vmatrix}\right|_{(x_e,u_e)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-gm_ie_i}{m_ie_i^2+I_e} & \frac{-\beta}{m_ie_i^2+I_e} \end{vmatrix}; \quad B = \left.\begin{vmatrix} \frac{df_1}{du} \\ \frac{df_2}{du} \end{vmatrix}\right|_{(x_e,u_e)} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_ie_i^2+I_e} \end{vmatrix}; \quad C = |0 \quad 1|; \qquad D = 0$$

Il sistema linearizzato è:

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t) \end{cases}$$

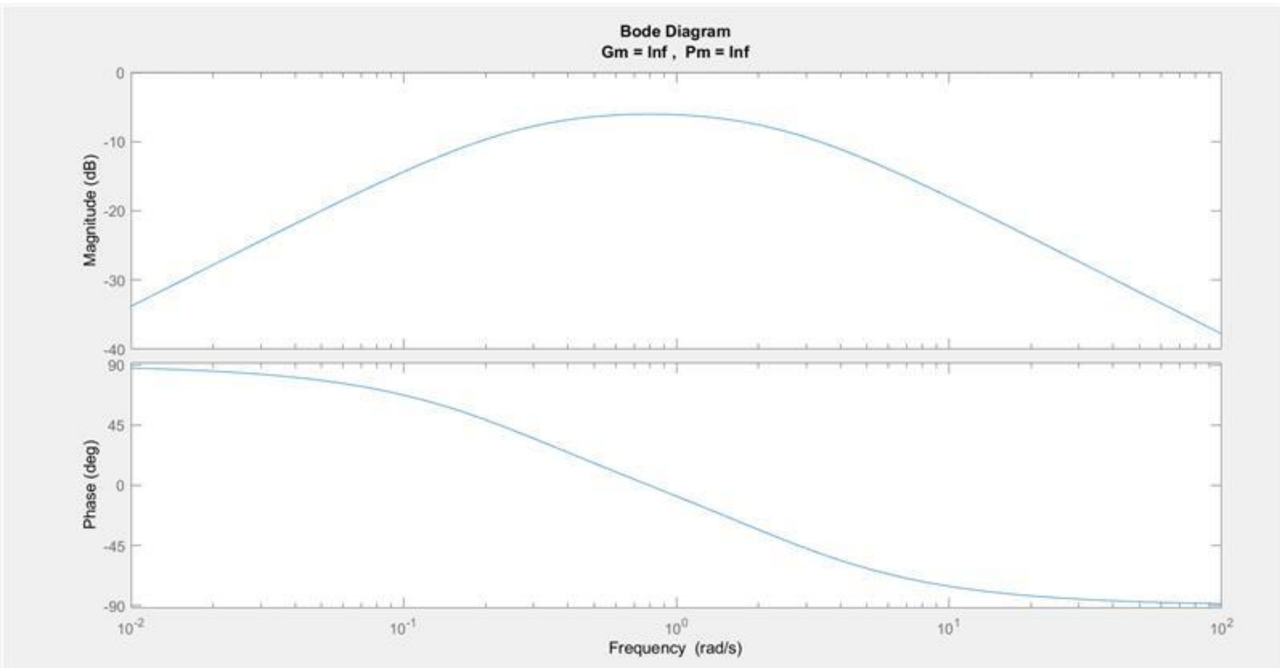
$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = \begin{vmatrix} \delta x_2(t) \\ \frac{(-g m_i e_i)\delta x_1(t)}{m_i e_i^2 + Ie} + \frac{(-\beta)\delta x_2(t)}{m_i e_i^2 + Ie} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_i e_i^2 + I_e}\delta u(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta x_2(t) \\ \frac{(-g m_i e_i)\delta x_1(t)}{m_i e_i^2 + Ie} + \frac{(-\beta)\delta x_2(t)}{m_i e_i^2 + Ie} + \frac{1}{m_i e_i^2 + I_e}\delta u(t) \end{vmatrix} \\ \delta y(t) = \delta x_2(t) \end{cases}$$

Con $x(t) \approx xe + \delta x(t)$, $y(t) \approx y_e + \delta y(t)$, $u(t) = u_e + \delta u(t)$ e $x0 \approx x_e + \delta x(0)$. Essendo gli autovalori della matrice < 0 il sistema è asintoticamente stabile. (Autovalori: $\lambda_1 \approx -0{,}274$; $\lambda_2 \approx -2{,}306$).

Dopo aver trovato il sistema linearizzato procediamo al calcolo della funzione di trasferimento:

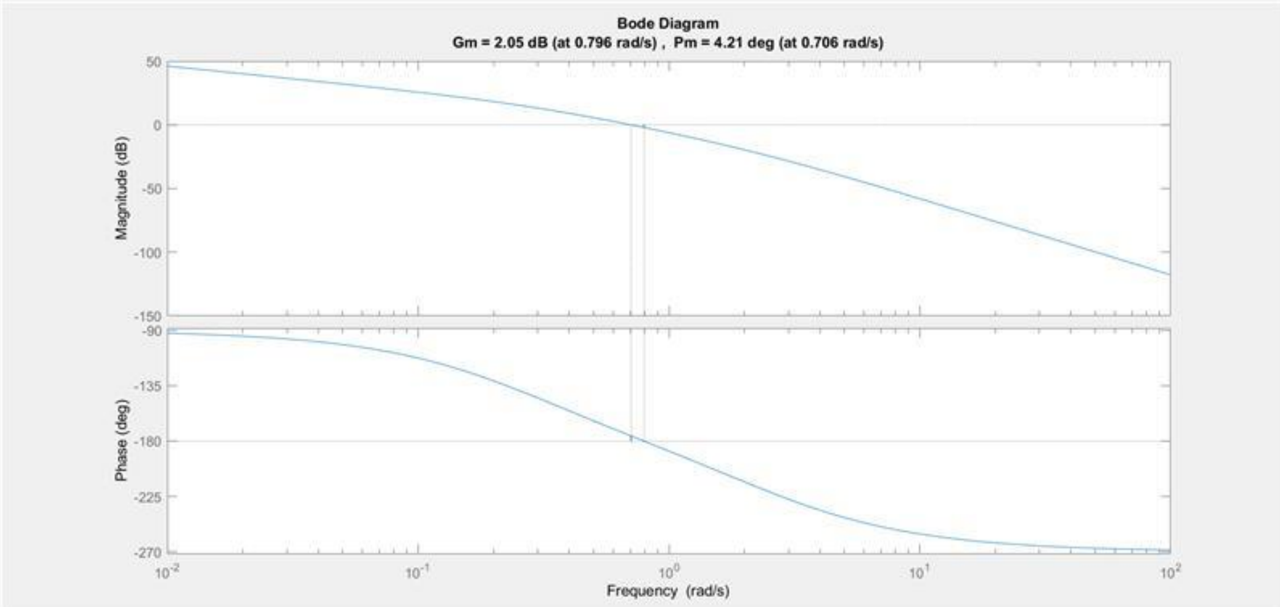
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{2000s}{1550s^2 + 4000s + 981}$$

Riportiamo il diagramma di Bode della *G(jw):*



SINTESI DEL REGOLATORE

Innanzitutto, consideriamo la specifica riguardante l'errore a regime nullo. È necessario introdurre un regolatore statico con due poli nell'origine, in quanto uno per soddisfare la specifica riguardante l'errore a regime nullo e l'altro per ovviare alla cancellazione dovuta alla presenza di uno zero nell'origine, quindi: $R_s(s) = \frac{1}{s^2}$. Riportiamo il diagramma di Bode della $G_e(jw)$ ottenuta:



Successivamente vengono mappati i vincoli dati dalla traccia nei diagrammi di Bode:

- Vincolo sulla sovra elongazione: $S\% \leq S^* = 1\%$.

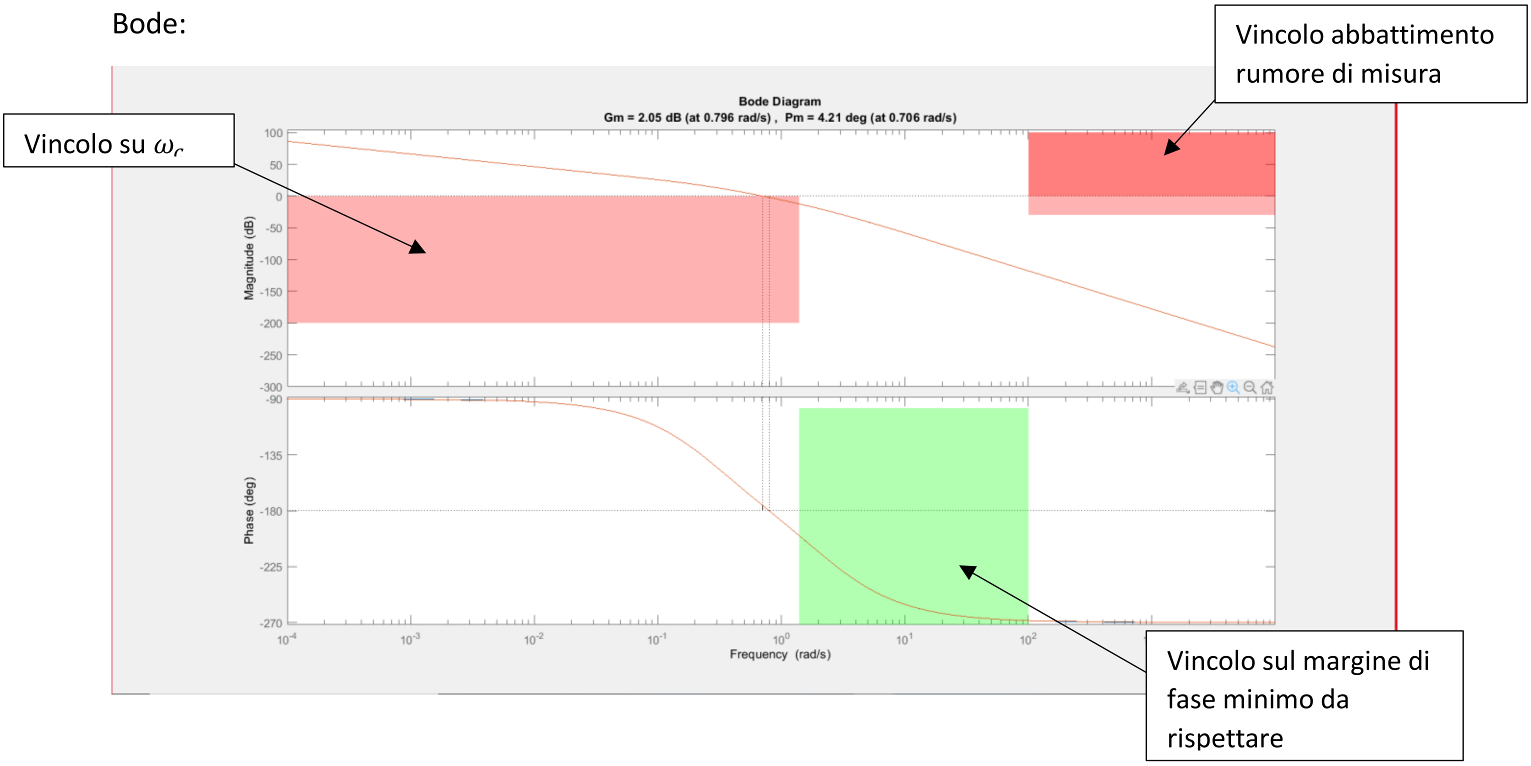
Da cui si ha $S\% = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-(\xi)^2}}}$ da cui ricaviamo $\xi^* \approx 0{,}8261$ e quindi un margine di fase minimo $M_f^* = \xi^* * 100 \approx 82{,}61$ (che è più restrittivo rispetto al precedente vincolo di 45°).

- Vincolo sul tempo di assestamento $T_{a,h\%} = T_{a,s}$ con $h\% = 1$ e $T_{a,h\%} = T^* = 4$ ne consegue che:

$$\omega_c \geq \omega_{c\min} = \frac{460}{M_f^* T^*} \approx 1{,}3921$$

- Per il vincolo sull'abbattimento del rumore di misura *n(t)* ne consegue che il diagramma di Bode della ampiezza deve essere al di sotto di -20log(30) ≈ -29,54 dB per $\omega \geq \omega_n = 100$.

Da questi tre vincoli otteniamo le zone proibite che rappresentiamo nel seguente diagramma di Bode:



Notiamo dai diagrammi che la pulsazione ω_c e il margine di fase non rispettano i vincoli rappresentati.

Inserendo una rete anticipatrice il guadagno massimo di fase percepibile è di 90° al max. Per ovviare a questo problema e guadagnare ulteriori 90° inseriamo anche uno zero (pari a: $0{,}5131s + 1$).

Adesso procediamo con il tuning dei parametri della rete anticipatrice imponendo $M^* = 10{,}19$; $\omega_c^* = 2{,}5$; $\varphi^* \approx 78{,}9838°$; e un guadagno $\mu_D = 1{,}2$.

$$\tau = \frac{M^* - \cos\varphi^*}{\omega_c * \sin\varphi^*} \approx 4{,}0822$$

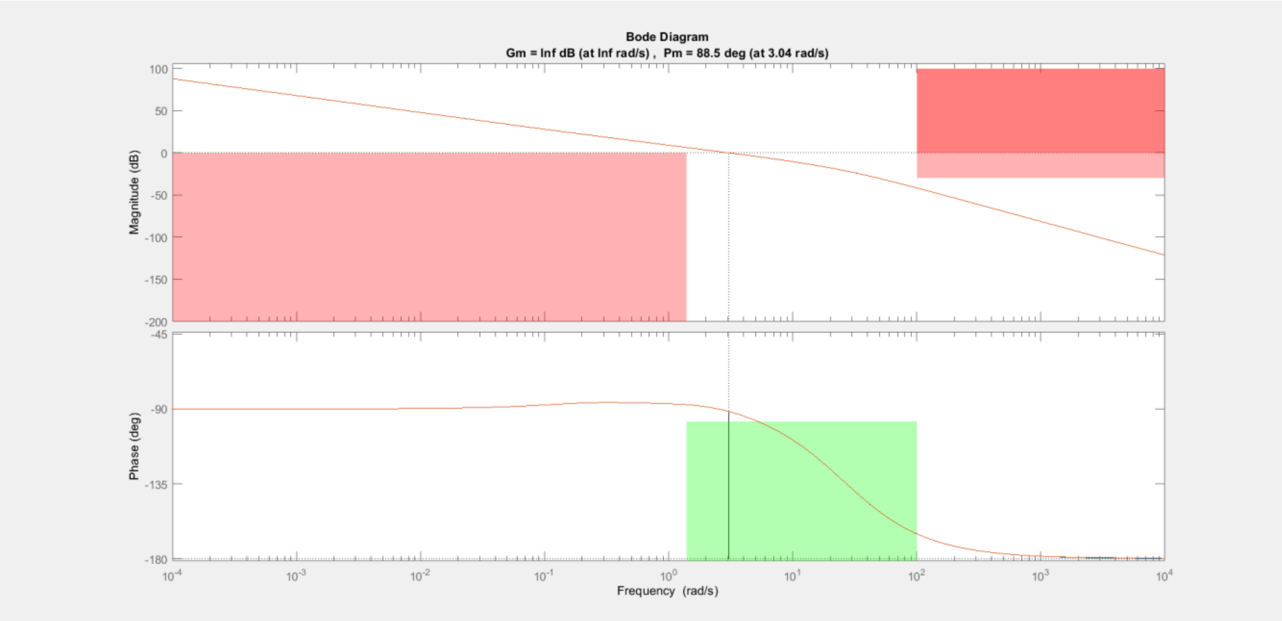
$$\alpha\tau = \frac{\cos\varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c * \sin\varphi^*} \approx 0{,}0379$$

$$R_d(s) = \frac{1 + s\tau}{1 + s\alpha\tau}$$

$$R(s) = \mu_d R_s(s) R_d(s) R_{dz}(s) \text{ con } R_{dz} = 0{,}5131s + 1.$$

$$L(s) = R(s)G(s)$$

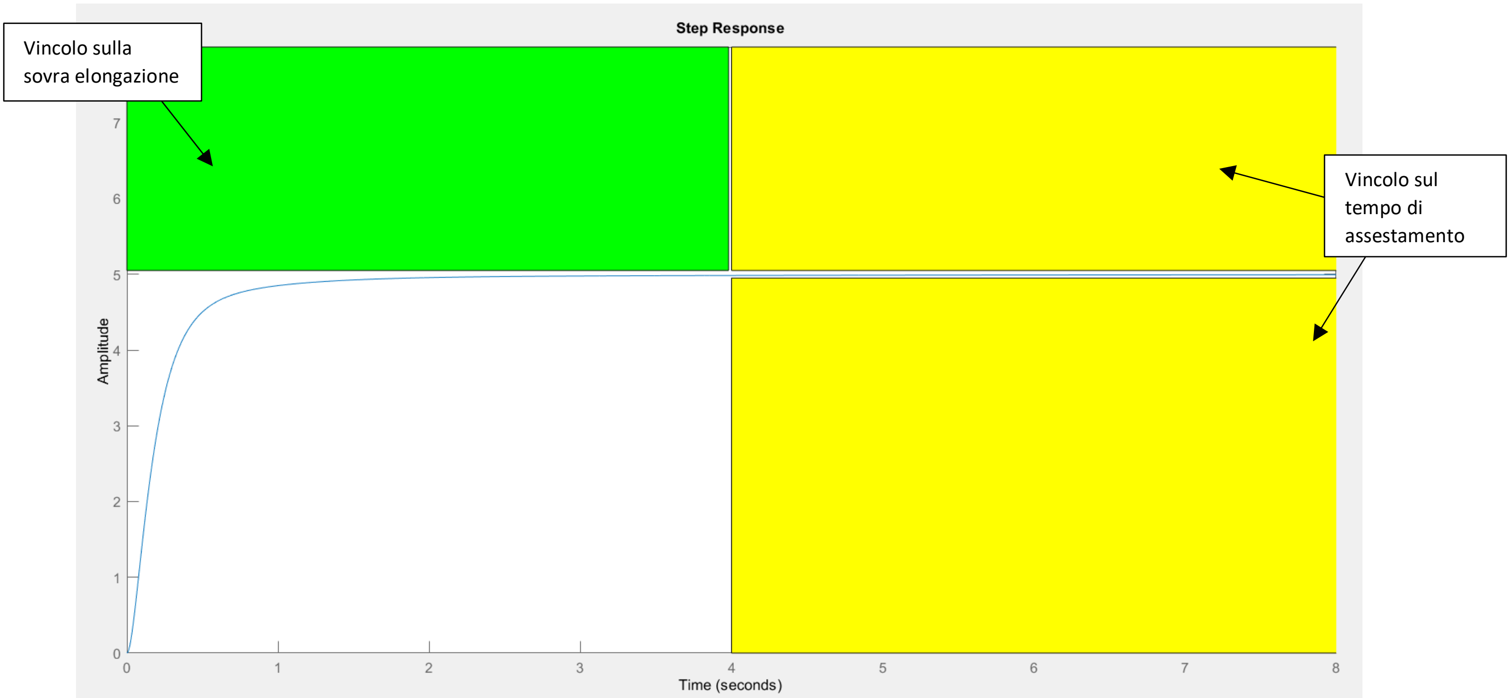
Riportiamo dunque il diagramma di Bode della funzione *L(s)* :



Con un guadagno aggiuntivo *k* pari a 1.5 trovato tramite il tool di Matlab "*Control System Designer" (loop shaping).*

$$F(s) = \frac{kL(s)}{1+kL(s)}$$

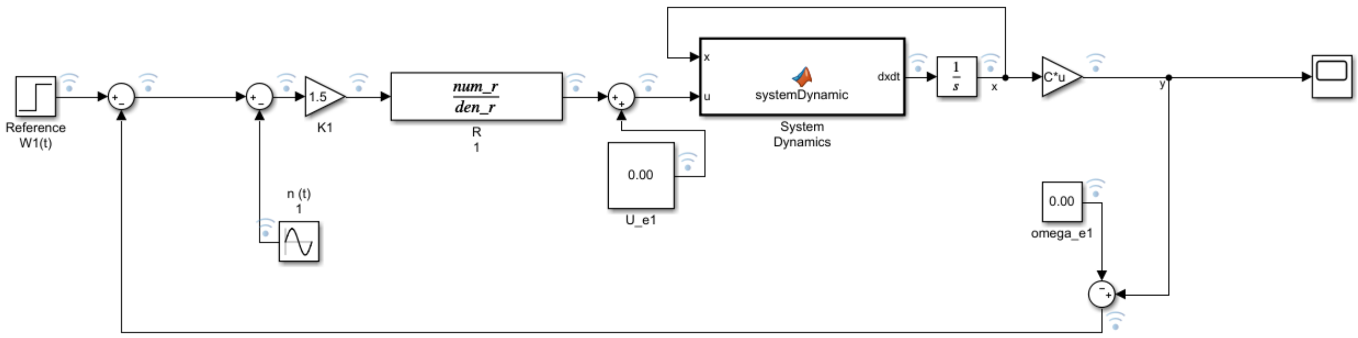
Di seguito la risposta al gradino *Y(s)=WF(s)* (con ingresso W1(t) dove W=5)*:*



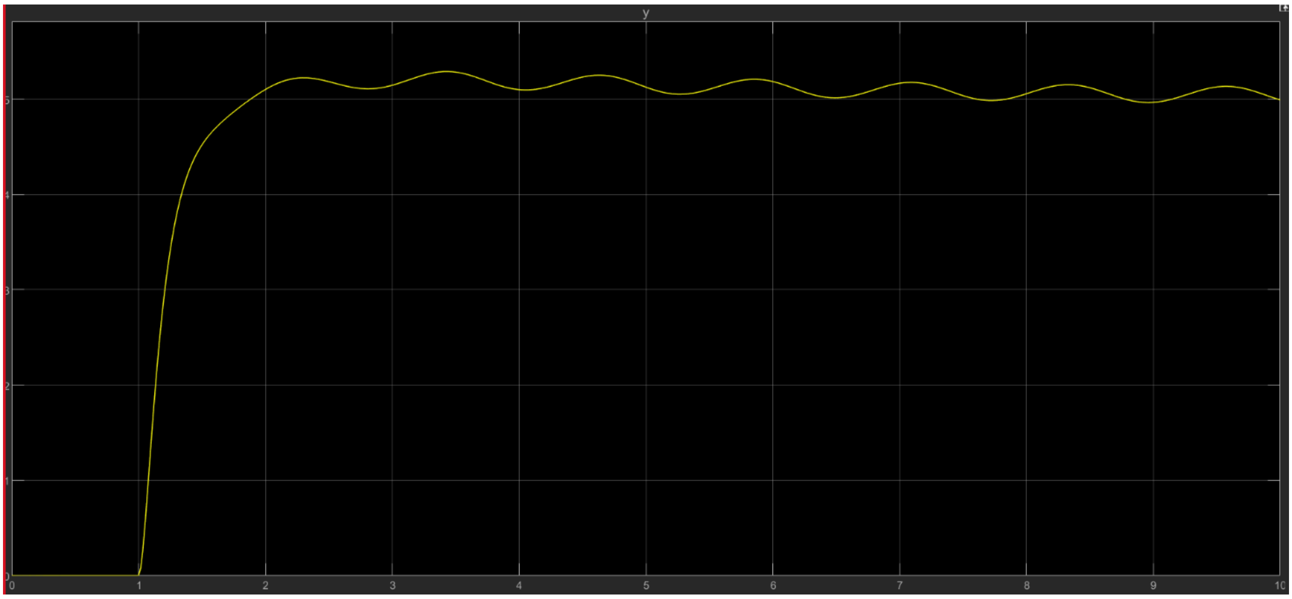
È inoltre rispettato il vincolo sulla variazione del parametro l_e per ±0.1.

Esplorando i valori per cui la risposta al gradino e la funzione d'anello rispettano i vincoli di progetto, abbiamo trovato il seguente range di valori per il parametro l_e: [**0,6 ; 0,9**].

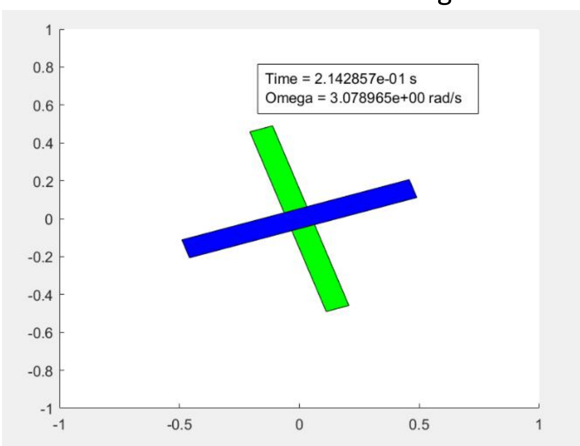
SIMULINK



Riportiamo la simulazione con un rumore di misura *n(t)* di ampiezza *Mn =0,02* a frequenza $\omega_n = 100\ rad/s$.



Ecco, infine, riportato uno screenshot della nostra animazione grafica della risposta al gradino:



Gruppo E – Giuseppe Sergi, Luca Berardi, Marco Motamed, Davide Badini