TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

Lehrstuhl für Sprachen und Beschreibungsstrukturen SS 2016
Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen **Übungsblatt 2**
Prof. Dr. Helmut Seidl, J. Kranz, A. Reuss, R. Vogler 24.04.2016

Abgabe: 01.05.2016 (bis 23:59 Uhr)

Aufgabe 2.1 (P) Division

Wir betrachten die Schulmethode der Division. Hierbei untersuchen wir die Zahl der (elementaren) Operationen, die wir benötigen, um eine n-stellige Zahl durch eine einzelne *Ziffer* ganzzahlig mit Rest zu teilen. Für zwei Zahlen $a \in \mathcal{N}_0$ und $b \in \mathcal{N}$ bezeichne $g(a, b) := \lfloor a/b \rfloor$ das Ergebnis der ganzzahligen Division von a durch b, sowie $r(a, b) := a - g(a, b) \cdot b$ den Rest der ganzzahligen Division. Weiterhin bezeichne $a.b$ die Konkatenation zweier Ziffern a und b.

Der folgende Pseudocode beschreibt die Schulmethode. Der Dividend bestehe aus den Ziffern $x_1 \dots x_n$ und der Divisor sei $y > 0$. Der Zähler i ist die aktuell betrachtete Stelle und $z_1.z_2 \dots$ die Ziffern des Ergebnisses der ganzzahligen Division.

Input: Ziffer[] $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, Ziffer y
int $i := 1$
Ziffer $x_0 := 0$ /* Hilfsziffer zur Vermeidung von Fallunterscheidung */
while $i \leq n$ **do**
    if $x_{i-1} > 0$ **then**
        Ziffer $z_i := g(x_{i-1}.x_i, y)$
        $x_i := r(x_{i-1}.x_i, y)$
        $x_{i-1} := 0$ /* Kann auch weggelassen werden */
    end
    else
        Ziffer $z_i := g(x_i, y)$
        $x_i := r(x_i, y)$
    end
    $i := i + 1$
end
Das Ergebnis der Division ist $z_1.z_2 \dots$, der Rest is x_n.

Algorithm 1: Ganzzahlige Division mit Rest

Beispiel: 36811 ganzzahlig dividiert durch 4. Der Strich markiert die aktuelle Position. Auf der linken Seite sind die Ziffern $x_0 \dots x_n$, auf der rechten Seite die wachsende Ziffernfolge $z_1 \dots z_n$ abgebildet.

$036811 \rightarrow 0$

$036811 \rightarrow 09$

$000811 \rightarrow 092$

$000011 \rightarrow 0920$

$000011 \rightarrow 09202$

$000003 \rightarrow 09202$ Rest 3

Für die Auswertung von $g(x_i.x_{i+1}, y)$ und $r(x_i.x_{i+1}, y)$ verwenden wir im Voraus berechnete Tabellen. Wir *legen fest*, dass in unserem Modell jeder Vergleich zweier Zahlen, jede Konkatenation zweier Ziffern, jede Zuweisungsoperation sowie jede Nachschlageoperation in den Tabellen eine *Grundoperation* darstellt.

Wie viele Grundoperationen hat die Schulmethode in unserem Rechenmodell im schlimmsten Fall, wenn man eine Zahl mit n Ziffern ganzzahlig durch eine Ziffer teilt?

Lösungsvorschlag 2.1

Die Zeilen 1 und 2 benötigen zwei Grundoperationen. Der Kopf der While-Schleife wird $n+1$ mal ausgewertet, was $n+1$ Grundoperationen ausmacht. Der Rumpf der While-Schleife wird hingegen n mal durchlaufen. n Durchläufe von Zeile 4 ergeben n Grundoperationen. In jedem Schleifendurchlauf wird entweder der If-Block oder der Else-Block ausgeführt, wobei ein Durchlauf des If-Blocks 7 und des Else-Blocks 4 Grundoperationen erfordert. Der erste Schleifendurchlauf nimmt immer den Else-Block. Man kann nun mit einer geschickt gewählten Eingabe, z.B. 1111 durch 2, provozieren, dass alle übrigen Schleifendurchläufe den If-Block ausführen, was insgesamt $7(n-1)$ Grundoperationen ergibt. Weiterhin wird in jedem Schleifendurchlauf der Zähler inkrementiert, was eine Grundoperation ist. Insgesamt erhalten wir somit die folgende Zahl an Grundoperationen:

$$2 + (n+1) + n + 4 + 7(n-1) + n = 10n$$

Aufgabe 2.2 (P) Induktion

Beweisen Sie folgende Aussagen durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$:

(a) $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$,

(b) $19 | (5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2})$ (In Worten: 19 teilt $(5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2})$),

Lösungsvorschlag 2.2

(a) Wir beweisen nur $n^{\frac{n}{2}} \leq n!$, da die rechte Seite trivial ist.

Induktionsanfang $n = 1$:

$$1^{1/2} = 1 = 1! = 1 = 1^1 \quad \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: $n^{\frac{n}{2}} \leq n!$ gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathcal{N}$.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
(n+1)^{\frac{n+1}{2}} &= (n+1)\left[(n+1)^{n-1}\right]^{\frac{1}{2}} && (1)\\
&= (n+1)\left[\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}n^i\right]^{\frac{1}{2}} && (2)\\
&\leq (n+1)\left[n \cdot n^{n-1}\right]^{\frac{1}{2}} && (3)\\
&= (n+1)\cdot n^{\frac{n}{2}}\\
&\overset{I.V.}{\leq} (n+1)\cdot n!\\
&= (n+1)!\ .
\end{aligned}$$

Die Gleichheit von (1) und (2) folgt aus dem binomischen Lehrsatz $(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i$ für $x,\ y \neq 0$ und $k \in \mathcal{N}_0$. Von (2) nach (3) kommt man, da $\binom{n-1}{i} = \binom{n-1}{n-1-i} \leq n^{n-1-i}$ gilt.

$\square$

(b) Wir zeigen, dass die Aussage sogar für alle $n \in \mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup \{0\}$ gilt.

Induktionsanfang: $n = 0$:

$$(5 \cdot 2^{3\cdot 0+1} + 3^{3\cdot 0+2}) = 5 \cdot 2^1 + 3^2 = 10 + 9 = 19$$

und 19 teilt offensichtlich 19. $\checkmark$

Induktionsvoraussetzung: $19|(5\cdot 2^{3n+1}+3^{3n+2})$ gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathcal{N}_0$.

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
(5 \cdot 2^{3(n+1)+1} + 3^{3(n+1)+2}) &= 3^{3n+3+2} + 5 \cdot 2^{3n+3+1}\\
&= 27(3^{3n+2}) + 27(5 \cdot 2^{3n+1}) - 27(5 \cdot 2^{3n+1}) + 8(5 \cdot 2^{3n+1})\\
&= 27(5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}) - 19(5 \cdot 2^{3n+1}) \overset{IA}{=} 27 \cdot 19x - 19(5 \cdot 2^{3n+1})\\
&= 19(27x - (5 \cdot 2^{3n+1})) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass die linke Seite von Formel (4) ein Vielfaches von 19 ist. Daher teilt also 19 auch $(5 \cdot 2^{3(n+1)+1} + 3^{3(n+1)+2})$.

$\square$

Aufgabe 2.3 (P) $\mathcal{O}$-Notation

Kreuzen Sie in den Zeilen (a) bis (f) jeweils das zu den Funktionen stärkste passende Symbol an. Das heißt, wenn $\Delta = o$ (bzw. $\Delta = \Theta$) möglich ist, wählen Sie $\Delta = o$ (bzw. $\Delta = \Theta$) und nicht $\Delta = \mathcal{O}$. Falls die Funktionen unvergleichbar sind, kreuzen Sie „u." an.

Bsp.:	n	$\in \Delta(n^2)$	☒ o	☐ $\mathcal{O}$	☐ ω	☐ Ω	☐ Θ	☐ u.
(a)	$7n^3$	$\in \Delta(3n^7)$	☑ o	☐ $\mathcal{O}$	☐ ω	☐ Ω	☐ Θ	☐ u.
(b)	$\sqrt[3]{\sqrt{3n}}$	$\in \Delta\left(\sqrt{\sqrt[3]{2n}}\right)$	☐ o	☐ $\mathcal{O}$	☐ ω	☐ Ω	☑ Θ	☐ u.
(c)	$n!$	$\in \Delta(4^n)$	☐ o	☐ $\mathcal{O}$	☑ ω	☐ Ω	☐ Θ	☐ u.
(d)	n	$\in \Delta((2+(-1)^n)n)$	☐ o	☐ $\mathcal{O}$	☐ ω	☐ Ω	☑ Θ	☐ u.
(e)	$\sqrt{n}$	$\in \Delta(\ln n)$	☐ o	☐ $\mathcal{O}$	☑ ω	☐ Ω	☐ Θ	☐ u.
(f)	$(0.5n)^{\log_2 n}$	$\in \Delta\left(2^{(\log_2 n)^2}\right)$	☐ o	☐ $\mathcal{O}$	☐ ω	☐ Ω	☐ Θ	☐ u.

Begründen Sie Ihre Antworten jeweils mit einem kurzen Beweis.

Lösungsvorschlag 2.3

(a)	$7n^3$	$\in \Delta(3n^7)$	☒ o	☐ $\mathcal{O}$	☐ ω	☐ Ω	☐ Θ	☐ u.
(b)	$\sqrt[3]{\sqrt{3n}}$	$\in \Delta\left(\sqrt{\sqrt[3]{2n}}\right)$	☐ o	☐ $\mathcal{O}$	☐ ω	☐ Ω	☒ Θ	☐ u.
(c)	$n!$	$\in \Delta(4^n)$	☐ o	☐ $\mathcal{O}$	☒ ω	☐ Ω	☐ Θ	☐ u.
(d)	n	$\in \Delta((2+(-1)^n)n)$	☐ o	☐ $\mathcal{O}$	☐ ω	☐ Ω	☒ Θ	☐ u.
(e)	$\sqrt{n}$	$\in \Delta(\ln n)$	☐ o	☐ $\mathcal{O}$	☒ ω	☐ Ω	☐ Θ	☐ u.
(f)	$(0.5n)^{\log_2 n}$	$\in \Delta\left(2^{(\log_2 n)^2}\right)$	☒ o	☐ $\mathcal{O}$	☐ ω	☐ Ω	☐ Θ	☐ u.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^3}{3n^7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{3n^4} = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3n}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{n}}{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{n}} = \sqrt[6]{\dfrac{3}{2}}$

(c) Es ist bekannt, dass $n! \geq n^{n/2} = \sqrt{n}^n$ gilt, woraus $n! \in \Omega(n^{n/2})$ folgt. Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}^n}{4^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n}}{4}\right)^n \geq \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{16}{4}\right)^n = \infty$ erhalten wir $n^{n/2} \in \omega(4^n)$. Aus den Transitivitätsregeln folgt damit $n! \in \omega(4^n)$.

(d) Für alle n gilt $n \leq (2+(-1)^n)n$, woraus $n \in \mathcal{O}((2+(-1)^n)n)$ folgt. Für alle n gilt außerdem $n \geq \frac{1}{3}\cdot(2+(-1)^n)n$, woraus sich $n \in \Omega((2+(-1)^n)n)$ ergibt. Insgesamt erhalten wir also $n \in \Theta((2+(-1)^n)n)$.

(e) Wurzeln wachsen bekanntlich schneller als Logarithmen.

(f) $\lim_{n \to \infty} \frac{(0.5n)^{\log_2 n}}{2^{(\log_2 n)^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(0.5n)^{\log_2 n}}{n^{\log_2 n}} = \lim_{n \to \infty} 0.5^{\log_2 n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$