24 Wachs-TUM

(a) $f(n)+g(n) \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in O(h(n))$ und $g(n) \in O(h(n))$

$O(h(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{f(n), g(n)\} \in O(h(n)) \Rightarrow f(n) \in O(h(n)) \wedge f(n) \in O(\ldots$

(b) $f(n)+g(n) \in O(h(n)) \not\Rightarrow f(n) \in O(h(n)) \vee g(n) \in O(h(n))$

~~Die~~ beiden $f(n), g(n)$ müssen $\in O(h(n))$, ~~sonst~~ wäre ja die Summe $\notin O(h(n))$

d) $42 < (\log_2 n)^7 < 0{,}1n < (n \log_2 n)^2 < n^{15} < n^3 \cdot 3^{3n} < 1{,}1^{1{,}1^n}$

e) $\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} \leq 3 - \frac{2n}{2^n}$ für $\forall n > 0$

$n=1$: $0 + \frac{1}{2} \leq 3 - \frac{2}{2} = 2$ ✓ IA

$\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} \leq 3 - \frac{2n}{2^n}$ IV

IS: $\sum_{j=0}^{n+1} \frac{j}{2^j} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j}}_{IV} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{IV}{\leq} 3 - \frac{2n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 3 + \frac{(-4n)+n+1}{2^{n+1}} =$

$= 3 + \frac{1-3n}{2^{n+1}} = 3 - \frac{3n-1}{2^{n+1}} < 3 - \frac{2(n+1)}{2^{n+1}}$

(f) $\sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} \in O(1)$

Wenn $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} = \text{const} \Rightarrow$ stimmt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{j}{2^j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{2^j} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} j \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$$

$\frac{1}{2}$ ist unser Koeffizient $\hat{=}\ q$. Man kann leicht bemerken, dass $\frac{d}{dq} \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \sum_{j=1}^{\infty} j\, q^{j-1}$ (genau das, was wir haben). Und da $\sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$ (Summe einer Geometrischen Reihe für $q<1$), soll

$$\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} j \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{q}^{j-1} = \frac{1}{2} \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{1}{2}(-1)\frac{(-1)}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \checkmark \text{ stimmt}$$

2.5

(a) $O(f(n)) \cup O(g(n)) \subseteq O(f(n)+g(n))$

$O(f(n)+g(n)) = O(\max\{f(n), g(n)\})$

Die kleinere Menge von Funktionen wird in der größeren enthalten, also die Aussage stimmt.

(b) $O(f(n)+g(n)) \subseteq O(f(n)) \cup O(g(n))$ ✓

(c) $n \in \Omega(n \log_2 n)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n \log_2 n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log_2 n} = 0 \neq (c>0)$ ×

$\cancel{\Omega(f(n)) = \{g(n) : \exists c > 0 : \exists n_0 > 0 : \forall n \geq n_0 : g(n) \geq c f(n)\}}$

~~$n < n \log_2 n$, deshalb gilt nicht~~

(d) $\left(\frac{n}{2}\right)^5 \in o(3n^5)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{2^5 \cdot 3n^5} = \frac{1}{3 \cdot 2^5} \neq 0$

Stimmt nicht, die sind Θ, es ist egal welche Koef. da stehen.

(e) $n^2 + 8n \in O(3n^2)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+8n}{3n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{8}{n}}{3} = \frac{1}{3}$, also stimmt

(f) $0{,}1n + \sqrt[3]{27n^3} \in \Theta(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{0{,}1n+3n}{n} = 3{,}1$ ✓ stimmt