Fondamenti dell'Informatica

Compito scritto

31 gennaio 2005

Cognome:

Nome:

Matricola:

Note

1. Per i quiz a risposta multipla, fare una croce sulla/e lettera/e che identifica/no la/e risposta/e desiderata/e.
2. Per i quiz a risposta multipla, c'è sempre almeno una risposta corretta. Talvolta ci sono più risposte corrette. Si richiede che siano marcate *tutte e sole* le risposte corrette. In altre parole, una crocetta in più o in meno invalida l'esercizio.
3. Per i quiz descrittivi e gli esercizi, la risposta va data sulla stessa facciata che contiene il testo dell'esercizio. Lo spazio lasciato a questo scopo è sempre sufficiente.
4. È possibile usare il retro dei fogli per eventuali calcoli e verifiche.
5. L'orario di consegna scritto alla lavagna è tassativo.
6. Non è consentita la consultazione di alcunché.
7. Gli esercizi verranno corretti solo se il numero di punti conseguiti nei quiz supera una certa soglia. In caso contrario il compito è insufficiente. Le soglie sono:
   - per i matematici, 18 punti riducibili a 16 a patto che le risposte ai quiz 1, 2, 3, 4, 5 e 9 siano corrette.
   - per gli informatici, 23 punti riducibili a 20 a patto che le risposte ai quiz 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11 e 12 siano corrette.

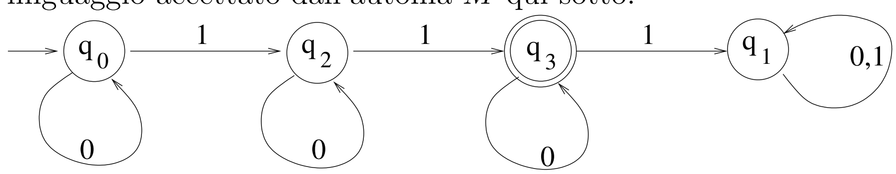
Quiz per tutti

1. (1 punto) Un linguaggio finito
(A) è a pila; (B) è regolare; (C) è irregolare; (D) *né (A) né (B) né (C).*

2. (1 punto) Quale è la cardinalità dell'insieme dei linguaggi che si possono definire su di un alfabeto Σ di $n > 0$ simboli?
(A) 2^n; (B) 2^{2^n}; (C) $|\mathbb{N}|$; (D) $|\wp(\mathbb{N})|$;
(E) *né (A) né (B) né (C) né (D).*

3. (2 punti) I linguaggi regolari sono chiusi rispetto a
(A) complementazione; (B) concatenazione; (C) intersezione;
(D) stella di Kleene; (E) unione; (F) *nessuna di queste.*

4. (2 punti) Si descriva, usando la notazione insiemistica, il linguaggio accettato dall'automa M qui sotto:



$L(M) =$

5. (2 punti) Si consideri la relazione $R \subset \{a, b, c, d, e\}^2$ data dalla tabella qui sotto, dove 1 o 0 all'incrocio tra la riga x e la colonna y indicano se $(x, y) \in R$ o se $(x, y) \notin R$, rispettivamente:

R	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0	0
b	0	1	0	0	1
c	0	0	1	1	0
d	0	0	1	1	0
e	0	1	0	0	1

Le classi di equivalenza di R sono
(A) (a, c), (c, d), (d, a), (b, e), (e, b); (B) $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c, d\}$, $\{e\}$;
(C) $\{a\}$, $\{c, d\}$, $\{b, e\}$; (D) *nessuna: R non è di equivalenza.*

6. (5 punti) Quali dei seguenti linguaggi sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ sono regolari?

$L_1 = \{\, a^n b^m c^n \in \Sigma^* \mid n \geq 1, m \geq 1 \,\}$;
$L_2 = \{\, a^n a^m a^{n+m} \in \Sigma^* \mid n \geq 3, m \geq 4 \,\}$;
$L_3 = \{\, a^n b^m b^n \in \Sigma^* \mid n = 5, m \geq 1 \,\}.L_4 \quad = \{\, a^n b^m c^n \in \Sigma^* \mid 1 \leq n \leq 9, m \geq 1 \,\}$;
$L_5 = \{\, a^n b^m c^n \in \Sigma^* \mid n \geq 1, m = 5 \,\}$;

(A) L_1; (B) L_2;
(C) L_3; (D) L_4; (E) L_5; (F) *nessuno di essi.*

7. (2 punti) Si dia un'espressione regolare e_1 per il seguente linguaggio su $\{0, 1\}$:

$L_1 = \{$tutte le stringhe non nulle che iniziano e finiscono con lo stesso simbolo$\}$.

$e_1 =$

8. (2 punti) Si dia un'espressione regolare e_2 per il seguente linguaggio su $\{0, 1\}$:

$L_2 = \{$tutte le stringhe che contengono le sottostringhe 0011 o 1010$\}$.

$e_2 =$

9. (2 punti) Si dia un'espressione regolare e_3 per il seguente linguaggio su $\{0, 1\}$:

$L_3 = \{$tutte le stringhe che non contengono 111 come sottostringa$\}$.

$e_3 =$

10. (3 punti) Quali delle seguenti espressioni regolari definiscono il linguaggio

$$L = \{\epsilon\} \cup \Big\{ w \in \{a,b,c\}^\star \ \Big|\ \text{il numero di occorrenze di } a \text{ in } w \text{ è pari e positivo} \Big\}?$$

$$e_1 = \big((b^* + c^*)a(b^* + c^*)a(b^* + c^*)\big)^*;$$
$$e_2 = \big((b^*c^*)a(b^*c^*)a(b^*c^*)\big)^*;$$
$$e_3 = \big((b+c)^*a(b+c)^*a\big)^*;$$
$$e_4 = \big((b+c)^*a(b+c)^*a(b+c)^*\big)^*;$$
$$e_5 = \big(a(b+c)^*a(b+c)^*\big)^*.$$

(A) e_1; (B) e_2; (C) e_3;
(D) e_4; (E) e_5; (F) *nessuna di esse.*

11. (2 punti) Si consideri la MdT definita dal seguente programma:

Q	0	1	\$
q_0			q_1 \$ R
q_1	q_2 1 L	q_1 0 R	
q_2		q_2 1 L	

Si supponga che la MdT cominci la computazione nello stato q_0, avendo per input sul nastro la stringa "111010", con la testina posizionata sul primo simbolo \$ alla sinistra della stringa stessa. Allora la computazione suddetta:
(A) termina dopo 3 passi; (B) termina dopo 5 passi;
(C) termina dopo 6 passi; (D) non termina.

Quiz per gli "informatici"

12. (2 punti) L'affermazione *"Se L è un linguaggio libero dal contesto e $L' \subseteq L$ allora anche L' è libero dal contesto"*
(A) è vera solo se L è anche regolare; (B) è sempre vera; (C) è sempre falsa.

13. (1 punto) Avendo un linguaggio L che sospetto non essere libero dal contesto, tento di dimostrare che L non è libero dal contesto usando il "pumping lemma". Tento cioè di dimostrare:

(A) $$\exists n \in \mathbb{N} \,.\, \forall z \in L : |z| \geq n \implies \Big(\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^\star \,.\, z = uvwxy \wedge |vx| \geq 1 \wedge |vwx| \leq n \wedge \forall i \in \mathbb{N} : uv^i wx^i y \in L\Big)$$

(B) $$\forall n \in \mathbb{N} : \exists z \in L \,.\, |z| \geq n \wedge \forall u, v, w, x, y \in \Sigma^\star : \Big(\big(z = uvwxy \wedge |vx| \geq 1 \wedge |vwx| \leq n\big) \implies \exists i \in \mathbb{N} \,.\, uv^i wx^i y \notin L\Big)$$

(C) $$\forall n \in \mathbb{N} : \exists z \in L \,.\, |z| \geq n \wedge \forall u, v, w, x, y \in \Sigma^\star : \Big(\big(z = uvwxy \wedge |vx| \geq 1 \wedge |vwx| \leq n\big) \implies \forall i \in \mathbb{N} : uv^i wx^i y \notin L\Big)$$

14. (2 punti) I linguaggi liberi dal contesto sono chiusi rispetto a
(A) complementazione; (B) concatenazione; (C) intersezione;
(D) stella di Kleene; (E) unione; (F) *nessuna di queste.*

15. (2 punti) Si dia un esempio di grammatica ambigua con un solo simbolo non terminale. Se il linguaggio generato è intrinsecamente ambiguo, lo si dica. Altrimenti, si esibisca un grammatica non ambigua equivalente.

Esercizio 1 (per tutti)

Si enunci e si dimostri il “Pumping Lemma” per i linguaggi regolari.

Esercizio 2 (per tutti)

Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione parziale ricorsiva che sia anche iniettiva e totale. Si mostri che la funzione inversa $f^{-1}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} x, & \text{se } f(x) = y, \\ \uparrow, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

è parziale ricorsiva.

Esercizio 3 (per tutti)

Una relazione $R \subseteq \mathbb{N}^r$ è detta *primitiva ricorsiva* se la sua funzione caratteristica, $\chi_R\colon \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ con

$$\chi_R\big((x_1,\dots,x_r)\big) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_1,\dots,x_r) \in R, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

è primitiva ricorsiva. Si mostri che le relazioni primitive ricorsive sono chiuse rispetto all'unione, l'intersezione e il complemento.

Esercizio 4 (solo per gli "informatici")

Si converta la seguente grammatica in forma normale di Chomsky:

$$
\begin{aligned}
S &\to SaBS \mid AbbB \mid b \\
A &\to Aa \mid BS \\
B &\to aBbC \mid CC \\
C &\to a \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

Si mostrino le grammatiche ottenute: (A) dopo aver rimosso le ϵ-produzioni; (B) dopo aver rimosso le produzioni unitarie; e, naturalmente, (C) il risultato finale.