Fondamenti dell'Informatica

Compito scritto

21 febbraio 2005

Cognome:

Nome:

Matricola:

Note

1. Per i quiz a risposta multipla, fare una croce sulla/e lettera/e che identifica/no la/e risposta/e desiderata/e.
2. Per i quiz a risposta multipla, c'è sempre almeno una risposta corretta. Talvolta ci sono più risposte corrette. Si richiede che siano marcate *tutte e sole* le risposte corrette. In altre parole, una crocetta in più o in meno invalida l'esercizio.
3. Per i quiz descrittivi e gli esercizi, la risposta va data sulla stessa facciata che contiene il testo dell'esercizio. Lo spazio lasciato a questo scopo è sempre sufficiente.
4. È possibile usare il retro dei fogli per eventuali calcoli e verifiche.
5. L'orario di consegna scritto alla lavagna è tassativo.
6. Non è consentita la consultazione di alcunché.
7. Gli esercizi verranno corretti solo se il numero di punti conseguiti nei quiz supera una certa soglia. In caso contrario il compito è insufficiente. Le soglie sono:
   - per i matematici, 18 punti riducibili a 16 a patto che le risposte ai quiz 1, 2, 3, 5, 9 e 11 siano corrette.
   - per gli informatici, 23 punti riducibili a 20 a patto che le risposte ai quiz 1, 2, 3, 5, 9, 11 e 15 siano corrette.

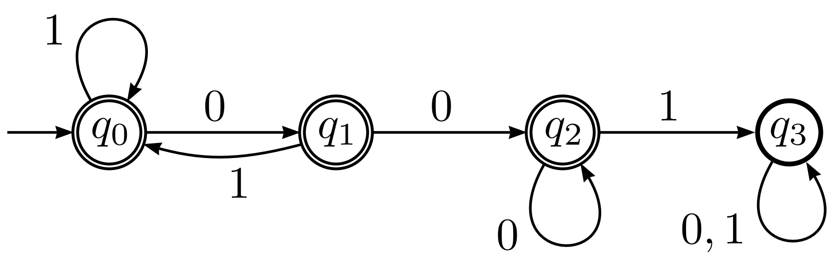
Quiz per tutti

1. (1 punto) Un linguaggio finito
(A) è libero dal contesto; (B) è degenere; (C) è regolare;
(D) *né (A) né (B) né (C).*

2. (1 punto) Qual è la cardinalità dell'insieme dei linguaggi liberi che si possono definire su di un alfabeto Σ di $n > 0$ simboli?
(A) 2^n; (B) 2^{2^n}; (C) $|\mathbb{N}|$; (D) $|\wp(\mathbb{N})|$;
(E) *né (A) né (B) né (C) né (D).*

3. (2 punti) I linguaggi regolari sono chiusi rispetto a
(A) differenza insiemistica; (B) concatenazione; (C) intersezione;
(D) stella di Kleene; (E) unione; (F) *nessuna di queste.*

4. (3 punti) Si descriva, usando la notazione insiemistica, il linguaggio accettato dall'automa M qui sotto:



$L(M) =$

5. (2 punti) Si consideri la relazione $R \subset \{a, b, c, d, e\}^2$ data dalla tabella qui sotto, dove 1 o 0 all'incrocio tra la riga x e la colonna y indicano se $(x, y) \in R$ o se $(x, y) \notin R$, rispettivamente:

R	a	b	c	d	e
a	1	0	0	0	1
b	0	1	0	0	1
c	0	0	1	1	0
d	0	0	1	1	0
e	1	1	0	0	1

Le classi di equivalenza di R sono
(A) (a, c), (c, d), (d, a), (b, e), (e, b); (B) $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c, d\}$, $\{e\}$;
(C) $\{a\}$, $\{c, d\}$, $\{b, e\}$; (D) *nessuna: R non è di equivalenza.*

6. (5 punti) Quali dei seguenti linguaggi sull'alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ sono regolari?

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{ a^n b^m c^n \in \Sigma^* \mid n \geq 1, m \geq 1 \}; \\
L_2 &= \{ a^n a^m a^{n+m} \in \Sigma^* \mid n \geq 3, m \geq 4 \}; \\
L_3 &= \{ a^n b^m b^n \in \Sigma^* \mid n = 5, m \geq 1 \}; \\
L_4 &= \{ a^n b^m c^n \in \Sigma^* \mid 1 \leq n \leq 9, m \geq 2n + 1 \}; \\
L_5 &= \{ a^n b^m c^n \in \Sigma^* \mid n \geq 1, m = 5 \}; \\
L_6 &= \{ a^n b^{2n} c^{4n} \in \Sigma^* \mid n \in \mathbb{N} \}.
\end{aligned}
$$

(A) L_1; (B) L_2;
(C) L_3; (D) L_4; (E) L_5; (F) *nessuno di essi.*

7. (2 punti) Si dia un'espressione regolare e_1 per il seguente linguaggio su $\{0, 1\}$:

$L_1 = \{$tutte le stringhe che contengono un numero di '0' divisibile per 3$\}$.

$e_1 =$

8. (4 punti) Si dia un'espressione regolare e_2 per il seguente linguaggio su $\{0, 1\}$:

$L_2 = \{$tutte le stringhe che contengono al più una coppia di '1' consecutivi$\}$.

$e_2 =$

9. (2 punti) Si supponga che la formula $L(x, y)$ significhi "x ama y". Per ognuna delle seguenti asserzioni, si scriva la formula logica corrispondente:

(a) Tutti amano tutti

(b) Ognuno ama qualcuno

(c) Qualcuno ama tutti

(d) Qualcuno ama sé stesso

(e) Non tutti amano sé stessi

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

10. (2 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se almeno } x \text{ `5' consecutivi appaiono nella espansione} \\ & \text{decimale di } \pi; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha che
(A) f è totale; (B) f non è totale;
(C) f è calcolabile; (D) f non è calcolabile;
(E) *né (A) né (B) né (C) né (D).*

11. (2 punti) Si consideri una macchina di Turing per la quale siano $a, b, c \in \Sigma$ ed anche $u, v \in \Sigma^*$ e $q_i, q_j \in Q$. Se la funzione di transizione δ è tale che $\delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$, allora abbiamo

$$\langle q_i, ua, b, cv\rangle \vdash \alpha,$$

dove α è

(A) $\langle q_j, uab, c, v\rangle$; (B) $\langle q_j, uac, c, v\rangle$; (C) $\langle q_i, uab, c, v\rangle$; (D) $\langle q_j, u, a, bcv\rangle$;
(E) $\langle q_j, u, a, ccv\rangle$; (F) *né (A) né (B) né (C) né (D) né (E).*

Quiz per gli "informatici"

12. (2 punti) Se applico con successo il "Pumping Lemma" per linguaggi regolari ad un linguaggio L, oltre a sapere che L non è regolare, so anche che
(A) che L è libero dal contesto; (B) che L non è libero dal contesto;
(C) *né (A) né (B).*

13. (1 punto) Si considerino le seguenti grammatiche espresse in forma concisa e si dica quali di queste sono ambigue:
(A) $S \to aS \mid a$; (B) $S \to SS \mid a$; (C) $S \to aSa \mid \epsilon$; (D) $S \to SaS \mid \epsilon$;
(E) *né (A) né (B) né (C) né (D) né (E).*

14. (2 punti) I linguaggi liberi dal contesto sono chiusi rispetto a
(A) differenza insiemistica; (B) concatenazione; (C) intersezione;
(D) stella di Kleene; (E) unione; (F) *nessuna di queste.*

15. (2 punti) Si consideri l'automa a pila

$$M = \langle \{q\}, \{a, b\}, \{a, b, S\}, \delta, q, S, \emptyset \rangle$$

dove

$$\begin{aligned}
\delta(q, \epsilon, S) &= \{(q, bSa), (q, bS), (q, SS), (q, \epsilon)\}, \\
\delta(q, a, a) &= \{(q, \epsilon)\}, \\
\delta(q, b, b) &= \{(q, \epsilon)\}.
\end{aligned}$$

Si mostrino due esecuzioni dell'automa (sequenze di descrizioni istantanee) che mostrino che le seguenti stringhe sono accettate per pila vuota:

(a) babb

(b) bbaa

(a)

(b)

Esercizio 1 (per tutti)

Si usi il "Pumping Lemma" per linguaggi regolari per dimostrare che il linguaggio $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ costituito da tutte e sole le stringhe che contengono più a che b non è regolare.

Esercizio 2 (per tutti)

Halting Problem: lo si enunci nella sua formulazione più generale, dimostrando formalmente ogni affermazione.

Esercizio 3 (solo per gli "informatici")

Si consideri il linguaggio $L = \{\, a^n b^m \mid 0 < n < m \,\}$. Si dia una grammatica che lo generi e si progetti un automa a pila che lo accetti (per stato finale o per pila vuota, a scelta del candidato).