Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
8. Łańcuchy Markowa. Macierz przejścia.

Definicja. Łańcuchem Markowa *nazywamy ciąg zmiennych losowych* $X_0, X_1, X_2, \ldots$ *taki, że dla dowolnych wartości* $i_0, i_1, \ldots, i_t$ *zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}, X_{t-2} = i_{t-2}, \ldots, X_0 = i_0\right) = \mathbb{P}\left(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}\right).$$

Zwykle przyjmujemy, że wszystkie wartości zmiennych losowych X_i należą do **zbioru stanów łańcucha** $S = \{1, 2, \ldots, s\}$. Interesować nas będą wyłącznie **jednorodne** łańcuchy Markowa, tzn. takie, w których dla każdego t zachodzi

$$\mathbb{P}\left(X_t = j | X_{t-1} = i\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = j | X_0 = i\right).$$

Definicja. Macierzą przejścia *(jednorodnego) łańcucha Markowa nazywamy macierz* $\Pi = [p_{ij}]$, *gdzie*

$$p_{ij} = \mathbb{P}\left(X_1 = j | X_0 = i\right)$$

oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i *do stanu* j.

Twierdzenie. *Niech* $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ *będzie łańcuchem Markowa o macierzy przejścia* Π, *a* $\bar{\rho}^i$ *oznacza rozkład zmiennej losowej* X_i, *dla* $i = 0, 1, \ldots$. *Wtedy dla każdego* $k, t = 0, 1, \ldots,$ *zachodzi*

$$\bar{\rho}^{t+1} = \bar{\rho}^t \Pi = \bar{\rho}^0 \Pi^{t+1},$$

a także

$$\bar{\rho}^{t+k} = \bar{\rho}^t \Pi^k.$$

Twierdzenie. *Niech* $\Pi^{(t)} = [p_{ij}^{(t)}]$, *gdzie* $p_{ij}^{(t)}$ *oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu* i *do stanu* j *w dokładnie* t *krokach. Wtedy* $\Pi^{(t)} = \Pi^t$.

Uwaga. Suma wyrazów w każdym z wierszy macierzy Π (oraz $\Pi^{(t)}$) jest zawsze równa 1.

Definicja. *Wektor* $\bar{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ *nazywamy* **rozkładem stacjonarnym** *łańcucha Markowa o macierzy przejścia* $\Pi = [p_{ij}]$, *jeśli zachodzą wszystkie z poniższych warunków:*

(i) $\sum_i \pi_i = 1$,
(ii) $\pi_i \geqslant 0$ *dla każdego* $i = 1, 2, \ldots, n$,
(iii) $\bar{\pi}\Pi = \bar{\pi}$.

Twierdzenie. *Każdy jednorodny łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów ma przynajmniej jeden rozkład stacjonarny.*

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. (**Problem Ruiny Gracza**) Macierz przejścia łańcucha Markowa dana jest wzorem

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 1-p & 0 \\ 0 & p & 0 & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dla pewnego $p \in (0, 1)$.

(a) Dla każdego $t \geqslant 2$ wylicz $p_{14}^{(t)}$ i znajdź $\lim_{t\to\infty} p_{14}^{(t)}$.
(b) Dla każdego $t \geqslant 2$ wylicz $p_{24}^{(t)}$ i znajdź $\lim_{t\to\infty} p_{24}^{(t)}$.

Zadanie A.2. Macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa dana jest wzorem:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Wiedząc, że $\bar{\rho}^0 = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, wyznacz $\bar{\rho}^1$ oraz $\bar{\rho}^2$.
(b) Oblicz $\Pi^{(2)} = \Pi^2$ i na tej podstawie znajdź $\bar{\rho}^2$ nie obliczając $\bar{\rho}^1$.

Zadanie A.3. W pierwszym kapeluszu są 3 kule białe, a w drugim 3 kule czarne. W n–tym doświadczeniu losujemy po jednej kuli z obu kapeluszy i zamieniamy je miejscami. Niech X_n będzie liczbą białych kul w pierwszym kapeluszu po n doświadczeniach. Wyznacz macierz przejścia dla łańcucha Markowa $(X_n)_{n=0}^{\infty}$.

Zadanie A.4. Na wierzchołkach trójkąta siedzą 3 robaczki. Robaczki co sekundę mogą przybierać kolor czerwony lub zielony. Polega to na tym, że jeśli robaczek widzi, że oba pozostałe robaczki mają ten sam kolor, to w następnej sekundzie przybierze ich kolor, jeżeli zaś ich kolory są różne, to w następnej sekundzie robaczek z prawdopodobieństwem 1/2 będzie zielony, a z prawdopodobieństwem 1/2 – czerwony. Na początku jeden robaczek jest czerwony, a dwa zielone. Zbuduj łańcuch Markowa odpowiadający temu procesowi i podaj jego macierz przejścia, przy założeniu, że:

(a) ważne jest dla nas dokładne rozłożenie kolorów robaczków na trójkącie, z uwzględnieniem numerów wierzchołków;
(b) ważna jest dla nas jedynie liczba robaczków w każdym z kolorów;
(c) ważna jest dla nas jedynie maksymalna liczba robaczków w tym samym kolorze.

Znajdź rozkład stacjonarny dla przypadku c) i zgadnij jakie są rozkłady stacjonarne w przypadkach a) i b). Czy we wszystkich tych przypadkach istnieje dokładnie jeden rozkład stacjonarny?

Zadanie A.5. Przypuśćmy, że w poprzednim zadaniu robaczki zachowują się inaczej, tzn. gdy robaczek widzi, że pozostałe robaczki są w tym samym kolorze, zmienia swój kolor na tenże z prawdopodobieństwem 2/3, a z prawdopodobieństwem 1/3 przyjmuje kolor odmienny. Znajdź trzy macierze przejścia odpowiadające punktom a), b) i c), a w przypadku c) oblicz rozkład stacjonarny.

Dodatek B. Zadania domowe

Zadanie B.1. Macierz przejścia pewnego łańcucha Markowa wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Znajdź $p_{13}^{(2)}$.
(b) Przedstaw rozważany łańcuch Markowa za pomocą grafu skierowanego o 5 wierzchołkach.
(c) Znajdź $p_{23}^{(100)}$.
(d) Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa dla tego łańcucha po pierwszym kroku przy założeniu, że rozkładem początkowym łańcucha jest $\bar{\rho}^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{6})$.

Zadanie B.2. Znajdź $p_{54}^{(2)}$, $p_{54}^{(4)}$ i $p_{54}^{(5)}$ dla łańcucha Markowa, którego macierz przejścia dana jest wzorem:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie B.3. Żaba siedzi nad strumieniem i co minutę z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{3}$ skacze na drugi brzeg, a z prawdopodobieństwem $q = \frac{2}{3}$ nie rusza się z miejsca. Niech X_n będzie położeniem żaby (numerem brzegu strumienia) po n minutach. Ciąg (X_n) jest zatem łańcuchem Markowa na zbiorze stanów $S = \{1, 2\}$.

(a) Przedstaw ten łańcuch za pomocą grafu skierowanego, którego wierzchołkami są oba stany, a strzałkom (w tym pętlom) przyporządkowane są odpowiednie prawdopodobieństwa przejścia ze stanu do stanu.

(b) Wyznacz macierz przejścia Π dla tego łańcucha.
(c) Załóżmy, że na początku żaba jest na brzegu nr 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 3 minutach znajdzie się na drugim brzegu? Oblicz to prawdopodobieństwo bez podnoszenia do potęgi macierzy Π.
(d) Oblicz macierz Π^3 i odczytaj z niej $p_{12}^{(3)}$. Czy wynik jest taki sam, jak w poprzednim podpunkcie?
(e) Załóżmy, że na początku żaba jest na brzegu nr 1. Wyznacz $\bar{\rho}^1$, $\bar{\rho}^2$ i $\bar{\rho}^3$, czyli rozkłady prawdopodobieństwa dla położenia żaby po 1, 2, 3 minutach.
(f) Załóżmy, że rozkład początkowy żaby to $\bar{\rho}^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, tzn. znajduje się na jednym z dwóch brzegów z jednakowym prawdopodobieństwem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 3 minutach znajdzie się na brzegu 1?
(g) Znajdź rozkład stacjonarny dla tego łańcucha.

Zadanie B.4. Łąka przedzielona jest niskim murkiem na część północną i południową. Po przeciwnych stronach murku siedzą dwie ropuchy, Orłoś i Resztka, rzucając co jakiś czas monetą. Gdy wypadnie orzeł, Orłoś przeskakuje przez murek na drugą stronę, jeśli reszka, przez murek przeskakuje Resztka.

(a) Przedstaw łańcuch Markowa odpowiadający tej zabawie za pomocą grafu skierowanego o 4 wierzchołkach.
(b) Podaj macierz przejścia Π dla tego łańcucha.
(c) Załóżmy, że na początku obie ropuchy znajdują się po stronie północnej. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 5 rzutach monetą obie ropuchy znajdą się na południowej stronie łąki?
(d) Załóżmy, że na początku obie ropuchy znajdują się po stronie północnej. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po 12345 rzutach monetą obie ropuchy znajdą się na południowej stronie łąki?
(e) Znajdź rozkład stacjonarny dla tego łańcucha (jeśli to zadanie uznasz za zbyt trudne, spróbuj go odgadnąć i sprawdzić, że rzeczywiście jest to rozkład stacjonarny).

Odpowiedzi do zadań domowych

B.1 (a) $\frac{37}{300}$, (c) 0, (d) $(\frac{17}{120}, \frac{4}{15}, \frac{17}{120}, \frac{4}{15}, \frac{11}{60})$

B.2 $p_{54}^{(2)} = \frac{7}{20}$, $p_{54}^{(4)} = \frac{609}{1600}$, $p_{54}^{(5)} = 0$

B.3 (b) $\Pi = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$, (c) $p_{12}^3 = \frac{13}{27}$, (d) $\Pi^3 = \begin{bmatrix} \frac{14}{27} & \frac{13}{27} \\ \frac{13}{27} & \frac{14}{27} \end{bmatrix}$, (e) $\bar{\rho}^1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $\bar{\rho}^2 = (\frac{5}{9}, \frac{4}{9})$, $\bar{\rho}^3 = (\frac{14}{27}, \frac{13}{27})$
(f) $\frac{1}{2}$, (g) $\bar{\pi} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

B.4 (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Uwaga! Postać tej macierzy zależy od tego, w jaki sposób ponumerujemy stany.
(c) 0, (d) 0, (e) $\bar{\pi} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$