Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
4. Prawdopodobieństwo całkowite. Wzór Bayesa.

Twierdzenie (Wzór łańcuchowy). *Jeżeli zdarzenia* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *spełniają warunek* $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$*, to*

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Twierdzenie. *Jeśli* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ *jest rozbiciem przestrzeni* Ω *na rozłączne zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla każdego zdarzenia* $B \in \mathcal{F}$ *mamy*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i),$$

a dla każdego $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}.$$

Pierwsze z powyższych równań nazywamy **wzorem na prawdopodobieństwo całkowite**, a drugie **wzorem Bayesa**.

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Fabryka wytwarza gwoździe na trzech maszynach, których udział w produkcji wynosi odpowiednio 25%, 35% oraz 40%. Maszyny dają odpowiednio 5%, 4% oraz 2% gwoździ wybrakowanych.

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany gwóźdź wyprodukowany w fabryce jest wybrakowany?

(b) Podczas kontroli jakości losowo wybrano gwóźdź, który okazał się być wybrakowany. Jakie jest prawdopodobieństwo, że został on wyprodukowany przez pierwszą maszynę?

Zadanie A.2. Załóżmy, że prawdopodobieństwo kradzieży w sklepie wynosi $\frac{n}{n+k}$, gdzie k jest liczbą ochroniarzy, a n – liczbą złodziei ($n + k \geqslant 1$). Jeśli pewnego dnia zdarza się kradzież (zawsze można ją wykryć na podstawie manka na końcu dnia), to następnego dnia liczba ochroniarzy jest zwiększana o 1. Niestety po udanej kradzieży liczba złodziei też rośnie o 1. Jeżeli kradzież się nie zdarzy, to następnego dnia liczby złodziei i ochroniarzy pozostają bez zmian. W poniedziałek jest jeden pilnujący i dwóch złodziei. Jaka jest szansa, że sklep będzie okradany (skutecznie) aż do niedzieli włącznie?

Zadanie A.3. Student zna odpowiedź na pytanie egzaminacyjne z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Jeżeli nie zna odpowiedzi, to zgaduje jedną z k możliwych odpowiedzi z prawdopodobieństwem $1/k$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że znał odpowiedź, jeżeli wiemy, że odpowiedział prawidłowo?

Zadanie A.4. W pierwszej urnie znajdują się dwie białe i dwie czarne kule, druga zawiera jedną kulę białą i dwie czarne. Z pierwszej urny wyciągamy losowo jednocześnie dwie kule i przekładamy do drugiej urny, z której losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do drugiej urny przełożyliśmy dwie białe kule, jeśli wylosowana z drugiej urny kula jest (a) biała, (b) czarna?

Zadanie A.5. Bolek i Lolek codziennie kończą pracę niezależnie od siebie, tak by w losowym momencie pomiędzy godziną 17:00 i 17:20 zjawić się na pobliskim przystanku autobusowym, z którego autobus odjeżdża w losowym momencie między 17:00 a 17:10, niezależnie od przybycia Bolka i Lolka. Pewnego dnia Lolek dociera na przystanek o godz. 17:05 i nie zastaje na nim Bolka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że autobus już odjechał?

Dodatek B. Zadania domowe

Zadanie B.1. Trzy grupy ćwiczeniowe, G_1, G_2 i G_3, liczą odpowiednio 20, 25 i 20 studentów. W każdej z nich liczba przygotowanych do kartkówki wynosi odpowiednio 8, 10 i 10 studentów. Kartkówki piszą wszyscy razem. Sprawdzający wybiera losowo pracę jednego studenta. Jakie jest prawdopodobieństwo, że praca należy do studenta z grupy G_1, jeśli okazało się, że otrzymał on za nią maksimum punktów?

Zakładamy oczywiście, że studenci przygotowani zawsze dostają maksymalną ocenę z kartkówek.

Zadanie B.2. W urnie znajduje się 10 losów wygrywających i 100 przegrywających, przy czym pojedynczy los kosztuje złotówkę. Wyciągamy z urny po jednym losie tak długo, aż trafimy los wygrywający (wyciągnięte losy zachowujemy). Ile wynosi prawdopodobieństwo, że będzie nas to kosztowało 4zł?

Zadanie B.3. W urnie są cztery kule białe i dwie czarne. Wyciągamy jedną kulę z urny i przemalowujemy ją na czerwono, po czym wrzucamy ją do urny, a następnie losujemy następną kulę.

(a) Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągnęliśmy kulę białą?
(b) Przypuśćmy, że za drugim razem wylosowaliśmy kulę białą. Jaka jest szansa, że przemalowaliśmy na czerwono jedną z czarnych kul?
(c) Przypuśćmy, że za drugim razem wylosowaliśmy kulę czerwoną. Jaka jest szansa, że przemalowaliśmy na czerwono jedną z czarnych kul? Czy otrzymany wynik jest zaskakujący?

Zadanie B.4. Spośród mężczyzn 5%, a spośród kobiet 0,25% ma daltonizm (tj. nie rozróżnia niektórych kolorów). Wybieramy losowo osobę (zakładamy, że szanse trafienia na mężczyznę i na kobietę są takie same).

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana osoba nie rozróżnia kolorów?
(b) Wylosowana osoba nie rozróżnia kolorów. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna.

Zadanie B.5. Każda z trzech urn zawiera po cztery kule. W i-tej urnie, $i = 1, 2, 3$, jest i kul białych i $4 - i$ kul czarnych. Z losowo wybranej urny (przy czym każda urna jest równoprawdopodobna) losujemy jednocześnie dwie kule.

(a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowane kule będą różnych kolorów?
(b) Jeśli wylosowane kule są różnych kolorów, ile wynosi prawdopodobieństwo, że wybraliśmy pierwszą urnę?

Zadanie B.6. W urnie są cztery kule białe i dwie czarne. Wyciągamy jedną kulę z urny, zmieniamy jej kolor na 'przeciwny', wrzucamy z powrotem do urny, a potem wyciągamy następną. Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągnęliśmy kulę białą?

Zadanie B.7. 60% poczty otrzymywanej przez pewnego internautę stanowi spam. Słowo *viagra* występuje w 5% wiadomości spamowych oraz w 0,01% wiadomości niespamowych. Internauta otrzymał wiadomość zawierającą słowo *viagra* – jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to spam? Internauta otrzymał wiadomość nie zawierającą słowa *viagra* – jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to spam?

Zadanie B.8. Z urny zawierającej trzy kule białe i pięć czarnych wyciągamy kolejno (bez zwracania) trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyciągniemy kolejno kulę białą, czarną i białą.

Dodatek C. Odpowiedzi do zadań domowych

B.1 (użyj wzoru Bayesa) 2/7

B.2 (użyj wzoru łańcuchowego) $\frac{100}{110} \cdot \frac{99}{109} \cdot \frac{98}{108} \cdot \frac{10}{107}$

B.3 (a) 5/9, (b) 2/5, (c) 1/3 (wynik nie jest zaskakujący, prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej kuli w drugim losowaniu nie zależy od tego, co wydarzyło się w pierwszym losowaniu)

B.4 (a) (użyj wzoru na prawdopodobieństwo całkowite) 2,625%,
(b) (użyj wzoru Bayesa) $\frac{2{,}5}{2{,}625} \approx 95{,}24\%$

B.5 (a) (użyj wzoru na prawdopodobieństwo całkowite) 5/9,
(b) (użyj wzoru Bayesa) 3/10

B.6 (użyj wzoru na prawdopodobieństwo całkowite) 11/18

B.7 (w obu przypadkach użyj wzoru Bayesa) $\frac{300}{300{,}4} \approx 99{,}87\%$, $\frac{570}{969{,}96} \approx 58{,}77\%$

B.8 $\frac{5}{56}$