Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
5. Zmienne losowe. Rozkład zmiennej losowej.
Funkcja masy prawdopodobieństwa. Dystrybuanta. Wartość oczekiwana.

Definicja. Zmienną losową *nazywamy funkcję (mierzalną) $X : \Omega \to \mathbb{R}$ działającą z przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ do zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.*

Dla $A \subseteq \mathbb{R}$ przyjmujemy oznaczenie $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}\right)$.

Definicja. *Zmienna losowa jest* **dyskretna**, *jeśli istnieje przeliczalny zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (nazywany zbiorem atomów) taki, że $\mathbb{P}(a_i) > 0$ dla każdego $a_i \in A$ oraz*

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a_i \in A} \mathbb{P}(X = a_i) = 1.$$

W celu podania rozkładu zmiennej losowej dyskretnej, wystarczy podać wartości $p_i = \mathbb{P}(X = a_i)$ dla wszystkich atomów $a_i \in A$. Jest to tzw. **funkcja masy prawdopodobieństwa** tej zmiennej. Czasem nazywamy ją po prostu **rozkładem** tej zmiennej losowej dyskretnej.

Definicja. Dystrybuantą *zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

W szczególności dla zmiennej losowej dyskretnej o zbiorze atomów $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ zachodzi

$$F_X(x) = \sum_{a_i \in A, a_i \leqslant x} \mathbb{P}(X = a_i).$$

Definicja. Wartością oczekiwaną *(lub* **wartością średnią***) dyskretnej zmiennej losowej X o zbiorze atomów A nazywamy liczbę*

$$\mathbb{E}X = \sum_{a_i \in A} a_i \mathbb{P}(X = a_i).$$

Jeśli szereg po prawej stronie powyższego równania nie jest bezwzględnie zbieżny, mówimy, że wartość oczekiwana zmiennej losowej X nie istnieje.

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Dyskretna zmienna losowa X posiada rozkład podany w poniższej tabelce.

k	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	?	$\frac{1}{15}$

Wpisz do tabelki brakującą liczbę i narysuj wykres dystrybuanty tej zmiennej. Znajdź $\mathbb{P}(2{,}5 \leqslant X \leqslant \pi)$, $\mathbb{P}(X = \pi)$, $\mathbb{P}(X \geqslant \pi)$ oraz wylicz $\mathbb{E}X$.

Zadanie A.2. Dane są liczby $a < 0$ i $b > 1$. Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej, której dystrybuanta dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a; \\ \frac{1}{6} & \text{dla } a \leqslant x < 0; \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 0 \leqslant x < 1; \\ \frac{5}{6} & \text{dla } 1 \leqslant x < b; \\ 1 & \text{dla } x \geqslant b. \end{cases}$$

Zadanie A.3. Strzelec ma trzy naboje i strzela do momentu trafienia celu lub do momentu wystrzelenia wszystkich naboi. Prawdopodobieństwo trafienia do celu przy każdym strzale jest równe 0,8. Liczba wystrzelonych naboi jest zmienną losową X.

a) Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej, na której jest określona zmienna losowa X.
b) Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tej przestrzeni należące do zdarzeń $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\} = \{X = 3\}$ oraz $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant 2\} = \{X \leqslant 2\}$ i wyznacz ich prawdopodobieństwa.
c) Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.
d) Narysuj dystrybuantę zmiennej losowej X.

Zadanie A.4. Z urny zawierającej 3 kule białe i 2 czarne losujemy jednocześnie trzy kule. Niech X oznacza liczbę kul czarnych wśród wylosowanej trójki.

a) Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej, na której jest określona zmienna losowa X.
b) Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej X.
c) Znajdź $\mathbb{E}X$.

Zadanie A.5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ wybieramy losowo trzy różne liczby $x < y < z$. Niech Y będzie zmienną losową oznaczającą środkową z nich.

a) Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej, na której jest określona zmienna losowa Y.
b) Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tej przestrzeni należące do zdarzeń $\{\omega \in \Omega : Y \leqslant \sqrt{5}\} = \{Y \leqslant \sqrt{5}\}$ oraz $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) > 2\} = \{Y > 2\}$ i wyznacz ich prawdopodobieństwa.
c) Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y.
d) Narysuj dystrybuantę zmiennej losowej Y.
e) Znajdź $\mathbb{E}Y$.

Dodatek B. Zadania domowe

Zadanie B.1. Podaj rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej losowej, której dystrybuanta dana jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x < -5; \\ \frac{1}{6} \text{ dla } -5 \leqslant x < 1; \\ \frac{1}{3} \text{ dla } 1 \leqslant x < 4; \\ \frac{1}{2} \text{ dla } 4 \leqslant x < 10; \\ 1 \text{ dla } x \geqslant 10. \end{cases}$$

Zadanie B.2. Gra „moneta i kostka” polega na rzucie monetą i kostką. W grze tej wygrywamy 4zł w przypadku wyrzucenia reszki i jedynki, wygrywamy 2zł w przypadku wyrzucenia orła lub parzystej liczby oczek, w pozostałych przypadkach przegrywamy 3zł (tzn. „wygrywamy” minus 3 zł). Podaj przestrzeń probabilistyczną, na której może być określona zmienna losowa X jaką jest „wygrana”. Podaj rozkład, dystrybuantę i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

Zadanie B.3. Losujemy dwie kule z urny zawierającej 6 białych, 4 czarne i 2 pomarańczowe kule. Wygrywamy 1zł za każdą kulę czarną, a tracimy 1zł za każdą kulę białą, wyciągając kulę pomarańczową nic nie zarabiamy, ani nic nie tracimy. Niech X będzie wygraną. Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej, na której może być określona zmienna losowa X. Dla tej przestrzeni wypisz wszystkie zdarzenia elementarne należące do zdarzeń $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} = \{X = 0\}$ oraz $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant -1\} = \{X \leqslant -1\}$. Podaj rozkład, dystrybuantę i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

Zadanie B.4. Sprzedawca encyklopedii jest umówiony z 2 klientami. Szanse na przekonanie pierwszego klienta do zakupu wynoszą 30%, a drugiego (niezależnie) 60%. W przypadku każdej sprzedaży jest tak samo prawdopodobne, że klient kupi wydanie deluxe w cenie 1000zł, co wydanie zwykłe w cenie 500zł. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa, dystrybuantę i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X będącej łączną kwotą uzyskaną z transakcji z tymi klientami.

Zadanie B.5. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 200\}$ wyciągamy losowo 4 różne liczby. Niech X oznacza największą z nich.

(a) Na jakiej przestrzeni probabilistycznej zdefiniowana jest zmienna losowa X?
(b) Wyznacz rozkład i wartość oczekiwaną X.

Zadanie B.6. Powtarzamy w takich samych warunkach pewne doświadczenie, którego wynikiem może być sukces bądź porażka. Prawdopodobieństwo sukcesu w jednym doświadczeniu wynosi p, $0 < p < 1$. Zmienna losowa X jest liczbą prób potrzebnych do osiągnięcia pierwszego sukcesu. Podaj rozkład tej zmiennej losowej.

Dodatek C. Odpowiedzi do zadań domowych

B.1 $\mathbb{P}(X=-5)=1/6,\ \mathbb{P}(X=1)=1/6,\ \mathbb{P}(X=4)=1/6,\ \mathbb{P}(X=10)=1/2;\quad \mathbb{E}X=5$

B.2 Przestrzeń probabilistyczna:
$\Omega=\{(O,1),(O,2),(O,3),(O,4),(O,5),(O,6),(R,1),(R,2),(R,3),(R,4),(R,5),(R,6)\}$

$\forall_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})=\frac{1}{12}$

Rozkład:
$\mathbb{P}(X=4)=1/12,\ \mathbb{P}(X=2)=3/4,\ \mathbb{P}(X=-3)=1/6$

Dystrybuanta:

$$F(t)=\begin{cases}0, & \text{dla } t<-3\\ \frac{1}{6}, & \text{dla } -3\leqslant t<2\\ \frac{11}{12}, & \text{dla } 2\leqslant t<4\\ 1, & \text{dla } t\geqslant 4\end{cases}$$

$\mathbb{E}X=\frac{4}{3}$

B.3 Przestrzeń probabilistyczna:
Ω - wszystkie dwuelementowe podzbiory zbioru 12 kul,

$\forall_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})=\frac{1}{66}$;

$\{X=0\}$ – wszystkie podzbiory kul składające się z jednej kuli białej i jednej czarnej lub z dwóch kul pomarańczowych;

$\{X\leqslant -1\}$ – wszystkie podzbiory kul składające się z dwóch kul białych lub kuli białej i kuli pomarańczowej;

Rozkład:
$\mathbb{P}(X=-2)=\frac{15}{66},\mathbb{P}(X=-1)=\frac{12}{65},\mathbb{P}(X=0)=\frac{25}{66},\mathbb{P}(X=1)=\frac{8}{66},\mathbb{P}(X=2)=\frac{6}{66}.$

Dystrybuanta:

$$F(t)=\begin{cases}0, & \text{dla } t<-2\\ \frac{15}{66}, & \text{dla } -2\leqslant t<-1\\ \frac{27}{12}, & \text{dla } -1\leqslant t<0\\ \frac{52}{66}, & \text{dla } 0\leqslant t<1\\ \frac{60}{66}, & \text{dla } 1\leqslant t<2\\ 1, & \text{dla } t\geqslant 2\end{cases}$$

$\mathbb{E}X=-\frac{22}{66}.$

B.4

$$\mathbb{P}(X=0)=0,7\cdot 0,4$$
$$\mathbb{P}(X=500)=0,7\cdot(0,6\cdot 0,5)+(0,3\cdot 0,5)\cdot 0,4$$
$$\mathbb{P}(X=1000)=0,7\cdot(0,6\cdot 0,5)+(0,3\cdot 0,5)\cdot 0,4+(0,3\cdot 0,5)\cdot(0,6\cdot 0,5)$$
$$\mathbb{P}(X=1500)=(0,3\cdot 0,5)\cdot(0,6\cdot 0,5)+(0,3\cdot 0,5)\cdot(0,6\cdot 0,5)$$
$$\mathbb{P}(X=2000)=(0,3\cdot 0,5)\cdot(0,6\cdot 0,5)$$

Dystrybuanta:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{dla } x<0\\ 0{,}28, & \text{dla } 0\leqslant x<500\\ 0{,}55, & \text{dla } 500\leqslant x<1000\\ 0{,}865, & \text{dla } 1000\leqslant x<1500\\ 0{,}955, & \text{dla } 1500\leqslant x<2000\\ 1, & \text{dla } x\geqslant 2000\end{cases}$$

$\mathbb{E}X = 675$

B.5 Przestrzeń probabilistyczna:
Ω – wszystkie czteroelementowe podzbiory zbioru 200 liczb
$\forall_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\binom{200}{4}}$

Rozkład: dla $k = 4, 5, \ldots, 200$ mamy $\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{3} / \binom{200}{4}$

$\mathbb{E}X = 10401339960$

B.6 Rozkład geometryczny: dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ mamy $\mathbb{P}(X = k) = \sigma_k = (1-p)^{k-1} p$