Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
Wykład 7: Łańcuchy Markowa. Macierz przejścia.

Definicja 1. **Łańcuchem Markowa** *nazywamy ciąg zmiennych losowych* $X_0, X_1, X_2, \ldots$ *taki, że dla dowolnych wartości* $i_0, i_1, \ldots, i_t$ *zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}, X_{t-2} = i_{t-2}, \ldots, X_0 = i_0\right) = \mathbb{P}\left(X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}\right).$$

Zwykle przyjmujemy, że wszystkie wartości zmiennych losowych X_i należą do **zbioru stanów łańcucha** $S = \{1, 2, \ldots, s\}$. Interesować nas będą wyłącznie **jednorodne** łańcuchy Markowa, tzn. takie, w których dla każdego $t = 1, 2, \ldots$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(X_t = j | X_{t-1} = i\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = j | X_0 = i\right).$$

Definicja 2. **Macierzą przejścia** *(jednorodnego) łańcucha Markowa nazywamy macierz kwadratową* $\Pi = [p_{ij}]$, *której wiersze i kolumny indeksowane są stanami łańcucha oraz taką, gdzie*

$$p_{ij} = \mathbb{P}\left(X_1 = j | X_0 = i\right)$$

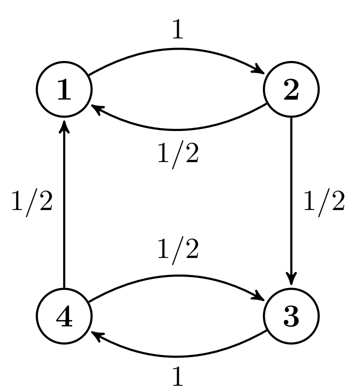
oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i *do stanu* j.

Uwaga 1. Suma wyrazów w każdym z wierszy macierzy Π jest zawsze równa 1.

Przykład 1. Niech $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa o zbiorze stanów $S = \{1, 2, 3, 4\}$, zadanym poniższą macierzą przejścia Π.

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Możemy wówczas zareprezentować ten łańcuch Markowa za pomocą grafu skierowanego G z wagami, gdzie wierzchołki odpowiadają stanom łańcucha $(X_i)_{i=0}^{\infty}$, czyli $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, natomiast każda krawędź skierowana (i, j) odpowiada sytuacji, gdzie z niezerowym prawdopodobieństwem $p_{ij} > 0$ możemy dojść ze stanu i do stanu j po jednym kroku. Wówczas wagą takiej krawędzi jest właśnie wartość tego prawdopodobieństwa, czyli p_{ij}.



Zmienne losowe $X_0, X_1, X_2, \ldots$ mówią nam, w którym stanie znajdujemy się odpowiednio na starcie – X_0, po jednym kroku – X_1, po dwóch krokach – X_2, itd. Przy czym w kolejnym kroku przechodzimy z aktualnego stanu do kolejnego zgodnie z prawdopodobieństwem zadanym macierzą przejścia (czyli tak jak mówią nam wagi na krawędziach). Np. znajdując się w stanie nr 2, w kolejnym kroku znajdziemy się z równym prawdopodobieństwem albo w stanie nr 1, albo w stanie nr 3.

Definicja 3. *Dla łańcucha Markowa* $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ *rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej* X_0 *nazywać będziemy* **rozkładem początkowym** *tego łańcucha.*

Twierdzenie 1. *Niech $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ będzie łańcuchem Markowa o macierzy przejścia Π, a przez $\bar{\rho}^i$ oznaczmy rozkład zmiennej losowej X_i, dla $i = 0, 1, \ldots$. Wtedy dla każdego $k, t = 0, 1, \ldots,$ zachodzi*

$$\bar{\rho}^{t+1} = \bar{\rho}^t \Pi = \bar{\rho}^0 \Pi^{t+1},$$

a także

$$\bar{\rho}^{t+k} = \bar{\rho}^t \Pi^k.$$

Dowód. Przypomnijmy, że mamy do czynienia z łańcuchem jednorodnym, który ma s stanów. Pokażemy na początek, że dla dowolnego rozkładu początkowego $\bar{\rho}^0 = (\rho_1^0, \rho_2^0, \ldots, \rho_s^0)$, rozkład $\bar{\rho}^1 = (\rho_1^1, \rho_2^1, \ldots, \rho_s^1)$ po jednym kroku, czyli rozkład zmiennej losowej X_1, dany jest przez $\bar{\rho}^0\Pi$. Rzeczywiście, dla $i = 1, 2, \ldots, s$ mamy:

$$\rho_i^1 = \mathbb{P}\left(X_1 = i\right) = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{P}\left(X_0 = j\right) \cdot \mathbb{P}\left(X_1 = i | X_0 = j\right) = \sum_{j=1}^{s} \rho_j^0 p_{ji} = \left(\bar{\rho}^0 \Pi\right)_i.$$

A zatem:

$$\bar{\rho}^1 = \bar{\rho}^0 \Pi.$$

Powtarzając powyższe rozumowanie (pamiętając, że $\bar{\rho}^{t+1}$ to rozkład po jednym kroku gdy startujemy od rozkładu $\bar{\rho}^t$) otrzymujemy:

$$\bar{\rho}^{t+1} = \bar{\rho}^t \Pi = (\bar{\rho}^{t-1}\Pi)\Pi = \ldots = \bar{\rho}^0 \Pi^{t+1}.$$

Podobnie

$$\bar{\rho}^{t+k} = \bar{\rho}^{t+k-1} \Pi = (\bar{\rho}^{t+k-2}\Pi)\Pi = \ldots = \bar{\rho}^t \Pi^k.$$

□

Twierdzenie 2. *Niech $\Pi^{(t)} = [p_{ij}^{(t)}]$, gdzie $p_{ij}^{(t)}$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w dokładnie t krokach. Wtedy $\Pi^{(t)} = \Pi^t$.*

Dowód. Oznaczmy wyrazy macierzy Π^t przez $\tilde{p}_{ij}$. Chcemy wyznaczyć $p_{ij}^{(t)}$, czyli prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w dokładnie t krokach. A zatem przyjmijmy jako rozkład początkowy rozkład $\bar{\rho}^0 = (\rho_1^0, \rho_2^0, \ldots, \rho_s^0)$, gdzie $\rho_i^0 = 1$, a pozostałe pozycje wektora $\bar{\rho}^0$ są równe 0. Przyjęcie takiego rozkładu początkowego możemy zinterpretować jako start z i-tego stanu. Teraz prawdopodobieństwo, że startując ze stanu i po t krokach znajdziemy się w stanie j dane jest jako j-ta pozycja w rozkładzie $\bar{\rho}^t$ zmiennej losowej X_t. Na mocy Twierdzenia 1 otrzymujemy:

$$p_{ij}^{(t)} = (\bar{\rho}^t)_j = (\bar{\rho}^0 \Pi^t)_j = (\tilde{p}_{i1}, \tilde{p}_{i2}, \ldots, \tilde{p}_{is})_j = \tilde{p}_{ij},$$

skąd otrzymujemy $p_{ij}^{(t)} = \tilde{p}_{ij}$. Ponieważ dwie macierze są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy wyrazy na odpowiadających pozycjach są sobie równe, z dowolności i oraz j wynika, że $\Pi^{(t)} = \Pi^t$. □

Przykład 2. Dla łańcucha Markowa z przykładu 1 aby wyznaczyć prawdopodobieństwa przejść pomiędzy stanami w dokładnie dwóch krokach musimy podnieść do kwadratu macierz przejścia Π. Otrzymamy wówczas macierz:

$$\Pi^{(2)} = \Pi^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Możemy z tej macierzy odczytać na przykład, że nie da się w dwóch krokach przejść ze stanu pierwszego do stanu drugiego ($p_{12}^{(2)} = 0$). Natomiast startując ze stanu pierwszego po dwóch krokach z równym prawdopodobieństwem znajdziemy się z powrotem w stanie pierwszym lub w stanie trzecim ($p_{11}^{(2)} = p_{13}^{(2)} = 1/2$). Jeśli spojrzymy teraz na graf opisujący ten łańcuch Markowa, powinniśmy dojść do podobnych wniosków.

W jaki sposób opisać „start ze stanu pierwszego”? Jest to równoważne z przyjęciem jako rozkład początkowy rozkładu $\bar{\rho}^0 = (1, 0, 0, 0)$. Dla tak zadanego rozkładu początkowego rozkład prawdopodobieństwa po dwóch krokach wyraża się wzorem

$$\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}^0 \Pi^2 = (1,0,0,0) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right),$$

czyli rzeczywiście startując ze stanu pierwszego po dwóch krokach znajdziemy się na pewno w stanie pierwszym lub trzecim, w dodatku z równym prawdopodobieństwem.

Oczywiście możemy rozważać inne rozkłady początkowe. Np. rozkład początkowy $\bar{\rho}^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ oznacza, że z równym prawdopodobieństwem startujemy z dowolnego ze stanów. Wówczas rozkład po dwóch krokach to

$$\bar{\rho}^2 = \bar{\rho}^0 \Pi^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Definicja 4. *Wektor $\bar{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_s)$ nazywamy* **rozkładem stacjonarnym** *łańcucha Markowa o macierzy przejścia $\Pi = [p_{ij}]$, jeśli spełnia poniższe warunki:*

(i) $\sum_i \pi_i = 1$,

(ii) $\pi_i \geqslant 0$ *dla każdego* $i = 1, 2, \ldots, s$,

(iii) $\bar{\pi}\Pi = \bar{\pi}$.

Przykład 3. Spójrzmy jeszcze raz na łańcuch Markowa z przykładu 1. W przykładzie 2 pokazaliśmy, że przyjmując jako rozkład początkowy $\bar{\rho}^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, po dwóch krokach otrzymamy z powrotem ten sam rozkład, czyli $\bar{\rho}^0 = \bar{\rho}^0 \Pi^2$. Jest to zatem dobry kandydat na rozkład stacjonarny. Sprawdźmy zatem, czy spełnia on warunki Definicji 4. Punkty (i) oraz (ii) są oczywiście spełnione, bo mówią one tyle, że rozważany wektor zadaje rozkład prawdopodobieństwa na stanach. Co do punktu (iii) mamy:

$$\bar{\rho}^0 \Pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \bar{\rho}^0.$$

A zatem rzeczywiście $\bar{\rho}^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ jest rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa zadanego macierzą Π.

Twierdzenie 3. *Każdy (jednorodny) łańcuch Markowa (o skończonej liczbie stanów) ma przynajmniej jeden rozkład stacjonarny.*

Uwaga 2. W jaki sposób wyznaczać rozkłady stacjonarne? Najprostsza procedura to ułożenie i rozwiązanie stosownego układu równań wynikającego z warunków $\bar{\pi}\Pi = \bar{\pi}$ oraz $\sum_i \pi_i = 1$.

Można też spróbować odgadnąć taki rozkład, tak jak zrobiliśmy to w przykładzie 3, a potem tylko uzasadnić, że rzeczywiście jest to rozkład stacjonarny zadanego łańcucha Markowa. Gdzie szukać kandydatów? Można np. wykonać kilka iteracji łańcucha Markowa startując od dowolnego rozkładu początkowego $\bar{\rho}^0$, czyli $\bar{\rho}^0, \bar{\rho}^1, \bar{\rho}^2, \ldots$ Jeśli jesteśmy w stanie odgadnąć granicę powyższego ciągu, to jest to dobry kandydat na rozkład stacjonarny.

Przykład 4. Rozważmy łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Chcemy wyznaczyć rozkład stacjonarny powyższego łańcucha. Niech $\bar{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ będzie takim rozkładem. Ponieważ rozkład $\bar{\pi}$ musi spełniać warunek

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1,$$

możemy przyjąć, że $\bar{\pi} = (x, y, 1 - x - y)$. Wówczas otrzymujemy następujące równanie:

$$(x, y, 1 - x - y) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = (x, y, 1 - x - y),$$

z którego dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}(1 - x - y) = x \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}(1 - x - y) = y \\ \frac{3}{4}y + \frac{1}{3}(1 - x - y) = 1 - x - y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest:

$$\begin{cases} x = \frac{10}{27} \\ y = \frac{8}{27}, \end{cases}$$

skąd otrzymujemy szukany rozkład stacjonarny

$$\bar{\pi} = \left(\frac{10}{27}, \frac{8}{27}, \frac{9}{27} \right).$$

W pewnych specyficznych sytuacjach wyznaczanie rozkładów stacjonarnych okazuje się bardzo proste. Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy łańcuch Markowa ma stan, z którego nie da się wyjść.

Definicja 5. *Dla łańcucha Markowa o zbiorze stanów S i macierzy przejścia $\Pi = [p_{ij}]$, stan $k \in S$ nazywamy* **stanem pochłaniającym**, *jeśli $p_{kk} = 1$. Oznacza to, że ze stanu k nie możemy przejść do żadnego innego stanu.*

Lemat 1. *Jeżeli k jest stanem pochłaniającym łańcucha Markowa zadanego macierzą $\Pi = [p_{ij}]$, to wektor $\mathbf{1}_k = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s)$, gdzie $\rho_k = 1$, a pozostałe wyrazy są równe zero, jest rozkładem stacjonarnym dla tego łańcucha.*

Dowód. Jeżeli k jest stanem pochłaniającym, to $p_{kk} = 1$, natomiast $p_{ki} = 0$ dla $i \neq k$. W szczególności oznacza to, że wektor $\mathbf{1}_k$ oraz k-ty wiersz macierzy Π są sobie równe. Wówczas mnożąc wektor $\mathbf{1}_k$ przez macierz Π otrzymamy:

$$\mathbf{1}_k \Pi = (p_{k1}, p_{k2}, \ldots, p_{ks}) = \mathbf{1}_k,$$

czyli $\mathbf{1}_k$ jest rzeczywiście rozkładem stacjonarnym rozważanego łańcucha. □

Lemat 2. *Jeśli $\bar{\rho}$ i $\bar{\tau}$ są rozkładami stacjonarnymi pewnego łańcucha Markowa zadanego macierzą Π, to dowolna* **kombinacja wypukła** *tych wektorów, czyli wektor postaci $p \cdot \bar{\rho} + (1 - p) \cdot \bar{\tau}$ dla $p \in (0, 1)$, jest też rozkładem stacjonarnym tego łańcucha.*

Dowód. Jeśli $\bar{\rho}$ i $\bar{\tau}$ są rozkładami stacjonarnymi, to oczywiście

$$\bar{\rho}\Pi = \bar{\rho} \quad \text{oraz} \quad \bar{\tau}\Pi = \bar{\tau}.$$

Niech $p \in (0, 1)$. Wówczas mamy:

$$(p \cdot \bar{\rho} + (1 - p) \cdot \bar{\tau})\Pi = p \cdot \bar{\rho}\Pi + (1 - p) \cdot \bar{\tau}\Pi = p \cdot \bar{\rho} + (1 - p) \cdot \bar{\tau}.$$

A zatem $p \cdot \bar{\rho} + (1 - p) \cdot \bar{\tau}$ jest też rozkładem stacjonarnym rozważanego łańcucha. Z dowolności p wynika, że każda kombinacja wypukła rozkładów $\bar{\rho}$ i $\bar{\tau}$ jest rozkładem stacjonarnym. □

Przykład 5 (Błądzenie po odcinku)**.** Cząsteczka błądzi po odcinku AB o końcach w punktach $A = (0, 0)$ i $B = (4, 0)$, w każdym kroku skacząc o 1 w lewo lub w prawo (jeżeli znajduje się w lewym końcu odcinka, to w kolejnym kroku z prawdopodobieństwem równym 1 wykona skok w prawo, jeśli znajduje się w prawym końcu odcinka, to w kolejnym kroku wykona skok w lewo, a jeśli znajduje się wewnątrz odcinka, to z równym prawdopodobieństwem skoczy albo w lewo, albo w prawo). Załóżmy, że w chwili $t = 0$ cząsteczka znajduje się w punkcie $(0, 0)$.

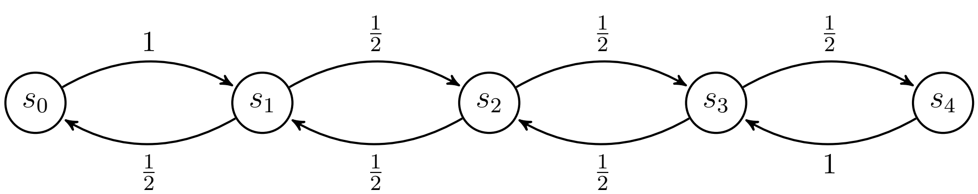
Aby zbudować łańcuch Markowa odpowiadający temu eksperymentowi musimy na początek ustalić stany łańcucha, czyli w tym przypadku zlokalizować wszystkie możliwe położenia cząsteczki w trakcie błądzenia. Zmienne losowe $X_0, X_1, X_2, \ldots$ będą nam wówczas mówiły, gdzie cząsteczka znajduje się w chwili $t = 0, 1, 2, \ldots$

Nietrudno zauważyć, że mamy dokładnie pięć możliwych położeń: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$ i $(4, 0)$. Niech będą to odpowiednio stany s_0, s_1, s_2, s_3, s_4. Kolejnym krokiem jest ustalenie prawdopodobieństw przejścia pomiędzy poszczególnymi stanami. I tak np. możemy zauważyć, że ze stanu s_0 musimy w kolejnym kroku przejść do stanu s_1, czyli $p_{01} = 1$ oraz $p_{00} = p_{02} = p_{03} = p_{04} = 0$. Podobnie wyznaczamy pozostałe prawdopodobieństwa otrzymując w ten sposób macierz przejścia:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Proszę zwrócić uwagę, że w powyższej macierzy wierszy i kolumny indeksowane są od 0 do 1.

Możemy ten przedstawić graficzną reprezentację naszego łańcucha Markowa w następujący sposób:



Rozkładem początkowym tego łańcucha jest wektor $\bar{\rho}^0 = (1, 0, 0, 0, 0)$. Aby wyznaczyć rozkład stacjonarny $\bar{\rho}$, możemy rozwiązać układ równań dany przez równanie $\bar{\pi}\Pi = \bar{\pi}$. Otrzymamy wówczas jedno rozwiązanie

$$\bar{\pi} = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right).$$