Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
12. Nierówności probabilistyczne

Twierdzenie (Nierówność Markowa)**.** *Dla dowolnego* $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|}{a}.$$

Twierdzenie (Nierówność Czebyszewa–Bienaymé)**.** *Dla dowolnego* $b > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geqslant b) \leqslant \frac{VarX}{b^2}.$$

Tabelka najczęściej spotykanych rozkładów zmiennych losowych **dyskretnych**.

Rozkład	Parametry	$\mathbb{P}(X = k)$	dla $k =$	$\mathbb{E}(X)$	Var(X)	Uwagi
dwumianowy	n, p	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$	Liczba sukcesów w n próbach Bernoulliego.
Poissona	λ	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	$0, 1, 2, \ldots$	λ	λ	Rozkład zdarzeń “rzadkich”.
geometryczny	p	$(1-p)^{k-1}p$	$1, 2, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	Liczba doświadczeń do pierwszego sukcesu.
Pascala	p, r	$\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$	$r, r+1, \ldots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	Liczba doświadczeń do r-tego sukcesu.
hipergeometryczny	N, m, n	$\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$0, 1, 2, \ldots, n$	$\frac{nm}{N}$	$\frac{nm(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$	Liczba wylosowanych kul typu A, jeśli losujemy jednocześnie n kul z urny, w której jest N kul, w tym m kul typu A.

Uwaga. Jeśli X ma rozkład dwumianowy z parametrami n i p, to $\mathbb{P}(X = k)$ najpierw rośnie, przyjmuje największą wartość dla $k = \lfloor (n+1)p \rfloor$ (w przypadku, gdy $(n+1)p$ jest całkowite przyjmuje największą wartość również dla $k = \lfloor (n+1)p \rfloor - 1$), a następnie maleje.

Tabelka najczęściej spotykanych rozkładów zmiennych losowych **ciągłych.**

Rozkład	Parametry	Zbiór wartości	Gęstość	$\mathbb{E}(X)$	Var(X)
jednostajny na odcinku	$a < b$	$[a, b]$	$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } x \in [a, b] \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
wykładniczy	λ	$(0, \infty)$	$g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ, σ^2	$\mathbb{R}$	$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
standardowy normalny $\mathcal{N}(0, 1)$	$0, 1$	$\mathbb{R}$	$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	0	1

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Czas pracy X pewnego urządzenia (liczony w dniach) ma rozkład dany dystrybuantą $F(x) = 1 - e^{-x/400}$ dla $x \geqslant 0$ i $F(x) = 0$ dla $x < 0$.

(a) Z jakim rozkładem prawdopodobieństwa mamy do czynienia?
(b) Znajdź prawdopodobieństwo, że urządzenie będzie działało przez rok (nieprzestępny).
(c) Wyznacz gęstość f_X zmiennej losowej X.
(d) Ile wynosi wartość oczekiwana oraz wariancja zmiennej losowej X?
(e) Oblicz dokładną wartość $\mathbb{P}(X \geqslant 1000)$, a następnie oszacuj to prawdopodobieństwo, korzystając z nierówności Markowa, a potem z nierówności Czebyszewa.

Zadanie A.2. Na pewnym poznańskim skrzyżowaniu zdarza się średnio 0,9 wypadków rocznie. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo, że w przyszłym roku na tym skrzyżowaniu zajdą co najmniej trzy wypadki, a następnie oszacuj to prawdopodobieństwo, używając nierówności Markowa i nierówności Czebyszewa.

Zadanie A.3. Pięć stacji pomiarowych na pięciu różnych kontynentach rejestruje wysokoenergetyczne cząstki kosmiczne (przyjmujemy, że pomiary stacji są niezależne). Liczba cząstek zarejestrowanych rocznie przez każdą ze stacji ma rozkład Poissona ze średnią 3,6. Znajdź prawdopodobieństwo, że dokładnie trzy z pięciu stacji zarejestruje więcej niż 3 cząstki w następnym roku.

Zadanie A.4. W pewnym urzędzie czas obsługi petenta (liczony w minutach) jest zmienną losową X o parametrach $\mathbb{E}X = 45$ i $\mathrm{Var}X = 15$. Zakładamy, że czasy obsługi różnych petentów są niezależne.

(a) Załóżmy, że w urzędzie pojawiło się 50 petentów. Oszacuj z dołu szansę, że średni czas ich obsługi (czyli średnia arytmetyczna z czasów ich obsługi) będzie wynosił od 35 do 55 minut (nierówności ostre)?
(b) Oszacuj, ilu petentów w urzędzie wystarczy, by z prawdopodobieństwem co najmniej 0,9 średni czas obsługi należał do przedziału $(44, 46)$.

Zadanie A.5. $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ są zmiennymi losowymi (niekoniecznie niezależnymi) o rozkładzie Poissona $Po(1)$.

(a) Użyj nierówności Markowa do oszacowania z góry $\mathbb{P}(X \geqslant 30)$, dla $X = \sum_i^{20} X_i$.
(b) Załóżmy teraz, że $X_1, X_2, \ldots, X_{20}$ są niezależne. Czy można uzyskać lepsze oszacowanie prawdopodobieństwa $\mathbb{P}(X \geqslant 30)$, korzystając z nierówności Czebyszewa–Bienaymé?

Dodatek B. Zadania domowe

Zadanie B.1. Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba orłów w n rzutach symetryczną monetą przewyższy $0{,}55n$ dla $n = 100, 1000, 10000, 100000$. Następnie porównaj otrzymane wyniki i wyciągnij wnioski.

Zadanie B.2. Rzucamy 3000 razy symetryczną kostką. Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba wyrzuconych szóstek będzie różnić się od 500 o więcej niż 100.

Zadanie B.3. Losujemy 7500 razy ze zwracaniem jedną kartę z talii 52 kart. Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba wylosowanych pików odchyli się od wartości oczekiwanej o co najmniej 100.

Zadanie B.4. Zmienna losowa ciągła X posiada dystrybuantę:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < c, \\ (x-1)^2 & \text{dla } c \leqslant x \leqslant 2, \\ 1 & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$

(a) Wyznacz stałą c.
(b) Korzystając z dystrybuanty, oblicz $\mathbb{P}\left(\frac{3}{2} \leqslant X \leqslant 4\right)$.
(c) Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X.
(d) Oszacuj prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X odchyla się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż $1/3$.

Zadanie B.5. Korektor robi w książce przeciętnie 2 poprawki na stronie. Oblicz prawdopodobieństwo, że na stronie będą przynajmniej 3 poprawki, jeśli liczba poprawek na stronie ma rozkład Poissona.

Zadanie B.6. Hurtownia zaopatruje 10 sklepów. Każdy sklep przysyła w danym dniu zamówienie z prawdopodobieństwem 0,4. Podaj rozkład zmiennej losowej, jaką jest dzienna liczba zamówień otrzymanych przez hurtownię. Jaka jest

(a) średnia,
(b) najbardziej i najmniej prawdopodobna liczba zamówień ?

Zadanie B.7. Liczba samochodów sprzedawanych tygodniowo w pewnym salonie jest zmienną losową o wartości oczekiwanej równej 16. Oszacuj z góry prawdopodobieństwa, że w przyszłym tygodniu sprzedaż przekroczy (tzn. będzie większa niż):

(a) 18,
(b) 25.

Przypuśćmy, że wariancja liczby sprzedanych samochodów przez tydzień wynosi 9.

(c) Oszacuj z dołu prawdopodobieństwo, że liczba samochodów sprzedanych w przyszłym tygodniu będzie pomiędzy 10 a 22 (włącznie).
(d) Oszacuj z góry prawdopodobieństwo, że liczba samochodów sprzedanych w przyszłym tygodniu będzie większa niż 18.

Dodatek C. Odpowiedzi do zadań domowych

B.1 Z nierówności Markowa: $\frac{10}{11}$ w każdym przypadku.
Z nierówności Czebyszewa-Bienaymé: a) 1; b) $\frac{1}{10}$; c) $\frac{1}{100}$; d) $\frac{1}{1000}$
(wszystkie powyższe liczby są oszacowaniami prawdopodobieństwa z góry).

B.2 Oszacowanie górne z nierówności Czebyszewa-Bienaymé: $\frac{2500}{61206} \approx 0{,}041$

B.3 Oszacowanie górne z nierówności Czebyszewa-Bienaymé: $\frac{1406{,}25}{10000} \approx 0{,}14$

B.4 (a) $c = 1$; (b) $\mathbb{P}\left(\frac{3}{2} \leqslant X \leqslant 4\right) = 0{,}75$; (c) $\mathbb{E}X = \frac{5}{3}$, $\mathrm{Var}X = \frac{1}{18}$; (d) Oszacowanie górne: $\frac{1}{2}$

B.5 $1 - 5e^{-2} \approx 0{,}323$

B.6 (a) 4; (b) najmniej prawdopodobna wartość to 10, najbardziej prawdopodobna wartość to 4

B.7 (a) $\frac{16}{19}$; (b) $\frac{8}{13}$; (c) $\frac{40}{49}$; (d) 1