Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
11. Zmienne losowe ciągłe wielowymiarowe.

Przypomnijmy, że dowolną funkcję (mierzalną) $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ nazywamy **wektorem losowym** lub **zmienną losową dwuwymiarową**. Dla takiego wektora **dystrybuanta** $F_{X,Y}:\mathbb{R}^2\to[0,1]$ zdefiniowana jest wzorem

$$F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}\left(X\leqslant x, Y\leqslant y\right).$$

Definicja. *Jeśli dystrybuanta $F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}\left(X\leqslant x, Y\leqslant y\right)$ zmiennej losowej dwuwymiarowej $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ daje się zapisać jako*

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds$$

dla pewnej nieujemnej funkcji $f_{X,Y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, to zmienną losową (X,Y) nazywamy **absolutnie ciągłą**, *a funkcję $f_{X,Y}$* **gęstością** *zmiennej losowej (X,Y). Wtedy:*

$$f_{X,Y}(s,t)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\partial y}\Big|_{x=s,y=t}$$

dla prawie wszystkich wartości (s,t). Zauważmy, że wówczas zachodzi również:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds=1.$$

Jeśli (X,Y) jest (absolutnie) ciągła, to gęstość i dystrybuantę zmiennej losowej X wyznaczamy ze wzorów:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t)\,dt\,,$$

oraz

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)\,.$$

Podobnie zmienna losowa Y ma gęstość

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,y)\,ds$$

i dystrybuantę

$$F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y)\,.$$

Twierdzenie. *Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa (X,Y) ma gęstość $f_{X,Y}$, to dla dowolnej funkcji (mierzalnej) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}g(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(s,t)f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds.$$

Przykład 1. *Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa (X,Y) ma gęstość $f_{X,Y}$, wówczas $\mathbb{E}(X^2Y)$ możemy wyznaczyć w następujący sposób:*

$$\mathbb{E}(X^2Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} s^2 t f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds.$$

Definicja. *Zmienne losowe X i Y są* **niezależne***, jeśli dla wszystkich x, y zachodzi:*

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa (X,Y) ma gęstość $f_{X,Y}$, natomiast X i Y mają gęstości odpowiednio f_X i f_Y, to zmienne losowe X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y),$$

dla (prawie) wszystkich x i y.

Twierdzenie. *Jeśli zmienna losowa X ma dystrybuantę $F = F_X$, to:*

$$\mathbb{P}\left(a < X \leqslant b\right) = F(b) - F(a).$$

Natomiast dla zmiennej losowej dwuwymiarowej (X,Y) o dystrybuancie $F = F_{X,Y}$ mamy:

$$\mathbb{P}\left(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d\right) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c).$$

Twierdzenie. *Dla zmiennej losowej dyskretnej X oraz dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{R}$ mamy:*

$$\mathbb{P}\left(X \in A\right) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}\left(X = x\right).$$

Podobnie, dla zmiennej losowej ciągłej X o gęstości f_X i dowolnego (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mathbb{P}\left(X \in A\right) = \int_{x \in A} f_X(x)\, dx,$$

a dla zmiennej losowej dwuwymiarowej (X,Y) o gęstości $f_{(X,Y)}(x,y)$ oraz dowolnego (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{P}\left((X,Y) \in A\right) = \int\int_{(x,y) \in A} f_{(X,Y)}(x,y)\, dy\, dx.$$

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Stwierdzono, że czas świecenia w godzinach żarówki pewnej marki jest zmienną losową T, spełniającą warunek:

$$\mathbb{P}\left(T > t\right) = e^{-t/c} \quad \text{dla każdego } t \geqslant 0,\ c = 1000.$$

(a) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej T.
(b) Wyznacz gęstość zmiennej losowej T.
(c) Korzystając z dystrybuanty, wyznacz prawdopodobieństwo, że żarówka będzie świecić dłużej niż 100, ale krócej niż 500 godzin.
(d) Oblicz to samo prawdopodobieństwo, korzystając z gęstości.

Zadanie A.2. Dystrybuanta zmiennej losowej (X,Y) wyraża się wzorem

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-\exp(-x))(1-\exp(-2y)) & \text{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) Znajdź gęstość $f_{X,Y}$.
(b) Znajdź dystrybuanty F_X, F_Y i gęstości f_X, f_Y.
(c) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
(d) Korzystając z dystrybuanty $F_{X,Y}$, znajdź $\mathbb{P}\left(-1 \leqslant X \leqslant 4, 2 \leqslant Y < 3\right)$.

Zadanie A.3. Gęstość zmiennej losowej (X, Y) wyraża się wzorem

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y & \text{dla } (x,y) \text{ należących do prostokąta o wierzchołkach } (0,0),(4,0),(4,1),(0,1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) Wylicz gęstość f_X oraz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(\sqrt{X})$.
(b) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
(c) Oblicz $\mathbb{P}(-1/2 \leqslant X \leqslant 3/2)$.
(d)* Oblicz $\mathbb{E}(XY)$.

Dodatek B. Zadania domowe

Zadanie B.1. Zmienna losowa (X, Y) ma dystrybuantę daną wzorem

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x, y \geqslant 1, \\ xy & \text{gdy } x, y \in (0,1), \\ x & \text{gdy } x \in (0,1) \text{ i } y \geqslant 1, \\ y & \text{gdy } y \in (0,1) \text{ i } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) Znajdź $f_{X,Y}(x,y)$, $f_X(x)$, $f_Y(y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?
(b) Oblicz $\mathbb{E}X$ i $\mathbb{E}Y$.
(c)* Oblicz $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Zadanie B.2. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2x^2y & \text{gdy } x \in [0,1], y \in [1,2], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Znajdź gęstości brzegowe $f_X(x)$ i $f_Y(y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie B.3. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } (x,y) \text{ należy do trójkąta o wierzchołkach } (0,0),\ (2,0),\ (2,1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Znajdź rozkłady brzegowe $f_X(x)$ i $f_Y(y)$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie B.4. Nocny tramwaj przyjeżdża co 10 minut, zaczynając od północy. Student przychodzi na przystanek X minut po północy (X nie musi być liczbą całkowitą), przy czym dystrybuanta zmiennej losowej X jest absolutnie ciągła i wyraża się wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \leqslant 0 \\ x^2/900 \text{ dla } 0 \leqslant x \leqslant 30 \\ 1 \text{ dla } x > 30. \end{cases}$$

Jakie jest prawdopobieństwo, że student będzie czekał na tramwaj krócej niż 5 minut? Rozwiąż to zadanie dwoma sposobami: korzystając z dystrybuanty i korzystając z gęstości.

Zadanie B.5. (*) Wybieramy losowo i jednostajnie punkt (x, y) z prostokąta o wierzchołkach $(-2.-1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$ i $(-2,1)$. Niech X i Y będą odpowiednio zmiennymi losowymi oznaczającymi współrzędne tego punktu. Znajdź dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y). Znajdź rozkłady brzegowe zmiennych losowych X i Y, następnie oblicz ich wartości oczekiwane. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie B.6. (*) Wybieramy losowo i jednostajnie punkt (x, y) z kwadratu $[0,1] \times [0,1]$. Niech X i Y będą odpowiednio zmiennymi losowymi oznaczającymi współrzędne tego punktu, a $Z = X+Y$. Znajdź dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y). Znajdź rozkłady zmiennych losowych X, Y i Z, następnie oblicz ich wartości oczekiwane. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Z).

Odpowiedzi do zadań domowych

B.1

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0,1), y \in (0,1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1), \\ 0 & x \notin (0,1); \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in (0,1), \\ 0 & y \notin (0,1). \end{cases}$$

Są niezależne.

$$EX = \frac{1}{2}, \ \ EY = \frac{1}{2}, \ \ \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

B.2

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in [0,1], \\ 0 & x \notin [0,1]; \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}y & y \in [1,2], \\ 0 & y \notin [1,2]. \end{cases}$$

Są niezależne.

B.3

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0,2], \\ 0 & x \notin [0,2]; \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 2-2y & y \in [0,1], \\ 0 & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Nie są niezależne.

B.4 7/12

B.5

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -2 \text{ lub } y < -1, \\ \frac{(x+2)(y+1)}{8} & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ \frac{y+1}{2} & \text{dla } x > 2, -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ \frac{x+2}{4} & \text{dla } -2 \leqslant x \leqslant 2, y > 1, \\ 1 & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases}$$

X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-2,2]$, $\mathbb{E}X = 0$
Y ma rozkład jednostajny na odcinku $[-1,1]$, $\mathbb{E}Y = 0$
X i Y są niezależne.