Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 3.2/2023

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Ekstrema lokalne.

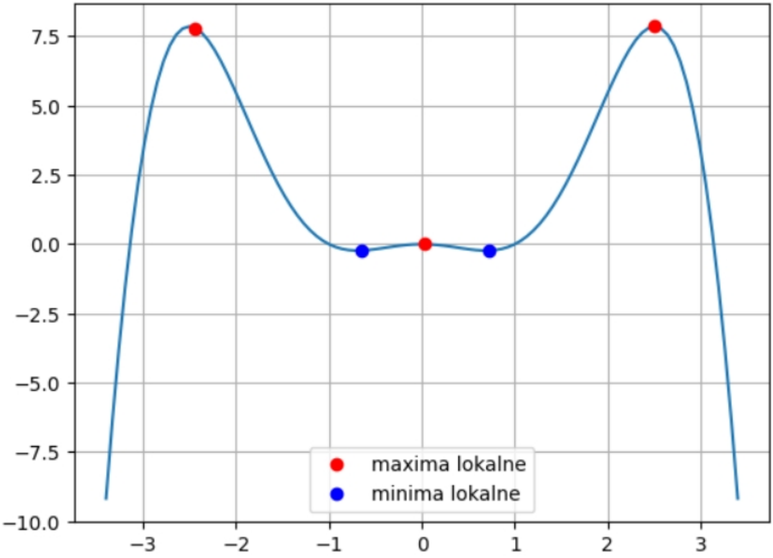
Mówimy, że funkcja $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ ma w tym punkcie maksimum lokalne (x_0 jest punktem wewnętrznym zbioru A) jeżeli istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ zachodzi nierówność

$$f(x) \leq f(x_0) \ .$$

Funkcja ta ma minimum lokalne w x_0 jeżeli

$$\underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}{\forall} \quad f(x) \geq f(x_0) \ .$$

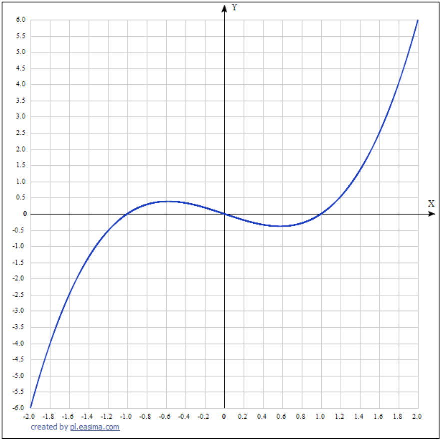
Minima i maksima lokalne noszą łączną nazwę ekstremów lokalnych.



7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
−3
−2
−1
0
1
2
3
maxima lokalne
minima lokalne

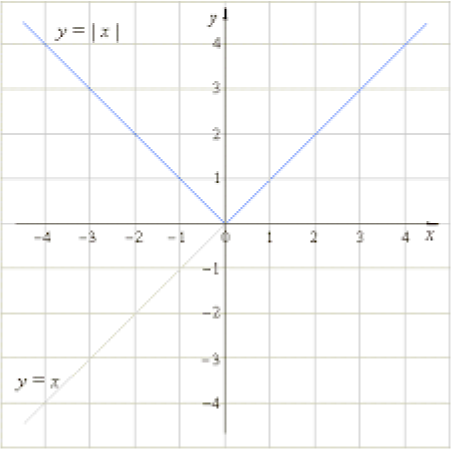
$$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+1)$$

funkcja ma w punkcie $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ maksimum lokalne, a w punkcie $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ minimum lokalne, ale funkcja ta jest nieograniczona z góry i z dołu).

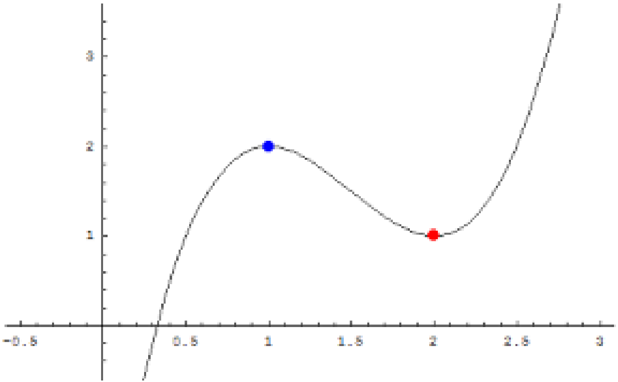


Rozpatrzmy kolejny przykład: $f(x) = |x|$.

Łatwo zauważyć, że w punkcie $x_0 = 0$ jest minimum lokalne ($f(x_0) = 0$ a dla każdego innego $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > 0$ - jest to tzw. minimum globalne). Niemniej nie istnieje (jak już wiemy ...) $f'(x_0)$.



Ekstrema lokalne.



W maksimum lokalnym nie musi być wartość największa funkcji (niebieski punkt na wykresie), a w minimum lokalnym nie musi być wartość najmniejsza funkcji (czerwony punkt na wykresie).

Zasadnicze twierdzenia rachunku różniczkowego.

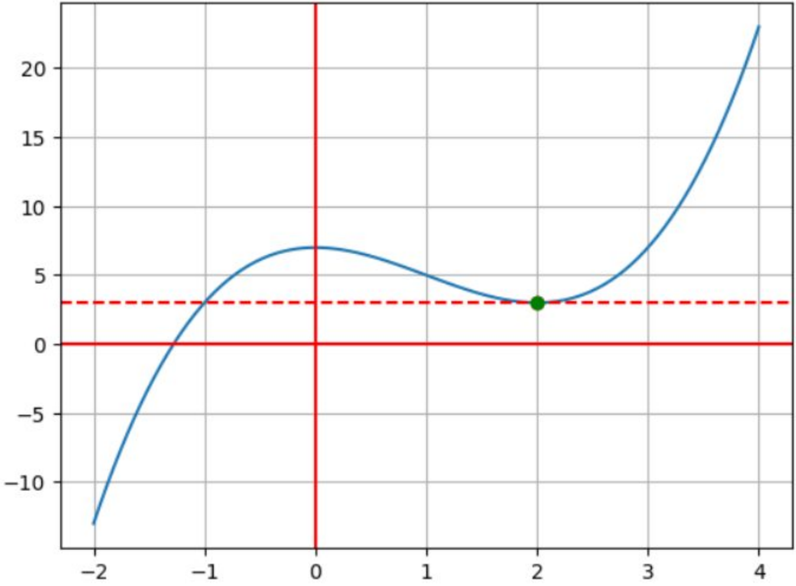
Twierdzenie. (tw. Fermata) *Jeżeli* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *jest różniczkowalna w* x_0 *i ma w nim ekstremum lokalne, to* $f'(x_0) = 0$.

Odwrotna zależność (jak już wiemy) nie zachodzi ...

Nie można stąd oczywiście wyciągać wniosków, że warunek $f'(x_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum.

Dla sformułowania warunków wystarczających istnienia ekstremum lokalnego musimy wprowadzić nowe pojęcia i zbadać je. Do tematu oczywiście wrócimy...

A tu prezentacja: twierdzenia Fermata w formacie .CDF.


20
15
10
5
0
−5
−10
−2
−1
0
1
2
3
4

Twierdzenie Rolle'a.

Twierdzenie. (Rolle'a) *Załóżmy, że funkcja f określona w przedziale $[a,b]$ spełnia następujące warunki:*

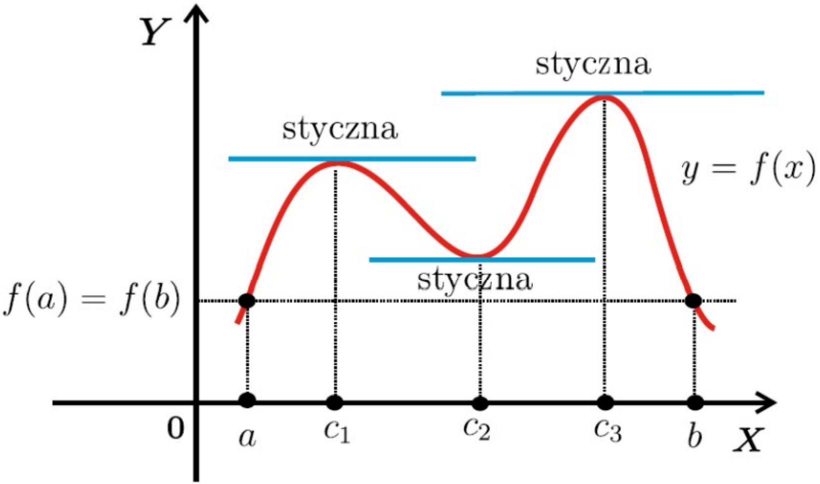
(a) f *jest ciągła w* $[a,b]$,

(b) f *jest różniczkowalna w* (a,b),

(c) $f(a) = f(b)$.

Wówczas istnieje taki punkt $\xi \in (a,b)$, *że* $f'(\xi) = 0$.

Sens geometryczny twierdzenia Rolle'a: na łuku krzywej będącej wykresem funkcji f, którego końce mają tę samą rzędną znajduje się co najmniej 1 punkt, w którym styczna jest równoległa do osi OX.



Y
styczna
styczna
$y = f(x)$
styczna
$f(a) = f(b)$
0
a
c_1
c_2
c_3
b
X

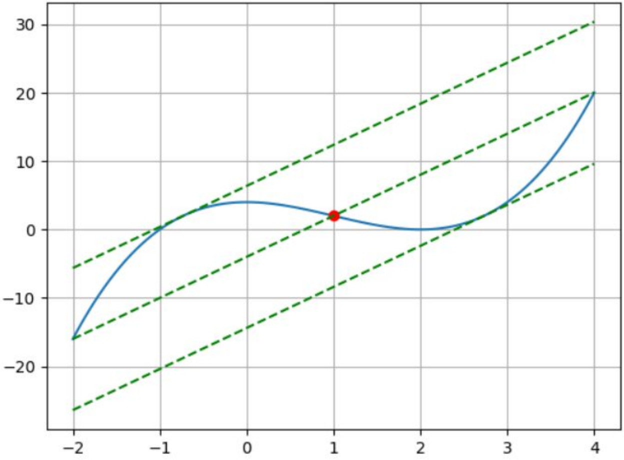
Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

Twierdzenie. (Lagrange'a o wartości średniej) *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w (a, b) to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geometrycznie możemy to zilustrować następująco: istnieje więc co najmniej jeden punkt $c \in (a, b)$ w którym styczna jest równoległa do siecznej wykresu przechodzącej przez $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

Interpretacja graficzna.



I jeszcze ilustracja graficzna tego twierdzenia w postaci skryptu:
skrypt ilustracyjny w programie "Mathematica" (.CDF).

Twierdzenie Cauchy'ego.

Twierdzenie. (Cauchy'ego) *Załóżmy, że 2 funkcje f i g są ciągłe w $[a,b]$ i różniczkowalne w (a,b) oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a,b)$.*

Wówczas istnieje $\xi \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \; .$$

W informatyce - analiza danych.

W analizie danych pochodne jako narzędzie do identyfikacji trendów i zależności między różnymi zmiennymi. W szczególności, możemy wykorzystać twierdzenia do określenia, czy dwie zmienne są ze sobą skorelowane i jak silna jest ta korelacja.

Przykładowo, załóżmy, że mamy zestaw danych zawierający dwie zmienne, takie jak liczba godzin spędzonych na nauce i oceny uzyskane przez studentów na egzaminie. Aby określić, czy istnieje zależność między tymi zmiennymi, możemy obliczyć pochodną jednej zmiennej względem drugiej i zobaczyć, czy wynik jest dodatni lub ujemny. Jeśli pochodna jest dodatnia, oznacza to, że im więcej czasu spędza się na nauce, tym wyższe są wyniki egzaminów, co sugeruje pozytywną korelację między tymi zmiennymi. Z drugiej strony, jeśli pochodna jest ujemna, oznacza to, że im więcej czasu spędza się na nauce, tym niższe są wyniki egzaminów, co sugeruje negatywną korelację między tymi zmiennymi.

Wnioski.

Wniosek 1. Jeżeli f jest ciągła w $[a,b]$ i jeżeli $f'(x)=0$ dla każdego $x\in(a,b)$ to $f(x)=c=\text{const}$ dla $x\in[a,b]$ (funkcja jest stała).

Wniosek 2. Jeżeli dane są 2 funkcje f i g określone w $[a,b]$ (o wartościach w $\mathbb{R}$) i $f'(x)=g'(x)$ dla $x\in(a,b)$ to funkcje różnią się co najwyżej o stałą tj. $f(x)=g(x)+C \quad (C=\text{const}, x\in[a,b])$

Przykład zastosowania:

$$\text{Niech } f(x) = \arcsin x, \quad g(x) = -\arccos x \quad , \quad x \in [-1, 1].$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , \qquad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,$$

czyli $f'(x) = g'(x)$ dla $x \in (-1, 1)$.

Stąd $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0$,

a więc $f(x) - g(x) = \text{const}$.

$$\arcsin x + \arccos x = \text{const.} \qquad \text{dla} \quad x \in [-1, 1].$$

Ponieważ

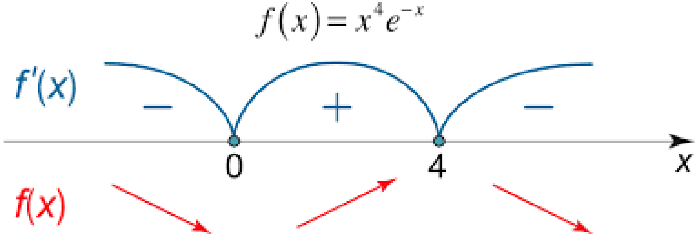
$$\arcsin 0 = 0\ , \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}\ ,$$

więc ostatecznie

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{dla} \quad x \in [-1, 1]\ .$$

Wniosek 3. Jeżeli f jest ciągła w $[a,b]$ i $f'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a,b)$ to f jest różnowartościowa.

Wniosek 4. Jeżeli f jest ciągła w $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b) oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (a,b)$ $[f'(x) < 0$ dla $x \in (a,b)]$ to f jest ściśle rosnąca [malejąca] w $[a,b]$.



Wniosek 5. (reguła de l'Hôspitala)
Rozpatrzmy kilka przypadków:

(A) Załóżmy, że

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \;, \qquad (*)$$

gdzie funkcje f i g są określone i różniczkowalne w pewnym otoczeniu punktu x_0. Jeżeli $g'(x) \neq 0$ w tym otoczeniu, a ponadto istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ to istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ oraz zachodzi wzór

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uwagi:

(1^0) regułę tę można stosować do granic jednostronnych,

(2^0) również w przypadku granic niewłaściwych ($x_0 = \pm\infty$) reguła jest prawdziwa.

(B) Przy założeniach reguły (A), gdzie w miejsce $(*)$ zakładamy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty \qquad (**)$$

mamy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Tu również możemy stosować tę regułę dla granic niewłaściwych ($x_0 = \pm\infty$) oraz w przypadku $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

W tej sytuacji będziemy mówić o wyrażeniu nieoznaczonym typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

(C) Jeżeli $(*)$ zastąpimy przez

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

to

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

i możemy stosować regułę (A).

Jest to tzw. symbol nieoznaczony typu $[0 \cdot \infty]$.

(D) Przy założeniu $(**)$:

$$[f(x) - g(x)] = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

i do ostatniego wyrażenia możemy stosować regułę (A) (tzw. symbol nieoznaczony typu $[\infty - \infty]$).

A tu prezentacja: reguły de l'Hôspitala w formacie .CDF.

U w a g a : do symboli nieoznaczonych zaliczamy też $[0^0]$, $[\infty^\infty]$ oraz $[1^\infty]$ (mamy nadzieję, że Czytelnik „rozszyfruje" przez analogię jak one wyglądają - stosują się oczywiście do wyrażeń $f(x)^{g(x)} \ldots$).
Je również można sprowadzić do postaci występującej w regule (A) lub (B) np:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad (\text{tj.} \quad [0^0]) \ .$$

Niech $F(x) = f(x)^{g(x)}$. Przy założeniach gwarantujących istnienie funkcji $F(x)$ $(f(x), g(x) > 0, \ f(x) \neq 1)$ możemy obliczyć $G(x) = \ln F(x)$. Wtedy

$$G(x) = \ln F(x) = \ln(f(x)^{g(x)}) = g(x) \cdot \ln f(x) \ ,$$

a to ostatnie wyrażenie jest typu $[0 \cdot \infty]$. Możemy więc (zgodnie z (C)) obliczyć $\lim_{x\to x_0} G(x)$. Z ciągłości funkcji logarytmicznej i wykładniczej:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} e^{G(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} G(x)}$$

czyli obliczymy granicę wyjściowego wyrażenia.

Uwagi dla informatyków.

Reguła de l'Hôspitala dotyczy **funkcji** i **punktów skupienia dziedziny**. Nie wolno jej stosować do ciągów!! Taki błędny komentarz to (za) duży *skrót myślowy*! Przy ciągach (jak widać nawet tu przydadzą się pochodne!) postępujemy tak:

(1) Rozszerzamy dziedzinę: ciąg $a_n = f(n)$ określony jest na liczbach naturalnych, czyli rozpatrujemy **funkcję** $\tilde{f} : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ taką, że $\tilde{f}(n) = f(n)$ np. dla ciągu $a_n = n^2 \cdot \ln n$ ta funkcja jest postaci $\tilde{f}(x) = x^2 \cdot \ln x$ - określona dla dziedziny $x > 0$.

(2) Do funkcji $\tilde{f}(x)$ stosujemy regułę de l'Hôspitala (o ile spełnione są założenia - w tym przypadku jest to granica w nieskończoności) uzyskując np. granicę g.

(3) Skoro znana jest granica funkcji $\tilde{f}$, to z definicji Heinego granic dla każdego ciągu (x_n) z dziedziny zbieżnego do ∞ mamy $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}(x_n) = g$, a wię w szczególności dla $x_n = n$ tak jest. Mamy szukaną granicę ciągu!

Przykład.

Dla algorytmu sortowania bąbelkowego, czas wykonania wynosi $O(n^2)$, gdzie n to liczba elementów w tablicy. Dla algorytmu sortowania przez scalanie, czas wykonania wynosi $O(n \log n)$.

Możemy porównać złożoności obu algorytmów, obliczając granicę ilorazu czasu wykonania sortowania bąbelkowego do czasu wykonania sortowania przez scalanie, kiedy n dąży do nieskończoności:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n}.$$

Widzimy, że granica ilorazu ma postać $[\frac{\infty}{\infty}]$. A ile wynosi? Oczywiście, znajdą się tacy, co wynik będą chcieli podać "z pamięci", ale to fatalny pomysł. Najprościej właśnie tak, możemy zastosować regułę de l'Hôspitala: kładziemy $f(x) = x$, $g(x) = \log x$ dla $x > 0$.

Wtedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x\cdot\ln 10}} = \lim_{x\to\infty} (x \cdot \ln 10) = \infty.$$

Przypomnijmy, że reguła stosuje się też do granic niewłaściwych (one jedynie muszą istnieć), czyli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Oczywiście: z definicji Heinego granicy dla dowolnego ciągu $x_n \to \infty$ mamy $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \infty$ gdy $n \to \infty$, czyli $\frac{f(n)}{g(n)} \to \infty$ gdy $n \to \infty$.

Otrzymujemy granicę wynoszącą nieskończoność, co oznacza, że złożoność czasowa sortowania bąbelkowego jest gorsza niż złożoność czasowa sortowania przez scalanie.

Pochodne wyższych rzędów.

Definicja. Jeżeli f' jest różniczkowalna w zbiorze A to funkcję $f'' : A \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f''(x) = (f')'(x)$ nazywać będziemy pochodną drugiego rzędu z funkcji f.

Podobnie możemy zdefiniować pochodne wyższych rzędów:

jeżeli $f^{(n)}$ jest różniczkowalna w A to pochodną rzędu $(n+1)$ definiujemy następująco:

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$$

O funkcji mającej pochodne rzędu od 1 do n w x_0 będziemy krótko mówić, że jest n-krotnie różniczkowalna w x_0.

Będziemy mówili, że funkcja f jest klasy C^n w zbiorze A, o ile f jest n-krotnie różniczkowalna w A i jeżeli $f^{(n)}$ jest funkcją ciągłą w A. Podobnie powiemy, że funkcja f jest klasy C^∞ w zbiorze A, jeżeli ma w A pochodne dowolnego rzędu. Fakty te zapisywać będziemy odpowiednio: $f \in C^n$ $[f \in C^\infty]$.

Twierdzenie 12.12. (wzór Taylora). *Załóżmy, że funkcja f określona w* **przedziale** *P jest w nim n-krotnie różniczkowalna.*

Niech x_0 i h będą takie, że $x_0, x_0 + h \in P$. Wówczas istnieje taka liczba $0 < \nu < 1$, że

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot h+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot h^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}\cdot h^{n-1}+\nu_n(h)\ ,$$

gdzie $\nu_n(h) = \dfrac{f^{(n)}(x_0+\nu h)}{n!}\cdot h^n$ *(i jest nazywana resztą Lagrange'a we wzorze Taylora).*

Prezentacja: Skrypt ilustracyjny szeregu Taylora w "Mathematica" - oraz taki dodatkowy skrypt ilustracyjny...

I jeszcze prezentacja tych wielomianów Taylora (.CDF).

Można także zapisać uzyskany wzór w następującej postaci: niech $x, x_0 \in P$, kładziemy $h = x - x_0$, a stąd

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \nu_n(x), \end{aligned}$$

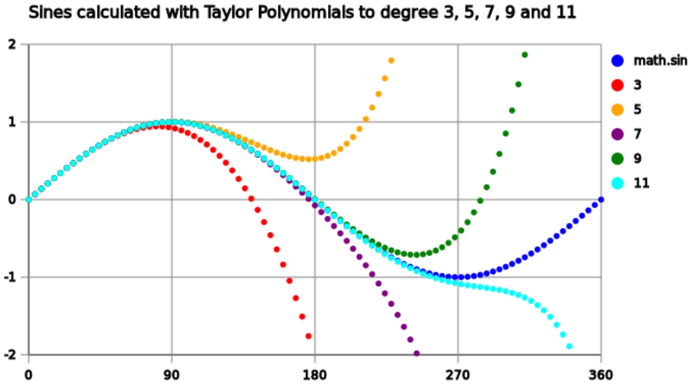
gdzie

$$\nu_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \nu(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n,$$

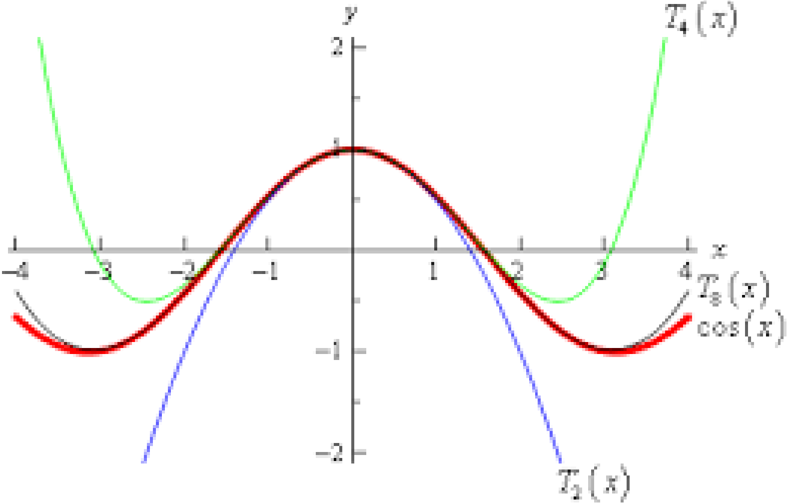
a w szczególności jeżeli $x_0 = 0 \in P$, to

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\nu x)}{n!} \cdot x^n .$$

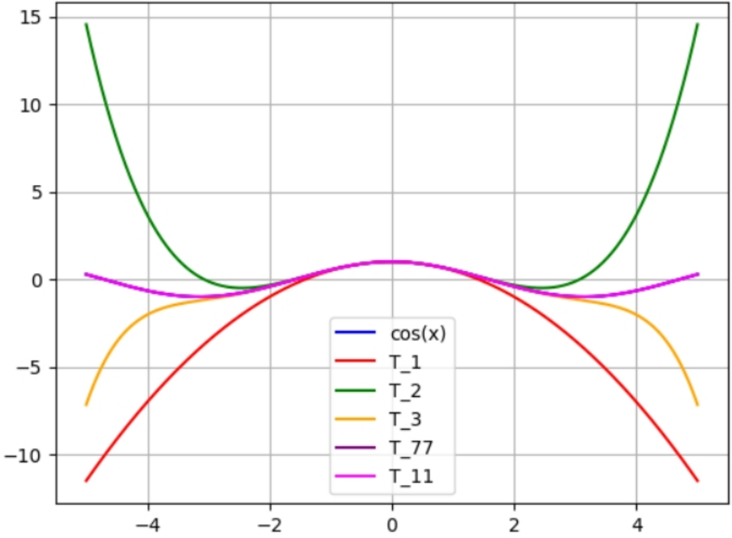
Ten ostatni wzór nazywamy **wzorem MacLaurina.**



A tu aplet ilustrujący wielomiany Taylora: niskich stopni.
Zwracam uwagę: błąd (oszacowanie reszty) rośnie wyraźnie z odległością x od x_0! To lokalne przybliżanie funkcji...



I tutaj obliczenia szeregów Taylora w Python'ie - może kogoś zainteresuje...



15
10
5
0
−5
−10
−4
−2
0
2
4
cos(x)
T_1
T_2
T_3
T_77
T_11

Uwagi.

Jak rozumieć wzór Taylora? Zauważmy, że kolejne pochodne danej funkcji, wyznaczone w tym samym punkcie, "kodują" coraz "większą i bardziej dokładną" informację o kształcie funkcji w "szerszym" przedziale. Już wykorzystanie kilku lub kilkunastu liczb wystarcza do osiągnięcia wystarczającej jakości aproksymacji. Skojarzone pojęcie z informatyki: "błąd obcięcia".

Jest to więc coś w rodzaju standaryzacji **zapisu funkcji i algorytmu ich kompresji** w jednym.

Przypominam - te slajdy to **szkic** wykładu. Proszę doczytać ze źródeł ważne dla informatyków informacje, np. własność Darboux dla pochodnej (str 122, Twierdzenie 6.47 [W]): proszę przeanalizować czym się różni od klasycznego wyniku (por. str 241 [K], Twierdzenie 15.10.2).

Poza tym np. **postacie reszt we wzorze Taylora** - od str. 125 [W], a ze źródła [K] funkcje klasy C^k - od str. 234 w [K].

Aproksymacja pochodnych.

Wielomian Taylora aproksymuje wartość funkcji poprzez **aproksymowanie wartości jej kolejnych pochodnych.** Wszystko staje się znacznie jaśniejsze po wyznaczeniu kolejnych pochodnych wielomianu!

Analizując poniższy schemat należy zwrócić uwagę jak człony wzoru przesuwają się "w lewo":

$$T_n(x) = \underbrace{f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{liniowa aproksymacja } f(x) \\ \text{na bazie różniczki}}} + \underbrace{\frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}_{\substack{\text{korekcja aproksymacji } f(x) \text{ na bazie} \\ \text{pochodnych wyższych rzędów}}}$$

$$T_n^{(1)}(x) = \underbrace{f^{(1)}(x_0) + f^{(2)}(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{liniowa aproksymacja } f^{(1)}(x) \\ \text{na bazie różniczki}}} + \underbrace{\frac{3}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{n}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}_{\substack{\text{korekcja aproksymacji } f^{(1)}(x) \text{ na bazie} \\ \text{pochodnych wyższych rzędów}}}$$

$$T_n^{(2)}(x) = \underbrace{f^{(2)}(x_0) + f^{(3)}(x_0)(x-x_0)}_{\substack{\text{liniowa aproksymacja } f^{(2)}(x) \\ \text{na bazie różniczki}}} + \underbrace{\frac{3\cdot 4}{4!}f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{(n-1)n}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-2}}_{\substack{\text{korekcja aproksymacji } f^{(2)}(x) \text{ na bazie} \\ \text{pochodnych wyższych rzędów}}}$$

Czyli

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0).$$

Zastosowania wzoru Taylora.

Rola wzoru Taylora w informatyce jest nie do przecenienia! Proszę sprawdzić w dowolnej książce z metod numerycznych - większość szacowań błędów obliczeń wartości funkcji jest oparta o szacowanie **reszty we wzorze Taylora**. Patrz np. (po angielsku).

Proszę zwrócić uwagę i starannie przeczytać materiał [W]: strony 124-131 i zwrócić uwagę na różne reszty. Pytanie po lekturze: po co tyle różnych postaci reszt (łatwiej vs. dokładniej...)? ("błędy obcięcia") Np.

Twierdzenie 15.13.5 (wzór Taylora z resztą Lagrange'a) *Niech $f : (c, d) \to \mathbb{R}$ będzie funcją $n + 1$-różniczkowalną. Niech $a, b \in (c, d)$ spełniają $a < b$. Wtedy istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że*

$$f(b) = T_a^n f(b-a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{15.32}$$

Przyjmując oznaczenie $h := b - a$ oraz rozpisując wielomian Taylora możemy też powyższą tezę zapisać jako

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Podamy teraz ogólne twierdzenie, pozwalające dokładniej szacować resztę we wzorze Taylora.

Twierdzenie 6.59 (wzór Taylora z resztą Schlömilcha–Roche'a). *Niech* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *ma w przedziale* (a,b) *pochodne do rzędu* $(k+1)$ *włącznie. Załóżmy, że* $x_0, x_0+d \in (a,b)$, $d > 0$. *Oznaczmy*

$$r_k(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j \,.$$

Wówczas dla każdego $x \in (x_0, x_0+d)$ *i każdego* $p > 0$ *istnieje liczba* $\theta \in (0,1)$ *taka, że*

$$r_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{k!\cdot p}(1-\theta)^{k+1-p}(x-x_0)^{k+1} \,. \tag{6.18}$$

A ta poniższa postać reszty jest ważna, wrócimy do temtu, gdy już "oficjalnie" wprowadzimy całki!

9.2.4 Wzór Taylora z resztą w postaci całkowej

W poprzednich podrozdziałach wykorzystaliśmy wzór na wielokrotne całkowanie przez części do dowodów niewymierności π i przestępności e. Teraz wskażemy jeszcze jedno zastosowanie tego wzoru, bardzo przydatne (także do analizowania funkcji wielu zmiennych, z którymi Czytelnik wielokrotnie zetknie się w późniejszych swoich studiach).

Twierdzenie 9.49 (wzór Taylora z resztą całkową). *Niech* $g \in C^{k+1}([a,b])$, $a < x < b$. *Wówczas*

$$g(x) = g(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{g^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t)\,dt \,. \tag{9.54}$$

Kolejny raz zwracam uwagę: postęp w zastosowaniu w informatyce (tu: dokładność oszacowań) jest skutkiem użycia bardziej zaawansowanego aparatu matematycznego...

Aproksymacja liniowa poprzez różniczkę jest prosta, ale często nie jest wystarczająco dokładna. Możemy wtedy rozważać aproksymację krzywą drugiego stopnia (parabolą) zadaną wzorem $y = a_0 + a_1h + a_2h^2$ gdzie $h = x - x_0$ jest przyrostem zmiennej niezależnej (rys. 15.7). Możemy też przybliżać wielomianem n-ego stopnia postaci

$$W(h) := a_0 + a_1h + a_2h^2 + \ldots + a_nh^n.$$

Różnica

$$f(x) - W[h) = f(x_0 + h) - \left(a_0 + a_1h + a_2h^2 + \ldots + a_nh^n\right)$$

powinna być $o(h^n)$, bo oczekujemy błędu, który szybciej zmierza do zera niż wielomian aproksymacyjny. Pokażemy, że jeśli funkcja r jest n-różniczkowalna w zerze, to własność $r(h) = o(h^n)$ jest równoważna zerowaniu się pochodnych r do n-tej włącznie, tzn. warunkowi

$$r(0) = r'(0) = r''(0) = \ldots = r^{(n)}(0) = 0.$$

W odniesieniu do naszego problemu aproksymacyjnego oznacza to, że funkcja

$$h \mapsto f(x_0 + h) - W(h)$$

powinna mieć zerowe pochodne w zerze do n-tej włącznie co jest równoważne postulatowi by funkcje $h \mapsto f(x_0 + h)$ i $h \mapsto W(h)$ miały te same pochodne do n-tej włącznie. Jak zobaczymy pochodne wielomianu jest stosunkowo łatwo policzyć: $W^{(i)}(0) = i!a_i$. Zatem tyle muszą wynosić pochodne funkcji $h \mapsto f(x_0 + h)$ w zerze. Są one równe pochodnym $x \mapsto f(x)$ w x_0, zatem poszukiwana aproksymacja ma postać

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + r(h)$$

gdzie $r(h) = o(h^n)$. Otrzymany w ten sposób wielomian aproksymacyjny nazywany jest wielomianem Taylora funkcji f w x_0, bo pochodzi od angielskiego matematyka Brooka Taylora (rys. 15.8).

Niektóre zalety wzoru Taylora link: (źródło)

- Wzór Taylora definiuje wielomian Taylora, który tym lepiej (zwykle) aproksymuje funkcję im wyższy jest jego stopień.
- Twierdzenie Taylora (w wersji powyższej z resztą w postaci Peano), daje informację o błędzie aproksymacji (notacja „o-małe" w zagadnieniach asymptotycznego tempa wzrostu). Istnieją inne dodatkowe nierówności pozwalające szacować resztę - w innych podanych postaciach reszty.
- Wielomiany to sumy częściowe szeregu Taylora. Bardzo łatwo wyznaczać je numerycznie (tylko operacje mnożenia i dodawania). Z tego względu szereg kalkulatorów, programów i języków programowania implementuje inne funkcje (choć nie wszystkie - o czym mówiliśmy), poprzez odpowiednie wielomiany Taylora.
- Wielomiany z łatwością poddają się różniczkowaniu i całkowaniu. Można je zapisać w postaci iloczynowej, ułatwiając rozwiązywanie szeregu równań i nierówności. Wielomiany są określone na całej prostej rzeczywistej, co umożliwia analityczne „przedłużanie" wartości funkcji na dziedzinę, w której wyjściowa funkcja jest nieokreślona.