Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
Wykład 9: Zmienne losowe ciągłe

Do tej pory zajmowaliśmy się zmiennymi losowymi o przeliczalnym zbiorze atomów. Jak poradzić sobie z sytuacją, gdy zmienna losowa $X : \Omega \to \mathbb{R}$ może przyjmować nieprzeliczalnie wiele wartości?

Wyobraźmy sobie na przykład, że zmienna losowa X z równym prawdopodobieństwem przyjmuje każdą wartość z przedziału $[0, 1]$. Załóżmy, że istnieje stała $p > 0$ taka, że dla każdego $x \in [0, 1]$ mielibyśmy $\mathbb{P}(X = x) = p$. Co można wówczas powiedzieć o wyrażeniu $\sum_{x\in[0,1]} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in[0,1]} p$? Z pewnością ta suma nie jest skończona. Co za tym idzie, takie zdefiniowanie prawdopodobieństwa nie dałoby nam poprawnego rozkładu. Zatem jedyną możliwością jest przyjęcie założenia, że $\mathbb{P}(X = x) = 0$ dla każdego $x \in [0, 1]$. Ale wtedy $\sum_{x\in[0,1]} \mathbb{P}(X = x) = 0$, co też wymyka się naszej intuicji. Jak zatem poradzić sobie z rozkładem takiej zmiennej losowej? Otóż możemy zadać rozkład za pomocą dystrybuanty!

Definicja 1. *Zmienną losową $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy* **ciągłą***, jeśli jej dystrybuanta $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zdefiniowana wzorem*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x),$$

jest ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$.

Równoważna definicja mówi, że zmienna losowa X jest ciągła, gdy nie zawiera atomów, tzn. dla każdego x mamy $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Uwaga 1. Nie każda zmienna losowa, która nie jest dyskretna, jest ciągła, choć każdą zmienną losową można przedstawić jako sumę zmiennej losowej dyskretnej i zmiennej losowej ciągłej. Wówczas mamy do czynienia z tzw. **rozkładem mieszanym**.

Istnieje jeszcze jeden sposób na zadanie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej. Służy do tego tzw. funkcja gęstości.

Definicja 2. *Zmienną losową X nazywamy* **(absolutnie) ciągłą***, gdy istnieje taka funkcja całkowalna (prawie wszędzie) $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy:*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Funkcję f_X nazywamy wówczas **gęstością** *rozkładu zmiennej losowej X. Wtedy (dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$) zachodzi również:*

$$f_X(x) = F'_X(x).$$

Uwaga 2. Gdy z kontekstu jasne jest o dystrybuantę i gęstość której zmiennej losowej nam chodzi, wówczas możemy pominąć X w indeksie dolnym w F_X oraz f_X i pisać po prostu F i f.

Uwaga 3. Dystrybuanta F jest jednoznacznie zdefiniowana dla każdej zmiennej losowej X, natomiast jej gęstość f, nawet gdy istnieje, występuje zwykle pod całką i dlatego jest zdefiniowana z dokładnością do zbioru miary zero, czyli bez żadnych konsekwencji (z wyjątkiem braku elegancji) możemy dowolnie przedefiniować ją w kilku punktach dziedziny.

Twierdzenie 1 (Własności gęstości)**.** *Niech f będzie gęstością pewnej zmiennej losowej ciągłej. Wówczas:*

(i) *$f(x) \geqslant 0$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$;*
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$.

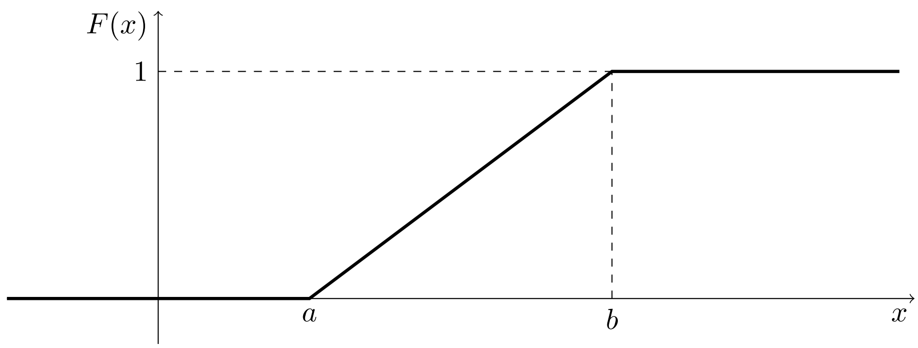
Twierdzenie 2 (Własności dystrybuanty)**.** *Niech F będzie dystrybuantą pewnej zmiennej losowej. Wówczas:*

(i) *F jest funkcją niemalejącą;*
(ii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$*;*
(iii) *F jest prawostronnie ciągła.*

Uwaga 4. Powyższe twierdzenie dotyczy zarówno dystrybunaty rozkładu dyskretnego, jak i dystrybuanty rozkładu ciągłego.

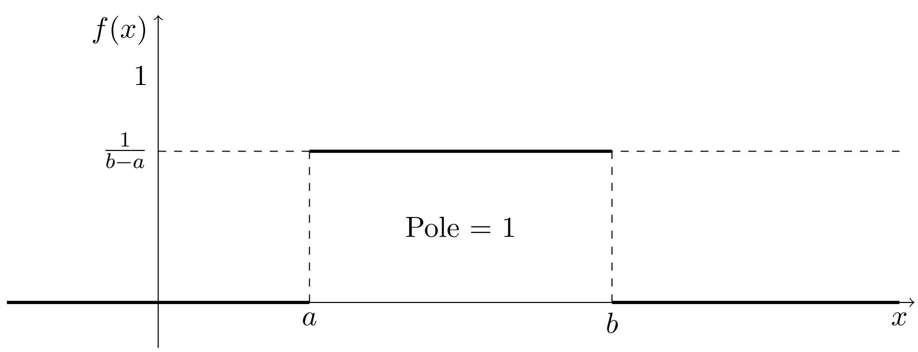
Przykład 1. Rozkład prawdopodobieństwa, w którym każda wartość z przedziału $[0,1]$ jest równoprawdopodobna jest przykładem tzw. **rozkładu jednostajnego**. Ogólnie, jeśli F jest dystrybuantą rozkładu jednostajnego na odcinku $[a,b]$, $a<b$, czyli takiego, gdzie każda z wartości z przedziału $[a,b]$ jest przyjmowana z równym prawdopodobieństwem, to:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<a,\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a\leqslant x\leqslant b,\\ 1 & \text{dla } x>b.\end{cases}$$



Z kolei gęstością takiego rozkładu jest funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dana wzorem:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{dla } a\leqslant x\leqslant b,\\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.}\end{cases}$$



A zatem w tym wypadku gęstość jest funkcją stałą na odcinku $[a,b]$. Co więcej:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=\int_a^b \frac{1}{b-a}dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b 1\,dt=\frac{1}{b-a}\left[t\right]_a^b=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Z kolei gdybyśmy chcieli odtworzyć dystrybuantę mając do dyspozycji tylko gęstość, musielibyśmy posłużyć się wzorem

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Innymi słowy, wartość dystrybuanty w punkcie x równa jest polu pod wykresem funkcji f na przedziale $(-\infty,x)$. A zatem dla $x<a$ mamy:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0;$$

dla $a\leqslant x\leqslant b$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} 1dt = \frac{x-a}{b-a};$$

natomiast dla $x > b$ zachodzi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt + \int_{b}^{x} 0\,dt = 1.$$

Definicja 3. **Wartością oczekiwaną** *ciągłej zmiennej losowej X o gęstości f nazywamy liczbę*

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt,$$

pod warunkiem, że całka po prawej stronie istnieje. Jeżeli ta całka nie istnieje, to mówimy również, że wartość oczekiwana nie istnieje. Z kolei **wariancją** *zmiennej losowej X jest liczba*

$$VarX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2,$$

pod warunkiem, że istnieje $\mathbb{E}X$ i $\mathbb{E}(X^2)$.

Uwaga 5. Mając daną zmienną losową ciągłą $X : \Omega \to \mathbb{R}$ oraz funkcję ciągłą $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podobnie jak to miało miejsce w przypadku zmiennych losowych dyskretnych, złożenie $g(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ jest też zmienną losową ciągłą.

Twierdzenie 3. *Niech X będzie zmienną losową ciągłą o gęstości f i niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ciągłą. Wtedy wartość oczekiwaną zmiennej losowej $g(X)$ wyznaczamy ze wzoru:*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)dt\,.$$

Przykład 2. Wartość oczekiwana zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[a, b]$ wynosi:

$$\mathbb{E}X = \int_{a}^{b} t \cdot \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} tdt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Proszę zwrócić uwagę, że w tym przypadku $\mathbb{E}X$ wypada akurat na środku odcinka $[a, b]$, co nie powinno nas dziwić, skoro mamy do czynienia z rozkładem jednostajnym, gdzie każdy punkt z odcinka $[a, b]$ jest równoprawdopodobny.

W celu wyznaczenia wariancji zmiennej losowej X policzymy na początek wartość oczekiwaną zmiennej losowej X^2:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{a}^{b} t^2 \cdot \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} t^2dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

A zatem wariancja zmiennej losowej X o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[a, b]$ dana jest wzorem:

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Przykład 3. **Rozkład wykładniczy** z parametrem $\lambda > 0$ jest to taki rozkład prawdopodobieństwa, którego gęstość dana jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Aby wyznaczyć dystrybuantę tego rozkładu musimy rozpatrzyć dwa przypadki: $x < 0$ oraz $x \geqslant 0$. Dla $x < 0$ mamy:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

Następnie przypomnijmy, że pochodna po t z funkcji $e^{-\lambda t}$ jest równa $-\lambda e^{-\lambda t}$ (jako pochodna złożenia dwóch funkcji). Zatem gdy $x \geqslant 0$ otrzymujemy:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Wartość oczekiwaną zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ możemy obliczyć wykorzystując całkowanie przez części:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)dt = \int_{0}^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[t \cdot (-e^{-\lambda t})\right]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} (-e^{-\lambda t})dt = (0-0) - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Następnie po raz kolejny korzystając z całkowania przez części oraz całki, którą policzyliśmy przed chwilą przy wyznaczaniu $\mathbb{E}X$, policzymy wartość oczekiwaną zmiennej losowej X^2:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t)dt = \int_{0}^{\infty} t^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[t^2 \cdot (-e^{-\lambda t})\right]_0^{\infty} - \int_{0}^{\infty} 2t \cdot (-e^{-\lambda t})dt \\ &= (0-0) + \frac{2}{\lambda}\int_{0}^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy już wariancję zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ:

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$