Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
5. Zmienne losowe. Rozkład zmiennej losowej. Funkcja masy. Dystrybuanta. Wartość oczekiwana.

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. *Dyskretna zmienna losowa X posiada rozkład podany w poniższej tabelce.*

k	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	*?*	$\frac{1}{15}$

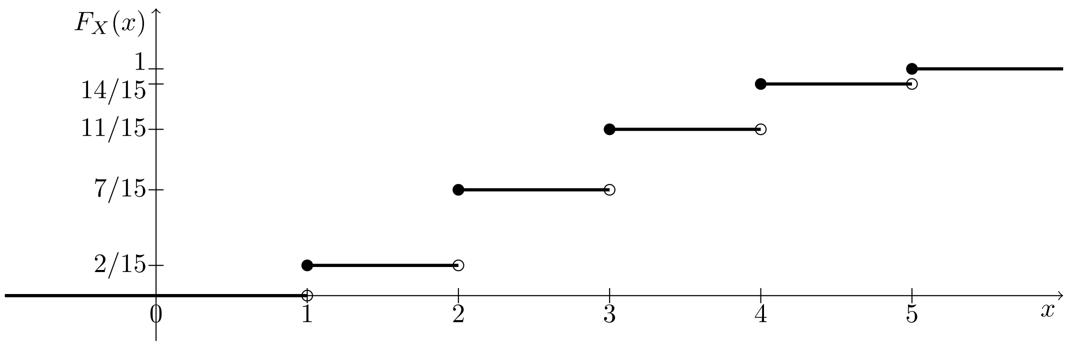
Wpisz do tabelki brakującą liczbę i narysuj wykres dystrybuanty tej zmiennej. Znajdź $\mathbb{P}\,(2{,}5 \leqslant X \leqslant \pi)$, $\mathbb{P}(X=\pi)$, $\mathbb{P}\,(X \geqslant \pi)$ oraz wylicz $\mathbb{E}X$.

Zauważmy, że zmienna losowa X jest dyskretna, tj. przyjmuje wartości ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$. Zatem:

$$1 = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5)\,.$$

Po podstawieniu danych z tabelki otrzymujemy wartość brakującego pola $\mathbb{P}(X=4) = \frac{3}{15}$.

Możemy teraz narysować wykres dystrybuanty F_X zmiennej losowej X.



Następnie zauważmy, że zmienna losowa X przyjmuje tylko wartości naturalne. Na przykład w przedziale $[2{,}5\,,\pi]$ jedyną wartością przyjmowaną przez X jest 3, a zatem:

$$\mathbb{P}\,(2{,}5 \leqslant X \leqslant \pi) = \mathbb{P}\,(X=3) = \frac{4}{15}\,.$$

Podobnie:

$$\mathbb{P}\,(X=\pi) = 0\,,$$
$$\mathbb{P}\,(X \geqslant \pi) = \mathbb{P}\,(X \in \{4,5\}) = \frac{4}{15}\,.$$

Wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$ zmiennej losowej X otrzymujemy bezpośrednio poprzez podstawienie do wzoru

$$\mathbb{E}X = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X=x)\,.$$

Proszę pamiętać, że wartość oczekiwana to nic innego jak średnia ważona, przy czym wagi stanowią właśnie prawdopodobieństwa poszczególnych atomów. Mamy zatem:

$$\mathbb{E}X = 1\cdot\frac{2}{15} + 2\cdot\frac{5}{15} + 3\cdot\frac{4}{15} + 4\cdot\frac{3}{15} + 5\cdot\frac{1}{15} = \frac{41}{15}\,.$$

Zadanie A.2. *Dane są liczby $a < 0$ i $b > 1$. Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej, której dystrybuanta dana jest wzorem:*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < a; \\ \frac{1}{6} & \text{dla } a \leqslant x < 0; \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 0 \leqslant x < 1; \\ \frac{5}{6} & \text{dla } 1 \leqslant x < b; \\ 1 & \text{dla } x \geqslant b. \end{cases}$$

Ponieważ dystrybuanta zmiennej losowej posiada cztery „skoki”, wnioskujemy, że szukana zmienna losowa X jest zmienną losową dyskretną o atomach $a, 0, 1, b$, przy czym $a < 0 < 1 < b$. Proszę pamiętać, że wartości „skoków” to nic innego jak prawdopodobieństwa poszczególnych atomów. Zatem liczymy:

$$\frac{1}{6} = F(a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = \mathbb{P}(X < a) + \mathbb{P}(X = a) = 0 + \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = a)\,,$$

$$\frac{1}{2} = F(0) = \mathbb{P}(X \leqslant 0) = \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{6} + \mathbb{P}(X = 0)\,,$$

czyli $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{3}$. Postępując analogicznie dla 1 i b, otrzymujemy $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ oraz $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$. Ostatecznie funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej możemy zapisać w tabelce.

x	a	0	1	b
$\mathbb{P}(X = x)$	1/6	1/3	1/3	1/6

Zadanie A.3. *Strzelec ma trzy naboje i strzela do momentu trafienia celu lub do momentu wystrzelenia wszystkich naboi. Prawdopodobieństwo trafienia do celu przy każdym strzale jest równe* 0,8*. Liczba wystrzelonych naboi jest zmienną losową* X*.*

a) *Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej, na której jest określona zmienna losowa* X*.*

Oznaczenia: **T** – strzelec trafił do celu, **N** – strzelec nie trafił do celu

Przy takich oznaczeniach możemy przyjąć następującą przestrzeń probabilistyczną:

$$\Omega = \{\mathbf{T}, \mathbf{NT}, \mathbf{NNT}, \mathbf{NNN}\}\,,$$
$$\mathbb{P}(\mathbf{T}) = 0{,}8\,, \quad \mathbb{P}(\mathbf{NT}) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16\,,$$
$$\mathbb{P}(\mathbf{NNT}) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}032\,, \quad \mathbb{P}(\mathbf{NNN}) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008\,,$$

zaś zmienna losowa X zadana jest w sposób następujący:

$$X(\mathbf{T}) = 1, \quad X(\mathbf{NT}) = 2, \quad X(\mathbf{NNT}) = X(\mathbf{NNN}) = 3\,.$$

b) *Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tej przestrzeni należące do zdarzeń* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 3\} = \{X = 3\}$ *oraz* $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant 2\} = \{X \leqslant 2\}$ *i wyznacz ich prawdopodobieństwa.*

Bezpośrednio z poprzedniego podpunktu wynika, że:

$$\{X = 3\} = \{\mathbf{NNT}, \mathbf{NNN}\}\,,$$
$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(\mathbf{NNT}) + \mathbb{P}(\mathbf{NNN}) = 0{,}032 + 0{,}008 = 0{,}04\,.$$

Podobnie:

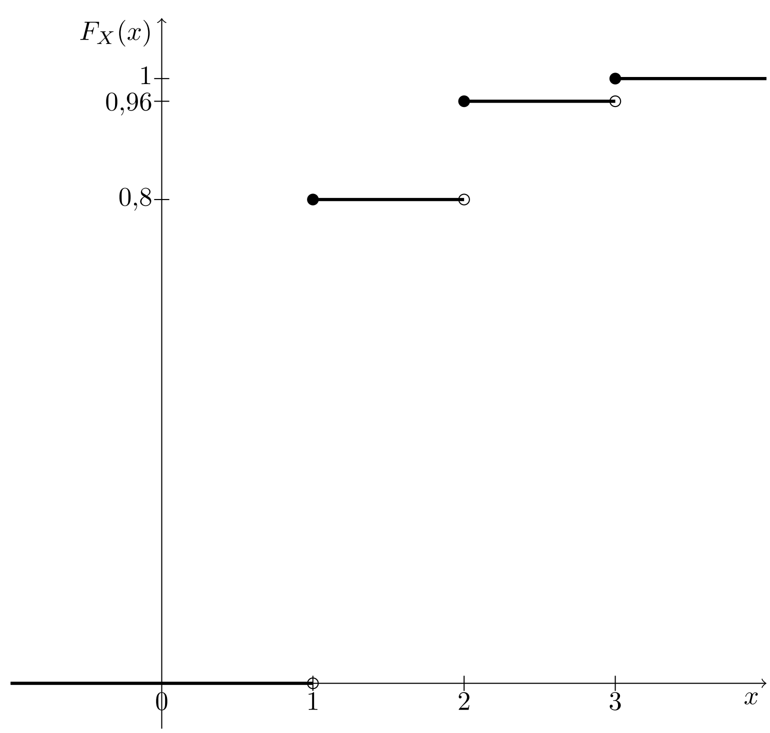
$$\{X \leqslant 2\} = \{\mathbf{T}, \mathbf{NT}\} = \Omega \setminus \{\mathbf{NNT}, \mathbf{NNN}\}$$
$$\mathbb{P}(\{X \leqslant 2\}) = 1 - \mathbb{P}(X = 3) = 0{,}96\,.$$

c) *Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej* X*.*

Znamy już $\mathbb{P}(X = 3)$. Wystarczy zatem policzyć prawdopodobieństwa brakujących atomów:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\mathbf{T}) = 0{,}8\,,$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 3) = 0{,}16\,.$$

d) *Narysuj dystrybuantę zmiennej losowej* X*.*



Zadanie A.4. *Z urny zawierającej 3 kule białe i 2 czarne losujemy trzy kule. Niech X oznacza liczbę kul czarnych wśród wylosowanej trójki.*

a) Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej, na której jest określona zmienna losowa X.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się ze wszystkich możliwych trzyelementowych podzbiorów zbioru pięciu kul (tutaj kule traktujemy jako rozróżnialne, nawet jeśli mają ten sam kolor, w ten sposób łatwiej zliczać odpowiednie zbiory). Mamy zatem do czynienia z modelem klasycznym, gdzie każde zdarzenie elementarne jest równoprawdopodobne oraz

$$|\Omega| = \binom{5}{3}.$$

b) *Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej X.*

Zauważmy, że skoro w urnie na początku znajdują się tylko dwie czarne kule, podczas losowania trzech kul z urny możemy wyciągnąć 0, 1 lub 2 czarne kule. Zatem zbiorem atomów zmiennej losowej X jest zbiór $\{0, 1, 2\}$.

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}$	$\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}$	$\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$

c) *Znajdź $\mathbb{E}X$.*

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{5}.$$

Zadanie A.5. *Ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ wybieramy losowo trzy różne liczby $x < y < z$. Niech Y będzie zmienną losową oznaczającą środkową z nich.*

a) *Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej, na której jest określona zmienna losowa Y.*

W tym doświadczeniu przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω składa się z trzyelementowych podzbiorów zbioru pięcioelementowego, w szczególności $|\Omega| = \binom{5}{3} = 10$ i każde zdarzenie elementarne jest równoprawdopodobne (model klasyczny).

b) *Wypisz wszystkie zdarzenia elementarne tej przestrzeni należące do zdarzeń $\{\omega \in \Omega : Y \leqslant \sqrt{5}\} = \{Y \leqslant \sqrt{5}\}$ oraz $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) > 2\} = \{Y > 2\}$ i wyznacz ich prawdopodobieństwa.*

Zauważmy, że środkowa wartość wśród trzech liczb wybranych ze zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ może być równa jedynie 2, 3 lub 4. W szczególności zbiorem atomów zmiennej losowej Y jest zbiór $\{2,3,4\}$. W związku z tym zdarzenie $\{Y \leqslant \sqrt{5}\}$ jest równoważne zdarzeniu $\{Y = 2\}$, a zdarzenie $\{Y > 2\}$ można przedstawić inaczej jako $\{Y \in \{3,4\}\}$. Mamy zatem:

$$\{Y \leqslant \sqrt{5}\} = \{Y = 2\} = \big\{\{1,2,3\},\, \{1,2,4\},\, \{1,2,5\}\big\}\,,$$
$$\{Y > 2\} = \big\{\{1,3,4\},\, \{1,3,5\},\, \{2,3,4\},\, \{2,3,5\},\, \{1,4,5\},\, \{2,4,5\},\, \{3,4,5\}\big\}\,.$$

Ponieważ mamy do czynienia z modelem klasycznym i $|\Omega| = 10$, to:

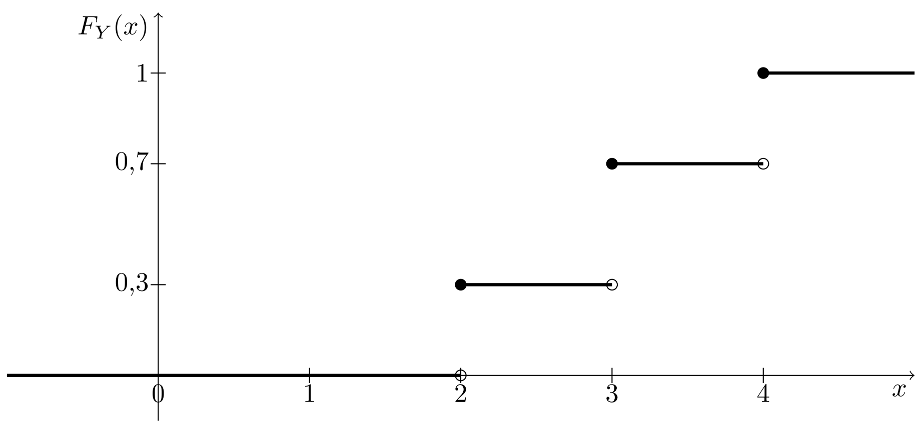
$$\mathbb{P}\left(\{Y \leqslant \sqrt{5}\}\right) = \frac{3}{10} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}\left(\{Y > 2\}\right) = \frac{7}{10}\,.$$

c) *Podaj funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y.*

Na podstawie poprzedniego podpunktu mamy $\mathbb{P}(Y = 2) = 3/10$. Z symetrii zbioru $\{1,2,3,4,5\}$ możemy zauważyć, że $\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(Y = 4)$. Zatem brakujący atom ma prawdopodobieństwo równe $\mathbb{P}(Y = 3) = 1 - \mathbb{P}(Y = 2) - \mathbb{P}(Y = 4)$.

k	2	3	4
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

d) *Narysuj dystrybuantę zmiennej losowej Y.*



e) *Znajdź $\mathbb{E}Y$.*

$$\mathbb{E}Y = 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} = 3$$