Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
4. Prawdopodobieństwo całkowite. Wzór Bayesa.

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. *Fabryka wytwarza gwoździe na trzech maszynach, których udział w produkcji wynosi odpowiednio* 25%, 35% *oraz* 40%. *Maszyny dają odpowiednio* 5%, 4% *oraz* 2% *gwoździ wybrakowanych.*

(a) *Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany gwóźdź wyprodukowany w fabryce jest wybrakowany?*

Zacznijmy od ustalenia przestrzeni zdarzeń elementarnych. Skoro w zadaniu losujemy dowolny gwóźdź, to naturalnym jest przyjęcie jako Ω zbioru wszystkich gwoździ wytwarzanych w fabryce. Co więcej, ta przestrzeń zdarzeń ma naturalne rozbicie

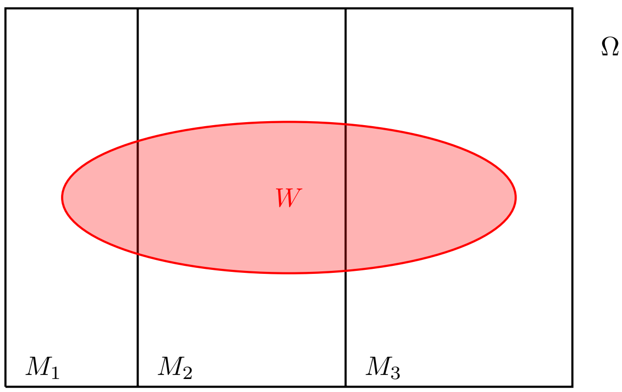
$$\Omega = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

na zdarzenia M_1, M_2 i M_3 odpowiadające podziałowi gwoździ pomiędzy trzy maszyny, na których zostały wyprodukowane. Z treści zadania wynika, że:

$$\mathbb{P}(M_1) = 0{,}25\,, \quad \mathbb{P}(M_2) = 0{,}35\,, \quad \mathbb{P}(M_3) = 0{,}4\,.$$

Oznaczmy przez W zdarzenie polegające na tym, że losowo wybrany gwóźdź jest wybrakowany. Wówczas:

$$\mathbb{P}(W|M_1) = 0{,}05, \quad \mathbb{P}(W|M_2) = 0{,}04, \quad \mathbb{P}(W|M_3) = 0{,}02\,.$$



Korzystając ze **wzoru na prawdopodobieństwo całkowite**, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W) &= \mathbb{P}(W|M_1)\,\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(W|M_2)\,\mathbb{P}(M_2) + \mathbb{P}(W|M_3)\,\mathbb{P}(M_3) \\ &= 0{,}05 \cdot 0{,}25 + 0{,}04 \cdot 0{,}35 + 0{,}02 \cdot 0{,}4 = 0{,}0345\,. \end{aligned}$$

(b) *Podczas kontroli jakości losowo wybrano gwóźdź, który okazał się być wybrakowany. Jakie jest prawdopodobieństwo, że został on wyprodukowany przez pierwszą maszynę?*

Skoro losowo wybrany gwóźdź okazał się wybrakowany, to oznacza, że zaszło zdarzenie W. A zatem pytamy o prawdopodobieństwo zdarzenia warunkowego $\mathbb{P}(M_1|W)$. Do jego obliczenia wykorzystamy **wzór Bayesa**. Proszę zwrócić uwagę, że we wzorze Bayesa w mianowniku po prawej stronie pojawia się wzór na prawdopodobieństwo całkowite zdarzenia, po którym warunkujemy (w tym wypadku zdarzenia W). A zatem:

$$\mathbb{P}(M_1|W) = \frac{\mathbb{P}(W|M_1)\,\mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(W)}.$$

Możemy teraz wykorzystać podpunkt (a), gdzie policzyliśmy $\mathbb{P}(W)$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(M_1|W) = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}25}{0{,}0345} = \frac{0{,}0125}{0{,}0345} \approx 0{,}3623\,.$$

Zadanie A.2. *Załóżmy, że prawdopodobieństwo kradzieży w sklepie wynosi $\frac{n}{n+k}$, gdzie k jest liczbą ochroniarzy, a n – liczbą złodziei ($n+k \geqslant 1$). Jeśli pewnego dnia zdarza się kradzież (zawsze można ją wykryć na podstawie manka na końcu dnia), to następnego dnia liczba ochroniarzy jest zwiększana o 1. Niestety po udanej kradzieży liczba złodziei też rośnie o 1. Jeżeli kradzież się nie zdarzy, to następnego dnia liczby złodziei i ochroniarzy pozostają bez zmian. W poniedziałek jest jeden pilnujący i dwóch złodziei. Jaka jest szansa, że sklep będzie okradany (skutecznie) aż do niedzieli włącznie?*

Niech A_k, $k = 1, 2, \ldots, 7$, oznacza zdarzenie, że sklep zostanie okradziony k-tego dnia. Wówcza interesuje nas prawdopodobieństwo zdarzenia

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_7 .$$

Do jego wyznaczenia skorzystamy ze **wzoru łańcuchowego**:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_7) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_7|A_1 \cap \ldots \cap A_6) .$$

Na początku $k = 1$ oraz $n = 2$, zatem

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{3} .$$

Zgodnie z założeniami, po każdej skutecznej kradzieży liczby ochroniarzy i złodzie rosną o jeden, zatem mamy również

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{7}, \ \ldots, \ \mathbb{P}(A_7|A_1 \cap \ldots \cap A_6) = \frac{8}{15} ,$$

skąd otrzymujemy

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_7) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{8}{15} = \frac{128}{6435} .$$

Zadanie A.3. *Student zna odpowiedź na pytanie egzaminacyjne z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Jeżeli nie zna odpowiedzi, to zgaduje jedną z k możliwych odpowiedzi z prawdopodobieństwem $1/k$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że znał odpowiedź, jeżeli wiemy, że odpowiedział prawidłowo?*

W tym zadaniu eksperyment polega na wylosowaniu pytania. Możemy przyjąć, że zbiór pytań składa się z tych, na które student zna odpowiedź, oraz tych, na które odpowiedzi nie zna. A zatem jako przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω przyjmujemy zbiór pytań z naturalnym rozbiciem

$$\Omega = Z \cup Z',$$

gdzie Z to pytania, na które student zna odpowiedź, a Z' to pozostałe pytania. Z treści zadania wynika, że:

$$\mathbb{P}(Z) = p \quad \text{i} \quad \mathbb{P}(Z') = 1 - p.$$

Następnie pojawia się dodatkowa informacja, że student odpowiedział prawidłowo na wylosowane pytanie. W związku z tym musimy wprowadzić kolejne zdarzenie P – student odpowiedział prawidłowo. To nowe zdarzenie jest zdarzeniem, po którym będziemy warunkować. Czyli pytanie z zadania można wyrazić tak: ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzenia Z pod warunkiem zajścia zdarzenia P? Aby je wyznaczyć, znów posłużymy się **wzorem Bayesa**:

$$\mathbb{P}(Z|P) = \frac{\mathbb{P}(P|Z)\,\mathbb{P}(Z)}{\mathbb{P}(P|Z)\,\mathbb{P}(Z) + \mathbb{P}(P|Z')\,\mathbb{P}(Z')},$$

gdzie $\mathbb{P}(P|Z) = 1$ (zna odpowiedź na pytanie, więc odpowiedział prawidłowo) i $\mathbb{P}(P|Z') = 1/k$ (nie zna odpowiedzi, więc strzela i wybiera jedną z k dostępnych odpowiedzi). Stąd otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(Z|P) = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{k} \cdot (1-p)} = \frac{kp}{kp + 1 - p}.$$

Zadanie A.4. *W pierwszej urnie znajdują się dwie białe i dwie czarne kule, druga zawiera jedną kulę białą i dwie czarne. Z pierwszej urny wyciągamy losowo jednocześnie dwie kule i przekładamy do drugiej urny, z której losujemy jedną kulę.*

(a) *Jakie jest prawdopodobieństwo, że do drugiej urny przełożyliśmy dwie białe kule, jeśli wylosowana z drugiej urny kula jest biała?*

Proszę zwrócić uwagę, że w tym zadaniu eksperyment składa się z dwóch etapów: pierwszy z nich to losowanie dwóch kul z pierwszej urny, drugi etap to losowanie jednej kuli z drugiej urny. W związku z tym możliwe wyniki pierwszego etapu zadają rozbicie przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, która jak zawsze składa się ze wszystkich możliwych wyników naszego eksperymentu.

Wynikiem pierwszego etapu jest para kul w kolorze białym lub czarnym, w związku z czym możemy wprowadzić następujące zdarzenia opisujące pierwsze losowanie:

BB – w pierwszym losowaniu dwie kule białe,
BC – w pierwszym losowaniu kula biała i czarna,
CC – w pierwszym losowaniu dwie kule czarne,

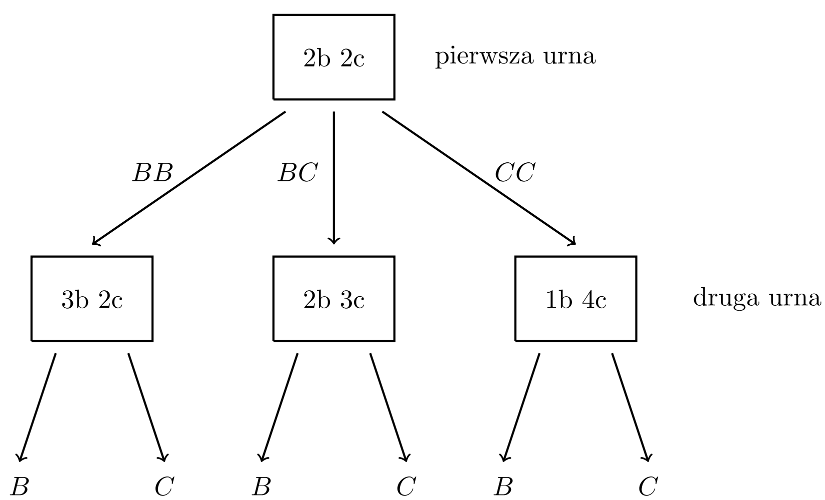
przy czym

$$\mathbb{P}(BB) = \mathbb{P}(CC) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(BC) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{4}{6}.$$

Podobnie dla drugiego etapu możemy wprowadzić zdarzenia:

B – w drugim losowaniu kula biała,
C – w drugim losowaniu kula czarna,

ale prawdopodobieństwa tych zdarzeń będą zależały od tego, co wydarzyło się w pierwszym etapie. Proszę zauważyć, że $\mathbb{P}(B|BB) = 3/5$, $\mathbb{P}(B|BC) = 2/5$ i $\mathbb{P}(B|CC) = 1/5$.



Wracając do pytania z zadania musimy obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia BB pod warunkiem zajścia zdarzenia B. Znów zastosujemy **wzór Bayesa**:

$$\mathbb{P}(BB|B) = \frac{\mathbb{P}(B|BB)\,\mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(B|BB)\,\mathbb{P}(BB) + \mathbb{P}(B|BC)\,\mathbb{P}(BC) + \mathbb{P}(B|CC)\,\mathbb{P}(CC)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{1}{4}.$$

(b) *Jakie jest prawdopodobieństwo, że do drugiej urny przełożyliśmy dwie białe kule, jeśli wylosowana z drugiej urny kula jest czarna?*

Postępując analogicznie jak w podpunkcie (a), tym razem chcemy wyznaczyć prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia BB pod warunkiem zajścia zdarzenia C.

$$\mathbb{P}(BB|C) = \frac{\mathbb{P}(C|BB)\,\mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(C|BB)\,\mathbb{P}(BB) + \mathbb{P}(C|BC)\,\mathbb{P}(BC) + \mathbb{P}(C|CC)\,\mathbb{P}(CC)} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{1}{9}.$$

Oczywiście powyższe wyniki nie powinny być dla nas żadnym zaskoczeniem. Informacja o tym, że w drugim losowaniu wybraliśmy kulę białą daje nam przesłanki ku temu, że w urnie znajdowało się dużo białych kul, czyli że po pierwszym losowaniu przełożyliśmy do drugiej urny dwie białe kule.

Zadanie A.5. *Bolek i Lolek codziennie kończą pracę niezależnie od siebie, tak by w losowym momencie pomiędzy godziną 17:00 i 17:20 zjawić się na pobliskim przystanku autobusowym, z którego autobus odjeżdża w losowym momencie między 17:00 a 17:10, niezależnie od przybycia Bolka i Lolka. Pewnego dnia Lolek dociera na przystanek o godz. 17:05 i nie zastaje na nim Bolka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że autobus już odjechał?*

Trudność tego zadania polega na tym, żeby dobrze zinterpretować jego treść i w pierwszej kolejności ustalić elementy losowe. Początkowo mogłoby się wydawać, że losowy może być zarówno czas przyjścia Bolka na przystanek, czas przyjścia Lolka oraz czas, w którym przyjeżdża autobus. Kluczowa jest tu jednak informacja, że danego dnia Lolek pojawia się na przystanku o godz. 17:05, a zatem odpada nam jeden element losowości.

Oczywiście mamy tutaj do czynienia z prawdopodobieństwem geometrycznym i jako przestrzeń zdarzeń elementarnych możemy przyjąć $\Omega = [0, 20] \times [0, 10]$, gdzie pierwsza współrzędna odpowiada momentowi przyjści Bolka na przystanek, a druga współrzędna to moment przyjazdu autobusu (liczone w minutach po godz. 17:00).

W zadaniu pada pytanie o prawdopodobieństwo tego, że autbous "już odjechał", czyli że odjechał przed godz. 17:05. Wiemy natomiast, że o tej godzinie Bolka nie było na przystanku, w związku z tym mogły wydarzyć się dwie rzeczy: albo Bolek przyszedł na przystanek przed autobusem, wsiadł do niego i odjechał, albo jeszcze nie dotarł na przystanek.

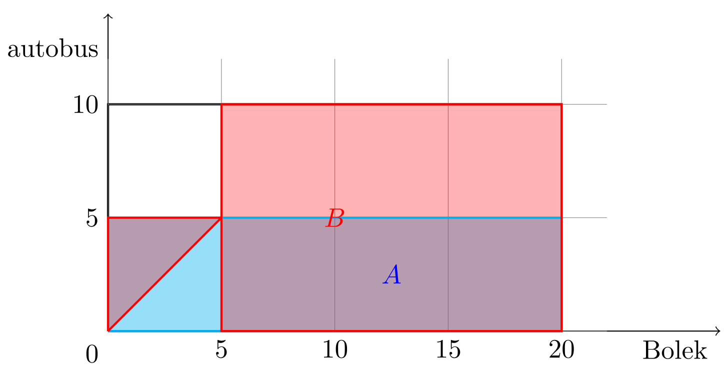
Wprowadźmy zatem oznaczenia na interesujące nas zdarzenia:

A – autobus odjechał przed 17:05,
B – Bolek przyszedł na przystanek przed odjazdem autobusu, który odjechał przed 17:05 lub przyszedł na przystanek po 17:05.

Interesuje nas prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, czyli:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Żeby obliczyć to prawdopodobieństwo, posłużymy się rysunkiem.



Zauważmy teraz, że zbiór Ω dzieli się na 8 kwadratów jednostkowych, z czego zdarzeniu A odpowiada dolna połowa, zdarzenie B to obszar zacieniowany na różowo. Stąd otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{13}{16}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{7}{16}.$$

Podstawiając powyższe wartości do wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe, otrzymujemy wynik:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{13}{16}} = \frac{7}{13}.$$