Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 3.4/2023

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Przedstawimy poniżej podstawowe wzory pól ograniczonych krzywymi.

Twierdzenie. *Pole* $|P|$ *obszaru* P *ograniczonego dwiema krzywymi* $y = \varphi(x)$ *i* $y = \psi(x)$, *gdzie* $\psi(x) \geq \varphi(x)$ *dla* $a \leq x \leq b$ *i rzędnymi w punktach* $x = a$ *i* $x = b$ *wyraża się wzorem*

$$|P| = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)]dx \ .$$

Twierdzenie. *Jeżeli krzywa k o równaniach parametrycznych* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ *jest klasy* C^1 *(tzn. funkcje* $x(t)$ *oraz* $y(t)$ *mają ciągłe pochodne pierwszego rzędu) przy czym* $y(t) \geq 0$ *oraz* $x'(t) > 0$ *w* $[\alpha, \beta]$ *to pole* $|P|$ *obszaru P zawartego między tą krzywą, osią Ox i rzędnymi w punktach końcowych krzywej, wyraża się wzorem*

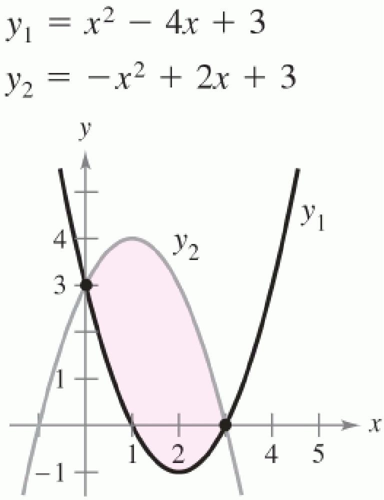
$$|P| = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \ .$$

Przy założeniach twierdzenia oraz jeżeli $x'(t) < 0$ *w* $[\alpha, \beta]$ *mamy*

$$|P| = -\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \ .$$

Ćwiczenie.

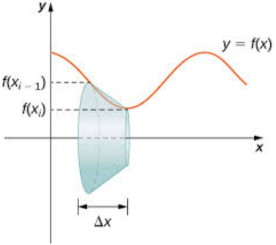
Obliczyć samodzielnie pole pomiędzy krzywymi:



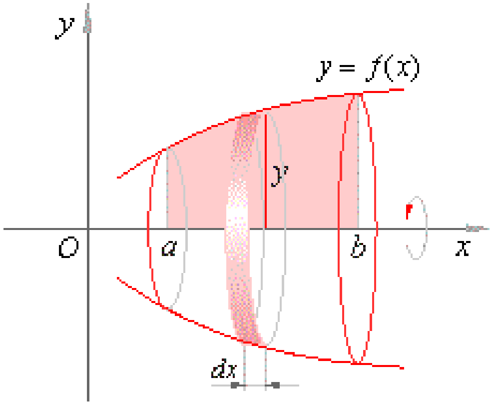
Niech dany będzie łuk AB krzywej o równaniu $y = f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $[a, b]$.

Wówczas *objętość bryły obrotowej* ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk AB wraz z rzędnymi w końcu łuku obraca się dookoła osi Ox, obliczamy według wzoru

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx \ .$$



Bryły obrotowe.



Pole powierzchni bryły obrotowej.

Pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót łuku AB dookoła osi OX obliczamy według wzoru

$$S = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \ ,$$

przy założeniu dodatkowym, że funkcja $y = f(x)$ ma w przedziale $a \leq x \leq b$ ciągłą pochodną.

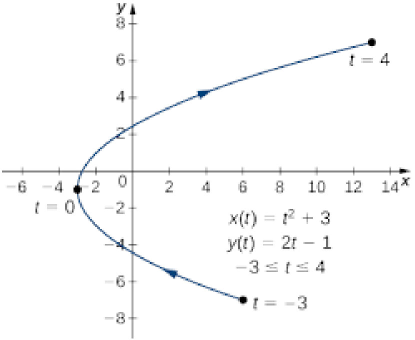
Obliczanie długości łuku.

Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci $y = f(x)$, przy czym funkcja $f(x)$ ma w przedziale $a \leq x \leq b$ ciągłą pochodną, to długość łuku w tym przedziale wyraża się wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \ .$$

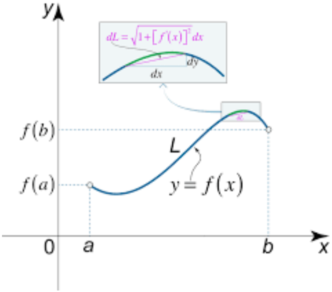
Jeżeli krzywa dana jest parametrycznie za pomocą równań $x = g(t)$, $y = h(t)$, przy czym funkcja $g(t)$ i $h(t)$ mają w przedziale $t_1 \leq t \leq t_2$ ciągłe pochodne oraz łuk nie ma części wielokrotnych, to długość łuku wyraża się wzorem

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \ .$$



Jeżeli krzywa dana jest równaniem we współrzędnych biegunowych $r = f(\Theta)$, przy czym funkcja $f(\Theta)$ ma w przedziale $\alpha \leq \Theta \leq \beta$ ciągłą pochodną i łuk nie ma części wielokrotnych, to długość łuku wyraża się wzorem

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Theta}\right)^2} \, d\Theta \; .$$



Cała konstrukcja jest w podanych źródłach. Koniecznie trzeba wiedzieć: podawana konstrukcji całki Riemanna i całka oznaczona (o ile istnieją) są równe!

To powoduje, że konstrukcja całki Riemanna jest idealna do obliczeń przybliżonych, a więc i numerycznych. Wszystko, co będzie na metodach numerycznych o całkowaniu numerycznym ma w swojej podstawie właśnie konstrukcję całki Riemanna.

A tu prezentacje: skrypt ilustracyjny sumy dolnej w "Mathematica" oraz drugi skrypt ilustracyjny sumy górnej w "Mathematica".

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną (niekoniecznie ciągłą).

Zbiór punktów: $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, gdzie $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$, nazywamy **podziałem przedziału** $[a, b]$. Niech:

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Suma dolna i suma górna Riemanna.

Sumą dolną $L(f,P)$ (odpowiednio sumą górną $U(f,P)$) funkcji f dla podziału P nazywamy liczbę:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

$$\left(U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \right).$$

Jeżeli $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ i $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, to dla dowolnego podziału P:

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a), \text{gdzie:}$$

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\},$$

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Z ostatniego faktu wynika, że sumy dolne i górne są ograniczone dla dowolnego podziału.

Całka dolna i górna.

Całką dolną (całką górną) Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$ nazywamy liczby:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{L(f,P) : \text{P - podział przedziału } [a,b]\}$$

$$\left(\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{U(f,P) : \text{P - podział przedziału } [a,b]\}\right)$$

[funkcja całkowalna w sensie Riemanna] Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ (krótko: $f \in \mathcal{R}$) jeżeli całka dolna jest równa całce górnej. Wspólną wartość obu tych całek nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$ i oznaczamy symbolem:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Zagęszczenie podziału.

Mówimy, że podział P^* jest zagęszczeniem podziału P, jeżeli $P \subset P^*$. Jeżeli dane są dwa podziały P_1 i P_2, to ich wspólnym zagęszczeniem nazywamy podział $P_1 \cup P_2$.

Jeżeli P* jest zagęszczeniem podziału P, to:

$$L(f,P) \leq L(f,P^*) \qquad U(f,P^*) \leq U(f,P)$$

Zachodzi nierówność:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Kryterium całkowalności w sensie Riemanna.

Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_P \quad U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Jeżeli funkcja $f[a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.

Podobnie można pokazać, że jeżeli funkcja f jest monotoniczna na $[a,b]$ lub ograniczona i ma skończoną ilość punktów nieciągłości w $[a,b]$ to funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$.

Własności całki Riemanna.

Kilka podstawowych własności całki Riemanna:

1. Jeśli f i $g \in \mathcal{R}$ to $f \cdot g \in \mathcal{R}$ oraz $c \cdot f \in \mathcal{R}$. Ponadto całka Riemanna jest liniowa, tzn:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

$$\int_a^b cf(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

2. Jeżeli $f, g \in \mathcal{R}$ oraz $f(x) \leq g(x)$, to $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Jeżeli f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ oraz $a < c < b$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, c]$ i $[c, b]$ oraz:

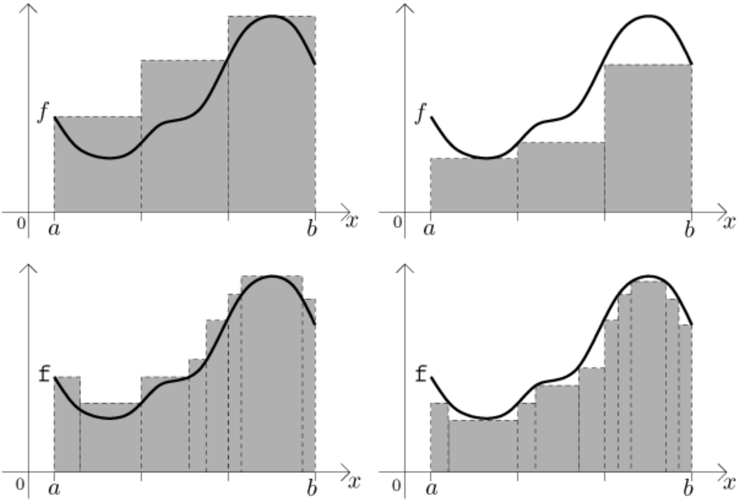
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to istnieje punkt $c \in [a, b]$ taki, że:

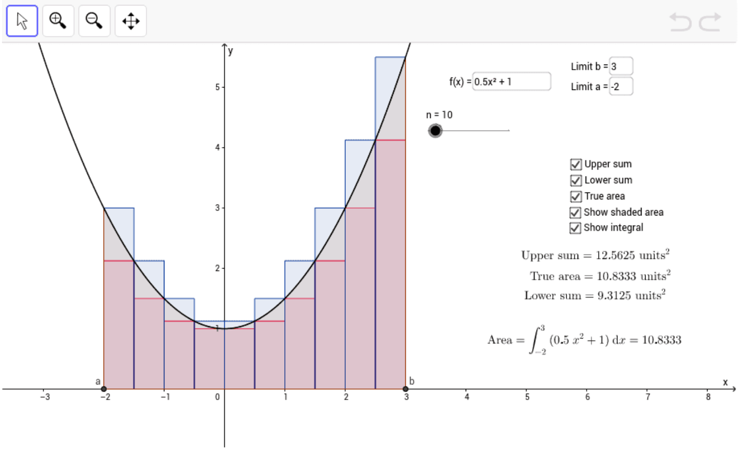
$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Liczbę $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ nazywamy wartością średnią całkową funkcji f w przedziale $[a, b]$. Wzór na wartość średnią możemy też zapisać:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(a + \theta(b-a)),\ \ \theta \in [0, 1].$$



Sumy Riemanna...



Sumy górne i dolne - zwracam uwagę, że **jeżeli** funkcja jest całkowalna, to **możemy** ograniczyć się do podziałów na równe części.

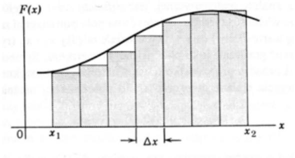
Gdzie kolejny raz mamy (powinniśmy mieć) całki w liceum? Np. przy badaniu pracy:

$$F(s) = W'(s).$$

PRACA SIŁY ZMIENNEJ

Załóżmy, że siła F zależy od położenia x czyli F(x)

Dzielimy przedział <x_1, x_2> na odcinki Δx, na których można przyjąć, że siła jest stała.



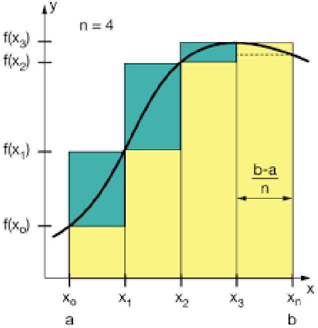
Obliczamy pracę ΔW wykonaną przez siłę stałą na odcinku Δx

$$\Delta W = F\,\Delta x$$

Prace cząstkowe ΔW sumujemy

Poznajemy? To właśnie calka Riemanna...

Podstawowe metody całkowania numerycznego to po prostu definicja całki Riemanna z doborem: **podział na równe części** oraz z **ustaloną zasadą** wyboru ponktów pośrednich. Np. lewe końce przedziałów (metoda prostokątów lewych - na rysunku), prawe końce przedziałów (metoda prostokątów prawych), czy środkowe... (wzory: na metodach numerycznych)



Nawet metoda trapezów to tylko lekko zmodyfikowana definicja całki Riemanna! Metody Simpsona czy Gaussa, to już inny dział - ale nadal analizy matematycznej: aproksymacja...

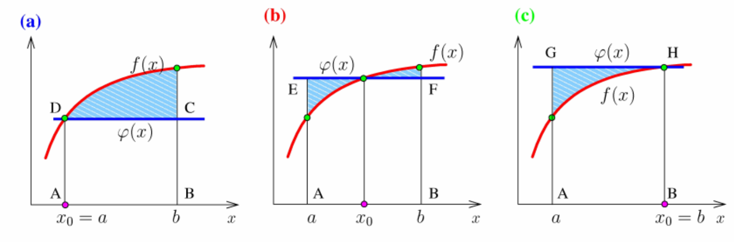
Metoda prostokątów:

W zależności od wyboru położenia węzła x_0 otrzymujemy wzory:

(a) **lewych prostokątów, gdy** $x_0 = a$

(b) **środkowych prostokątów, gdy** $x_0 = (a + b)/2$

(c) **prawych prostokątów, gdy** $x_0 = b$



Ograniczenia całkowania numerycznego.

Jeśli się da - całki liczymy w oparciu o całki oznaczone!

Jeśli nie, a niestety nie zawsze się da (np. nie potrafimy znaleźć całki nieoznaczonej lub jest ona funkcją nieelementarną (!)), to kontrolujemy stabilność numeryczną algorytmów (to już inny przedmiot...).

Liczymy całkę (wzór rekurencyjny):

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\, dx$$

i po całkowaniu przez części (to już programista, a nie komputer!) uzyskamy:

$$a_n = \frac{1}{n} - 5a_{n-1}.$$

Sumy Riemanna.

Dla funkcji ograniczonej $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ definiujemy sumy Riemanna dla podziału

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

przedziału $[a,b]$:

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta_i x,$$

gdzie $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, a $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ jest dowolnie wybrane.

Dlaczego?

Po prostu: nie musimy szukać wartości minimalnych i maksymalnych w podprzedziałach (co jest kłopotliwe i trudne obliczeniowo)!! Mamy za to

$$m_i \leq f(s_i) \leq M_1,$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i x \leq \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \Delta_i x \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x,$$

a więc to również doskonałe przybliżenie całki Riemanna!
Wykorzystamy to podając po prostu ustalone reguły wyboru takich punktów!

Metoda punktu średniego (środkowych prostokątów).

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$ oraz π jest podziałem przedziału $[a,b]$ takim, że $\pi:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

to $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[f(\overline{x}_i) + f(\overline{x}_2) + \ldots + f(\overline{x}_n)]$, gdzie

$$\overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i).$$

Przykład 14.

Przybliżyć całkę $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ metodą punktu średniego.

Stąd

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx 0,1\left[\frac{1}{1,05}+\frac{1}{1,15}+\frac{1}{1,25}+\ldots+\frac{1}{1,195}\right] \approx 0.6928\ .$$