Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
2. Prawdopodobieństwo geometryczne. Niezależność zdarzeń.

Dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ przez $\lambda(A)$ oznaczamy **miarę** zbioru A (tzn. jego długość, pole, objętość, etc. w zależności od wymiaru przestrzeni $\mathbb{R}^n$). Dla zbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o skończonej mierze, prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subseteq \Omega$ nazywamy **prawdopodobieństwem geometrycznym** i definiujemy jako:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Definicja. *Zbiór zdarzeń* $\{A_i : i \in I\}$ *jest* **niezależny** *jeśli dla każdego (skończonego)* $J \subseteq I$ *mamy*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(A_j\right).$$

W szczególności zdarzenia A *i* B *są niezależne jeśli* $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Rzucamy trzy razy kostką. Przez A oznaczamy zdarzenie, że w pierwszym rzucie wypadła parzysta liczba oczek, przez B, że w drugim rzucie wypadła nieparzysta liczba oczek, a przez C, że w każdym z trzech rzutów otrzymaliśmy inny wynik.

(a) Czy zdarzenia A i B są niezależne?
(b) Czy zdarzenia A i C są niezależne?
(c) Czy zdarzenia A, B i C są niezależne?

Zadanie A.2. Na odcinku o długości 10 wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia D_3, że odległość między nimi jest równa 3, a jakie zdarzenia, $D_{>3}$, że jest ona większa niż 3?

Zadanie A.3. W przedziale $[0, 1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na 3 odcinki. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A, że z tych odcinków da się zbudować trójkąt?

Zadanie A.4. W sesji student zdaje dwa egzaminy, z analizy i algebry. Szansa, że student zda egzamin z analizy wynosi 0,8, że zda algebrę 0,7. Przyjmując mało realistyczne założenie, że zdarzenia te są od siebie niezależne, znajdź prawdopodobieństwo, że student:

(a) zda analizę, a obleje algebrę?
(b) zda oba egzaminy?
(c) zda tylko jeden egzamin?
(d) nie zda żadnego egzaminu?

Zadanie A.5. Wybieramy losowo liczbę ze zbioru $\{1, \ldots, 1800\}$. Niech A_k będzie zdarzeniem, że dzieli się ona przez k.

(a) Czy zdarzenia A_5 i A_6 są niezależne?
(b) Czy zdarzenia A_6 i A_9 są niezależne?

Dodatek B. Zadania domowe

Zadanie B.1. W kwadracie z brzegiem o boku o długości jeden wybrano jeden punkt. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że znajduje się on

(a) na pewnej przekątnej?
(b) w wierzchołku kwadratu?
(c) w odległości co najwyżej $1/2$ od środka kwadratu?

Zadanie B.2. Z odcinka $[0, 8]$ wybrano dwa punkty. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że środek odcinka, który tworzą te dwa punkty należy do odcinka $[2, 4]$. **Uwaga:** *Środkiem odcinka o końcach* x *i* y *jest (oczywiście!) punkt* $(x + y)/2$.

Zadanie B.3. Rzucamy 4 razy monetą. Czy zdarzenie A, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł i zdarzenie B, że orzeł wypadł dokładnie 2 razy, są niezależne?

Zadanie B.4. Z talii 52 kart wyciągamy dwie karty. Niech A oznacza zdarzenie, że obie karty to kiery, B będzie zdarzeniem, że wyciągnęliśmy króla i damę, a C, że nie wyciągnęliśmy żadnej blotki (blotki to karty o wartościach pomiędzy 2 i 9).

(a) Czy zdarzenia A i B są niezależne?
(b) Czy zdarzenia A, B i C są niezależne?

Zadanie B.5. Przerwanie obwodu elektrycznego następuje w przypadku zepsucia się elementu K_1 lub dwóch elementów K_2 i K_3, które psują sią niezależnie od siebie z prawdopodobieństwami odpowiednio 3/10, 2/10 i 1/10. Oblicz prawdopodobieństwo przerwania obwodu.

Zadanie B.6. Każdy spośród 100 pracowników Wydziału Matematyki i Informatyki przychodzi do pracy w losowym momencie między godziną 8:00 a 9:00. Jakie jest prawdopodobieństwo, że o godzinie 8:15 w pracy jest dokładnie 25 pracowników?

Zadanie B.7. Pociąg PKP "Losowy Wicher" ma przyjechać na stację Poznań Główny o godzinie 12.00. Gosia nie chce się spóźnić na pociąg, więc przychodzi na peron w losowym momencie między godziną 11.00 a 12.00. PKP działa jak działa, więc pociąg przyjeżdża w losowym momencie między godziną 12.00 a 13.00. Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia, że

(a) Gosia czekała na pociąg dokładnie 15 minut (przyszła dokładnie 15 minut przed przyjazdem pociągu);
(b) Gosia czekała na pociąg co najmniej 15 minut.

Zadanie B.8. (Paradoks Bertranda) Na okręgu o promieniu 1 skonstruowano losowo cięciwę AB. Jaka jest szansa, że zajdzie zdarzenie A – losowo wybrana cięciwa jest dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg? Wyznacz prawdopodobieństwo zdarzenia A przyjmując za zdarzenie elementarne:

(a) wybór kąta środkowego α opartego na cięciwie AB;
(b) odległość środka skonstruowanej cięciwy od środka okręgu;
(c) wybór dowolnego punktu wewnątrz koła (wybór środka cięciwy).

Dodatek C. Odpowiedzi do zadań domowych

B.1. (a) 0, (b) 0, (c) $\pi/4$

B.2 3/8

B.3 $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 3/8$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 3/16$

B.4 (a) nie, (b) nie

B.5 0,314

B.6 $\binom{100}{25}\left(\frac{1}{4}\right)^{25}\left(\frac{3}{4}\right)^{75}$

B.7 (a) 0, (b) 31/32

B.8 Przykład 3, str. 39