Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
1. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

$\Omega = \{\omega_i : i \in I\}$ – zbiór zdarzeń elementarnych, ω_i – zdarzenie elementarne, $i \in I$.
Gdy $|I| < \infty$ oraz $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ dla każdego $\omega \in \Omega$, to $(\Omega, \mathbb{P})$ nazywamy *klasycznym modelem prawdopodobieństwa*. W tym przypadku *prawdopodobieństwo* dowolnego zdarzenia A wynosi:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Przydatne własności funkcji prawdopodobieństwa $\mathbb{P}$ – dla dowolnych zdarzeń $A, B \subset \Omega$ mamy:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A'), \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Przydatne wzory kombinatoryczne:
- $\binom{n}{k}$ – liczba k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego (kombinacje bez powtórzeń);
- n^k – liczba ciągów długości k o elementach ze zbioru n-elementowego (wariacje z powtórzeniami);
- $(n)_k = n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ – liczba ciągów długości k o elementach ze zbioru n–elementowego bez powtarzających się elementów (wariacje bez powtórzeń);
- $n!$ – liczba permutacji zbioru n–elementowego.

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Rzucamy dwiema symetrycznymi monetami. Interesuje nas wyłącznie liczba orłów, zatem przyjmujemy $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Czy przyjęcie $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{3}$, $k = 0, 1, 2$, daje model dobrze opisujący doświadczenie? (Jeśli tak, uzasadnij, jeśli nie, zaproponuj inną przestrzeń.)

Zadanie A.2. Tworzymy losowo słowo o długości 7 (niekoniecznie mające sens) z liter: a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n (łącznie mamy 14 liter). Z jakim prawdopodobieństwem litery w słowie nie bedą się powtarzać?

Zadanie A.3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dobrze potasowanej talii (52 karty) wszystkie 4 asy sąsiadują ze sobą (tzn. nie są rozdzielone innymi kartami)?

Zadanie A.4. Jaka jest szansa, że przy n–krotnym ($n \geqslant 3$) rzucie standardową kostką do gry
(a) wypadną dokładnie trzy szóstki?
(b) wypadną co najwyżej dwie szóstki?
(c) wypadną przynajmniej trzy szóstki?

Zadanie A.5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zapisując losowo każdego z s ($s \geqslant 2$) studentów do jednej z k grup ćwiczeniowych $G_1, \ldots, G_k$ ($k \geqslant 2$), sprawimy, że
(a) żadna z dwóch pierwszych grup nie będzie pusta?
(b) pierwsza lub ostatnia grupa będzie pusta?

Zadanie A.6. Rozdano 52 karty czterem graczom, po 13 kart każdemu. Jaka jest szansa, że każdy ma asa?

Zadanie A.7. Z tradycyjnej talii 24 kart wybieramy pięć. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania następujących układów: jedna para (i nic więcej), dwie pary (i nic więcej).

Dodatek B. Zadania domowe

Zadanie B.1. Oblicz prawdopodobieństwo, że w 5–osobowej delegacji wybranej losowo z klasy liczącej 15 dziewcząt i 16 chłopców, znajdzie się dokładnie 3 chłopców.

Zadanie B.2. W urnie są 2 kule białe i 4 czarne. Losujemy 2 kule bez zwracania. Co jest bardziej prawdopodobne, wyciągnięcie
(a) kul tego samego koloru,
(b) różnych kolorów?

Zadanie B.3. Z tradycyjnej talii 24 kart wybieramy pięć. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania następujących układów: strit, full, poker (proszę sprawdzić, co każda z tych nazw oznacza).

Zadanie B.4. Jaka jest szansa, że przy losowym przestawianiu wszystkich 26 liter alfabetu (bez polskich liter) utworzymy sekwencję
(a) abc?
(b) rachunek?

Zadanie B.5. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany ciąg binarny (składający się z „0” i „1”) długości 15 ma dokładnie 10 zer.

Zadanie B.6. Rzucamy n razy ($n \geqslant 9$) standardową kostką do gry. Jaka jest szansa, że wypadnie dokładnie sześć jedynek, trzy czwórki i poza tym inne wartości?

Zadanie B.7. Do n różnych urn wrzucamy losowo k różnych kulek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

(a) w każdej urnie będzie co najwyżej jedna kulka (zakładamy tutaj, że $k \leqslant n$)?
(b) w pierwszej urnie będą co najwyżej 2 kule?
(c) w ostatniej urnie będą co najmniej 2 kule?

Zadanie B.8. Ustawiamy losowo w rzędzie p kul białych i q kul czarnych ($p > q$). Z jakim prawdopodobieństwem żadne dwie czarne kule nie znajdą się obok siebie?

Zadanie B.9. Dzielimy talię 52 kart na dwie równe części. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

(a) w obu częściach będą po 2 asy,
(b) w jednej z części będą 3 asy.

Zadanie B.10. Oblicz prawdopodobieństwo wypadnięcia k orłów w n rzutach symetryczną monetą.

Zadanie B.11. Rzucamy 5 razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo, że uzyskamy dokładnie dwie różne wartości (np. 2,4,2,2,4).

Zadanie B.12. Z cyfr $1, 2, \ldots, 9$ losujemy kolejno 10 ze zwracaniem i zapisujemy w otrzymanej kolejności. Oblicz prawdopodobieństwo, że największa z wylosowanych cyfr jest równa 7.

Zadanie B.13. Wybieramy losowo liczbę ze zbioru $\{1, \ldots, 1800\}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrana liczba

(a) dzieli się przez 4 lub 5?
(b) nie dzieli się ani przez 6 ani przez 9?

Dodatek C. Odpowiedzi do zadań domowych

B.1. $\frac{\binom{16}{3}\binom{15}{2}}{\binom{31}{5}}$

B.2 (a) $\frac{7}{15}$, (b) $\frac{8}{15}$

B.3. strit: $\frac{2\cdot 4^5-2\cdot 4}{\binom{24}{5}}$, full: $\frac{6\cdot\binom{4}{3}\cdot 5\cdot\binom{4}{2}}{\binom{24}{5}}$, poker: $\frac{2\cdot 4}{\binom{24}{5}}$

B.4. (a) $\frac{1}{(26)_2}$, (b) $\frac{1}{(26)_7}$

B.5. $\frac{\binom{15}{10}}{2^{15}}$

B.6. $\frac{\binom{n}{6}\binom{n-6}{3}4^{n-9}}{6^n}$

B.7. (a) $\frac{(n)_k}{n^k}$, (b) $\frac{(n-1)^k+k(n-1)^{k-1}+\binom{k}{2}(n-1)^{k-2}}{n^k}$, (c) $1-\frac{(n-1)^k+k(n-1)^{k-1}}{n^k}$

B.8. $\frac{\binom{p+1}{p-q+1}}{\binom{p+q}{q}}$

B.9. (a) $\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{24}}{\binom{52}{26}}$, (b) $\frac{\binom{4}{3}\binom{48}{23}+\binom{4}{1}\binom{48}{25}}{\binom{52}{26}}$

B.10. $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

B.11. $\frac{\binom{6}{2}(2^5-2)}{6^5}$

B.12. $\frac{7^{10}-6^{10}}{9^{10}}$

B.13. (a) $\frac{2}{5}$, (b) $\frac{7}{9}$