Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
10. Zmienne losowe ciągłe.

Definicja. *Zmienną losową $X:\Omega\to\mathbb{R}$ nazywamy* **ciągłą**, *jeśli jej dystrybuanta $F_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, zdefiniowana wzorem*

$$F_X(x)=\mathbb{P}\left(X\leqslant x\right),$$

jest ciągła w każdym punkcie.

Równoważna definicja mówi, że zmienna losowa X jest ciągła, gdy nie zawiera atomów, tzn. dla każdego $x\in\mathbb{R}$ mamy $\mathbb{P}\left(X=x\right)=0$.

Dla wielu zmiennych losowych ciągłych X, w tym prawie wszystkich, z którymi będziemy mieć do czynienia na ćwiczeniach, istnieje funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, zwana **gęstością**, taka, że dla każdego $x\in\mathbb{R}$ mamy:

$$F_X(x)=\mathbb{P}\left(X\leqslant x\right)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt.$$

Wtedy zmienną losową X nazywamy **(absolutnie) ciągłą**. Ponadto dla prawie wszystkich $x\in\mathbb{R}$ zachodzi:

$$f(x)=F_X'(x).$$

Uwaga: Dystrybuanta F_X jest jednoznacznie zdefiniowana dla każdej zmiennej losowej X, natomiast jej gęstość f, nawet gdy istnieje, występuje zwykle pod całką i dlatego jest zdefiniowana z dokładnością do zbioru miary zero, czyli bez żadnych konsekwencji (z wyjątkiem braku elegancji) możemy dowolnie przedefiniować ją w kilku punktach dziedziny.

Własności gęstości:

(i) $f(x)\geqslant 0$ dla prawie wszystkich $x\in\mathbb{R}$;
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=1$.

Twierdzenie. *Niech X będzie zmienną losową ciągłą o gęstości f i niech $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ciągłą. Wtedy zachodzi:*

$$\mathbb{E}(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)f(t)dt.$$

W szczególności:

$$\mathbb{E}X=\int_{-\infty}^{\infty}t\cdot f(t)dt.$$

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. Zmienna losowa ciągła X ma dystrybuantę daną wzorem

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x\leqslant 0,\\ cx^3 & \text{dla } 0<x<1,\\ 1 & \text{dla } x\geqslant 1,\end{cases}$$

gdzie c jest pewną stałą. Znajdź wartość stałej c. Następnie wyznacz gęstość $f(x)$, wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$ i wariancję $\operatorname{Var}X$.

Zadanie A.2. Gęstość zmiennej losowej X zadana jest wzorem

$$f(x)=\begin{cases}a & \text{dla } x\in(-2,-1),\\ bx & \text{dla } x\in(1,2),\\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,}\end{cases}$$

gdzie a i b są pewnymi stałymi. Znajdź stałe a i b wiedząc, że $\mathbb{E}X=0$. Następnie oblicz $\operatorname{Var}X$ i znajdź dystrybuantę F_X tej zmiennej losowej.

Zadanie A.3. Na odcinku $[0,1]$ wybieramy losowo dwa punkty. Niech Z będzie zmienną losową oznaczającą odległość między tymi punktami.

i) Znajdź dystrybuantę F_Z, gęstość f_Z, wartość oczekiwaną $\mathbb{E}Z$ i wariancję $\operatorname{Var} Z$.
ii) Znajdź dystrybuantę F_X zmiennej losowej $X = Z^2$, jej gęstość f_X i wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$. Jak obliczyć $\mathbb{E}X$ bez wyznaczania gęstości f_X?

Dodatek B. Zadania domowe

Zadanie B.1. Niech

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ \frac{x^3}{8} & \text{dla } 0 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$

będzie dystrybuantą zmiennej losowej X. Znajdź gęstość zmiennej losowej X i oblicz $\mathbb{E}X$.

Zadanie B.2. Gęstość zmiennej losowej X wyraża się wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dla } x \in [0,3], \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,3]. \end{cases}$$

Znajdź dystrybuantę i wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej.

Zadanie B.3. Kij o długości 1 łamiemy w losowym miejscu na dwie części. Niech X oznacza długość krótszej, a Y dłuższej z dwóch części. Znajdź dystrybuantę, gęstość i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X. Ile wynosi wartość oczekiwana zmiennej losowej Y?

Zadanie B.4. Strzelamy do tarczy o kształcie kwadratu o boku 1. Jeśli miejsce trafienia odległe jest od najbliższej krawędzi kwadratu o k, wtedy wygrywamy $2k$, czyli, np. gdy trafimy w środek kwadratu to wygrywamy 1. Niech X oznacza wygraną w tej grze. Znajdź dystrybuantę, gęstość i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X.

Zadanie B.5. Nasz dobry znajomy pan January przychodzi na przystanek autobusowy w losowym momencie pomiędzy 7:00 i 8:00. Według ostatnio zmienionego rozkładu autobus przyjeżdża na przystanek pana Januarego w godzinach 7:10, 7:40 i 8:05. Niech X będzie czasem oczekiwania pana Januarego na autobus mierzonym w minutach (i ułamkach minut). Znajdź dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej X. Zakładamy, że autobusy przyjeżdżają na przystanek zgodnie z rozkładem.

Odpowiedzi do zadań domowych

B.1 $\mathbb{E}X = \frac{3}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{8} & \text{dla } x \in [0,2] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0,2]. \end{cases}$$

B.2 $\mathbb{E}X = \frac{3}{2}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{x}{3} & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 1 & \text{dla } x > 3. \end{cases}$$

B.3 $\mathbb{E}X = \frac{1}{4}$, $\mathbb{E}Y = \frac{3}{4}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 2x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 & \text{dla } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

B.4 $\mathbb{E}X = \frac{1}{3}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

B.5

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{x}{30} & \text{dla } 0 \leqslant x < 5 \\ \frac{3x-5}{60} & \text{dla } 5 \leqslant x < 10 \\ \frac{2x+5}{60} & \text{dla } 10 \leqslant x < 25 \\ \frac{x+30}{60} & \text{dla } 25 \leqslant x < 30 \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 30 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{dla } 0 \leqslant x < 5 \\ \frac{1}{20} & \text{dla } 5 \leqslant x < 10 \\ \frac{1}{30} & \text{dla } 10 \leqslant x < 25 \\ \frac{1}{60} & \text{dla } 25 \leqslant x < 30 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$