# Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 3.2/2023

**Mieczysław Cichoń - WMI UAM**

# Plan wykładów.

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej. (13)

Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona. (13)

Podstawowe metody całkowania. (13)

Całka oznaczona i jej zastosowania. (14)

Całka niewłaściwa i jej zastosowanie w informatyce. (14)

Całka Riemanna i jej zastosowania w informatyce. Podstawy całkowania numerycznego. Obliczenia numeryczne wybranych całek. Przegląd porównawczy metod (na ćwiczeniach też: proste całki - obliczenie przez części przez podstawienia). (15)

Metryki, odległości między funkcjami. Twierdzenie Banacha o kontrakcji. (15)

Równania różniczkowe - podstawy. (15)

# Strony do lektury na wykłady.

Czytamy najpierw motywacje:

[K] : motywacje - strony 28-30

teraz wstępne materiały, najpierw

[K] : strony 269-275

**oraz później**

[K] : strony 257-267 I ta część jest konieczna dla zrozumienia całkowania numerycznego!

Mam też tym razem propozycję skorzystania najpierw ze źródła [W] - o czym na kolejnym slajdzie.

# Alternatywna kolejność źródeł.

Jeśli ktoś woli, to zgodny z moim "kierunkiem" wykładu (od całki nieoznaczonej do oznaczonej) jest jednak drugi materiał - można go czytać po kolei (ale wtedy koniecznie trzeba po zapoznaniu się z [W] przeczytać "kolorowe" fragmenty z [K] dotyczące informatyki...

[W] : strony 186-203 i 204-207 - ten ostatni fragment ze wzorem Stirlinga, który akurat w informatyce jest bardzo przydatny .

Kolejny ważny fragment (potencjalne pytanie na egzamin...) to strony 214–226!!

**Uwaga:** omawiane operacje całkowania znajdą wiele zastosowań w informatyce. Mamy dwa podejścia: obliczenia **dokładne** (gdy na tym nam zależy), ale za to "trudne" do obliczeń komputerowych (częściowo (!) pakiety obliczeń symbolicznych) = *całka nieoznaczona i oznaczona*, oraz obliczenia **przybliżone** = *całka Riemanna* (podstawa obliczeń numerycznych).

Zajmiemy się obecnie pierwszym podejsciem - działaniem odwrotnym (w pewnym sensie) do różniczkowania zwanym całkowaniem. Funkcje, o których będzie mowa, to funkcje o wartościach rzeczywistych, określone w pewnym przedziale.

**Definicja.** *Funkcją pierwotną* funkcji $f$ w przedziale $(a, b)$ nazywamy każdą funkcję $F$ określoną w przedziale $(a, b)$ i posiadającą pochodną $F'(x)$ w każdym punkcie $x \in (a, b)$ taką, że $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

*Funkcję* $f$ dla której istnieje funkcja pierwotna w $(a, b)$, nazywamy **całkowalną** w $(a, b)$.

# Funkcje całkowalne.

Pojęcie całkowalności określa się w przedziale domkniętym $[a, b]$, przy czym w punktach końcowych $a$ i $b$ bierze się pochodną $F'$ odpowiednio prawostronną i lewostronną.

**Definicja. Rodzinę** wszystkich funkcji pierwotnych funkcji $f$ nazywamy *całką nieoznaczoną* z funkcji $f$ i zapisujemy przy pomocy symbolu $\int f(x)\, dx$.

Zatem z definicji mamy

$$\int F'(x)\, dx = F(x) + C,$$

gdzie $C$ jest dowolną stałą.

# Uwaga.

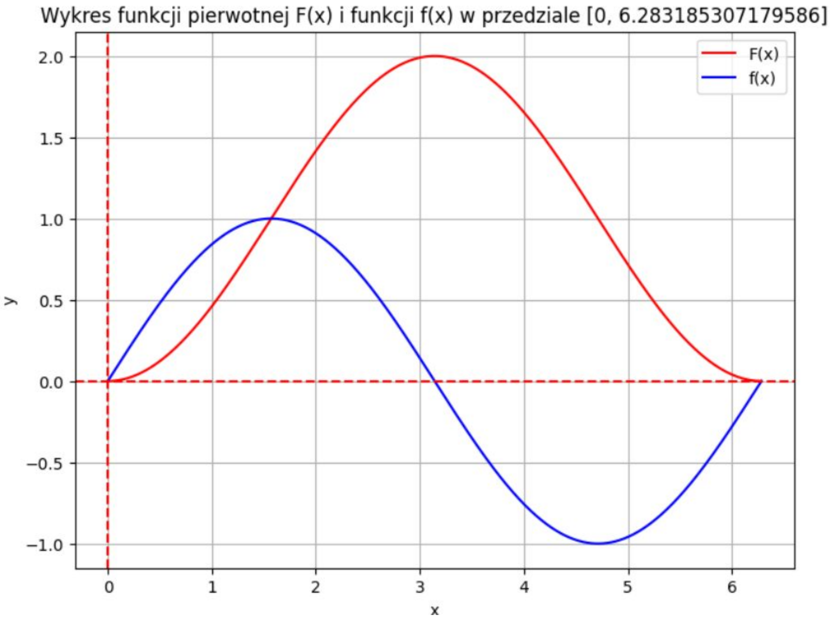
Nie będziemy - oczywiście - zgadywać...

W pewnych sytuacjach, pamietając tabelę pochodnych to byłoby możliwe, np. dla $f(x) = e^x$ potrafilibyśmy wskazać funkcję $F$ dla której $f$ jest jej pochodną.

To np. $F(x) = e^x$, ale również $F(x) = e^x + 3$ lub $F(x) = e^x - \pi$.

Przypomnę o wnioskach z twierdzenia Lagrange'a (funkcje o równych pochodnych różnią się co najwyżej o stałą).

Tak samo dla $f(x) = x$ "zgadniemy" $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ dla dowolnego $C$, ale jak byłoby dla $f(x) = x \cdot \sin x$? Ktoś zgadnie? Tak się nie da, zrobimy to systematycznie...


Wykres funkcji pierwotnej F(x) i funkcji f(x) w przedziale [0, 6.283185307179586]
F(x)
f(x)
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
y
0
1
2
3
4
5
6
x

**Twierdzenie.** (o stałej całkowania). *Jeżeli funkcja $f$ jest całkowalna w $(a, b)$ oraz $F$ jest funkcją pierwotną funkcji $f$ w $(a, b)$, to:*

$1^0$ *przy dowolnej stałej $C$, funkcja $F + C$ jest też funkcją pierwotną funkcji $f$ w $(a, b)$,*

$2^0$ *dla każdej funkcji pierwotnej $G$ funkcji $f$ w $(a, b)$ istnieje taka stała $C$, że $G(x) = F(x) + C$ dla $x \in (a, b)$.*

# Podstawowe wzory rachunku całkowego.

1) $\int x^a \, dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad , \quad a \neq -1 \quad , \quad x > 0 \quad .$

Gdy $a$ jest liczbą naturalną, to zastrzeżenie $x > 0$ odpada; gdy $a$ jest liczbą całkowitą ujemną to zamiast $x > 0$ wystarczy założyć $x \neq 0$.

Podajemy kilka szczególnych przypadków wzoru 1)

a) $a = 0$ , wówczas $\int dx = x + C \quad ;$

b) $a = -\frac{1}{2}$ , wówczas $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \quad , \quad x > 0;$

c) $a = -2$ , wówczas $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C \quad , \quad x \neq 0.$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \, , \quad x \neq 0 \quad .$

3) $\int e^x \, dx = e^x + C$ ,

4) $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ , $a > 0$ , $a \neq 1$ .

5) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ ,

6) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ ,

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C$ , $\cos x \neq 0$ .

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\ x + C$ , $\sin x \neq 0$ .

9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$ , $-1 < x < 1$ .

10) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\ x + C = -\mathrm{arctg}\ x + C'$ ,

11) $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$ ,

12) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$ ,

13) $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \text{tgh } x + C$ ,

14) $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\text{ctgh } x + C$ ,

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arc}\sinh x + C$ ,

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc}\cosh x + C$ .

# Całkowalność a ciągłość.

**Twierdzenie.** (o całkowalności funkcji ciągłej). *Każda funkcja ciągła w* $[a, b]$ *ma w* $[a, b]$ *całkę nieoznaczoną.*

co więcej wartości na krańcach przedziału są nieistotne:

**Twierdzenie.** *Każda funkcja ciągła w* $(a, b)$ *ma w* $(a, b)$ *całkę nieoznaczoną.*

...a to ma dość nieoczekiwane konsekwencje przy całkowaniu numerycznym. Posiadanie całki nieoznaczonej nie oznacza, że to jest funkcja elementarna!

Nie da się wyznaczyć funkcji pierwotnych dla wszystkich funkcji ciągłych - jako funkcji wyznaczonych za pomocą skończonej liczby działań na funkcjach elementarnych, potrzebne np. szeregi potęgowe!

**Twierdzenie.** (o działaniach arytmetycznych na całkach nieoznaczonych)

*Jeżeli funkcje* $f$ *i* $g$ *są całkowalne w przedziale* $I$ *(otwartym lub domkniętym), a* $c$ *jest dowolną liczbą, to funkcje* $f+g$, $f-g$ *i* $cf$ *są też całkowalne w* $I$ *oraz*

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad ,$$

$$\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx \quad ,$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \quad ,$$

*z dokładnością do stałej całkowania.*

**Przykład.** Obliczyć całkę $I = \int x(x+1)(x-2)\,dx$.

Po doprowadzeniu funkcji podcałkowej do postaci wielomianu i skorzystaniu z własności całki otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
I = \int (x^3 - x^2 - 2x)\,dx &= \int x^3\,dx - \int x^2\,dx - 2\int x\,dx = \\
&= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{x^2}{2} + C
\end{aligned}
$$

# Całkowanie przez części.

**Twierdzenie.** (o całkowaniu przez części całek nieoznaczonych)

*Jeżeli funkcje $f$ i $g$ mają pochodne $f'$ i $g'$ ciągłe w przedziale $I$ (otwartym lub domkniętym), to*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \ .$$

**Przykład.**

(a) Obliczyć całkę $\int xe^x dx$.

Obierając $f(x) = x$ , $g'(x) = e^x$ mamy $f'(x) = 1$ i $g(x) = e^x$, więc

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C\ .$$

Zauważmy, że odwrotny wybór funkcji tzn. $f(x) = e^x$ i $g'(x) = x$ nie da nam nic! Proszę samodzielnie sprawdzić ten wariant. Zawsze mozna próbować obu przypadków i wybrać "właściwy".

(b) Obliczyć całkę $\int e^x \sin x \, dx$.
Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części

$f(x) = \sin x \qquad g'(x) = e^x \qquad$ oraz

$f'(x) = \cos x \qquad g(x) = e^x$

mamy

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \ .$$

Obliczymy dalej całkę $\int e^x \cos x dx$. Ponownie stosujemy dla tej całki, twierdzenie o całkowaniu przez części. Podstawiając

$f(x) = \cos x \qquad g'(x) = e^x$

$f'(x) = -\sin x \qquad g(x) = e^x$

otrzymujemy

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \ .$$

Podstawiając otrzymaną wartość do poprzedniej równości otrzymujemy

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \ ,$$

stąd po przeniesieniu całki na lewą stronę równości mamy

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) \qquad / : 2$$

Ostatecznie więc

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \ .$$

(c) Obliczyć całkę $\int \ln x \, dx$.

Zakładamy, że $x > 0$ (logarytm!). Całkujemy przez części przyjmując

$$f(x) = \ln x \quad , \; g'(x) = 1 \quad , \; f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \; g(x) = x.$$

Obliczamy

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

**Twierdzenie.** (o obliczaniu całek nieoznaczonych przez podstawienie).

*Niech funkcja $f$ będzie ciągła w przedziale $(a,b)$ oraz niech funkcja $g$ ma ciągłą pochodną $g'$ w przedziale $(\alpha,\beta)$, $a < g(t) < b$ dla $t \in (\alpha,\beta)$. Wtedy*

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \;, \quad \text{gdzie} \quad x = g(t) \;, \quad \text{dla} \quad \alpha < t < \beta \;.$$

**Przykład.**

(a) Obliczyć całkę $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ .

Zakładamy, że $x > 0$. Wykonujemy podstawienie $\ln x = t$ i różniczkując obustronnie mamy $\frac{1}{x}dx = dt$. Otrzymujemy więc

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \ .$$

(b) Obliczyć całkę $\int xe^{x^2} dx$ .

Wykonujemy podstawienie $x^2 = t$, skąd różniczkując obie strony otrzymujemy $2xdx = dt$, $xdx = \frac{1}{2}dt$, a więc

$$\int xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} \cdot x dx = \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \ .$$

(c) Obliczyć całkę $\int \sin x \cos x \, dx$ .

Wykonujemy podstawienie $\cos x = t$; różniczkując otrzymujemy $-\sin x \, dx = dt$. Stosując dalej twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie mamy

$$\int \sin x \cos x \, dx = -\int t \, dt = -\frac{1}{2} t^2 + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C \ .$$

# Wzory rekurencyjne.

Metoda rekurencyjna obliczania całki $I_n = \int f_n(x)dx$ polega na obliczeniu całki dla $n = 1$ (lub $n = 0$) i na sprowadzeniu całki $I_n$ do całki $I_{n-1}$ (lub wcześniejszej).

**Przykład.** Obliczyć całkę $I_n = \int e^{-x} x^n dx$ .

Otóż $I_0 = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$. Całkując przez części całkę $I_n$ (dla $n > 0$) mamy

$$\begin{aligned} I_n &= -x^n e^{-x} + \int e^{-x} \cdot n \cdot x^{n-1} dx = \\ &= -x^n e^{-x} + n \int e^{-x} x^{n-1} dx = -x^n e^{-x} + n \cdot I_{n-1} \end{aligned}$$

W szczególności

$I_1 = -xe^{-x} + I_0$

$I_2 = -x^2 e^{-x} + 2I_1, \ldots \quad .$

Mnożąc kolejno $I_0$ przez $n!$, $I_1$ przez $\frac{n!}{1!}, \ldots, I_{n-1}$ przez $\frac{n!}{(n-1)!}$ i dodając otrzymujemy

$$\int e^{-x} x^n dx = -n! e^{-x} (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^3}{n!}) + C \ .$$

**Całki funkcji wymiernych.**

*Funkcją wymierną* nazywamy iloraz dwóch wielomianów. Całka funkcji wymiernej jest więc postaci

$$\int \frac{W_1(x)}{W_2(x)} dx = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} dx \ . \qquad (1)$$

**Twierdzenie.** (o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste). *Przy obliczaniu całki (1) należy postępować w następujący sposób.*

$1^0$) *Jeżeli stopień licznika nie jest mniejszy niż stopień mianownika* $(n \geq m)$, *to licznik dzielimy przez mianownik i funkcję podcałkową przedstawiamy jako sumę wielomianu oraz funkcji wymiernej, w której już stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika* $(n < m)$.

$2^0$) *Jeżeli* $n < m$, *to funkcję podcałkową rozkładamy na tzw. ułamki proste, tj. na wyrażenia postaci*

$$\frac{A}{(x-a)^k} \qquad \textit{oraz} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+dx+e)^p},$$

*gdzie* $A, B, C, a, d, e$ *są stałe, przy czym* $d^2 - 4e < 0$ *(wyróżnik trójmianu* $cx^2 + dx + e = 0$ *jest ujemny),* $k$ *i* $p$ *są liczbami naturalnymi.*

CDN !!! na ćwiczeniach ...

# Czego nie potrafimy? Funkcje specjalne.

Jak wiemy, istnieją całki nieoznaczone z każdej funkcji ciągłej.

Wśród podanych metod nie ma jednak wszystkich możliwych typów całek. Dlaczego? Po prostu - nie wszystkie takie funkcje pierwotne dla funkcji ciagłych są funkcjami elementarnymi. Wiele z nich jest jednak tak istotne, że dostają swoje nazwy i są uwzględniane w pakietach obliczeń symbolicznych (ale - nie wszystkie!).

# Przykłady.

$$\int e^{-x^2}\,dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \text{tzw. ``sinus całkowy'' } Si(x)$$

$$\int \sqrt{1+x^3}\,dx \qquad \text{to jedna z tzw. całek eliptycznych}$$

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\ln x}\,dx$$

$$\int \sin x^2\,dx$$

i **wiele, wiele innych!** A po co nam one? Niestety - są jednak konieczne. Proszę np. spróbować obliczyć długość łuku elipsy!!

Jak będziemy obliczać takie całki? Poprzez **szeregi potęgowe (Taylora)**! Jeśli funkcja ma wszystkie pochodne (jest: gładka), to rozwijamy funkcję podcałkową w szereg potęgowy - bierzemy sumy częściowe i całkujemy je (całka z sumy!). Pozostaje oczywiście problem zbieżności takich szeregów po całkowaniu...

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\right) dx$$

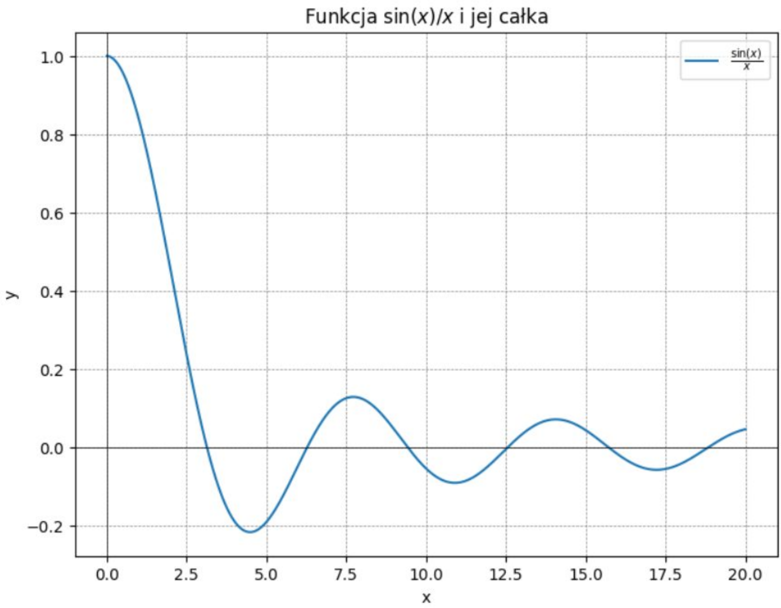
czyli

$$\begin{aligned}\int e^{-x^2}\,dx &= \int \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\right) dx \\ &= \int 1\,dx - \int x^2\,dx + \int \frac{x^4}{2!}\,dx - \int \frac{x^6}{3!}\,dx + \int \frac{x^8}{4!}\,dx - \dots\end{aligned}$$

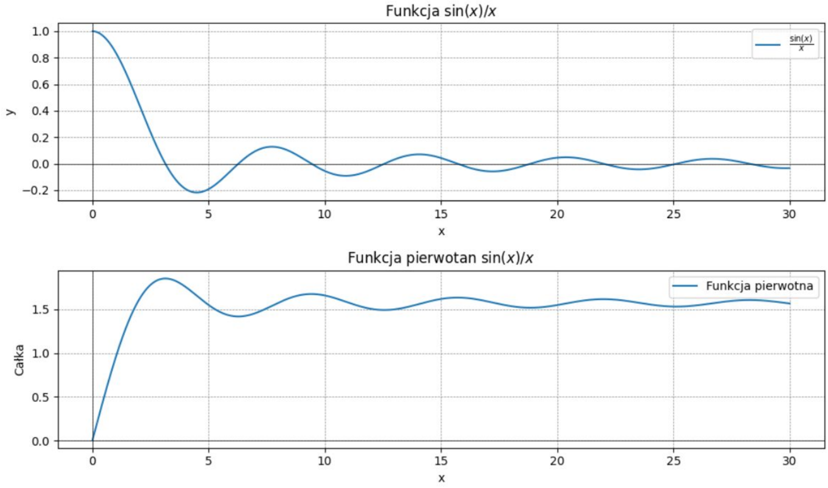
Pakiety obliczeń symbolicznych stosują te (i inne) metody, ale nigdy nie ma szans na znalezienie **wszystkich** funkcji specjalnych (np. $W$-Lamberta).

# Python. Całkowanie numeryczne.

```
from scipy import integrate
import numpy as np

# Definicja funkcji do całkowania
def integrand(x):
    return np.exp(-x**2)

# Wywołanie funkcji quad do obliczenia całki
result, error = integrate.quad(integrand, -np.inf, np.inf)

# Wyświetlenie wyniku
print("Wartość całki:", result)
print("Błąd oszacowania:", error)
```




```
Ciągła całka numeryczna funkcji sin(x)/x od 0 do 10: 1.5482417010434402
```




```
Ciągła całka numeryczna funkcji sin(x)/x od 0 do 10: 1.566756540030351
```

# Zadanie dodatkowe.

Rozważyć badanie elipsy i zbadanie jej długości. Jak zastosować metody informatyki i matematyki (np. szeregi potęgowe)? Nie stosować gotowych bibliotek!

Ogólniej: problem obliczania całek eliptycznych - wrócimy do tego, teraz dla chętnych...

# Uwagi o ćwiczeniach.

Spora część materiału nie nie wymaga wprowadzania na wykładzie. Dotyczy to obliczania całek - bo z definicji nie byłoby to praktycznie możliwe.

Materiał ćwiczeń zakłada obliczanie całek:

- przez części,
- przez podstawienia,
- wymiernych,
- wybranych funkcji niewymiernych,
- trygonometrycznych,
- ....

Mam tylko nadzieję, że wszyscy zdążą ...

**Zadanie 1.**

Obliczyć całki:

(a) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$,

(b) $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^2}\,dx$,

(c) $\int \frac{x(\sqrt{x}-x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

(d) $\int \sqrt{2\operatorname{arctg} x-2}\frac{dx}{1+x^2}$ ,

## Zadanie 2.

Na podstawie twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki:

(a) $\int x^4 \ln x dx$,

(b) $\int x^2 3^x dx$,

(c) $\int \frac{1}{2} e^x \sin^2 x dx$.

## Zadanie 3.

Na podstawie twierdzenia o podstawianiu dla całek nieoznaczonych obliczyć całki:

(a) $\int \frac{e^x}{3+4e^x}\,dx$ ,

(b) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$ ,

(c) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

**Zadanie 4.**

Wyprowadzić wzory rekurencyjne dla następujących całek:

(a) $\int x^n e^x dx$,

(b) $\int \ln^n x dx$ .

**Zadanie 5.**

Obliczyć całki funkcji niewymiernych:

(a) $\int \frac{8x+3}{\sqrt{4x^2+3x+1}} dx$ ,

(b) $\int \frac{x+1}{\sqrt{8+2x-x^2}} dx$ ,

(c) $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx$.

## Zadanie 6.

Obliczyć całki:

(a) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$ ,

(b) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}$ ,

(c) $\int \frac{dx}{\sin x}$.