Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

3. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa. Przestrzenie produktowe i warunkowe.

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. *O zdarzeniach A i B wiadomo, że $\mathbb{P}(A) = 3/4$ i $\mathbb{P}(B) = 1/3$. Uzasadnij, że $1/12 \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant 1/3$ i podaj przykłady świadczące o tym, że te oszacowania są optymalne.*

- **Oszacowanie górne**:

  Zauważmy, że oszacowanie górne, które chcemy uzyskać jest równe prawdopodobieństwu zdarzenia B. To nie jest przypadek. Mamy bowiem własność (W5):

  $$\text{Jeśli } A \subset B, \text{ to } \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$

  Zauważmy, że $A \cap B \subseteq B$, więc $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(B) = 1/3$. Pokażemy teraz, że to oszacowanie jest optymalne, tzn. znajdziemy przykład takich zdarzeń, dla których $\mathbb{P}(A) = 3/4$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$, a $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$. Innymi słowy, szukamy zdarzeń, dla których $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$. Możemy to osiągnąć, jeśli $B \subseteq A$.

  Przykład:
  $\Omega = \{1, 2, \ldots, 12\}$ (losujemy jedną liczbę z dwunastu, każda opcja jest równoprawdopodobna)
  $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
  $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
  $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$

- **Oszacowanie dolne**:

  Przy tym oszacowaniu skorzystamy z własności (W7):

  $$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

  którą możemy też zapisać w następującej postaci:

  $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

  Zauważmy, że na podstawie aksjomatu (A1) $\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant 1$. Zatem:

  $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geqslant \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{12}.$$

  Pokażemy teraz, że to oszacowanie jest optymalne, tzn. znajdziemy przykład takich zdarzeń, dla których $\mathbb{P}(A) = 3/4$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$, a $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/12$. Innymi słowy, szukamy zdarzeń, dla których $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 = \mathbb{P}(\Omega)$. Możemy to osiągnąć, jeśli zdarzenia A i B dają w sumie całą przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω.

  Przykład:
  $\Omega = \{1, 2, \ldots, 12\}$ (losujemy jedną liczbę z dwunastu, każda opcja jest równopodobna)
  $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
  $B = \{9, 10, 11, 12\}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
  $A \cap B = \{9\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}$

Zadanie A.2. *Rzucamy symetryczną monetą do momentu kiedy wyrzucimy orła po raz pierwszy. Niech E oznacza zdarzenie, że wykonamy parzystą liczbę rzutów, a $A_{\geqslant k}$ zdarzenie, że wykonamy co najmniej k rzutów.*

(a) *Wypisz elementy przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Czy jest to przestrzeń skończona?*

Zdarzenia elementarne: $\omega_1 = O, \omega_2 = RO, \omega_3 = RRO, \omega_4 = RRRO, \ldots$ (Legenda: R – reszka, O – orzeł)

Ogólniej elementami przestrzeni Ω są wszystkie ciągi skończone, w których początkowe elementy to same reszki, a ostatni element to orzeł. Takich ciagów jest nieskończenie wiele, więc przestrzeń Ω nie jest przestrzenią skończoną.

(b) *Znajdź $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(E|A_{\geqslant 3})$ i $\mathbb{P}(E|A_{\geqslant 4})$.*

Na początek zauważmy, że w przestrzeni probabilistycznej opisującej nasz eksperyment poszczególne zdarzenia elementarne przyjmują prawdopdoobieństwa:

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\omega_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \mathbb{P}(\omega_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots$$

i ogólnie:

$$\mathbb{P}(\omega_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Następnie zauważmy, że

$$E = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \ldots\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega_{2k}\}$$

(bo zdarzenie E oznacza, że wykonamy dokładnie 2 rzuty albo dokładnie 4 rzuty albo dokładnie 6 rzutów itd.),

$$A_{\geqslant 3} = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5 \ldots\} = \bigcup_{k=3}^{\infty} \{\omega_k\}$$

oraz

$$A_{\geqslant 4} = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6 \ldots\} = \bigcup_{k=4}^{\infty} \{\omega_k\}.$$

Zatem:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega_{2k}\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Skorzystaliśmy tu z aksjomatu (A3) (dotyczącego prawdopodobieństwa sumy parami rozłącznych zdarzeń) oraz ze wzoru na **sumę szeregu geometrycznego**. Zgodnie z definicją prawdopodobieństwa warunkowego mamy:

$$\mathbb{P}(E|A_{\geqslant 3}) = \frac{\mathbb{P}(E \cap A_{\geqslant 3})}{\mathbb{P}(A_{\geqslant 3})} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(E|A_{\geqslant 4}) = \frac{\mathbb{P}(E \cap A_{\geqslant 4})}{\mathbb{P}(A_{\geqslant 4})}.$$

Zacznijmy od policzenia prawdopodobieństwa zdarzeń $A_{\geqslant 3}$ oraz $A_{\geqslant 4}$. Mamy:

$$\mathbb{P}(A_{\geqslant 3}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=3}^{\infty} \{\omega_k\}\right) = \sum_{k=3}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_k) = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

oraz

$$\mathbb{P}(A_{\geqslant 4}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=4}^{\infty} \{\omega_k\}\right) = \sum_{k=4}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_k) = \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{16}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Alternatywnie, powyższe prawdopodobieństwa można policzyć korzystając ze zdarzeń przeciwnych:

$$\mathbb{P}(A_{\geqslant 3}) = 1 - \mathbb{P}\left(A'_{\geqslant 3}\right) = 1 - \mathbb{P}(\omega_1) - \mathbb{P}(\omega_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

(w przypadku zdarzenia $A_{\geqslant 4}$ postępujemy analogicznie). Rozpiszmy teraz przekroje za pomocą zdarzeń elementarnych:

$$E \cap A_{\geqslant 3} = E \cap A_{\geqslant 4} = \{\omega_4, \omega_6, \omega_8, \ldots\} = \bigcup_{k=2}^{\infty} \{\omega_{2k}\}.$$

Zatem

$$\mathbb{P}(E \cap A_{\geqslant 3}) = \mathbb{P}(E \cap A_{\geqslant 4}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{\infty}\{\omega_{2k}\}\right) = \sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}(\omega_{2k}) = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \frac{1}{16}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{12}.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(E|A_{\geqslant 3}) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(E|A_{\geqslant 4}) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}} = \frac{2}{3}.$$

(c) *Czy zdarzenia E i $A_{\geqslant 4}$ są niezależne?*

$$\mathbb{P}(E \cap A_{\geqslant 4}) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \mathbb{P}(E)\cdot\mathbb{P}(A_{\geqslant 4})$$

Zatem te zdarzenia nie są niezależne. Alternatywnie, można zauważyć, że $\mathbb{P}(E|A_{\geqslant 4}) \neq \mathbb{P}(E)$, więc zdarzenia E i $A_{\geqslant 4}$ nie są niezależne.

(d) *Czy zdarzenia E i $A_{\geqslant 3}$ są niezależne?*

$$\mathbb{P}(E \cap A_{\geqslant 3}) = \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \mathbb{P}(E)\cdot\mathbb{P}(A_{\geqslant 3})$$

Zatem te zdarzenia są niezależne.

Zadanie A.3. *W urnie są 3 czerwone, 2 niebieskie i 1 zielona kula. Wybieramy z niej losowe dwie kule, wrzucamy z powrotem do urny i powtarzamy proces od nowa.*

(a) *Znajdź prawdopodobieństwo warunkowe, że w pierwszej rundzie wyciągniemy kule o różnych kolorach pod warunkiem, że nie wyciągnęliśmy kuli zielonej.*

Niech A_1 oznacza zdarzenie, że w pierwszej rundzie wyciągniemy kule o różnych kolorach, a A_2 zdarzenie, że w pierwszej rundzie nie wyciągnęliśmy kuli zielonej. Interesuje nas

$$\mathbb{P}\left(A_1|A_2\right) = \frac{\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right)}{\mathbb{P}\left(A_2\right)},$$

czyli musimy obliczyć $\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right)$ i $\mathbb{P}\left(A_2\right)$. Ponieważ w tym przypadku interesuje nas tylko to, co dzieje się w pierwszej rundzie możemy przyjąć, że przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω składa się z możliwych do wylosowania w pierwszej rundzie dwuelementowych podzbiorów kul i możemy zastosować model klasyczny. Wtedy

$$|\Omega| = \binom{6}{2} = 15, \quad |A_2| = \binom{5}{2} = \binom{6}{2} - \binom{5}{1}\binom{1}{1}$$

(ze wszystkich kul niezielonych wybieramy dwie albo od wszystkich możliwości odejmujemy te, które zawierają kulę zieloną) i

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{3}{1}\binom{2}{1}$$

(wybieramy dwie różnokolorowe, niezielone kule, czyli jedną czerwoną i jedną niebieską). Zatem

$$\mathbb{P}\left(A_2\right) = \frac{10}{15}, \quad \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right) = \frac{6}{15}, \quad \mathbb{P}\left(A_1|A_2\right) = \frac{6}{10}.$$

Uwaga! W tym zadaniu można również przyjąć, że kolejność losowanych kul ma znaczenie, ale wówczas należy cały czas trzymać się tego założenia.

(b) *Znajdź prawdopodobieństwo, że w pierwszych n rundach dokładnie k razy wyciągniemy kule o różnych kolorach.*

W tym przypadku powtarzamy ustaloną liczbę razy (n) eksperyment losowy (losowanie dwóch z sześciu kul), w którym możemy otrzymać sukces (czyli wyciągnięcie kul w różnych kolorach) lub porażkę. Oznacza to, że mamy do czynienia ze **schematem Bernoulliego** z parametrami n oraz

$$p = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{11}{15}$$

(w celu policzenia tego prawdopodobieństwa rozbijamy sukces na trzy rozłączne przypadki: wyciągniemy kulę czerwoną i niebieską albo czerwoną i zieloną, albo niebieską i zieloną). Niech B oznacza zdarzenie, że dokładnie k razy wyciągniemy kule w różnych kolorach. Wtedy:

$$\mathbb{P}\left(B\right) = \tau_k = \binom{n}{k}\left(\frac{11}{15}\right)^k\left(1 - \frac{11}{15}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{11}{15}\right)^k\left(\frac{4}{15}\right)^{n-k}.$$

Uwaga! To zadanie można też rozwiązać korzystając wprost z modelu klasycznego. Wtedy jednak przy definiowaniu przestrzeni Ω należy skorzystać z definicji przestrzeni produktowej, czyli Ω będzie się składała z ciągów n-elementowych, których elementami będą dwulementowe podzbiory zbioru sześciu kul.

(c) *Znajdź prawdopodobieństwo, że pierwszy raz wyciągniemy kule o różnych kolorach w n-tej rundzie.*

W tym przypadku powtarzamy eksperyment losowy (losowanie dwóch z sześciu kul), w którym możemy otrzymać sukces (czyli wyciągnięcie kul w różnych kolorach) lub porażkę, do pierwszego sukcesu. Oznacza to, że mamy do czynienia z **rozkładem geometrycznym** z parametrem

$$p = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{11}{15}.$$

Niech C oznacza zdarzenie, że pierwszy raz wyciągniemy kule w różnych kolorach za n-tym razem. Wtedy:

$$\mathbb{P}\left(C\right) = \sigma_n = \left(\frac{11}{15}\right)\left(1 - \frac{11}{15}\right)^{n-1} = \left(\frac{11}{15}\right)\left(\frac{4}{15}\right)^{n-1}.$$

(d) *Kontynuujemy proces, dopóki nie wyciągniemy kul o różnych kolorach w dwóch niekoniecznie po sobie następujących rundach. Znajdź prawdopodobieństwo, że proces będzie trwał n rund.*

W tym przypadku powtarzamy eksperyment losowy (losowanie dwóch z sześciu kul), w którym możemy otrzymać sukces (czyli wyciągnięcie kul w różnych kolorach) lub porażkę, do drugiego sukcesu. Niech D oznacza zdarzenie, że drugi raz wyciągniemy kule w różnych kolorach za n-tym razem. Wtedy:

$$\mathbb{P}(D) = \binom{n-1}{1}\left(\frac{11}{15}\right)^2\left(1-\frac{11}{15}\right)^{n-2} = (n-1)\left(\frac{11}{15}\right)^2\left(\frac{4}{15}\right)^{n-2}.$$

Skąd się wziął ten wzór? Musimy zastanowić się, w których losowaniach będą kule w różnych kolorach: na pewno musi tak się stać w n-tym losowaniu (bo po drugim sukcesie przerywamy proces) i w jednym z pierwszych $n-1$ losowań. Zatem mamy $\binom{n-1}{1} = n-1$ możliwości wyboru tych losowań. Jeśli ustalimy numery losowań, w których będziemy mieli kule w różnych kolorach, to szanse na to, że właśnie w tych dwóch losowaniach będziemy mieli kule różnokolorowe, a w pozostałych przypadkach nie, możemy obliczyć korzystając ze wzoru, który pojawia się w definicji prawdopodobieństwa w przestrzeniach produktowych, czyli mnożąc dwukrotnie prawdopodobieństwo sukcesu i $n-2$ razy prawdopodobieństwo porażki.

(e) *Kontynuujemy proces, dopóki nie wyciągniemy kul o różnych kolorach w dwóch kolejnych rundach. Znajdź prawdopodobieństwo, że proces bedzie trwał n rund.*

Nazwijmy sukcesem wyciągnięcie w danej rundzie kul różnokolorowych, a porażką wyciągnięcie kul w tym samym kolorze. Niech E oznacza zdarzenie, że opisany proces będzie trwał n rund. Co to oznacza? W rundach numer $n-1$ i n był sukces, w rundzie numer $n-2$ była porażka, a w rundach o numerach od 1 do $n-3$ mogły być zarówno porażki, jak i sukcesy, ale nigdy dwa sukcesy pod rząd.

Niech E_k oznacza zdarzenie, że proces trwał n rund, a w rundach o numerach od 1 do $n-3$ było dokładnie k sukcesów. Wtedy

$$E = \bigcup_{k=0}^{\lceil\frac{n-3}{2}\rceil} E_k$$

(ograniczenie górne w tej sumie bierze się z faktu, że dowolne dwa sukcesy muszą być rozdzielone co najmniej jedną porażką). Zdarzenia $E_1, E_2, \ldots, E_{\lceil\frac{n-3}{2}\rceil}$ są parami rozłączne, więc:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\lceil\frac{n-3}{2}\rceil} E_k\right) = \sum_{k=0}^{\lceil\frac{n-3}{2}\rceil}\mathbb{P}(E_k) = \sum_{k=0}^{\lceil\frac{n-3}{2}\rceil}\binom{n-3-k+1}{k}\left(\frac{11}{15}\right)^k\left(\frac{4}{15}\right)^{n-3-k}\frac{4}{15}\left(\frac{11}{15}\right)^2$$

(gdzie kolejne elementy wzoru na $\mathbb{P}(E_k)$ odpowiadają za wybór miejsca na sukcesy w rundach o numerach od 1 do $n-3$, szanse na k sukcesów w rundach początkowych (o wybranych numerach), szanse na $n-3-k$ porażek w pozostałych początkowych rundach, szanse na porażkę w rundzie numer $n-2$, szanse na dwa sukcesy w rundach numer $n-1$ i n).

Zadanie A.4. *Pokaż, że dla ciągu zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$, gdzie dla każdego $i = 1, 2, \ldots$, mamy $\mathbb{P}(A_i') \leqslant 3^{-i}$, zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geqslant 1/2\,.$$

Chcemy oszacować $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$, a jedyne informacje, jakie mamy do dyspozycji to oszacowania prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych do A_i. To sugeruje nam, że powinniśmy w naszym oszacowaniu wykorzystać zdarzenie przeciwne:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right).$$

Jak możemy inaczej zapisać zdarzenie $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)'$? Skorzystamy z **prawa De Morgana**:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'.$$

Korzystając z **nierówności Boole'a** (poprzednie zadanie) i oszacowań wartości $\mathbb{P}(A_i')$, otrzymujemy:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i') \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

(wartość sumy szeregu obliczamy korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego). Zatem:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)'\right) \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Czy jeśli dla każdego $i = 1, 2, \ldots$, mamy $\mathbb{P}(A_i') = 3^{-i}$, to wtedy

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1/2\,?$$

Nie. Dlaczego? W tej sytuacji możemy zastosować następujące oszacowania:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i') = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} = \frac{1}{2}.$$

Może się jednak zdarzyć, że $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right) < \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i')$. W jakiej sytuacji? Gdy zbiory $A_1', A_2', \ldots$ nie są parami rozłączne.

Przykład: Rozważmy przestrzeń $\Omega = [0, 1]$ z prawdopodobieństwem geometrycznym. Zdefiniujmy zdarzenia $A_i = (3^{-i}, 1]$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Wtedy dla $i = 1, 2, \ldots$ mamy $A_i' = [0, 3^{-i}]$ oraz

$$\mathbb{P}(A_i') = \frac{\lambda(A_i')}{\lambda(\Omega)} = \frac{3^{-i}}{1} = 3^{-i}.$$

Ale $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (\frac{1}{3}, 1]$, więc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{\lambda((\frac{1}{3}, 1])}{\lambda([0, 1])} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}.$$

Ilustracja:

Zadanie A.5. *Rzucamy cztery razy kostką. Niech A będzie zdarzeniem, że dokładnie dwa razy otrzymaliśmy wynik parzysty, a B zdarzeniem, że dokładnie raz wyrzuciliśmy szóstkę. Oblicz* $\mathbb{P}(A|B)$ *i* $\mathbb{P}(B|A)$. *Czy zdarzenia A i B są niezależne?*

Chcemy obliczyć $\mathbb{P}(A|B)$ oraz $\mathbb{P}(B|A)$. Zgodnie z wzorami na prawdopodobieństwo warunkowe mamy:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Zauważmy najpierw, że gdy liczymy prawdopodobieństwa wystepujące z prawej strony tych wzorów możemy przyjąć, że przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω to zbiór możliwych wyników czterech rzutów kostką, $|\Omega| = 6^4$ i skorzystać z modelu klasycznego. Wtedy:

- $|A| = \binom{4}{2} \cdot 3^2 \cdot 3^2$ (gdzie kolejne elementy wzoru odpowiadają za wybór miejsc na liczby parzyste, wybór liczb parzystych i wybór liczb nieparzystych), więc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{4}{2} \cdot 3^2 \cdot 3^2}{6^4} = \frac{3}{8},$$

- $|B| = \binom{4}{1} \cdot 5^3$ (gdzie kolejne elementy wzoru odpowiadają za wybór miejsca na szóstkę, wybór pozostałych liczb), więc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{4}{1} \cdot 5^3}{6^4} = \frac{5^3}{4 \cdot 3^4},$$

- $|A \cap B| = \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2 \cdot 3^2$ (gdzie kolejne elementy wzoru odpowiadają za wybór miejsca na szóstkę, wybór miejsca na drugą liczbę parzystą, wybór drugiej liczby parzystej, wybór liczb nieparzystych), więc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2 \cdot 3^2}{6^4} = \frac{1}{6}.$$

Po wstawieniu powyższych wartości do wzorów na prawdopodobieństwo warunkowe i wykonaniu odpowiednich przekształceń otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2 \cdot 3^3}{5^3} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{4}{9}.$$

Zauważmy, że możemy teraz z łatwością pokazać, że zdarzenia A i B nie są niezależne, korzystając albo z definicji, albo z faktu, że $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(A)$.

Pokażemy teraz alternatywne rozwiązanie tego zadania. Zauważmy, że prawdopodobieństwo zdarzenia A i zdarzenia B mogliśmy obliczyć inaczej, korzystając ze **schematu Bernoulliego**.

- W przypadku zdarzenia A mamy do czynienia z czterokrotnym ($n = 4$) powtórzeniem eksperymentu losowego (rzutu kostką), w którym sukcesem jest wyrzucenie parzystej liczby oczek, a porażką wyrzucenie nieparzystej liczby oczek. Interesuje nas sytuacja, w której otrzymamy dokładnie 2 sukcesy. Zatem możemy skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie dwóch sukcesów w schemacie Bernoulliego z parametrami $n = 4$ i $p = \frac{1}{2}$.

$$\mathbb{P}(A) = \tau_2 = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$

- W przypadku zdarzenia B mamy do czynienia z czterokrotnym ($n = 4$) powtórzeniem eksperymentu losowego (rzutu kostką), w którym sukcesem jest wyrzucenie szóstki, a porażką wyrzucenie czegokolwiek innego. Interesuje nas sytuacja, w której otrzymamy dokładnie 1 sukces. Zatem możemy skorzystać ze wzoru na prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie jednego sukcesu w schemacie Bernoulliego z parametrami $n = 4$ i $p = \frac{1}{6}$.

$$\mathbb{P}(B) = \tau_1 = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-1} = \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^3}{4 \cdot 3^4}.$$

Umiejętność dostrzegania, że w danym zadaniu możemy skorzystać z gotowych wzorów (wystepujących w schemacie Bernoulliego, czy tak jak w poprzednim zadaniu w rozkładzie geometrycznym) może w istotny sposób ułatwić rozwiązanie zadania. Dlatego przy rozwiązywaniu zadań domowych proszę zwrócić uwagę, w których z nich pojawiają się te wzory. Jednocześnie to zadanie miało zwrócić uwagę na fakt, że te wzory nie biorą się znikąd i przynajmniej gdy dotyczą one doświadczeń powiązanych z modelem klasycznym powinniśmy być w stanie wyprowadzić je samodzielnie.