Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
11. Zmienne losowe ciągłe wielowymiarowe.

Dodatek A. Zadania na ćwiczenia

Zadanie A.1. *Stwierdzono, że czas świecenia w godzinach żarówki pewnej marki jest zmienną losową T, spełniającą warunek:*

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-t/c} \quad \textit{dla każdego } t \geqslant 0,\ c = 1000.$$

(a) Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej T.

Zauważmy najpierw, że skoro zmienna losowa T wyraża czas świecenia żarówki, to dla $t < 0$ zachodzi:

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t) = 0.$$

Z kolei dla $t \geqslant 0$ mamy:

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leqslant t) = 1 - \mathbb{P}(T > t) = 1 - e^{-t/1000}.$$

Zatem dystrybuanta zmiennej losowej T wyraża się wzorem:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 - e^{-t/1000} & \text{dla } t \geqslant 0. \end{cases}$$

(b) Wyznacz gęstość zmiennej losowej T.

Przypomnijmy, że dla funkcji wykładniczej e^x i ustalonego $a \in \mathbb{R}$ mamy:

$$(e^x)' = e^x \quad \text{oraz} \quad (e^{ax})' = ae^{ax}.$$

Korzystając z zależności $f_T(t) = F_T'(t)$ otrzymujemy:

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{1}{1000} e^{-t/1000} & \text{dla } t \geqslant 0. \end{cases}$$

(c) Korzystając z dystrybuanty, wyznacz prawdopodobieństwo, że żarówka będzie świecić dłużej niż 100, ale krócej niż 500 godzin.

Ponieważ T jest ciągłą zmienną losową, mamy:

$$\mathbb{P}(100 < T < 500) = \mathbb{P}(100 < T \leqslant 500) = F_T(500) - F_T(100) = e^{-1/10} - e^{-1/2}.$$

(d) Oblicz to samo prawdopodobieńtwo, korzystając z gęstości.

$$\mathbb{P}(100 < T < 500) = \int_{100}^{500} f_T(t)dt = \int_{100}^{500} \frac{1}{1000} e^{-t/1000} = \left[-e^{-t/1000} \right]_{100}^{500} = e^{-1/10} - e^{-1/2}$$

Zadanie A.2. *Dystrybuanta zmiennej losowej (X, Y) wyraża się wzorem*

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (1 - \exp(-x))(1 - \exp(-2y)) & \text{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) *Znajdź gęstość $f_{X,Y}$.*

Szukaną funkcję wyznaczymy różniczkując dystrybuantę $F_{X,Y}(x, y)$ najpierw po zmiennej x, a potem po zmiennej y, czyli:

$$f_{X,Y}(s, t) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y}\Big|_{x=s, y=t}.$$

Przypomnijmy, że dla funkcji wykładniczej $\exp(x) = e^x$ mamy:

$$\frac{\partial \exp(x)}{\partial x} = \exp(x) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \exp(cx)}{\partial x} = c \exp(cx).$$

A zatem

$$\frac{\partial^2 (1 - \exp(-x))(1 - \exp(-2y))}{\partial x \partial y}\Big|_{x=s, y=t} = \frac{\partial \exp(-s)(1 - \exp(-2y))}{\partial y}\Big|_{y=t} = 2 \exp(-s - 2t).$$

Tak więc gęstość wektora losowego (X, Y) dana jest wzorem:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 \exp(-x - 2y) & \text{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(b) *Znajdź dystrybuanty F_X, F_Y i gęstości f_X, f_Y.*

Wiemy, że

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t)\, dt,$$

oraz

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y).$$

Ponieważ dla $x \geqslant 0$ mamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t)\, dt = \int_0^{\infty} 2 \exp(-x - 2t)\, dt = 2 \exp(-x) \int_0^{\infty} \exp(-2t)\, dt = 2 \exp(-x) \left[\frac{-\exp(-2t)}{2} \right]_0^{\infty} = 2 \exp(-x) \cdot \frac{1}{2} = \exp(-x),$$

a dla $x < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dt = 0,$$

gęstość zmiennej losowej X wyraża się wzorem:

$$f_X(x) = \begin{cases} \exp(-x) & \text{dla } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Z kolei dla wyznaczenia dystrybuanty liczymy, w przypadku $x \geqslant 0$, granicę:

$$\lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y \to \infty} (1 - \exp(-x))(1 - \exp(-2y)) = 1 - \exp(-x)$$

oraz, dla $x < 0$, granicę:

$$\lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y \to \infty} 0 = 0.$$

Zatem dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x) & \text{dla } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Analogicznie liczymy gęstość i dystrybuantę zmiennej losowej Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\exp(-2y) & \text{dla } y \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } y < 0. \end{cases}$$

oraz

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \exp(-2y) & \text{dla } y \geqslant 0, \\ 0 & \text{dla } y < 0. \end{cases}$$

(c) *Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?*

Tak, ponieważ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Rzeczywiście, dla $x < 0$ lub $y < 0$ obie strony równania się zerują, natomiast dla $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$ mamy:

$$f_{X,Y}(x,y) = 2\exp(-x-2y) = \exp(-x) \cdot 2\exp(-2y) = f_X(x)f_Y(y).$$

(d) *Korzystając z dystrybuanty $F_{X,Y}$ znajdź $\mathbb{P}\left(-1 \leqslant X \leqslant 4, 2 \leqslant Y < 3\right)$.*

Ponieważ (X,Y) jest zmienną losową ciągłą, mamy:

$$\mathbb{P}\left(-1 \leqslant X \leqslant 4, 2 \leqslant Y < 3\right) = \mathbb{P}\left(-1 < X \leqslant 4, 2 < Y \leqslant 3\right).$$

Bezpośrednio ze wzoru obliczamy:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(-1 \leqslant X \leqslant 4, 2 \leqslant Y < 3\right) &= F_{X,Y}(4,3) - F_{X,Y}(4,2) - F_{X,Y}(-1,3) + F_{X,Y}(-1,2) \\ &= (1-\exp(-4))(1-\exp(-6)) - (1-\exp(-4))(1-\exp(-4)) - 0 + 0 \\ &= (1-\exp(-4))(1-\exp(-6) - (1-\exp(-4))) \\ &= (1-\exp(-4))(\exp(-4) - \exp(-6)). \end{aligned}$$

Zadanie A.3. *Gęstość zmiennej losowej (X, Y) wyraża się wzorem*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y & \text{dla } (x,y) \text{ należących do prostokąta o wierzchołkach } (0,0),(4,0),(4,1),(0,1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

(a) *Wylicz gęstość f_X oraz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(\sqrt{X})$.*

Do wyznaczenia gęstości f_X posłużymy się wzorem:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t)\,dt\,.$$

Ponieważ dla $x \in [0,4]$ mamy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t)\,dt = \int_0^1 \frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

a dla $x \notin [0,4]$ mamy $f_{X,Y}(x,y) = 0$, gęstość zmiennej losowej X wyraża się wzorem:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dla } x \in [0,4], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Pozostaje wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej $\sqrt{X}$:

$$\mathbb{E}(\sqrt{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{t} f_X(t)dt = \int_0^4 \frac{\sqrt{t}}{4}dt = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{3}.$$

(b) *Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?*

Aby sprawdzić niezależność wyznaczymy na początek gęstość zmiennej losowej Y. Dla $y \in [0,1]$ mamy:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,y)\,ds = \int_0^4 \frac{y}{2}\,ds = \left[\frac{sy}{2}\right]_0^4 = 2y,$$

a dla $y \notin [0,1]$ mamy oczywiście $f_Y(y) = 0$, bo dla takich y gęstość rozkładu łącznego $f_{X,Y}(x,y)$ się zeruje. Zatem otrzymujemy:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{dla } y \in [0,1], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Teraz możemy łatwo pokazać, że zmienne losowe X i Y są niezależne. Rzeczywiście, w przypadku gdy $x \in [0,4]$ i $y \in [0,1]$ mamy:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2y = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Natomiast w pozostałych przypadkach mamy:

$$f_{X,Y}(x,y) = 0 = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

(c) *Oblicz $\mathbb{P}(1/2 \leqslant X \leqslant 3/2)$.*

Ponieważ dystrybuanta zmiennej losowej X jest ciągła, mamy:

$$\mathbb{P}(1/2 \leqslant X \leqslant 3/2) = F_X(3/2) - \lim_{t \to 1/2^-} F_X(t) = F_X(3/2) - F_X(1/2) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Możemy również obliczyć $\mathbb{P}(1/2 \leqslant X \leqslant 3/2)$ korzystając z gęstości f_X:

$$\mathbb{P}(1/2 \leqslant X \leqslant 3/2) = \int_{1/2}^{3/2} f_X(t)\,dt = \int_{1/2}^{3/2} \frac{1}{4}\,dt = \left[\frac{t}{4}\right]_{1/2}^{3/2} = \frac{1}{4}.$$

(d*) *Oblicz $\mathbb{E}(XY)$.*

Przypomnijmy, że

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(s,t) f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds.$$

Zatem

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} st\, f_{X,,Y}(s,t)\,dt\,ds = \int_0^4\int_0^1 \frac{st^2}{2}\,dt\,ds = \int_0^4 \left[\frac{st^3}{6}\right]_0^1 ds = \int_0^1 \frac{s}{6}\,ds = \left[\frac{s^2}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$