

# Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 3.3/2023

**Mieczysław Cichoń - WMI UAM**

# Całka oznaczona. Pole obszaru.

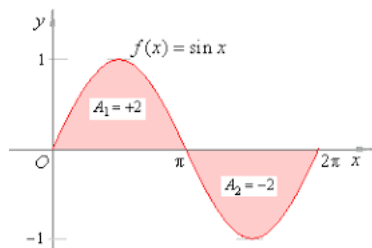
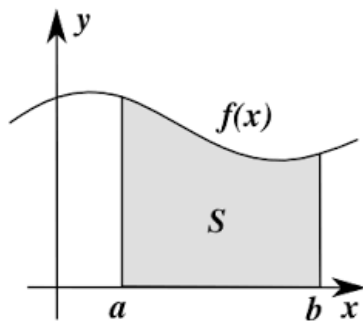
Punktem wyjścia naszych rozważań będzie **powiązanie całki (nieoznaczonej) z polem obszaru**, prowadzące do pojęcia całki oznaczonej.

**Definicja.** Niech  $F$  będzie funkcją pierwotną dla funkcji ciągłej  $f$  w przedziale  $[a, b]$ . Wtedy *całką oznaczoną* z funkcji  $f$  w przedziale  $[a, b]$  nazywamy liczbę  $F(b) - F(a)$  i oznaczamy ją

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Liczby  $a$  i  $b$  nazywamy odpowiednio *dolną i górną granicą całkowania*. Piszemy również  $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .

Różnica  $F(b) - F(a)$  ma swoją interpretację geometryczną jako pole obszaru ograniczonego krzywą  $y = f(x)$  oraz osią  $OX$ , gdy  $f$  jest dowolną funkcją ciągłą i nieujemną w  $[a, b]$ .



**Twierdzenie.** (o podstawowych własnościach całki oznaczonej). *Niech  $f$  i  $g$  będą funkcjami ciągłymi w  $[a, b]$ . Wtedy*

$$1) \quad \int_a^b 0 dx = 0$$

$$2) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad , \quad a < b$$

$$3) \quad \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad ,$$

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$4) \quad \text{Jeżeli } a < c < b, \text{ to}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

5) Jeżeli  $f(x) \leq g(x)$  w  $[a, b]$ , to

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

W szczególności, gdy  $f(x) \geq 0$  w  $[a, b]$ , to  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

$$6) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

7) Jeżeli  $0 < h \leq b - a$ , to istnieje taka liczba  $\vartheta \in (0, 1)$ , że  $\int_a^{a+h} f(x) dx = hf(a + \vartheta h)$ ; w szczególności

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b - a) \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

8) Jeżeli  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  dla  $a \leq x \leq b$ , to  $F'(x) = f(x)$  w  $[a, b]$ . W szczególności, jeżeli  $F$  ma ciągłą pochodną  $F'$  w  $[a, b]$ , to  $\int_a^x F'(x) dx = F(x) - F(a)$ .

Dalsze własności są analogiczne do całki nieoznaczonej:

**Twierdzenie.** (o całkowaniu całek oznaczonych przez podstawianie). *Niech funkcja  $f$  będzie ciągła w  $[a, b]$  i niech funkcja  $g$  ma ciągłą pochodną  $g'$  w  $[\alpha, \beta]$ ,  $a \leq g(t) \leq b$  dla  $t \in [\alpha, \beta]$ ,  $g(\alpha) = a$ ,  $g(\beta) = b$ . Wtedy*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt.$$

**Twierdzenie.** (o całkowaniu przez części całek oznaczonych). *Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  mają pochodne  $f'$  i  $g'$  ciągłe w  $[a, b]$ , to*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx ,$$

gdzie  $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$  .

Dalsze zastosowania całki - będą nieco później...

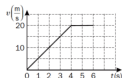
# Czy całka taka była już stosowana w szkole?

Tak naprawdę już w klasie 8 - tam z wykresu zmiennej prędkości w czasie oblicza się drogę = pole pod krzywą - ale są to trójkąty (ruch jednostajnie przyspieszony lub opóźniony, albo trapezy (ruch zmienny: jednostajny lub jednostajnie przyspieszony). Ponieważ  $v = s' = ds/dt$ , to droga przebyta w czasie od  $t_1$  do  $t_2$  to

$$s = s(t_1) - s(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

1. Podaj przykład ruchu przyspieszonego.

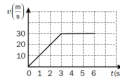
2. Wykres przedstawia zależność szybkości samochodu od czasu.



- a) Podaj przyrost szybkości samochodu w pierwszych 6 sekundach ruchu. *20 m/s*  
b) Rozpatrz cztery pierwsze sekundy ruchu i odpowiedź, o ile wzrosła szybkość w każdej sekundzie. *5 m/s*  
c) W pierwszych czterech sekundach ruchu samochód poruszał się ruchem *j. przyspieszonym*.  
d) Od czwartej do szóstej sekundy samochód poruszał się ruchem *jednostajnym* z szybkością *20 m/s*.

1. Podaj przykład ruchu opóźnionego.

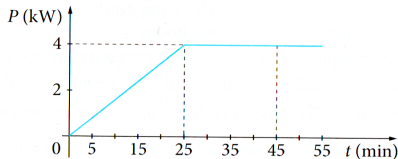
2. Wykres przedstawia zależność szybkości motocykla od czasu.



- a) Podaj przyrost szybkości motocykla w pierwszych 6 sekundach ruchu.  
b) Rozpatrz trzy pierwsze sekundy ruchu i odpowiedź, o ile wzrosła szybkość w każdej sekundzie.  
c) W pierwszych trzech sekundach ruchu motocykl poruszał się ruchem \_\_\_\_\_.  
d) Od trzeciej do szóstej sekundy motocykl poruszał się ruchem \_\_\_\_\_ z szybkością \_\_\_\_\_.

A to ze zbioru zadań:

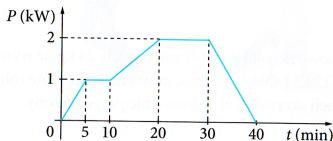
Wykres przedstawia zależność mocy pewnego urządzenia od czasu.



Na jego podstawie oblicz pracę wykonaną przez to urządzenie:

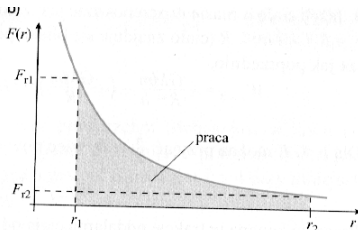
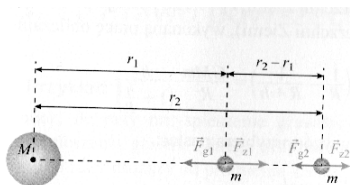
- a) w czasie pierwszych 25 minut,
- b) w czasie 45 minut.

Wykres na rysunku przedstawia zależność mocy pewnego urządzenia od czasu. Na jego podstawie oblicz pracę wykonaną przez to urządzenie w czasie 40 minut.





No i ktoś zaprzeczy, że **na fizyce potrzebne są całki?**



**Praca sił pola grawitacyjnego** jest równa pracy sił zewnętrznych ze znakiem minus (praca sił zewnętrznych jest wykonywana przeciw siłom grawitacyjnym):

$$W_{\text{pola}1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2} = -GMm \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Pole grawitacyjne jest **połem zachowawczym**. Oznacza to, że praca zależy jedynie od początkowego i końcowego położenia ciała. Nie zależy od kształtu toru, po jakim ciało się przemieszczało.

(o klasie I: prędkość i przyspieszenie - nie ma co dodatkowo wspominać)

W dużym uproszczeniu:

- ▶ droga jako całka z prędkości,
- ▶ prędkość jako całka z przyspieszenia,
- ▶ praca jako całka z działającej siły,
- ▶ zmiana pędu jako całka z działającej siły,
- ▶ przepływający ładunek elektryczny jako całka ze zmiennego natężenia prądu,
- ▶ momenty bezwładności brył sztywnych i momenty statyczne,
- ▶ środki ciężkości,
- ▶ ...

Wcześniej omówiona została całka oznaczona tzn. całka z funkcji ciągłej w przedziale  $[a, b]$  określona w przypadku, gdy funkcja całkowna  $f$  była ciągła (ograniczona) oraz przedział  $[a, b]$  był ograniczony.

Na początek zdefiniujemy całkę niewłaściwą funkcji określonej na przedziale postaci  $[a, +\infty)$ , następnie  $(-\infty, b]$ , a dalej na całym zbiorze liczb rzeczywistych.

## Całka niewłaściwa I rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$ .

Niech  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na każdym z przedziałów domkniętych  $[a, \beta]$ , gdzie  $a < \beta$ .

**Całką niewłaściwą Riemanna I rodzaju funkcji  $f$**

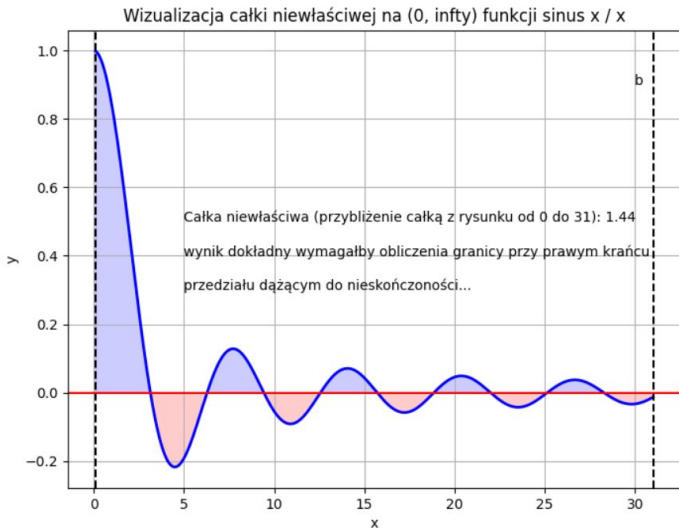
nazywamy granicę  $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^\beta f(x) dx$  i oznaczamy ją symbolem

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x) dx.$$

## Całka niewłaściwa I rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$ .

Jeżeli powyższa granica istnieje i jest skończona, to mówimy, że całka niewłaściwa  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  jest **zbieżna**, natomiast jeżeli granica ta nie istnieje lub jest niewłaściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  jest **rozbieżna**.

# Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej I rodzaju w przedziale $[a, +\infty)$ .



# Przykładowe zastosowania w informatyce.

- ▶ gęstości i dystrybuanty rozkładów zmiennych losowych,
- ▶ całka Fouriera i transformata Fouriera (i inne transformaty),
- ▶ splot funkcji (filtry itp.),
- ▶ funkcje specjalne - gamma i beta Eulera,
- ▶ kryterium całkowe zbieżności szeregów,
- ▶ ...

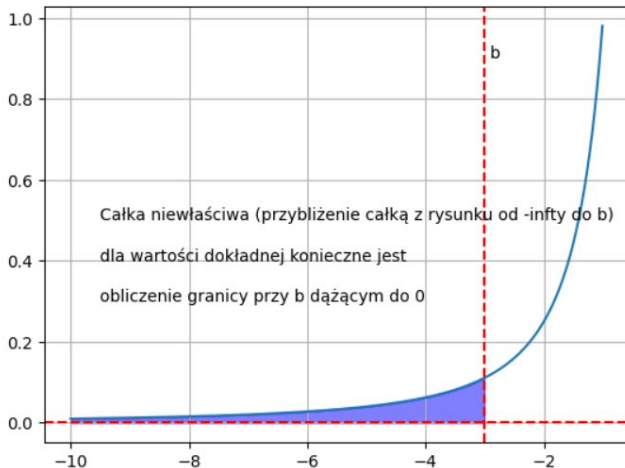
Definicja. Całka niewłaściwa I rodzaju w przedziale  $(-\infty, b]$ .

W analogiczny sposób definiuje się całkę niewłaściwą Riemanna I rodzaju  $\int_{-\infty}^b f(x)dx$  funkcji  $f$  określonej na przedziale  $(-\infty, b]$ , jak również pojęcia jej zbieżności i rozbieżności. Przyjmujemy wówczas, że

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^b f(x)dx.$$



# Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej I rodzaju w przedziale $(-\infty, b]$ .



Definicja. Całka niewłaściwa I rodzaju w zbiorze liczb rzeczywistych.

Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją całkowaną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym  $[\alpha, \beta]$  zawartym w  $\mathbb{R}$ . **Całkę niewłaściwą Riemanna I rodzaju** funkcji  $f$  w  $\mathbb{R}$  definiujemy jako

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

gdzie  $a$  jest dowolnie wybranym punktem z  $\mathbb{R}$ .

# Całka niewłaściwa I rodzaju w zbiorze liczb rzeczywistych.

Jeżeli obie całki w powyższej sumie są zbieżne, to mówimy, że całka  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  jest zbieżna. Gdy któraś z tych całek nie istnieje lub jest rozbieżna, to mówimy, że całka  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  jest rozbieżna.

Należy podkreślić, że jeżeli całka  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  jest zbieżna, to można wykazać, że jej wartość nie zależy od wyboru punktu  $a \in \mathbb{R}$  w powyższej definicji.

# Kryterium całkowite zbieżności szeregów.

Kolejnym klasycznym **zastosowanie całek niewłaściwych** jest badanie za ich pomocą zbieżności szeregów (a to ważne w informatyce).

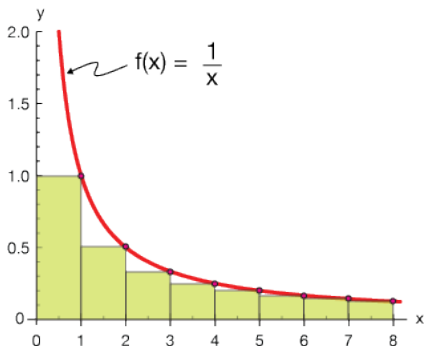
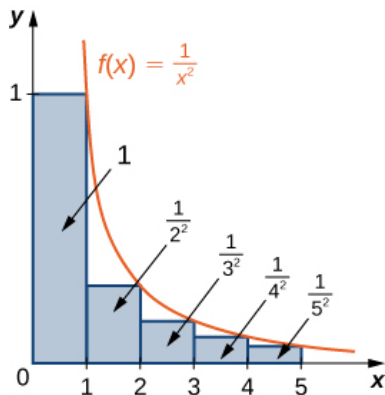
**Twierdzenie.** Ciąg  $(a_n)$  zadany jest poprzez nieujemną funkcję nierosnącą określoną na  $(0, \infty)$  wzorem  $a_n = f(n)$ .

Wtedy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny (do granicy właściwej) wtedy i tylko wtedy gdy zbieżna (do granicy właściwej) jest całka

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

[Dowód] Całkę od 1 do  $n$  można oszacować z góry przez sumę całkową  $s_{n-1}$  a z dołu przez  $s_n - a_1$ . Dalej skorzystać – w przypadku zbieżności – z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym, a w przypadku rozbieżności – z twierdzenia o trzech ciągach.

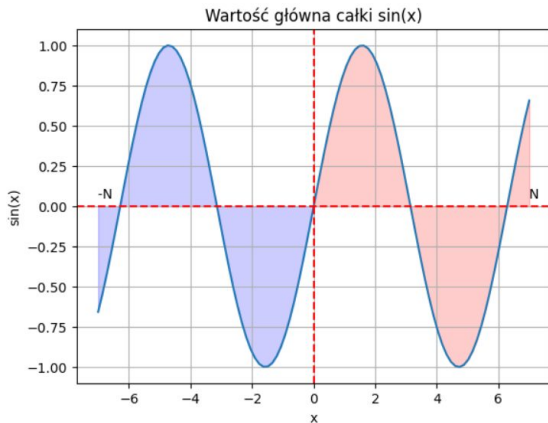
# Interpretacja graficzna.



# Wartość główna całki niewłaściwej.

W przypadku, gdy badamy **jednoczesną** granicę w obu kierunkach mówimy o **wartości głównej całki**

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx.$$



## Całka z funkcji nieograniczonej = całka niewłaściwa II rodzaju.

Istnieje też inne pojęcie całki niewłaściwej. Tu także nie możemy stosować definicji Riemanna, gdyż punkty pośrednie mogłyby być dowolnie duże. I również wykorzystamy granice. Niech  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie taka, że  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty$  (czyli:  $a$  jest punktem niewłaściwym).

Wówczas całkę niewłaściwą z funkcji nieograniczonej definiujemy jako

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a-} \int_c^a f(x) dx.$$

Pamiętajmy: tylko **jeden** punkt niewłaściwy w przedziale i to na jego końcu... A gdy jest ich więcej? Musimy podzielić przedział całkowania tak, aby w każdym podprzedziale znalazł się tylko jeden taki punkt i to jeszcze jako jego punkt końcowy (lewy bądź prawy). W każdym takim podprzedziale stosujemy powyższą definicję.

Ciąg postaci

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

jest sumowalny (czyli szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny) dla  $\alpha > 1$ ,

a niesumowalny dla  $0 < \alpha \leq 1$  (mimo że wyrazy zawsze dążą do zera! - zachodzi warunek konieczny zbieżności szeregu).

**Uwaga:** ten wynik ma natychmiastowe zastosowanie przy badaniach **dyskretnej transformaty Fouriera!** Zbieżność występujących tam szeregów jest zapewniona poprzez te kryterium wraz z warunkami nakładanymi na całki Fouriera! O tym - choć bardzo krótko - pod koniec wykładu.



# Funkcja błędu.

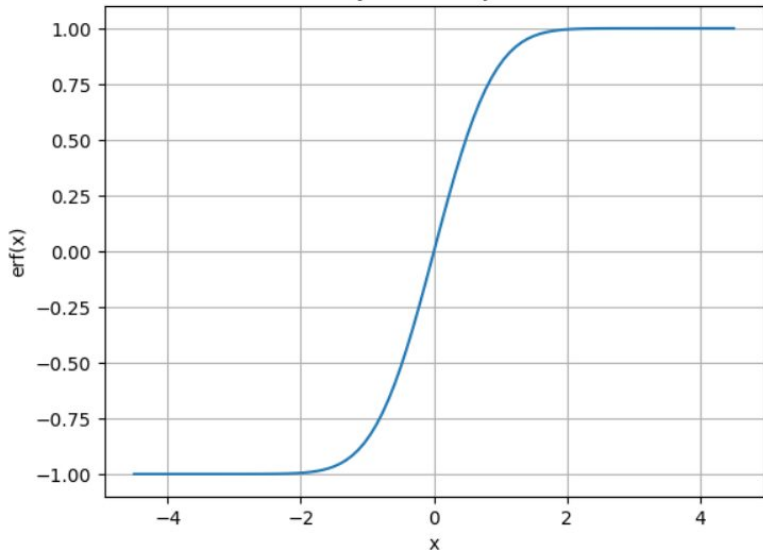
Jednym z ciekawszych obiektów w informatyce związanych z całkami niewłaściwymi jest **funkcja błędu** (funkcja błędu Gaussa). Funkcja błędu Gaussa to funkcja nieelementarna, która występuje np. w zastosowaniach rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej oraz w informatyce (m.in. w analizie danych). Jest zdefiniowana jako

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Funkcja *erf* jest też powiązana z "uzupełniającą funkcją błędu" *erfc*:

$$\text{erfc}(x) \equiv 1 - \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt.$$

Wykres funkcji erf



1. Funkcja błędu *erf* jest funkcją, która jest powszechnie stosowana w informatyce w celu obliczania wartości dystrybuanty normalnej. Dystrybuanta normalna jest funkcją rozkładu prawdopodobieństwa dla zmiennej losowej o rozkładzie normalnym, który jest często wykorzystywany w statystyce i analizie danych.

2. Funkcja błędu może być również stosowana w innych dziedzinach informatyki, takich jak przetwarzanie sygnałów, w szczególności w filtracji cyfrowej sygnałów, gdzie funkcja ta jest używana do obliczania filtrów Gaussowskich, które znajdują zastosowanie w dziedzinach takich jak przetwarzanie obrazów i wideo. Funkcja *erf* jest używana do opisu własności filtrów, zwłaszcza w dziedzinie sygnałów o rozkładzie normalnym, a także do obliczania transformaty Fouriera i spektrum mocy sygnałów.

3. Inną zastosowaniem funkcji błędu w informatyce jest w kryptografii, gdzie funkcja ta jest używana do generowania liczb losowych z rozkładu normalnego, które są następnie używane w algorytmach szyfrowania.

4. Funkcja błędu może również być stosowana w analizie numerycznej i optymalizacji, gdzie jest używana do obliczania wartości funkcji kumulacyjnej dla funkcji o rozkładzie normalnym lub do obliczania wartości całki, która jest ważnym narzędziem w wielu dziedzinach matematyki stosowanej i naukach inżynierskich.

5. Inżynieria elektryczna: funkcja *erf* jest używana do opisu szumu elektrycznego, który jest opisywany przez rozkład normalny.

6. Mechanika kwantowa: jest używana do opisu dyfuzji cząstek w 1D "informatyka kwantowa".

Z funkcją błędu związane są tzw. **całki Fresnela**, tematu nie rozwijamy (*zainteresowani* funkcją *erf* znajdą odpowiednie informacje), ale to dla nas ciekawy przykład: całki są zbieżne mimo, że funkcja podcałkowa nie ma granicy w nieskończoności!

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx \quad , \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx.$$

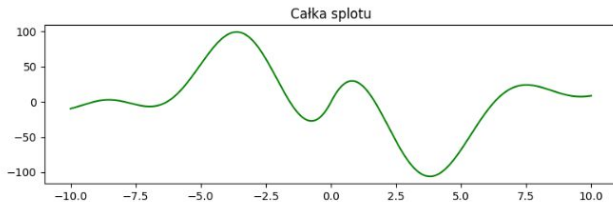
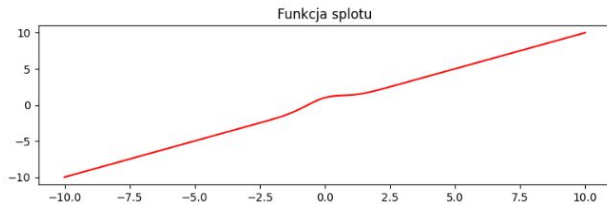
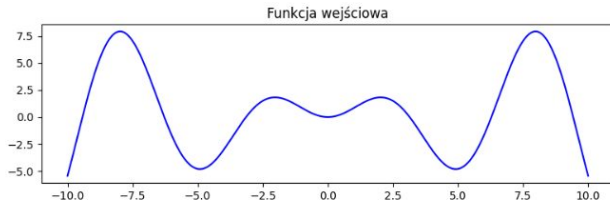
Splotem dwu funkcji  $f(t)$  i  $g(t)$  nazywamy funkcję

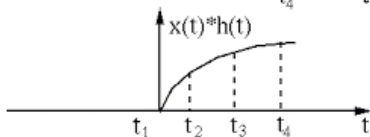
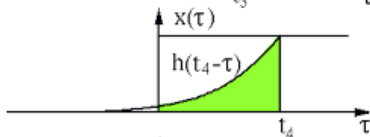
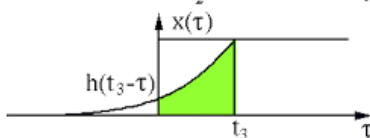
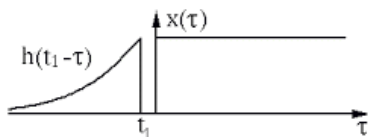
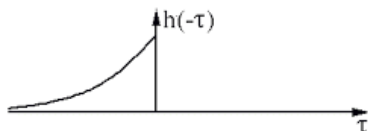
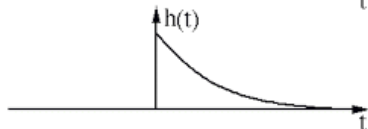
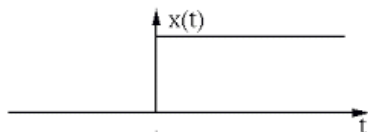
$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

W zastosowaniach informatycznych zachodzi niekiedy potrzeba dyskretyzacji funkcji i przyjęcie miary dyskretnej, co daje splot (dyskretny):

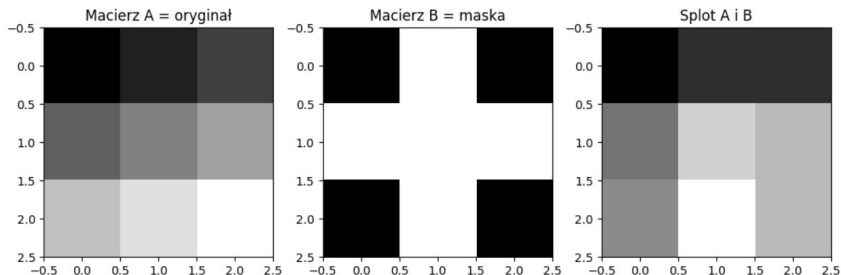
$$(r * s)_j := \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} r_k \cdot s_{j-k}$$

Wzór wynika: albo z przyjęcia miary dyskretnej (ale to wymaga znajomości teorii miary i całki), albo po prostu z dyskretyzacji całki (co pokażemy później - całka Riemanna) - wprost z definicji.





Na ogół w informatyce splatamy: sygnały (ja na poprzednim slajdzie), czy obrazy. Z reguły - choć jak pokażemy spłot jest przemienny - jedna z funkcji reprezentuje badany obiekt (oryginał), a druga operację na nim wykonywaną (maskę, filtr, jadro,...).



Szczegóły - za chwilę...

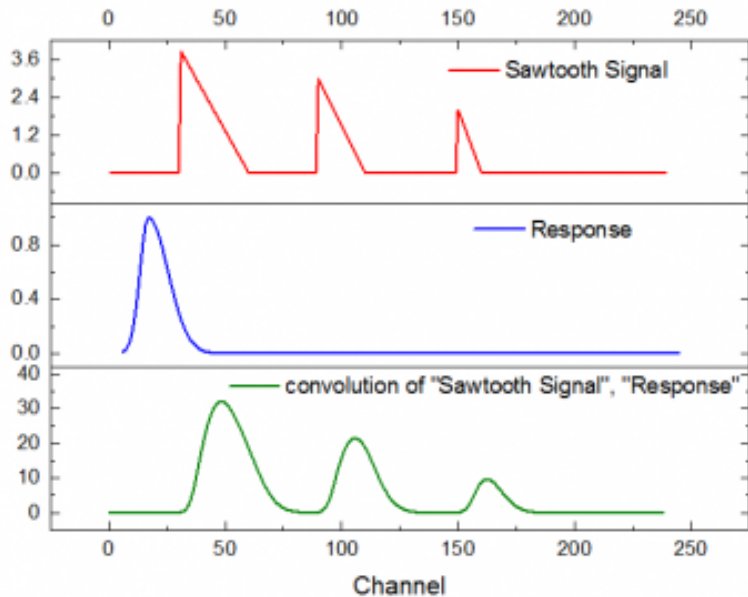


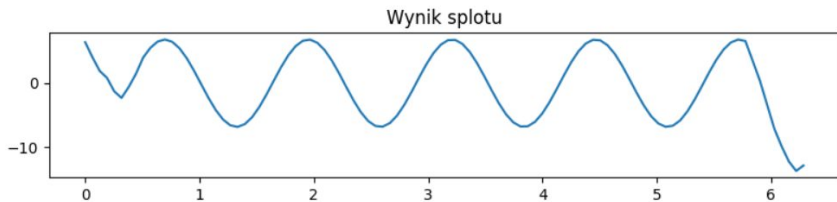
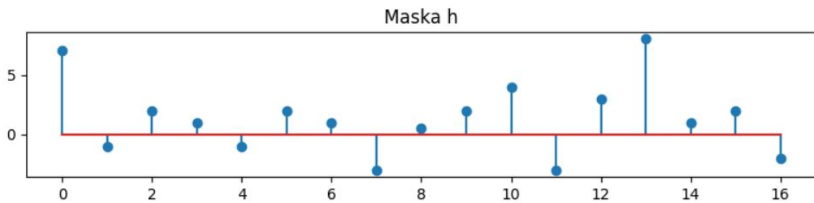
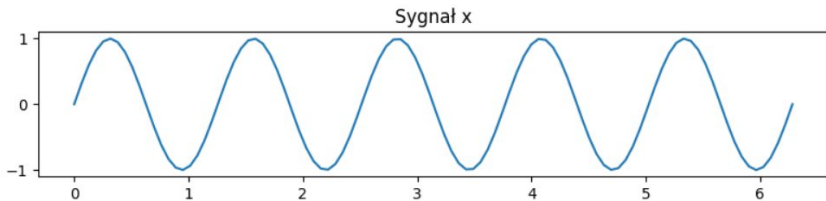
Splot jest operacją przemianową, tzn.

$$r * s = s * r.$$

Zazwyczaj jednak w zastosowaniach te dwie splatane funkcje mają inne znaczenie. Np. w **teorii sygnałów** jedna z nich, powiedzmy  $s$ , reprezentuje “prawdziwy” sygnał (niezaburzone wyniki) i jest funkcją o (przynajmniej teoretycznie) nieograniczonej dziedzinie. Funkcja  $r$  (druga funkcja) jest natomiast funkcją odpowiedzi aparatury, i ma skończoną dziedzinę, zazwyczaj odcinek zawierający zero (uzupełniamy ją do prostej kładąc zero wszędzie poza naturalną dziedziną).

Operacja splotu  $r * s$  opisuje wówczas **rozmycie sygnału (danych)**  $s$  zgodnie z przepisem danym funkcją odpowiedzi  $r$ .





Mając dane funkcje obrazów  $f : [0, w] \times [0, h] \rightarrow [0, 1]$  oraz  $g : [0, v] \times [0, u] \rightarrow [0, 1]$ , splotowi obrazów będzie odpowiadała następująca funkcja  $s : [0, w + v] \times [0, u + h] \rightarrow [0, 1]$

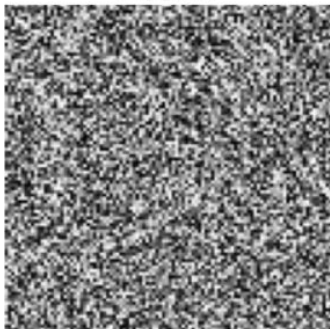
$$\forall_{x \in [0, w + v], y \in [0, u + h]}$$

$$s(x, y) = \int_{\max\{0, y-u\}}^{\min\{y, h\}} \left( \int_{\max\{0, x-v\}}^{\min\{x, w\}} f(z, t) \cdot g(x-z, y-t) dz \right) dt$$

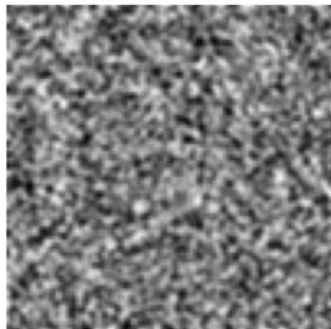
albo oczywiście jej wersja dyskretna (obrazy binarne).

W przypadkach barwnych problem rozkładamy na odrębne kanały kolorów RGB.

Oryginał



Splot z maską



Nie należy chyba się więc dziwić, że operacja splotu jest dostępna w wielu bibliotekach - tylko trzeba ją poznać i dobrać lub **utworzyć własne** filtry... Np. **scipy.signal** w Pythonie.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import convolve2d

# Tworzenie przykładowej tablicy
img = np.random.rand(100, 100)

# Definiowanie maski
mask = np.array([[1, 2, 1],
                  [2, 4, 2],
                  [1, 2, 1]])

# Normalizacja maski
mask = mask / np.sum(mask)

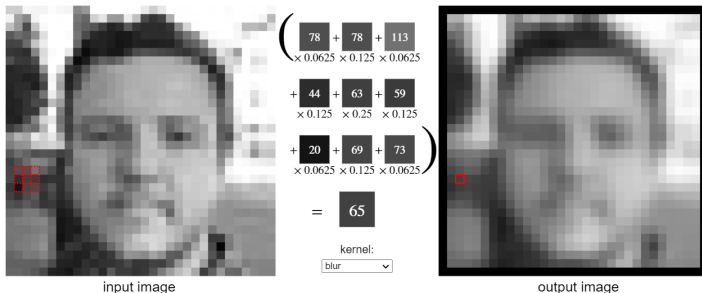
# Wykonanie splotu
result = convolve2d(img, mask, mode='same', boundary='symm')

# Wyświetlenie obrazu oryginalnego obrazu i wyniku splotu
fig, axs = plt.subplots(1, 2)
axs[0].imshow(img, cmap='gray')
axs[0].set_title('Oryginał')
axs[0].axis('off')
axs[1].imshow(result, cmap='gray')
axs[1].set_title('Splot z maską')
axs[1].axis('off')
plt.show()
```

# Do lektury własnej...

ciekawy materiał o splocie obrazów - proszę poczytać (po angielsku) - interaktywna strona, można zmieniać filtry lub utworzyć własne...

Below, for each 3x3 block of pixels in the image on the left, we multiply each pixel by the corresponding entry of the kernel and then take the sum. That sum becomes a new pixel in the image on the right. Hover over a pixel on either image to see how its value is computed.

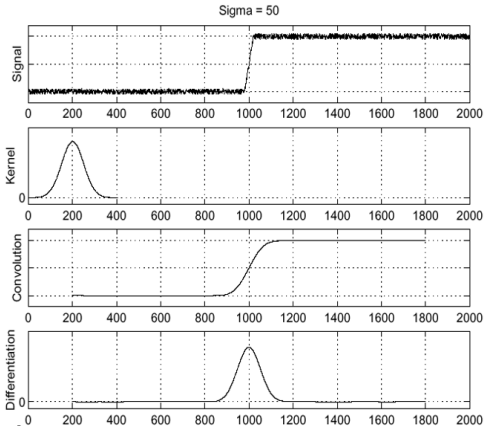


Można też [tutaj](#) - po polsku.

A to w badaniach obrazu...

Where is the  
edge?  $h \star f$

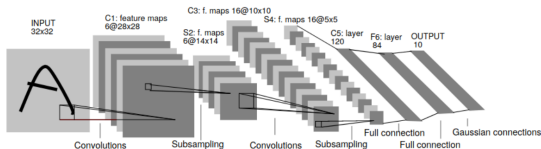
$$\frac{\partial}{\partial x}(h \star f)$$





Splotowe sieci neuronowe znane również pod nazwą “konwolucyjne sieci neuronowe” (ang. convolutional neural networks – CNN) są odmianą sieci neuronowych, zoptymalizowanych pod kątem przetwarzania obrazów.

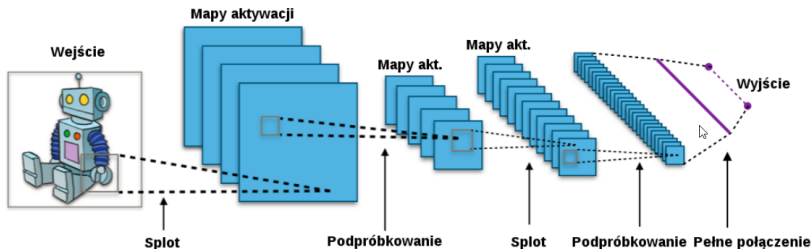
Podstawową różnicą w stosunku do zwykłych sieci jest stosowanie wielowymiarowej operacji splotu za pomocą zestawu filtrów, których współczynniki dobierane są podczas trenowania sieci. Dzięki tej operacji powstają mapy cech (zwane również mapami aktywacji), na których, w kolejnych warstwach ponownie dokonywana jest operacja splotu. Dodatkowo w kolejnych warstwach zmniejszany jest rozmiar obrazów (map aktywacji) – dokonywana jest operacja podpróbkowania obrazów (ang. pooling).



**Rysunek:** Rysunek architektury pierwszej sieci LeCun-5 z 1989 z przełomowego artykułu: LeCun, Y., Bottou, L., Bengio, Y., & Haffner, P. (1998). Gradient-based learning applied to document recognition. Proceedings of the IEEE, 86(11), 2278-2324.

Każda mapa cech (ang. feature map) wykrywa inną cechę. Pierwsza warstwa konwolucyjna może się nauczyć wykrywać stosunkowo proste cechy np.: kąty ostre, przecięcia się linii itp. Kolejna warstwa na podstawie prostych cech z poprzedniej warstwy może wykrywać bardziej skomplikowane przedmioty. Jeszcze dalsza warstwa konwolucyjna na podstawie wcześniej rozpoznanych elementów może wykonywać detekcję ich cech itp. Ekstrakcja cech - od prostych do coraz bardziej abstrakcyjnych. Można wizualizować wartości wag z niższych warstw sieci konwolucyjnych na dwuwymiarowych obrazach i w ten sposób przeglądać jakie cechy są wykrywane. Bardzo abstrakcyjne cechy (z dalszych warstw) są znacznie trudniejsze do interpretacji przez człowieka.

# Schemat metody CNN.



Dzięki wykorzystaniu operacji splotu, sieci te są znacznie lepiej przystosowane do przetwarzania obrazów. Architektura sieci CNN umotywowana jest trzema założeniami:

- luźne połączenia między warstwami,
- współdzielenie wag między neuronami,
- reprezentacje niezależne względem przesunięć - a to

własność własność splotu!

# Całka Fouriera. Transformata Fouriera.

Badania funkcji okresowych na przedziale  $[-T, T]$  prowadzimy często poprzez **szeregi Fouriera**.

Przechodząc do granicy z  $t \rightarrow \infty$  we wzorach Eulera-Fouriera uzyskamy **całkę Fouriera** stanowiącą podstawę do **transformaty Fouriera**, więc i dyskretnej transformaty Fouriera...

To **całka niewłaściwa**:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

gdzie

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

# Rozmycie Gaussa.

Rozmycie obrazu przeważnie polega na tym, że jasność danego punktu obrazu zastępowana jest pewnego rodzaju uśrednioną wartością jasności punktów z jego otoczenia.

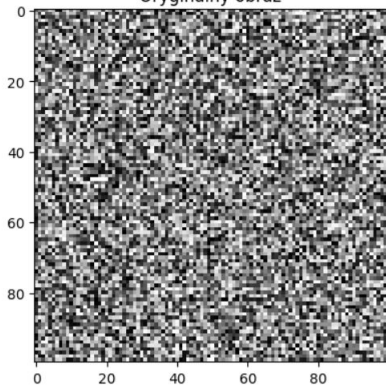
Taka właśnie idea przyświeca stosowaniu rozmycia Gaussa – dla danego punktu rozważa się wszystkie możliwe przesunięcia płaszczyzny obrazu, z prawdopodobieństwami wynikającymi z dwuwymiarowego rozkładu normalnego (Gaussa).

Wynikiem przekształcenia jest wartość oczekiwana jasności punktu po przesunięciu – oczywiście oznacza to, że najsilniej brane pod uwagę są obszary znajdujące się najbliżej rozważanego punktu. Specyficzny wzór na rozmycie Gaussa dla danej funkcji obrazu  $f : [0, w] \times [0, h] \rightarrow [0, 1]$  można by zatem zapisać następująco:

$$\forall_{x \in [0, w], y \in [0, h]}$$

$$s(x, y) = \int_0^h \left( \int_0^w f(z, t) \cdot \phi_{\mu, \sigma}(x - z) \cdot \phi_{\mu, \sigma}(y - t) dz \right) dt \quad (2)$$

Oryginalny obraz



Rozmyty obraz (promień = 5)

