

DODATEK A. ZADANIA NA ĆWICZENIA

**Zadanie A.1.** Zmienna losowa ciągła  $X$  ma dystrybuantę daną wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0, \\ cx^3 & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{dla } x \geq 1, \end{cases}$$

gdzie  $c$  jest pewną stałą. Znajdź wartość stałej  $c$ . Następnie wyznacz gęstość  $f(x)$ , wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}X$  i wariancję  $\text{Var}X$ .

Zacznijmy od tego, że skoro mamy do czynienia z ciągłą zmienną losową  $X$ , jej dystrybuenta  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  powinna być ciągła w każdym punkcie dziedziny, w szczególności w punktach  $x_0 = 0$  oraz  $x_1 = 1$ . Mamy zatem:

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} cx^3 = 0$$

oraz

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} cx^3 = c.$$

A zatem  $c = F(1) = 1$ .

Następnie wyznaczmy gęstość  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zmiennej losowej  $X$  pamiętając, że dla prawie wszystkich  $x$  zachodzi

$$f(x) = F'(x).$$

Przypomnijmy, że pochodna z funkcji stałej jest równa zero, natomiast pochodna z funkcji wielomianowej  $x^n$  po zmiennej  $x$  wynosi  $nx^{n-1}$ , a zatem gęstość zmiennej losowej  $X$  przedstawia się następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Z kolei żeby wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $X$  posłużymy się wzorem:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt.$$

Liczenie tej całki możemy rozbić na trzy naturalne przedziały  $(-\infty, 0]$ ,  $(0, 1)$ ,  $[1, \infty)$  odpowiadające definicji gęstości  $f(x)$ . Ponadto przypomnijmy, że całka oznaczona z funkcji 0 po dowolnym przedziale przyjmuje wartość zero, natomiast dla funkcji wielomianowych mamy:

$$\int_a^b x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

A zatem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^0 t \cdot f(t) dt + \int_0^1 t \cdot f(t) dt + \int_1^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t \cdot 0 dt + \int_0^1 t \cdot 3t^2 dt + \int_1^{\infty} t \cdot 0 dt \\ &= \int_0^1 t \cdot 3t^2 dt = 3 \int_0^1 t^3 dt = 3 \left[ \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = 3 \left( \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Z kolei aby wyznaczyć wariancję zmiennej losowej  $X$  musimy najpierw wyznaczyć  $\mathbb{E}(X^2)$ . W tym celu posłużymy się wzorem:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt.$$

Podobnie jak poprzednio mamy:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X^2 &= \int_{-\infty}^0 t^2 \cdot f(t) dt + \int_0^1 t^2 \cdot f(t) dt + \int_1^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 \cdot 0 dt + \int_0^1 t^2 \cdot 3t^2 dt + \int_1^{\infty} t^2 \cdot 0 dt \\ &= \int_0^1 t^2 \cdot 3t^2 dt = 3 \int_0^1 t^4 dt = 3 \left[ \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 3 \left( \frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

A zatem wariancja zmiennej losowej  $X$  wynosi:

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{48}{80} - \frac{45}{80} = \frac{3}{80}.$$

**Zadanie A.2.** Gęstość zmiennej losowej  $X$  zadana jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{dla } x \in (-2, -1), \\ bx & \text{dla } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie  $a$  i  $b$  są pewnymi stałymi. Znajdź stałe  $a$  i  $b$  wiedząc, że  $\mathbb{E}X = 0$ . Następnie oblicz  $\text{Var}X$  i znajdź dystrybuantę  $F_X$  tej zmiennej losowej.

Zacznijmy od wyliczenia wartości oczekiwanej zmiennej losowej  $X$  w oparciu o gęstość. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, licząc odpowiednią całkę możemy od razu pominąć te przedziały, na których funkcja  $f(x)$  się zeruje. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_{-2}^{-1} t \cdot f(t) dt + \int_1^2 t \cdot f(t) dt = \int_{-2}^{-1} t \cdot a dt + \int_1^2 t \cdot b t dt \\ &= a \int_{-2}^{-1} t dt + b \int_1^2 t^2 dt = a \left[ \frac{t^2}{2} \right]_{-2}^{-1} + b \left[ \frac{t^3}{3} \right]_1^2 = a \left( \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} \right) + b \left( \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = -\frac{3}{2}a + \frac{7}{3}b. \end{aligned}$$

W treści zadania podane jest, że  $\mathbb{E}X = 0$ , a zatem otrzymujemy równanie:

$$-\frac{3}{2}a + \frac{7}{3}b = 0.$$

Niestety to za mało aby wyznaczyć stałe  $a$  i  $b$ . Potrzebujemy jeszcze jednej zależności, która będzie wiązała te dwie stałe. W tym celu skorzystamy z własności gęstości, która mówi, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1.$$

A zatem:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-2}^{-1} a dt + \int_1^2 b t dt = a \int_{-2}^{-1} 1 dt + b \int_1^2 t dt = a [t]_{-2}^{-1} + b \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^2 \\ &= a((-1) - (-2)) + b \left( \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = a + \frac{3}{2}b, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy drugie równanie wiążące  $a$  i  $b$ , mianowicie:

$$a + \frac{3}{2}b = 1.$$

W celu wyznaczenia stałych  $a$  i  $b$  musimy zatem rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}a + \frac{7}{3}b = 0 \\ a + \frac{3}{2}b = 1 \end{cases}$$

Po szybkich obliczeniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} a = \frac{28}{55} \\ b = \frac{18}{55} \end{cases}$$

A zatem gęstość zmiennej losowej  $X$  dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{28}{55} & \text{dla } x \in (-2, -1), \\ \frac{18}{55}x & \text{dla } x \in (1, 2), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Następnie, aby wyznaczyć  $\text{Var}X$ , policzymy najpierw  $\mathbb{E}(X^2)$ , czyli:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-2}^{-1} t^2 \cdot \frac{28}{55} dt + \int_1^2 t^2 \cdot \frac{18}{55} t dt = \frac{28}{55} \int_{-2}^{-1} t^2 dt + \frac{18}{55} \int_1^2 t^3 dt = \frac{28}{55} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_{-2}^{-1} + \frac{18}{55} \left[ \frac{t^4}{4} \right]_1^2 \\ &= \frac{28}{55} \left( \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right) + \frac{18}{55} \left( \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) = \frac{196}{165} + \frac{27}{22} = \frac{797}{330} = 2 \frac{137}{330}. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy już wariancję:

$$\text{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = 2\frac{137}{330} - 0 = 2\frac{137}{330}.$$

Pozostało nam jeszcze wyznaczenie dystrybuanty  $F_X$  zmiennej losowej  $X$ . Ponieważ w tym zadaniu mamy do czynienia z tylko jedną zmienną losową, w dalszych rozważaniach możemy pominąć indeks, tzn. przyjmujemy konwencję  $F = F_X$ . Przypomnijmy na początek, że

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Ponieważ w definicji gęstości dostajemy podział dziedziny na pięć przedziałów

$$(-\infty, -2], (-2, -1), [-1, 1], (1, 2), [2, \infty),$$

wyznaczanie wartości dystrybuanty  $F(x)$  musimy podzielić na pięć przypadków w zależności od tego, do którego z nich należy zmienna  $x$ .

**Uwaga:** proszę pamiętać, że dystrybuanta rozkładu ciągłego jest funkcją ciągłą, dlatego też

$$F(x) = \lim_{t \rightarrow x^-} F(t).$$

**1. przypadek:**  $x \in (-\infty, -2]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$$

**2. przypadek:**  $x \in (-2, -1)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} f(t)dt + \int_{-2}^x \frac{28}{55}dt = F(-2) + \frac{28}{55} \int_{-2}^x 1dt = 0 + \frac{28}{55} [t]_{-2}^x = \frac{28}{55}(x - (-2)) = \frac{28}{55}(x + 2)$$

**3. przypadek:**  $x \in [-1, 1]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^x 0dt = F(-1) + 0 = \frac{28}{55}(-1 + 2) = \frac{28}{55}$$

**4. przypadek:**  $x \in (1, 2)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^1 f(t)dt + \int_1^x \frac{18}{55}tdt = F(1) + \frac{18}{55} \int_1^x tdt = \frac{28}{55} + \frac{18}{55} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^x = \frac{28}{55} + \frac{18}{55} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

**5. przypadek:**  $x \in [2, \infty)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^2 f(t)dt + \int_2^x 0dt = F(2) + 0 = \frac{28}{55} + \frac{18}{55} \left( \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{28}{55} + \frac{18}{55} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

Ostatecznie otrzymujemy poniższy wzór na dystrybuantę zmiennej losowej  $X$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -2], \\ \frac{28}{55}(x + 2) & \text{dla } x \in (-2, -1), \\ \frac{28}{55} & \text{dla } x \in [-1, 1], \\ \frac{28}{55} + \frac{18}{55} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) & \text{dla } x \in (1, 2), \\ 1 & \text{dla } x \in [2, \infty). \end{cases}$$

**Zadanie A.3.** Na odcinku  $[0, 1]$  wybieramy losowo dwa punkty. Niech  $Z$  będzie zmienną losową oznaczającą odległość między tymi punktami.

Dla przypomnienia, mieliśmy już do czynienia z podobnym problemem, mianowicie z wyborem dwóch punktów z odcinka. Podobnie jak poprzednio zastosujemy tutaj prawdopodobieństwo geometryczne, gdzie jako zbiór zdarzeń elementarnych przyjmujemy kwadrat jednostkowy, tzn.  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ .

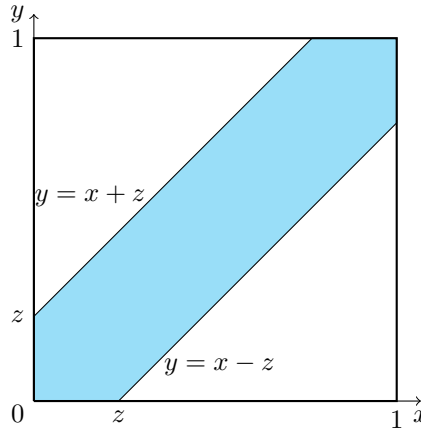
i) Znajdź dystrybuantę  $F_Z$ , gęstość  $f_Z$ , wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}Z$  i wariancję  $\text{Var}Z$ .

Zacznijmy od wyznaczenia dystrybuanty  $F_Z$  zmiennej losowej  $Z$ . Z definicji dystrybuanty mamy:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z).$$

Zastanówmy się zatem jak obliczyć  $\mathbb{P}(Z \leq z)$ . Mając daną losową parę punktów  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , odległość między tymi punktami możemy wyrazić jako  $|x - y|$ . A zatem, skoro minimalna odległość jest równa 0, a maksymalna wynosi 1, dla  $z \in [0, 1]$  mamy:

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(|x - y| \leq z) = \mathbb{P}(-z \leq x - y \leq z) = \mathbb{P}((y \leq x + z) \wedge (y \geq x - z)).$$



Na powyższym rysunku błękitny obszar odpowiada zdarzeniu  $Z = |x - y| \leq z$ . Widzimy więc, że dla  $z \in [0, 1]$  zachodzi:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - (1 - z)^2 = 2z - z^2.$$

Ponadto ponieważ z prawdopodobieństwem 1 zmienna losowa  $Z$  przyjmuje wartości w przedziale  $[0, 1]$ , dla  $z < 0$  prawdą jest, że  $\mathbb{P}(Z \leq z) = 0$ . Z kolei dla  $z > 1$  zachodzi  $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1$ . Możemy więc podać wzór na dystrybuantę zmiennej losowej  $Z$ :

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z < 0, \\ 2z - z^2 & \text{dla } 0 \leq z \leq 1, \\ 1 & \text{dla } z > 1. \end{cases}$$

Następnie wyznaczamy gęstość  $f_Z$  pamiętając, że  $f_Z(z) = F'_Z(z)$ . A zatem:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2 - 2z & \text{dla } 0 \leq z \leq 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Z kolei wartość oczekiwana zmiennej losowej  $Z$  wynosi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z &= \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^1 z(2 - 2z) dz = \int_0^1 2z dz - \int_0^1 2z^2 dz = 2 \int_0^1 z dz - 2 \int_0^1 z^2 dz \\ &= 2 \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^1 - 2 \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = 2 \left( \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) - 2 \left( \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Następnie liczymy  $\mathbb{E}(Z^2)$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f_Z(z) dz = \int_0^1 z^2(2 - 2z) dz = \int_0^1 2z^2 dz - \int_0^1 2z^3 dz = 2 \int_0^1 z^2 dz - 2 \int_0^1 z^3 dz \\ &= 2 \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^1 - 2 \left[ \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = 2 \left( \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) - 2 \left( \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy wariancję zmiennej losowej  $Z$ :

$$\text{Var}Z = \mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

- ii) Znajdź dystrybuantę  $F_X$  zmiennej losowej  $X = Z^2$ , jej gęstość  $f_X$  i wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}X$ . Jak obliczyć  $\mathbb{E}X$  nie znajdując gęstości  $f_X$ ?

Aby wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej  $X$  zauważmy na początek, że ponieważ  $X = Z^2$ , dla  $x < 0$  zachodzi  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0$ . Wystarczy zatem rozważyć przypadek  $x \geq 0$ , dla którego mamy:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Z^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}).$$

Następnie, ponieważ zmienna losowa  $Z$  przyjmuje wartości ujemne z zerowym prawdopodobieństwem (dystrybuenta  $F_Z$  jest stale równa zero dla  $z < 0$ ), mamy:

$$\mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) = \mathbb{P}(Z \leq \sqrt{x}) = F_Z(\sqrt{x}).$$

Stąd otrzymujemy już wzór na dystrybuantę zmiennej losowej  $X$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 2\sqrt{x} - x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{dla } x > 1. \end{cases}$$

Następnie obliczamy gęstość zmiennej losowej  $X$  (proszę zwrócić uwagę, co się dzieje w punkcie  $x = 0$ ):

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej  $X$  wynosi:

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 x \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Gdybyśmy natomiast chcieli wyliczyć  $\mathbb{E}X$  bez odwoływania się do rozkładu zmiennej losowej  $X$ , wówczas pamiętając, że  $X = Z^2$ , wystarczyłoby dokonać podstawienia:

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(Z^2) = \frac{1}{6}.$$