Animacja komputerowa
Wykład 3

Wojciech Kowalewski

Jesień-Zima 2012

Część I

Kinematyka punktu materialnego

Dwie znane parametryzacje

- Notacja: Wektory piszemy czcionką wytłuszczoną (bold), np. $\mathbf{r}$ oznacza wektor położenia
- Parametryzacja względem czasu

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t), \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$$

- Parametryzacja względem toru

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(l), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(l) = \mathbf{r}'(l), \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(l) = \mathbf{r}''(l)$$

- Parametryzacja toru względem czasu (tutaj nie ma wektora!)

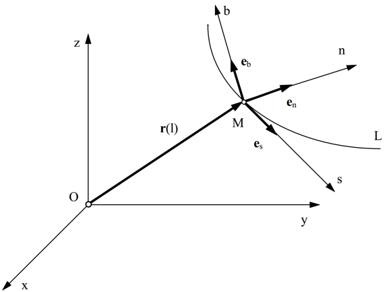
$$l = l(t)$$

Dwie znane parametryzacje

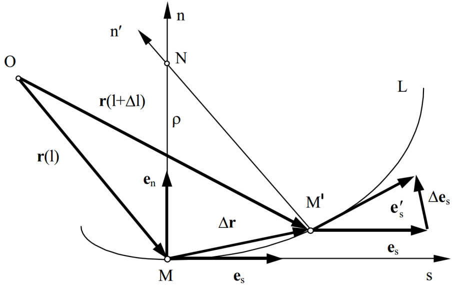
- Rozpatrzmy parametryzację położenia względem toru

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$$

- Z punktem M należącym do krzywej L wiążemy prostokątny układ współrzędnych składający się z osi $\mathbf{e_s}$, $\mathbf{e_n}$, $\mathbf{e_b}$, oznaczających odpowiednio styczną, normalną oraz binormalną do krzywej (tzw. układ normalny)



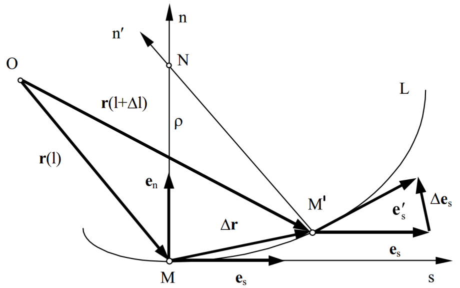
Dwie znane parametryzacje



- Przedstawiając krzywą L w płaszczyźnie $\mathbf{e_s e_n}$ widać, że

$$\lim_{\Delta l \to 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta l} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right| = 1 \Rightarrow \mathbf{e_s} = \frac{d\mathbf{r}}{dl}$$

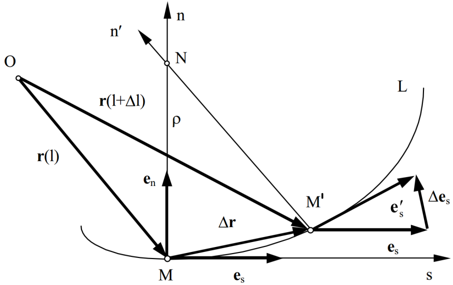
Dwie znane parametryzacje



- Ponadto

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta \mathbf{e_s}}{\Delta\, l} = \frac{d\mathbf{e_s}}{dl} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}$$

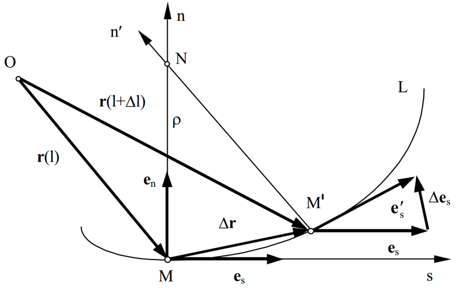
Dwie znane parametryzacje



- Różniczkując względem czasu oczywistą zależność $\mathbf{e_s} \cdot \mathbf{e_s} = 1$ otrzymujemy

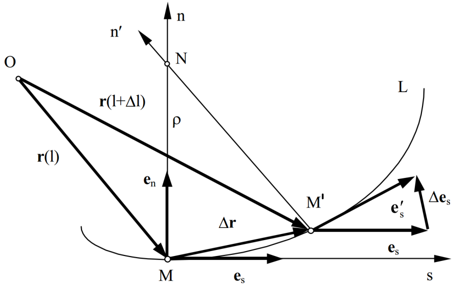
$$0 = \mathbf{e_s} \cdot \frac{d\mathbf{e_s}}{dt} = \mathbf{e_s} \cdot \frac{d\mathbf{e_s}}{dl}\frac{dl}{dt} = \mathbf{e_s} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}\frac{dl}{dt} \;\Rightarrow\; \mathbf{e_s} \perp \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}$$

Dwie znane parametryzacje



- Dla małych przyrostów $\mathbf{\Delta r}$ trójkąt $\mathbf{e_s \Delta e_s e_s}'$ i trójkąt $N\,M\,M'$ są podobne. Możemy zatem napisać:

$$\left|\frac{\mathbf{e_s}}{MN}\right| = \left|\frac{\Delta \mathbf{e_s}}{\Delta \mathbf{r}}\right| = \left|\frac{\Delta \mathbf{e_s}}{\Delta l}\right|$$



- Przechodząc do granicy przy $\Delta l \to 0$ otrzymujemy

$$\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}\right| = \left|\frac{\mathbf{e_s}}{MN}\right| = \frac{1}{MN} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \mathbf{e_n} = \rho\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}$$

- ρ jest promieniem krzywizny krzywej L w punkcie M

Dwie znane parametryzacje

- Z definicji prędkości otrzymujemy potwierdzenie, że prędkość jest styczna do toru:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dl}\frac{dl}{dt} = v\mathbf{e_s}$$

gdzie $v = |\mathbf{v}|$

- Różniczkując prędkość otrzymujemy przyspieszenie:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e_s} + v\frac{d\mathbf{e_s}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e_s} + v\frac{d\mathbf{e_s}}{dl}\frac{dl}{dt} =$$

$$\frac{dv}{dt}\mathbf{e_s} + v^2\frac{d\mathbf{e_s}}{dl} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e_s} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e_n} =: \mathbf{a_s} + \mathbf{a_n}$$

gdzie $\mathbf{a_s}$, $\mathbf{a_n}$ oznaczają odpowiednio przyspieszenie styczne oraz przyspieszenie normalne, przy czym

$$a_s = |\mathbf{a_s}| = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = |\mathbf{a_n}| = \frac{v^2}{\rho}, \quad a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_s^2 + a_n^2}$$

Część II

Dynamika punktu materialnego

Klasyczna Druga Zasada Dynamiki

- Siła oznacza wpływ otoczenia danego punktu na ten punkt - nadaje mu przyspieszenie

Klasyczna druga zasada dynamiki

Dla obiektu o stałej (w danej chwili) masie, przyspieszenie jest proporcjonalne do działajacej na niego siły oraz odwrotnie proporcjonalne do jego masy

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

- Siła nie jest odpowiedzialna za ruch, lecz za zmianę ruchu
- Przyspieszenie jest zawsze równoległe do wektora siły

Ogólna druga zasada dynamiki

Dla obiektu z masą zmieniającą się w czasie, siła powoduje zmianę pędu tego obiektu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} := \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v}$$

- W ogólności siła przyłożona w danym punkcie może zależeć od wielu parametrów, np. położenia, prędkości, czasu itp.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}, \ldots)$$

- Zapis różniczkowy drugiej zasady dynamiki

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}, \ldots)}{m} \tag{1}$$

Druga zasada dynamiki

- W ogólności równanie różniczkowe (1) jest trudne do rozwiązania
- **Przykład prosty**: Załóżmy, że na punkt materialny działa stała siła, tzn.

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \mathbf{a}$$

- Całkując to równanie na przedziale czasu $[t_0, t]$ otrzymujemy

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}\, dt = \mathbf{a}(t - t_0) \;\Rightarrow\; \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \mathbf{a}(t - t_0)$$

- Ponowne całkowanie daje znany wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t)\, dt = \mathbf{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2$$

Druga zasada dynamiki

- Równanie różniczkowe (1) jest równaniem zwyczajnym drugiego rzędu
- Jego rozwiązanie w ogólności wymaga zastosowania metod numerycznych dla równań drugiego rzędu
- Można je jednak zapisać równoważnie w postaci dwóch równań pierwszego rzędu

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dots)}{m}$$

- Pochodna prędkości w drugim równaniu używa prędkości obliczonej z pierwszego równania

Część III

Metody numeryczne dla równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

- Niech $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Rozpatrzmy równanie różniczkowe pierwszego rzędu z warunkiem początkowym:

$$x^{'}(t) = f(t, x(t)), \quad t \geqslant t_0, \quad x(t_0) = x_0 \qquad (2)$$

- Rozwinięcie w szereg Taylora
  - **Założenia:**
    (Z1) $x^{(k)}(t)$ ciągła na $[t_0, t_1]$ dla $k = 0, 1, \dots, n$
    (Z2) $x^{(n)}(t)$ różniczkowalna na (t_0, t_1)
  - **Teza:** Istnieje $\overline{t} \in [t_0, t_1]$ takie, że

$$x(t_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{(k)}(t_0)}{k!}(t1 - t_0)^k + \frac{x^{(n+1)}(\overline{t})}{(n+1)!}(t1 - t_0)^{n+1}$$

  - W praktyce nie szukamy $\overline{t}$, tylko szacujemy takim $M > 0$, że

$$|x^{(n+1)}(t)| \leqslant M \quad \text{dla } t \in [t_0, t_1]$$

Metoda Eulera

- Rozpatrzmy ciąg chwil $(t_i)_{i=0}^{N}$ równoodległych, tzn. $\forall i \ h = t_{i+1} - t_i$
- Rozwijamy funkcję $x(t)$ z zagadnienia (2) w szereg Taylora na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$, dla $n = 1$

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + x^{'}(t_i)h + x^{''}(\bar{t})\frac{h^2}{2} = x(t_i) + f(t_i, x(t_i))h + x^{''}(\bar{t})\frac{h^2}{2}$$

- Niech $x_i = x(t_i)$ - wartość dokładna
- Aproksymujemy wartość x_i wartością przybliżoną y_i spełniającą zależność

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i, y_i), \quad i \geqslant 0, \quad y_0 = x_0 \tag{3}$$

- Równanie (3) definiuje metodę Eulera dla zagadnienia (2)

Analiza metody Eulera

- Załóżmy, że funkcja f spełnia warunek

$$|f(t,x) - f(t,\tilde{x})| \leqslant L|x - \tilde{x}|$$

  dla każdych (t,x) oraz $(t,\tilde{x})$ należących do pewnego prostokąta zawierającego (t_0, x_0)
- Załóżmy dodatkowo, że istnieje stała $M > 0$ taka, że $|x^{''}(t)| \leqslant M$ dla każdego $t \geqslant t_0$.
- Stąd łatwo otrzymujemy

$$|x_{i+1} - y_{i+1}| \leqslant (1 + Lh)|x_i - y_i| + Mh^2/2$$

- Oznaczając $e_i = |x_i - y_i|$ oraz $c = Mh^2/2$ powyższe zapisujemy jako

$$e_{i+1} \leqslant (1 + Lh)e_i + c$$

- $$e_{i+1} \leqslant (1+Lh)e_i + c$$

- Zatem

$$e_1 \leqslant (1+Lh)e_0 + c = c$$

$$e_2 \leqslant (1+Lh)e_1 + c \leqslant (1+Lh)c + c = ((1+Lh)+1)c$$

$$e_3 \leqslant (1+Lh)e_2 + c = c \leqslant \cdots \leqslant ((1+Lh)^2 + (1+Lh)+1)c$$

- Ogólnie

$$e_i \leqslant \sum_{j=0}^{i-1}(1+Lh)^j = \frac{Mh^2}{2}\frac{(1+Lh)^i - 1}{Lh} \leqslant \frac{Mh^2}{2}\frac{e^{iLh}-1}{Lh} =$$

$$= \frac{M(e^{L(t_i-t_0)}-1)}{2L}k \leqslant Kh$$

Analiza metody Eulera

- Zatem istnieje $K > 0$ niezależne od h takie, że

$$e_i \leqslant Kh$$

- Im mniejsze h tym dokładniejszy wynik, ale !! kosztem zwiększenia ilości kroków na ustalonym przedziale $[t_0, T]$
- Przeprowadzona analiza opiera się na błędzie obcięcia sformułowania matematycznego - pominięcie większości składników rozwinięcia Taylora
- Przeprowadźmy teraz analizę numeryczną, wynikającą z maszynowej reprezentacji liczb
- Oznaczmy przez δ_i błąd zaokrąglenia obliczenia wartości y_i.
- Wtedy, oznaczając $z_i = y_i - \delta_i$, otrzymujemy

$$z_{i+1} = z_i + hf(t_i, z_i) + \delta_{i+1}$$

Analiza metody Eulera

- Podobnie jak poprzednio otrzymujemy, że

$$|x_{i+1} - z_{i+1}| \leqslant (1 + Lh)|x_i - z_i| + \frac{Mh^2}{2} + \delta$$

gdzie $\delta = max_i|\delta_i|$

- Oznaczając $\varepsilon_i = |x_i - z_i|$ dostajemy

$$\varepsilon_1 \leqslant (1 + Lh)\varepsilon_0 + (Mh^2/2 + \delta)$$

- Ogólnie otrzymamy

$$\varepsilon_i \leqslant (1 + Lh)^i \varepsilon_0 + (Mh^2/2 + \delta) \sum_{j=1}^{i-1} (1 + Lh)^j \leqslant \cdots \leqslant$$

$$\leqslant K_0 + K_1 h + K_2 \frac{1}{h}$$

dla $i \geqslant 1$ i pewnych stałych $K_0, \ K_1, \ K_2$ niezależnych od h.

Analiza metody Eulera

- Zatem
$$\varepsilon_i \leqslant K_0 + K_1 h + K_2 \frac{1}{h}$$
- Widać, że zmniejszanie wielkości kroku h blisko zera powoduje, że ε_i zbliża się do nieskończoności !!! (czynnik $\frac{1}{h}$).
- Funkcja $K_1 h + K_2 \frac{1}{h}$ posiada jednak loakalne maksimum, więc można przyjąć taką wartość parametru h.