Rachunek prawdopodobieństwa

Wykład 1: Klasyczny model prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo geometryczne, niezależność zdarzeń

materiały opracowała dr Sylwia Antoniuk

Przykład 1. Przykłady doświadczeń (eksperymentów) losowych:

1) rzut monetą, możliwe wyniki to O (orzeł), R (reszka);
2) rzut dwiema monetami: (O,O), (O,R), (R,O), (R,R);
3) rzut kostką: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (oczek);
4) wybór pięciu kart ze standardowej talii 52 kart: $\binom{52}{5}$ pięcioelementowych podzbiorów zbioru 52 kart;
5) rzut monetą do momentu wypadnięcia orła: O, RO, RRO, RRRO, ... (nieskończenie wiele możliwości).

Definicja 1. **Zbiorem zdarzeń elementarnych**, *oznaczonym przez* Ω, *nazywamy zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Elementy* $\omega \in \Omega$ *nazywamy* **zdarzeniami elementarnymi**, *natomiast podzbiory* $A \subseteq \Omega$ *nazywamy* **zdarzeniami**. *Dla danego zdarzenia* $A \subseteq \Omega$, *przez* $A' = \Omega \setminus A$ *oznaczamy* **zdarzenie przeciwne** *do zdarzenia* A.

Model klasyczny

Definicja 2. *Załóżmy, że* $0 < |\Omega| < \infty$. **Funkcją prawdopodobieństwa** *nazywamy funkcję* $\mathbb{P} : 2^\Omega \to [0,1]$, *która przyporządkowuje każdemu zdarzeniu jego prawdopodobieństwo. Jeśli wszystkie wyniki doświadczenia są równo prawdopodobne, wówczas dla każdego zdarzenia elementarnego* $\omega \in \Omega$ *mamy*

$$\mathbb{P}(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

i ogólniej, dla każdego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ *zachodzi*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Taki model prawdopodobieństwa nazywamy **modelem klasycznym**.

Przykład 2. Oblicz prawdopodobieństwo, że w rzucie trzema kostkami na każdej z nich wypadnie taka sam liczba oczek.

Ω – zbiór wyników trzech rzutów kostką

$\Omega = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), \ldots, (6,6,6)\}$

$$|\Omega| = 6^3 = 216$$

Dla każdego zdarzenia elementarnego $\omega \in \Omega$ mamy $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$. (model klasyczny)

A – zdarzenie polegające na tym, że na każdej kostce wypadnie taka sama liczba oczek

$A = \{(1,1,1), (2,2,2), \ldots, (6,6,6)\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$$

Przykład 3. W urnie znajdują się 3 białe kule i 4 niebieskie kule. Losujemy jednocześnie dwie z nich. Z jakim prawdopodobieństwem wylosowane kule są różnego koloru?

Ω – zbiór wyników losowania 2 kul spośród 7 kul w urnie

$|\Omega| = \binom{7}{2} = 21$

A – wybrano kule różnych kolorów

$|A| = \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} = 12$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Fakt 1. Podstawowe własności funkcji prawdopodobieństwa:

(I) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A')$ (prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego)
(II) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (prawdopodobieństwo sumy zdarzeń)

Przykład 4. Gracz otrzymuje 5 kart z talii 24 kart. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że otrzyma co najmniej jednego asa?
Ω – pięcioelementowe podzbiory talii 24 kart, $|\Omega| = \binom{24}{5}$
A – gracz otrzyma co najmniej jednego asa
A' – gracz nie otrzyma ani jednego asa

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A') = 1 - \frac{|A'|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\binom{20}{5}}{\binom{24}{5}}$$

Przykład 5. Losujemy liczbę ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 120\}$. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że jest ona podzielna przez 3 lub 4?
$\Omega = \{1, 2, \ldots, 120\}$, $|\Omega| = 120$
A – losowo wybrana liczba jest podzielna przez 3, $|A| = \frac{120}{3} = 40$
B – losowo wybrana liczba jest podzielna przez 4, $|B| = \frac{120}{4} = 30$
$A \cup B$ – losowo wybrana liczba jest podzielna przez 3 lub przez 4
$A \cap B$ – losowo wybrana liczba jest podzielna przez 3 i przez 4 (czyli przez 12), $|A \cap B| = \frac{120}{12} = 10$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{40}{120} + \frac{30}{120} - \frac{10}{120} = \frac{1}{2}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne

Rozważmy doświadczenie, w którym wybieramy losowo punkt ze zbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, który ma skończoną i dodatnią **miarę** (czyli np. długość, pole, objętość w zależności od wymiaru). Miarę tę będziemy oznaczać przez $\lambda(.)$ (bez podawania formalnej definicji). Prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subseteq \Omega$ (dla którego jesteśmy w stanie określić miarę) definiujemy wzorem

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$$

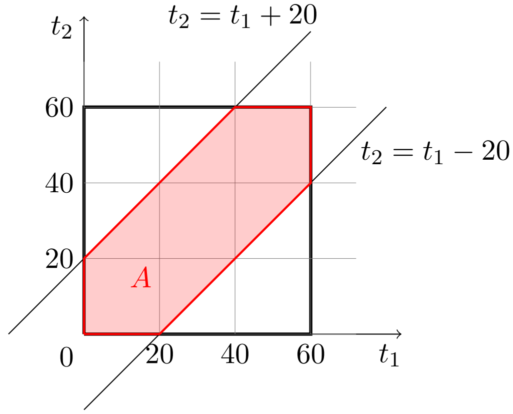
i nazywamy **prawdopodobieństwem geometrycznym**.
Warto podkreślić, że punkt ma miarę zero, co za tym idzie każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ spełnia $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$. Podobnie miara odcinka/prostej w przestrzeni co najmniej dwuwymiarowej wynosi zero, itd.

Przykład 6. Wybieramy losowo punkt z odcinka $[0, 1]$. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że odległość tego punktu od środka odcinka jest mniejsza niż $1/4$?
$\Omega = [0, 1]$
A – zbiór punktów odcinka $[0, 1]$, których odległość od środka jest mniejsza niż $1/4$, $A = (1/4, 3/4)$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{3/4 - 1/4}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

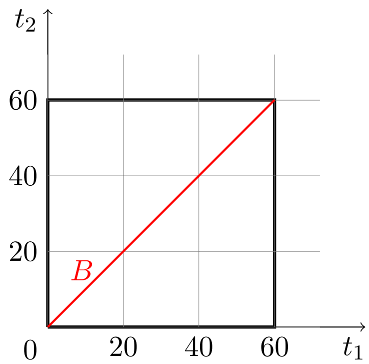
Przykład 7. Ania i Basia umówiły się w Starbucksie między 16:00 a 17:00. Każda z nich przychodzi w losowym momencie, przy czym czeka na drugą maksymalnie 20 minut i jeśli koleżanka nie przyjdzie wychodzi. Jaka jest szansa, że dojdzie do spotkania? Ile wynosi prawdopodobieństwo, że przyjdą do kawiarni w tym samym momencie?
$\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$
$\omega = (t_1, t_2)$, t_1 – czas przyjścia Ani (liczony w minutach po 16:00), t_2 – czas przyjścia Basi
A – dojdzie do spotkania Ani i Basi
Zauważmy, że $\omega = (t_1, t_2) \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t_1 - 20 \leqslant t_2 \leqslant t_1 + 20$. Musimy zatem wyznaczyć obszar w Ω odpowiadający układowi nierówności

$$\begin{cases} t_2 \geqslant t_1 - 20, \\ t_2 \leqslant t_1 + 20. \end{cases}$$



$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\lambda(\Omega) - \lambda(A')}{\lambda(\Omega)} = \frac{3600 - 1600}{3600} = \frac{5}{9}$$

B – Ania i Basia przyjdą w tym samym momencie



$$\mathbb{P}(B) = \frac{\lambda(B)}{\lambda(\Omega)} = \frac{0}{3600} = 0$$

Niezależność zdarzeń

Definicja 3. *Zdarzenia A i B nazywamy* **niezależnymi**, *gdy*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Uwaga 1. Zdarzenia rozłączone A i B (to znaczy takie, że $A \cap B = \emptyset$) nigdy nie są niezależne, chyba że $\mathbb{P}(A) = 0$ lub $\mathbb{P}(B) = 0$.

Przykład 8. Z talii 52 kart losujemy jedną kartę. Czy zdarzenia A – wylosowaliśmy asa i K – wylosowaliśmy kiera są niezależne?
Ω – zbiór 52 kart talii

$$|A| = 4, \quad |K| = 13, \quad |A \cap K| = 1$$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(K) = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{52} = \mathbb{P}(A \cap K)$$

Zatem zdarzenia A i K są niezależne.

Definicja 4. *Mówimy, że rodzina zdarzeń $\{A_i : i \in I\}$ jest* **niezależna** *jeśli dla każdego (skończonego) podzbioru indeksów $J \subseteq I$ zachodzi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Przykład 9. Rozważmy dwukrotny rzut kostką. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że w pierwszym rzucie wypadła parzysta liczba oczek, B – w drugim rzucie wypadła parzysta liczba oczek, C – suma oczek w obu rzutach jest parzysta. Czy zdarzenia A, B i C są niezależne?

Ω – możliwe wyniki dwukrotnego rzutu kostką, $|\Omega| = 36$

$|A| = |B| = 3 \cdot 6 = 18$, $|A \cap B| = 3 \cdot 3 = 9$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{18}{36} \cdot \frac{18}{36} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap B)$$

Zatem zdarzenia A i B są niezależne.

$|C| = |C'| = 18$, $|A \cap C| = |B \cap C| = 3 \cdot 3 = 9$

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{18}{36} \cdot \frac{18}{36} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C)$$

Zatem zdarzenia A i C są niezależne oraz zdarzenia B i C są niezależne.

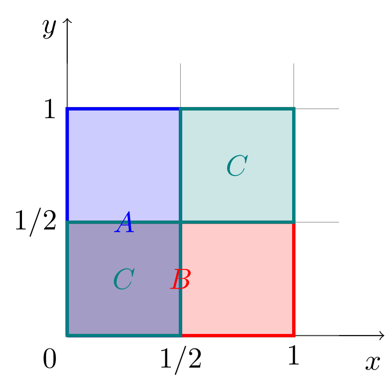
$|A \cap B \cap C| = 3 \cdot 3 = 9$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

Zatem zdarzenia A, B i C nie są niezależne, ale są **parami niezależne**.

Przykład 10. Losujemy dwie liczby z przedziału $[0, 1]$. Niech A będzie zdarzeniem, gdzie pierwsza z tych liczb jest nie większa niż $1/2$, B zdarzeniem, że druga z tych liczb jest nie większa niż $1/2$, natomiast C zdarzeniem, że albo obie wylosowane liczby są nie większe niż $1/2$, albo obie są większe od $1/2$. Czy zdarzenia A, B i C są niezależne?

$x, y \in [0, 1]$ – wylosowane liczby



$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \quad \Rightarrow \quad A \text{ i } B \text{ są niezależne}$$

$$\mathbb{P}(A \cap C) = 1/4 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \quad \Rightarrow \quad A \text{ i } C \text{ są niezależne}$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = 1/4 = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \quad \Rightarrow \quad B \text{ i } C \text{ są niezależne}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \quad \Rightarrow \quad A,\ B \text{ i } C \text{ nie są niezależne}$$

Twierdzenie 2 (Własności zdarzeń niezależnych)**.**

(1) *Jeśli A i B są zdarzeniami niezależnymi, to A i B' są niezależne, A' i B są niezależne oraz A' i B' są niezależne.*

(2) *Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne oraz przyjmiemy konwencję, że $A^0 = A$, $A^1 = A'$ dla dowolnego zdarzenia A, wówczas dla każdego ciągu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, gdzie $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, zdarzenia $A_1^{\varepsilon_1}, A_2^{\varepsilon_2}, \ldots, A_n^{\varepsilon_n}$ są niezależne.*