Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
Wykład 8: Łańcuchy Markowa. Twierdzenie ergodyczne.

Na poprzednim wykładzie podaliśmy twierdzenie mówiące o tym, że każdy jednorodny łańcuch Markowa o skończonej liczbie stanów posiada co najmniej jeden rozkład stacjonarny. Poniżej podamy dowód tego twierdzenia w szczególnym przypadku.

Twierdzenie 1. *Jeśli łańcuch Markowa $\Pi = [p_{ij}]$ jest łańcuchem z* **symetryczną** *macierzą przejścia, to znaczy $p_{ij} = p_{ji}$ dla każdych i oraz j, to łańcuch ten posiada co najmniej jeden rozkład stacjonarny.*

Dowód. Pokażemy, że rozkład jednostajny na stanach jest rozkładem stacjonarnym dla tego łańcucha. Zauważmy najpierw, że jeśli macierz przejścia jest symetryczna, to dla każdej kolumny j kolejne wyrazy macierzy w tej kolumnie, tzn. $p_{1j}, p_{2j}, \ldots, p_{sj}$, odpowiadają kolejnym wyrazom j-tego wiersza tej macierzy, czyli $p_{j1}, p_{j2}, \ldots, p_{js}$. Ponadto suma wyrazów w dowolnym wierszu macierzy przejścia jest równa 1. Biorąc rozkład jednostajny na stanach

$$\bar{\pi} = \left(\frac{1}{s}, \ldots, \frac{1}{s}\right)$$

otrzymujemy

$$\bar{\pi}\Pi = \left(\frac{1}{s}, \ldots, \frac{1}{s}\right) \cdot \Pi = \left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} p_{i1}, \ldots, \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} p_{is}\right) = \left(\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} p_{1i}, \ldots, \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} p_{si}\right) = \left(\frac{1}{s}, \ldots, \frac{1}{s}\right) = \bar{\pi}.$$

A zatem rozkład jednostajny na stanach jest rozkładem stacjonarnym tego łańcucha. □

Przypomnijmy, że przez $p_{ij}^{(t)}$ oznaczamy prawdopodobieństwo przejścia ze stanu i do stanu j w dokładnie t krokach.

Definicja 1. *Łańcuch Markowa nazywamy* **nierozkładalnym**, *gdy dla dowolnych jego stanów i oraz j istnieje takie $t \geqslant 1$, że $p_{ij}^{(t)} > 0$.*

Innymi słowy, łańcuch nazywamy nierozkładalnym, jeśli z każdego stanu da się dojść do każdego innego po skończonej liczbie kroków.

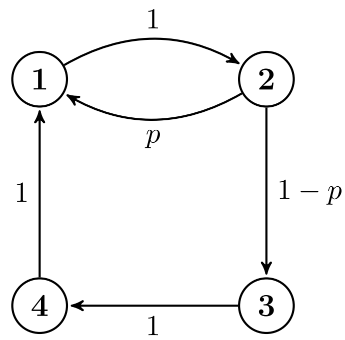
Definicja 2. **Okresem** *stanu j nazywamy liczbę*

$$d(j) = NWD\{t \geqslant 1 : p_{jj}^{(t)} > 0\}.$$

Dla stanu j nie definiujemy okresu gdy $p_{jj}^{(t)} = 0$ dla wszystkich $t \geqslant 1$. Gdy $d(j) > 1$, wtedy mówimy, że stan j jest **okresowy**, *w przeciwnym wypadku mówimy, że stan ten jest* **nieokresowy**. *Przyjmujemy, że stany nieposiadające okresu też są nieokresowe.*

Uwaga 1. Rozważając skierowany graf G łańcucha Markowa, $p_{jj}^{(t)} > 0$ oznacza, że w grafie tym istnieje spacer długości t, który zaczyna się i kończy w stanie j. A zatem, aby wyznaczyć okres stanu j, należy sprawdzić jakiej długości spacery zaczynające się i kończące w j możemy znaleźć w grafie G. Następnie wyznaczamy największy wspólny dzielnik długości tych spacerów. Jeśli znajdziemy dwa spacery, których długości są względnie pierwsze, wówczas oczywiście $d(j) = 1$ i stan j nie jest okresowy.

Przykład 1. Rozważmy następujący łańcuch Markowa:



Dla $p \in (0,1)$ łańcuch ten jest nierozkładalny, ponieważ istnieje w nim ścieżka pomiędzy dowolną parą stanów. Aby to zobaczyć, wystarczy zauważyć, że łańcuch ten zawiera skierowany cykl przechodzący przez wszystkie stany, to znaczy cykl 1–2–3–4–1.

Przyjrzyjmy się teraz okresom stanów tego łańcucha. Dla stanu numer 1 każdy spacer zaczynający się i kończący w tym stanie ma parzystą długość, dokładniej mamy:

$$p_{11}^{(1)} = 0, \quad p_{11}^{(2)} > 0, \quad p_{11}^{(3)} = 0, \quad p_{11}^{(4)} > 0, \quad p_{11}^{(5)} = 0, \quad p_{11}^{(6)} > 0, \ \ldots$$

A zatem

$$d(1) = NWD\{2, 4, 6, 8, \ldots\} = 2.$$

Podobnie pokazujemy, że

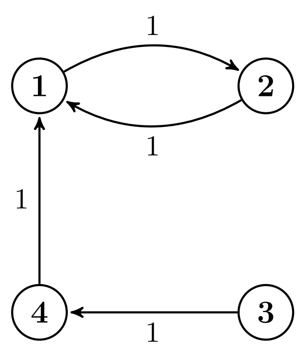
$$d(2) = NWD\{2, 4, 6, 8, \ldots\} = 2$$

oraz

$$d(3) = d(4) = NWD\{4, 6, 8, \ldots\} = 2.$$

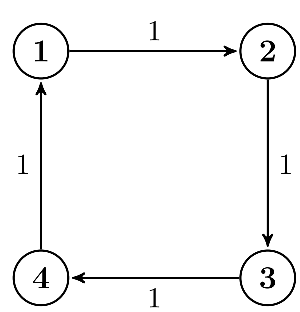
Podsumowując, każdy ze stanów tego łańcucha jest okresowy, z okresem równym 2.

Z kolei dla $p = 1$ otrzymujemy łańcuch:



Łańcuch ten nie jest nierozkładalny, ponieważ nie jesteśmy w stanie dojść do stanu numer 3. Nie jest on też okresowy, ponieważ stan numer 3 nie posiada okresu, dokładniej nie istnieje $t \geqslant 1$ dla którego $p_{33}^{(t)} > 0$.

Gdy $p = 0$, otrzymujemy łańcuch Markowa:



Łańcuch ten jest nierozkładalny, bo z każdego stanu możemy dojść do każdego innego. Ponadto dla każdego stanu i mamy:

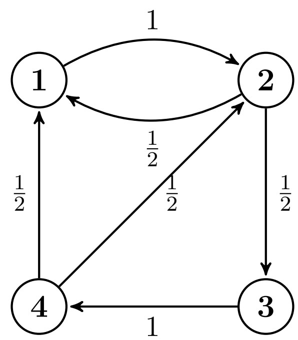
$$d(i) = NWD\{4, 8, 12, \ldots\} = 4,$$

zatem jest to łańcuch okresowy.

Twierdzenie 2. *W nierozkładalnym łańcuchu Markowa wszystkie stany mają ten sam okres.*

Definicja 3. *Mówimy, że łańcuch Markowa jest* **nieokresowy***, gdy wszystkie jego stany są nieokresowe. Natomiast łańcuch Markowa, który jest nierozkładalny i nieokresowy nazywamy łańcuchem* **ergodycznym***.*

Przykład 2. Jak widzimy, dla $p \in (0, 1)$ łańcuch Markowa z poprzedniego przykładu nie jest łańcuchem ergodycznym, bo wszystkie jego stany mają okres równy 2, czyli jest on łańcuchem okresowym. Zmodyfikujmy go lekko poprzez dodanie przejścia pomiędzy stanem 4 i stanem 2. Przyjmijmy, że $p = \frac{1}{2}$ i rozważmy następujący łańcuch Markowa.



Powyższy łańcuch jest również łańcuchem nierozkładalnym, natomiast nie jest on łańcuchem okresowym. Widzimy na przykład, że dla stanu numer 2 mamy:

$$d(2) = NWD\{2, 3, 4, \ldots\} = 1.$$

A ponieważ w łańcuchu nierozkładalnym okres każdego stanu jest taki sam, oznacza to, że żaden ze stanów nie jest okresowy, a więc i cały łańcuch nie jest okresowy. Mamy zatem do czynienia z łańcuchem nierozkładalnym i nieokresowym, czyli z łańcuchem ergodycznym.

Uwaga 2. W powyższych definicjach okresowości, nierozkładalności oraz ergodyczności nie interesują nas wartości prawdopodobieństw przejścia pomiędzy stanami tak długo, jak są one niezerowe. A zatem powyższe własności jesteśmy w stanie określić na podstawie samego grafu skierowanego tego łańcucha z pominięciem wag krawędzi.

Twierdzenie 3 (ergodyczne). *Każdy ergodyczny łańcuch Markowa ma dokładnie jeden rozkład stacjonarny $\bar{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_s)$. Ponadto dla dowolnych stanów i, j zachodzi $\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} = \pi_j$. Innymi słowy, niezależnie od początkowego rozkładu $\bar{\rho}^0$ zachodzi $\lim_{t\to\infty} \bar{\rho}^t = \bar{\pi}$.*

Przypomnijmy, że przez V oznaczamy zbiór wierzchołków, a przez E zbiór krawędzi grafu $G = (V, E)$. Ponadto przyjmujemy oznaczenia $v(G) = |V|$ oraz $e(G) = |E|$, natomiast $\deg(i)$ to stopień wierzchołka i w grafie G, czyli liczba krawędzi, które zawierają ten wierzchołek.

Błądzeniem klasycznym (spacerem losowym) na grafie $G = (V, E)$ bez wierzchołków izolowanych nazywamy proces, w którym cząstka znajdująca się w jakimś wierzchołku grafu w każdym kroku przemieszcza się do jednego z sąsiadów tego wierzchołka, wybranego z jednakowym prawdopodobieństwem. Procesowi temu odpowiada łańcuch Markowa o zbiorze stanów V, gdzie dla dowolnej krawędzi $ij \in E$ mamy

$$p_{ij} = \frac{1}{\deg(i)},$$

natomiast gdy $ij \notin E$ to $p_{ij} = 0$. Gdy mowa o błądzeniu na grafie, zawsze zakładamy, że graf ten nie ma wierzchołków izolowanych. W szczególności musi on mieć co najmniej dwa wierzchołki.

Przypomnijmy, że grafem spójnym nazywamy graf, w którym pomiędzy każdą parą wierzchołków istnieje ścieżka, która je łączy. Z kolei grafem dwudzielnym nazywamy każdy graf $G = (V, E)$, którego zbiór wierzchołków V da się podzielić na dwa rozłączne podzbiory $V_1 \cup V_2 = V$ o tej własności, że każda krawędź z E ma jeden koniec w V_1 oraz drugi w V_2. Równoważna charakteryzacja grafów dwudzielnych mówi, że grafy dwudzielne to dokładnie te grafy, które nie posiadają cykli nieparzystej długości.

Twierdzenie 4. *Błądzenie na grafie G jest łańcuchem nierozkładalnym wtedy i tylko wtedy, gdy G jest spójny. Błądzenie na grafie spójnym G jest łańcuchem nieokresowym wtedy i tylko wtedy, gdy G nie jest dwudzielny.*

Dowód. Zauważmy, że pomocniczy graf skierowany $\tilde{G}$ odpowiadający błądzeniu na grafie G powstaje z grafu G poprzez zastąpienie każdej krawędzi $\{i, j\}$ dwoma łukami (i, j) oraz (j, i) z odpowiednimi wagami. Zatem jeżeli G jest grafem spójnym, to oczywiście istnieje w G ścieżka pomiędzy każdą parą wierzchołków i oraz j, a poprzez zastąpienie tej ścieżki krawędziami skierowanymi w odpowiednią stronę, otrzymamy ścieżkę skierowaną z i do j w $\tilde{G}$. Czyli $\tilde{G}$ jest nierozkładalny. Natomiast gdy G nie jest spójny, to $\tilde{G}$ też nie jest spójny, więc łańcuch nie może być nierozkładalny (wystarczy rozważyć dwa stany należące do różnych składowych spójności grafu $\tilde{G}$).

Z kolei gdy G jest spójnym grafem dwudzielnym, to zawiera tylko cykle parzystej długości. W związku z tym każdy spacer zaczynający się i kończący w ustalonym wierzchołku i jest parzystej długości, skąd otrzymujemy, że okres stanu i musi być parzysty. W szczególności okres tego stanu jest większy od 1, bo w spójnym grafie możemy zawsze odbyć spacer długości dwa idąc do dowolnego sąsiedniego wierzchołka i z powrotem. A zatem stan ten jest okresowy. Z dowolności i dostajemy wówczas, że wszystkie stany są okresowe, czyli łańcuch też jest okresowy.

Z kolei gdy G nie jest grafem dwudzielnym, musi zawierać cykl C nieparzystej długości, np. $2k+1$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Jeśli i jest dowolnym stanem należącym do tego cyklu, to oznacza, że istnieje spacer nieparzystej długości, który zaczyna się i kończy w stanie i (spacer ten idzie wzdłuż krawędzi odpowiadających krawędziom cyklu C). Istnieje też spacer parzystej długości – przechodzimy z i do dowolnego sąsiada i wracamy. A zatem

$$d(i) = NWD\{2, 2k + 1\} = 1.$$

Ponieważ dla spójnego grafu G łańcuch jest nierozkładalny, wszystkie stany mają okres równy 1, zatem łańcuch ten jest nieokresowy. □

Twierdzenie 5. *Wektor*

$$\left(\frac{deg(1)}{2e(G)}, \frac{deg(2)}{2e(G)}, \ldots, \frac{deg(v(G))}{2e(G)}\right)$$

jest rozkładem stacjonarnym dla błądzenia na grafie $G = (V, E)$.

Dowód. Oznaczmy przez $\bar{\pi}$ rozważany wektor, a przez Π macierz przejść dla błądzenia na grafie G. Wówczas musimy sprawdzić, czy $\bar{\pi}\Pi = \bar{\pi}$. Spójrzmy na j-tą kolumnę macierzy Π. Kolejne pozycje tej kolumny to prawdopodobieństwa przejść do wierzchołka j, czyli albo odwrotność stopnia wierzchołka, z którego chcemy przejść do wierzchołka j, o ile krawędź pomiędzy tymi wierzchołkami istnieje, albo 0, jeśli takiej krawędzi nie ma. Oznaczając:

$$\mathbf{1}_{ij} = \begin{cases} 1, & \{i, j\} \in E, \\ 0, & \{i, j\} \notin E, \end{cases}$$

mamy:

$$p_{ij} = \frac{\mathbf{1}_{ij}}{\deg(i)}.$$

W wyniku mnożenia wektora $\bar{\pi}$ przez j-tą kolumnę macierzy Π

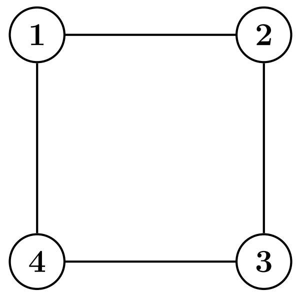
$$(\bar{\pi}\Pi)_j = \left(\frac{\deg(1)}{2e(G)}, \frac{\deg(2)}{2e(G)}, \ldots, \frac{\deg(v(G))}{2e(G)}\right) \begin{bmatrix} \cdots & \frac{\mathbf{1}_{1j}}{\deg(1)} & \cdots \\ \cdots & \frac{\mathbf{1}_{2j}}{\deg(2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \frac{\mathbf{1}_{v(G)j}}{\deg(v(G))} & \cdots \end{bmatrix}$$

otrzymamy

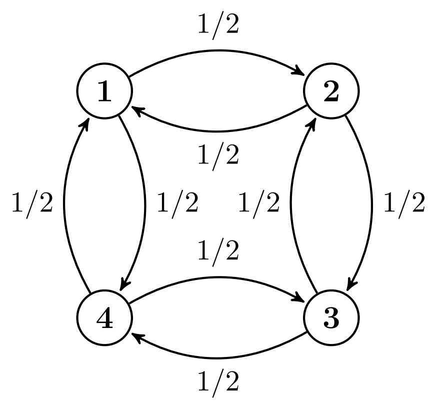
$$\frac{\deg(1)}{2e(G)} \cdot \frac{\mathbf{1}_{1j}}{\deg(1)} + \ldots + \frac{\deg(v(G))}{2e(G)} \cdot \frac{\mathbf{1}_{v(G)j}}{\deg(v(G))} = \frac{\mathbf{1}_{1j} + \ldots + \mathbf{1}_{v(G)j}}{2e(G)} = \frac{\deg(j)}{2e(G)} = \bar{\pi}_j.$$

Zatem rzeczywiście $\bar{\pi}\Pi = \bar{\pi}$, skąd wynika, że $\bar{\pi}$ jest rozkładem stacjonarnym tego łańcucha. $\square$

Przykład 3. Rozważmy błądzenie klasyczne na cyklu C_4.



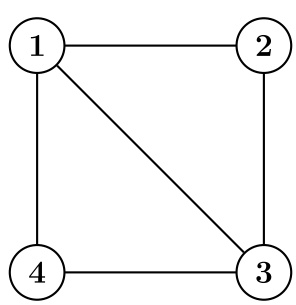
Odpowiada mu następujący łańcuch Markowa.



Ponieważ rozważany graf jest grafem spójnym, odpowiadający mu łańcuch Markowa jest łańcuchem nierozkładalnym. Ponieważ graf ten jest dwudzielny, odpowiadający mu łańcuch jest okresowy, czyli nie jest ergodyczny. Natomiast możemy łatwo wyznaczyć rozkład stacjonarny dla tego łańcucha zauważając, że wszystkie wierzchołki mają stopień 2. Rozkładem stacjonarnym jest rozkład jednostajny na stanach, czyli wektor:

$$\bar{\pi} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Rozważmy teraz błądzenie klasyczne po grafie K_4^-, który powstaje z grafu pełnego K_4 poprzez usunięcie dowolnej krawędzi.



Bez rysowania grafu skierowanego łańcucha Markowa możemy od razu stwierdzić, że łańcuch ten jest nierozkładalny, bo K_4^- jest grafem spójnym. Jest on również nieokresowy, bo K_4^- nie jest grafem dwudzielnym (zawiera cykl C_3 nieparzystej długości). Ponadto ciąg stopni tego grafu to $(3, 2, 3, 2)$ i graf ten ma 5 krawędzi, zatem rozkładem stacjonarnym dla tego łańcucha jest wektor

$$\left(\frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}\right).$$

Ponieważ rozważany łańcuch jest nierozkładalny i nieokresowy, jest on łańcuchem ergodycznym. To z kolei implikuje, że powyższy rozkład stacjonarny jest jedynym rozkładem stacjonarnym dla tego łańcucha.