Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa
Wykład 10: Zmienne losowe ciągłe wielowymiarowe

Przypomnijmy, że dowolną funkcję (mierzalną) $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ nazywamy **wektorem losowym** lub **zmienną losową dwuwymiarową**. Dla takiego wektora **dystrybuanta** $F_{X,Y}:\mathbb{R}^2\to[0,1]$ zdefiniowana jest wzorem

$$F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}\left(X\leqslant x, Y\leqslant y\right).$$

Definicja 1. *Jeśli dystrybuanta $F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}\left(X\leqslant x, Y\leqslant y\right)$ zmiennej losowej dwuwymiarowej $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ daje się zapisać jako*

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt$$

dla pewnej nieujemnej funkcji $f_{X,Y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, to zmienną losową (X,Y) nazywamy **(absolutnie) ciągłą***, a funkcję $f_{X,Y}$ nazywamy* **gęstością** *zmiennej losowej (X,Y). Wtedy:*

$$f_{X,Y}(s,t)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\partial y}\Big|_{x=s,y=t}$$

dla prawie wszystkich wartości (s,t). Zauważmy, że wówczas zachodzi również:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt=1.$$

Jeśli (X,Y) jest (absolutnie) ciągła, to gęstość i dystrybuantę zmiennej losowej X wyznaczamy ze wzorów:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t)\,dt,$$

oraz

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y).$$

Podobnie zmienna losowa Y ma gęstość

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,y)\,ds$$

i dystrybuantę

$$F_Y(y)=\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y).$$

Przykład 1. Zmienna losowa (X,Y) ma **rozkład jednostajny** na kwadracie $[0,2]\times[0,2]$, jeżeli jej gęstość $f_{X,Y}$ jest równa pewnej stałej $c>0$ na tym kwadracie i 0 poza kwadratem. To znaczy:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c & \text{dla } (x,y)\in[0,2]\times[0,2],\\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.}\end{cases}$$

Na początek wyznaczymy stałą c. Ponieważ $f_{X,Y}$ zadaje rozkład prawdopodobieństwa, całka podwójna po $\mathbb{R}^2$ z $f_{X,Y}$ musi być równa 1, a zatem

$$1=\int_0^2\int_0^2 c\,dy\,dx=\int_0^2\left(\int_0^2 c\,dy\right)dx=\int_0^2 [cy]_0^2\,dx=\int_0^2 2c\,dx=[2cx]_0^2=4c,$$

skąd otrzymujemy, że $c=1/4$. Nietrudno się przekonać, że gdybyśmy rozważali rozkład jednostajny na dowolnym skończonym (borelowskim) obszarze A, wówczas gęstość byłaby równa odwrotności pola tego obszaru na tym obszarze i 0 poza nim.

Spróbujmy teraz wyznaczyć dystrybuantę $F_{X,Y}$. Zgodnie z definicją $F_{X,Y}(x,y)=\mathbb{P}\left(X\leqslant x, Y\leqslant y\right)$. Ponieważ możemy przyjąć, że wektor losowy (X,Y) przyjmuje wyłącznie wartości z kwadratu $[0,2]\times[0,2]$, jeżeli $x<0$ lub $y<0$, to $\mathbb{P}\left(X\leqslant x, Y\leqslant y\right)=0$. Z kolei jeśli $x>2$ i $y>2$, to $\mathbb{P}\left(X\leqslant x, Y\leqslant y\right)=1$. Pozostały nam zatem do rozpatrzenia trzy poniższe przypadki:

Przypadek 1: $(x,y)\in[0,2]\times[0,2]$

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds=\int_0^x\left(\int_0^y \frac{1}{4}\,dt\right)ds=\int_0^x\left[\frac{t}{4}\right]_0^y ds=\int_0^x \frac{y}{4}\,ds=\left[\frac{ys}{4}\right]_0^x=\frac{xy}{4}$$

Przypadek 2: $x\in[0,2]$ i $y>2$

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds=\int_0^x\left(\int_0^2 \frac{1}{4}\,dt\right)ds=\int_0^x\left[\frac{t}{4}\right]_0^2 ds=\int_0^x \frac{1}{2}\,ds=\left[\frac{s}{2}\right]_0^x=\frac{x}{2}$$

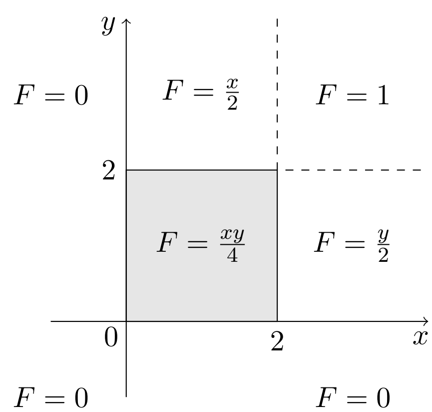
Przypadek 3: $x>2$ i $y\in[0,2]$

$$F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds=\int_0^2\left(\int_0^y \frac{1}{4}\,dt\right)ds=\int_0^2\left[\frac{t}{4}\right]_0^y ds=\int_0^2 \frac{y}{4}\,ds=\left[\frac{sy}{4}\right]_0^2=\frac{y}{2}$$

A zatem dystrybuanta wektora losowego (X,Y) przedstawia się następująco:

$$F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0 \text{ lub } y<0,\\ \frac{xy}{4} & \text{dla } (x,y)\in[0,2]\times[0,2],\\ \frac{x}{2} & \text{dla } x\in[0,2] \text{ i } y>2,\\ \frac{y}{2} & \text{dla } x>2 \text{ i } y\in[0,2],\\ 1 & \text{dla } x>2 \text{ i } y>2.\end{cases}$$

Proszę zwrócić uwagę, że aby wykonać wykres dystrybuanty potrzebowalibyśmy tak naprawdę przestrzeni trójwymiarowej (bo dziedziną w tym przypadku jest $\mathbb{R}^2$). A zatem poglądowy rysunek przedstawiający dystrybuantę $F_{X,Y}$ może wyglądać na przykład tak:



Zobaczmy teraz jak wygląda wyznaczanie gęstości rozkładu łącznego $f_{X,Y}$ z dystrybuanty $F_{X,Y}$. W tym celu posłużymy się wzorem

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\partial y},$$

który mówi, że gęstość jest po prostu drugą pochodną dystrybuanty liczoną odpowiednio po zmiennych x i y. W przypadku gdy dystrybuanta $F_{X,Y}$ jest stała, gęstość oczywiście jest równa 0. Zatem wystarczy rozpatrzeć następujące trzy przypadki. W każdym z nich różniczkujemy funkcję $F_{X,Y}$ najpierw po zmiennej x, a potem po zmiennej y.

Przypadek 1: $(x,y)\in[0,2]\times[0,2]$

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2\left(\frac{xy}{4}\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{y}{4}\right)}{\partial y}=\frac{1}{4}$$

Przypadek 2: $x\in[0,2]$ i $y>2$

$$f_{X,Y}(s,t)=\frac{\partial^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\frac{1}{2}}{\partial y}=0$$

Przypadek 3: $x > 2$ i $y \in [0, 2]$

$$f_{X,Y}(s,t) = \frac{\partial^2 \frac{y}{2}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial 0}{\partial y} = 0$$

Stąd oczywiście otrzymujemy wyjściową gęstość:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dla } (x,y) \in [0,2] \times [0,2], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wyznaczmy jeszcze rozkład brzegowy zmiennej losowej X (w tym przykładzie dzięki symetrii rozkład zmiennej losowej Y wyznacza się analogicznie). Aby wyznaczyć gęstość zmiennej losowej X posłużymy się wzorem:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t)\, dt.$$

Ponieważ funkcja $f_{X,Y}$ jest niezerowa tylko dla $x \in [0, 2]$, dla $x \notin [0, 2]$ powyższa całka jest równa 0 i wówczas $f_X(x) = 0$. Natomiast dla $x \in [0, 2]$ mamy:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t)\, dt = \int_0^2 \frac{1}{4}\, dt = \left[\frac{t}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}.$$

A zatem, co nie jest żadnym zaskoczeniem, zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 2]$, ponieważ gęstością tego rozkładu jest funkcja:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [0,2], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Dystrybuantę F_X moglibyśmy teraz wyznaczyć bezpośrednio z gęstości f_X, jeśli natomiast chcielibyśmy odwołać się do dystrybuanty rozkładu łącznego, możemy posłużyć się wzorem:

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y).$$

Jeden rzut okiem na rysunek poglądowy funkcji $F_{X,Y}$ pokazuje, że mamy tutaj do czynienia z trzema różnymi przypadkami.

Przypadek 1: $x < 0$

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y \to \infty} 0 = 0$$

Przypadek 2: $x \in [0, 2]$

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y \to \infty} \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$$

Przypadek 3: $x > 2$

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y \to \infty} 1 = 1$$

Ostatecznie, dystrybuanta zmiennej losowej X zadane jest wzorem:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{x}{2} & \text{dla } x \in [0,2], \\ 1 & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$

Z symetrii widać od razu, że gęstość i dystrybuanta zmiennej losowej Y przedstawiają się następująco:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } y \in [0,2], \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

oraz

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < 0, \\ \frac{y}{2} & \text{dla } y \in [0,2], \\ 1 & \text{dla } y > 2. \end{cases}$$

Twierdzenie 1. *Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa (X,Y) ma gęstość $f_{X,Y}$, to dla dowolnej funkcji (mierzalnej) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(s,t) f_{X,Y}(s,t)\, dt\, ds.$$

Przykład 2. Niech (X,Y) będzie zmienną losową z przykładu 1. Wówczas wartość oczekiwana zmiennej losowej X^2Y jest równa:

$$\mathbb{E}(X^2Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s^2 t f_{X,Y}(s,t)\, dt\, ds = \int_0^2 \int_0^2 \frac{s^2 t}{4}\, dt\, ds = \int_0^2 \left[\frac{s^2t^2}{8}\right]_0^2 ds = \int_0^2 \frac{s^2}{2}\, ds = \left[\frac{s^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Definicja 2. *Zmienne losowe X i Y są* **niezależne***, jeśli dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi:*

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Jeśli zmienna losowa dwuwymiarowa (X,Y) ma gęstość $f_{X,Y}$, natomiast X i Y mają gęstości odpowiednio f_X i f_Y, to zmienne losowe X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y),$$

dla (prawie) wszystkich x i y.

Przykład 3. Nietrudno zauważyć, że zmienne losowe X i Y z Przykładu 1 są niezależne. W tym celu sprawdźmy warunek z gęstościami.

Przypadek 1: $x < 0$ lub $x > 2$

$$f_{X,Y}(x,y) = 0 = 0 \cdot f_Y(y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Przypadek 2: $y < 0$ lub $y > 2$

$$f_{X,Y}(x,y) = 0 = f_X(x) \cdot 0 = f_X(x)f_Y(y)$$

Przypadek 3: $x \in [0,2]$ i $y \in [0,2]$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = f_X(x)f_Y(y)$$

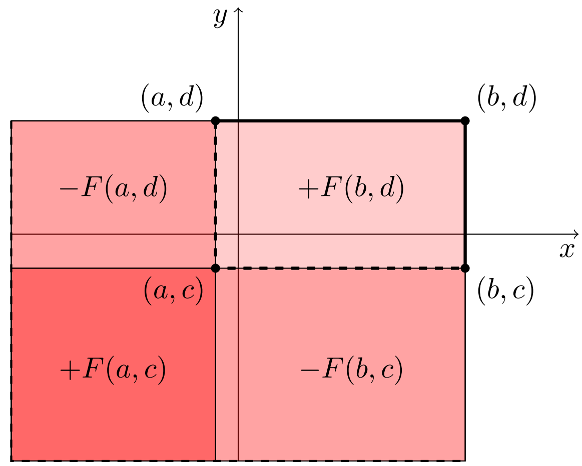
Twierdzenie 2. *Jeśli zmienna losowa X ma dystrybuantę $F := F_X$ to:*

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a).$$

Natomiast dla zmiennej losowej dwuwymiarowej (X,Y) o dystrybuancie $F := F_{X,Y}$ mamy:

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b, c < Y \leqslant d) = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c).$$

Szkic dowodu. Naszym celem jest wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa (X,Y) należy do prostokąta A o wierzchołkach (a,c), (b,c), (b,d) i (a,d) (z usuniętymi dwoma bokami). Ponieważ $F(b,d) = \mathbb{P}(X \leqslant b, Y \leqslant d)$, musimy wyznaczyć obszar odpowiadający zdarzeniu $(X \leqslant b, Y \leqslant d)$. Obszar ten jest nieskończony i można wyobrazić go sobie jako nieskończony prostokąt o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, którego prawy górny wierzchołek znajduje się w punkcie (b,d). Jak łatwo zauważyć, aby uzyskać prostokąt A zaczynamy od nieskończonego obszaru zadanego przez punkt (b,d), następnie odejmujemy od niego dwa nieskończone obszary zadane odpowiednio przez punkty (b,c) i (a,d). Ponieważ nieskończony obszar o prawym górnym wierzchołku w (a,c) został odjęty dwa razy, musimy teraz włączyć go z powrotem.



□

Twierdzenie 3. *Dla zmiennej losowej dyskretnej X oraz dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ mamy*

$$\mathbb{P}\left(X \in A\right) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}\left(X = x\right).$$

Podobnie, dla zmiennej losowej ciągłej X o gęstości f_X i dowolnego zbioru (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi

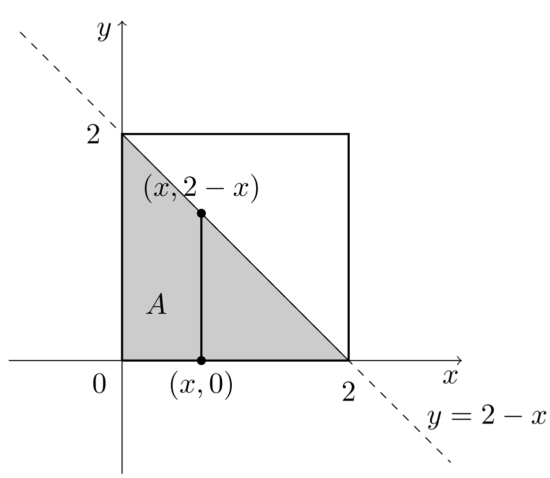
$$\mathbb{P}\left(X \in A\right) = \int_{x \in A} f_X(x)\, dx,$$

a dla zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) o gęstości $f_{X,Y}(x, y)$ oraz dowolnego zbioru (borelowskiego) $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{P}\left((X,Y) \in A\right) = \int\int_{(x,y) \in A} f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx.$$

Przykład 4. Niech A będzie trójkątem wyznaczonym przez punkty $(0,0)$, $(2,0)$ oraz $(0,2)$. Obliczmy prawdopodobieństwo, że zmienna losowa (X,Y) z Przykładu 1 należy do zbioru A. W tym celu musimy policzyć całkę podwójną po zbiorze A z gęstości $f_{X,Y}$. Aby obliczyć tę całkę zauważmy, że dla ustalonego punktu $x \in [0,2]$, zbiór tych punktów y, dla których $(x,y) \in A$ to odcinek $[0, 2-x]$. Innymi słowy mamy

$$A = \{(x,y) : x \in [0,2], y \in [0, 2-x]\}.$$



Zatem otrzymujemy:

$$\mathbb{P}\left((X,Y)\in A\right) = \int\int_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{2-x}\frac{1}{4}\,dy\,dx = \int_0^2\left[\frac{y}{4}\right]_0^{2-x}dx = \int_0^2\frac{2-x}{4}\,dx$$
$$= \left[\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\right]_0^2 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Wynik ten można było przewidzieć, ponieważ wektor losowy (X,Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ i $(0,2)$. Rozważmy zatem inny wektor losowy (X_1,Y_1) o rozkładzie prawdopodobieństwa zadanym gęstością

$$f_{X_1,Y_1}(x,y) = \begin{cases}\frac{3}{16}x^2y & \text{dla } (x,y)\in[0,2]\times[0,2],\\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.}\end{cases}$$

Mamy zatem:

$$\mathbb{P}\left((X_1,Y_1)\in A\right) = \int\int_{(x,y)\in A} f_{X_1,Y_1}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{2-x}\frac{3}{16}x^2y\,dy\,dx = \int_0^2\left[\frac{3x^2y^2}{32}\right]_0^{2-x}dx$$
$$= \int_0^2\frac{3x^2(2-x)^2}{32}\,dx = \int_0^2\frac{12x^2-12x^3+3x^4}{32}\,dx = \left[\frac{x^3}{8}-\frac{3x^4}{32}+\frac{3x^5}{160}\right]_0^2 = 1-\frac{3}{2}+\frac{3}{5} = \frac{1}{10}.$$