Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 4.3/2023

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Problem stopu

Przypomnijmy, że w badaniach granic ciągów bardzo przydatnym warunkiem badania zbieżności był *warunek Cauchy'ego*. Pozwalał on na sprawdzanie zbieżności ciągu *bez hipotezy* co może być jego granicą (a tak byłoby z definicji). A gdzie ma to zastosowanie? Np. w bardzo znanym w informatyce **problemie stopu**.

Aby w efektywny sposób określić jak wydostać się z pętli *while* należy sformułować warunek, który zapewni, że błąd obliczenia jest "mały" (mniejszy niż nasze wymaganie), czyli ciąg błędów w kolejnych iteracjach powinien być zbieżny (do zera). Jak już mówiliśmy, my na ogół nie wiemy jaka jest dokładna wartość obliczana w takiej procedurze, więc możemy porównywać jedynie wartości w kolejnych iteracjach, a nie wyniki obliczeń z hipotetycznym wynikiem. Słowem: najlepszy do testowania byłby warunek Cauchy'ego.

Potrafimy podać przydatny warunek wystarczający na to, by zachodził warunek Cauchy'ego.

Twierdzenie. (warunek wystarczający dla warunku Cauchy'ego)

Załóżmy, że $a_n > 0$, a ponadto istnieje taka stała $C \in \mathbb{R}$, że

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant C$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jeśli ciąg $(x_n) \subset \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant a_n$$

dla dostatecznie dużych n, to (x_n) spełnia warunek Cauchy'ego.

A gdzie tu szeregi? Są! Po prostu, jeśli szereg jest zbieżny: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, to on spełnia założenia tego twierdzenia!

Okazuje się, że w warunku stopu należy sprawdzać różnice kolejnych iteracji nie poprzez warunek $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$, tylko np. przez $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$ (lub wyrazy innego szeregu zbieżnego po prawej stronie oszacowania)!

Szeregi potęgowe.

Szereg postaci

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots$ są dowolnymi liczbami, nazywamy szeregiem potęgowym. Dla $x = x_0$ szereg ten jest zawsze zbieżny i ma sumę a_0; dla $x \neq 0$ szereg może być zbieżny, ale nie musi.

Twierdzenie. (o zbieżności szeregu potęgowego) Jeżeli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

jest zbieżny w punkcie $\tilde{x} \neq x_0$, to jest **bezwzględnie zbieżny** wewnątrz przedziału $(x_0-\varrho, x_0+\varrho)$, gdzie $\varrho = |x_0-\tilde{x}|$.

Okazuje się, że szeregi potęgowe zawsze są zbieżne w symetrycznym przedziale postaci $(a-r, a+r)$, gdzie r nazywamy promieniem zbieżności i pozwala się on wyliczyć z ciągu współczynników (a_n). Zaczniemy od wzorów na promień zbieżności:

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazywamy kres górny r zbioru tych $\mid x-x_0 \mid$, dla których szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny.

Gdy zbiór ten jest nieograniczony, umawiamy się przyjąć $r=\infty$. Przedział (x_0-r, x_0+r) (koło $\mid x-x_0 \mid < r$) nazywamy przedziałem zbieżności (kołem zbieżności) szeregu potęgowego o promieniu zbieżności r.

Twierdzenie Cauchy'ego - Hadamarda...

... podaje wzór na promień zbieżności szeregu potęgowego.

Twierdzenie. Niech

$$\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\mid a_n \mid}.$$

Wtedy promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ jest liczba

$$r = \frac{1}{\lambda},$$

przy czym gdy $\lambda = 0$ przyjmujemy $r = \infty$, a gdy $\lambda = \infty$, przyjmujemy $r = 0$.

Kolejne pytanie: co z przypadkiem $x - x_0 = r$ oraz $x - x_0 = -r$?

Odpowiedź w przykładach:

a) Szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ jest na obu końcach przedziału zbieżności (czyli w -1 i 1) rozbieżny. To oczywiste...

b) Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Można wyliczyć, że $r = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1$. Na jednym końcu, dla $x = 1$ mamy rozbieżny szereg harmoniczny, a na drugim (dla $x = -1$) mamy zbieżny szereg naprzemienny anharmoniczny.

c) Rozważmy teraz szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Promień zbieżności liczy się niemal identycznie i wynosi on 1. Teraz jednak na obu końcach dostajemy szeregi bezwzględnie zbieżne.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Funkcja, której szereg potęgowy jest analizowany
def f(x):
    return np.exp(x)

# Wyznaczanie sumy częściowej szeregu potęgowego
def taylor(x, n):
    taylor_sum = 0
    for i in range(n):
        taylor_sum += (x**i) / np.math.factorial(i)
    return taylor_sum

# Zakres zmiennej x
x = np.linspace(-0.2, 12, 1000)

# Liczba wyrazów sumy częściowej
n = 8
```

```
# Wykres funkcji i sumy częściowej
plt.plot(x, f(x), label='f(x)')
plt.plot(x, taylor(x, n), label='Suma częściowa')

# Konfiguracja wykresu
plt.title(f'Suma szeregu potęgowego: {n} wyrazów')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()

# Wyświetlenie wykresu
plt.grid()
plt.show()
```

Przykład.

Znaleźć koło (przedział) zbieżności szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

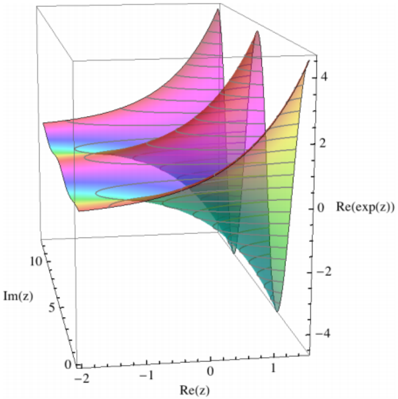
R o z w i ą z a n i e. Tu $x_0 = 1$. Skorzystamy z twierdzenia Cauchy'ego-Hadamarda:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} = 1 \quad , \quad r = \frac{1}{\lambda}.$$

Czyli koło zbieżności to przedział $(1-1, 1+1) = (0,2)$.

Uwagi.

W wielu zastosowaniach informatycznych potrzebne bądą funkcje zespolone (lub: funkcje wielu zmiennych). To *nieco* wykracza poza zaplanowany zakres tego wykładu (niestety...), ale kilka uwag nie zaszkodzi...



Portret exp**, I.** Wykres funkcji $f(x,y) = \mathrm{Re}\,(\exp(x+iy))$ nad prostokątem $-2 \leq x \leq 1.5$, $0 \leq y \leq 12.56$; innymi słowy, wysokość punktu powierzchni nad dolnym dnem pudełka jest równa $\mathrm{Re}\,(\exp(x+iy))$. Szare linie to poziomice (jak na mapie: wysokość na poziomicy ma jedną, ustaloną wartość. Kolory powierzchni zależą liniowo od części urojonej liczby $\exp(x+iy)$. Przednia krawędź powierzchni odpowiada wartości $y = \mathrm{Im}\, z = 0$: widzimy wykres $\exp$ na $\mathbb{R}$.

Wszystko, co do tej pory powiedzieliśmy o szeregach rzeczywistych stosuje się odpowiednio do szeregów zespolonych.

Różnice są jednak następujące:

1. Szeregi o wyrazach nieujemnych są z definicji rzeczywiste, więc tu nie ma zmian (to dotyczy kryteriów porównawczego, d'Alemberta, Cauchy'ego, Raabego i o zagęszczaniu).

2. Symbol wartości bezwzględnej $|\cdot|$ trzeba interpretować jako moduł liczby zespolonej. Zbieżność bezwzględna dotyczy szeregu z nałożonymi na każdy wyraz modułami (a to już jest szereg rzeczywisty o wyrazach nieujemnych).

3. Twierdzenie Riemanna akurat nie jest prawdziwe w naszym sformułowaniu (nie zawsze można dostać, jako sumę szeregu poprzestawianego, dowolnej liczby zespolonej, czy choćby rzeczywistej). Zbiór *możliwych sum* danego szeregu warunkowo zbieżnego jest an ogół bardzo trudny do opisania.

4. W kryterium Dirichleta ciąg (a_n) dopuszczamy zespolony, ale ciąg (b_n) pozostaje rzeczywisty.

5. W definicji szeregu potęgowego, zmienna x oraz współczynniki a i a_n mogą być zespolone.

6. Wzory na promień zbieżności pozostają te same (oczywiście teraz występuje w nich moduł).

7. Szereg potęgowy jest zbieżny niemal jednostajnie na kole otwartym o środku w a i promieniu r (czyli na $\{x : |x - a| < r\}$), nazywanym *kołem zbieżności*. Szereg jest rozbieżny poza kołem domkniętym, a na brzegu (czyli na okręgu zespolonym) może być różnie (w niektorych punktach zbieżność, w innych rozbieżność).

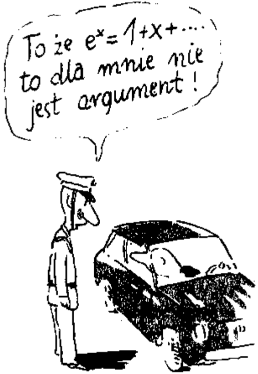
Zastosowanie szeregów potęgowych ma swoją podstawę w obserwacji, że *znane nam* **funkcje** (elementarne) mają swoje reprezentacje w postaci szeregów potęgowych i **wygodnie jest zastępować je szeregami** (co pozwala oszacować z dowolną dokładnością ich wartości!!).

Można m.in. wykazać, że:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$



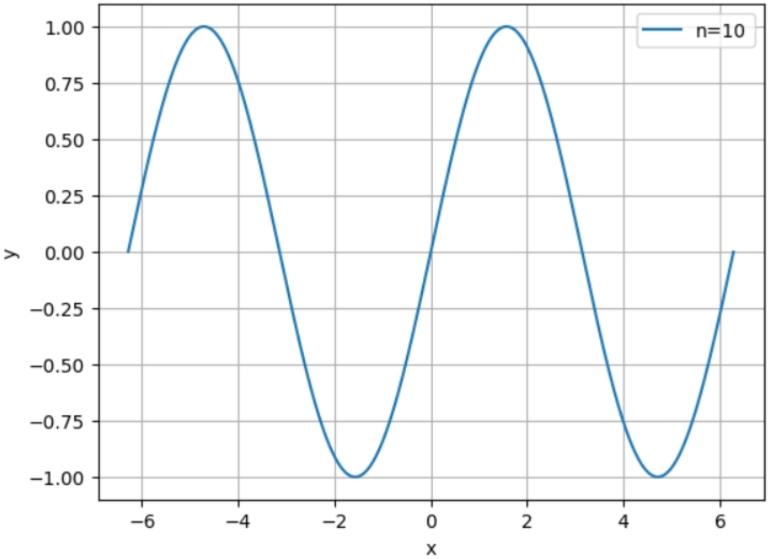
Tak przy okazji - mamy **nareszcie** formalne definicje tych funkcji!

W szkole ich nie było...

Python

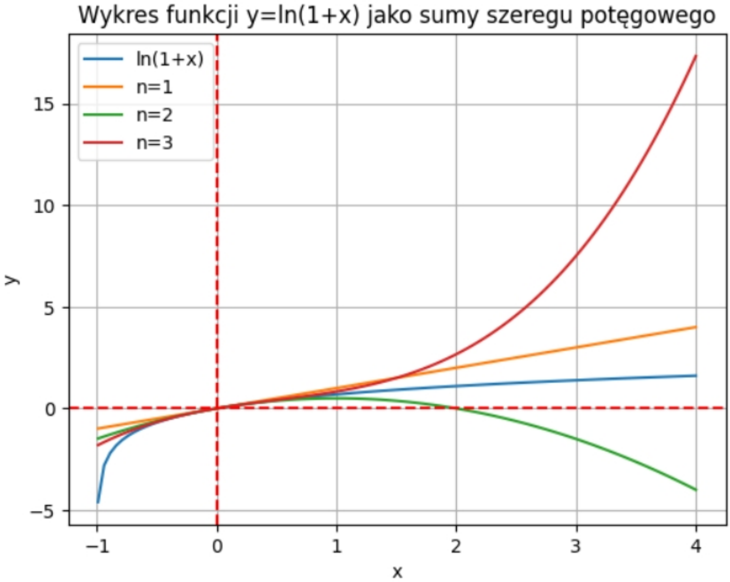
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Definiujemy funkcję, jej wartości obliczamy na podstawie sumy sz. potęgowego
def f(x, n):
    suma = 0
    for i in range(n):
        suma += ((-1)**i * x**(2*i+1)) / np.math.factorial(2*i+1)
    return suma

# Tworzymy dane do wykresu
x = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 1000)
y = f(x, 10) # czyli n=10

# Rysujemy wykres
plt.plot(x, y, label='n=10')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.show()
```

A to wykres do kodu w Pythonie: suma $n = 10$ wyrazów.



$\ln(1+x)$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def ln_series(x, n):
    # funkcja obliczająca sumę szeregu potęgowego dla ln(1+x) do n-tego wyrazu
    result = 0
    for i in range(1, n+1):
        result += (-1)**(i+1) * (x**i) / i
    return result

x = np.linspace(-0.8, 1, 1000)

plt.plot(x, np.log(1+x), label='ln(1+x)')
plt.plot(x, ln_series(x, 1), label='n=1')
plt.plot(x, ln_series(x, 2), label='n=2')
plt.plot(x, ln_series(x, 3), label='n=3')
plt.plot(x, ln_series(x, 5), label='n=5')

plt.title('Wykres funkcji ln(1+x) jako sumy szeregu potęgowego')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')

plt.legend()
plt.show()
```



Proszę na podstawie tego szeregu potęgowego znaleźć reprezentację w postaci szeregu liczby rzeczywistej $\ln 2$. Jak nazywamy ten szereg?

Dla leniwych - odpowiedź...

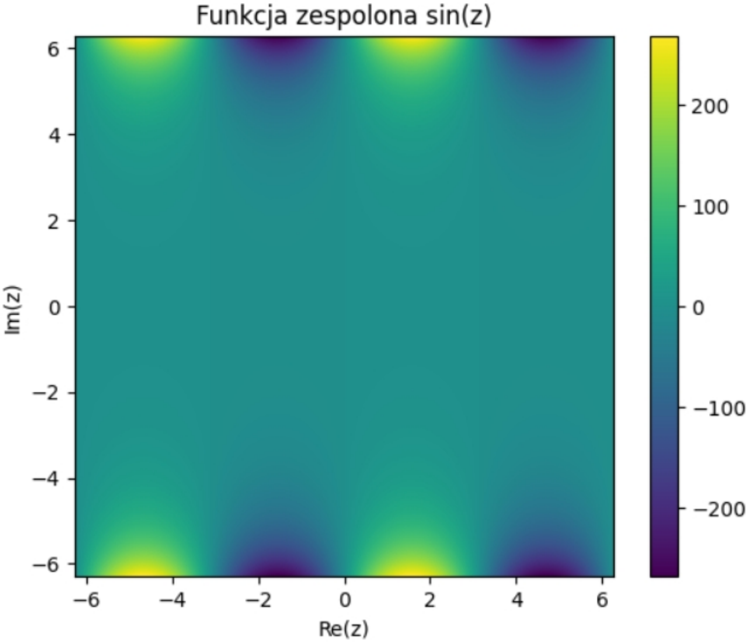
$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

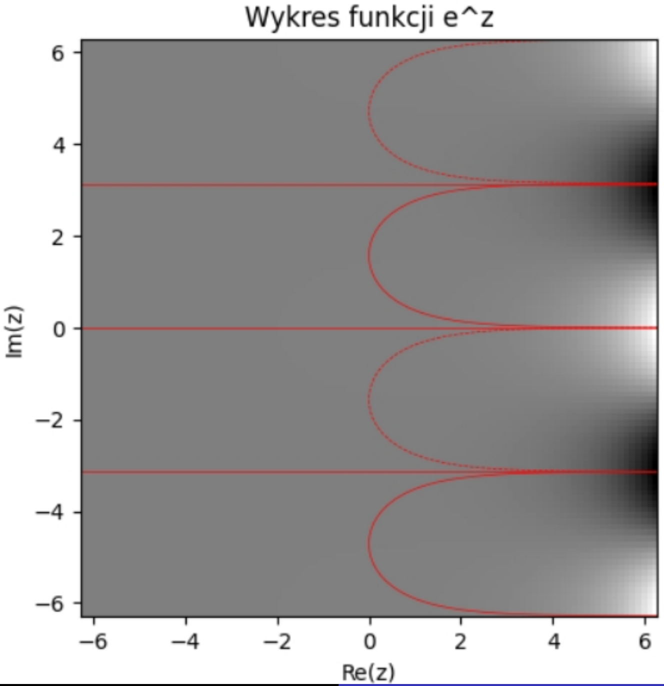
(znamy sumę szeregu anharmonicznego!)

Szeregi potęgowe pozwalają więc nareszcie na **obliczanie** sum szeregów (nadal - tylko niektórych). Aby obliczyć więcej będziemy np. potrzebować pochodnych - o czym później...

Podobnie obliczamy np.:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad .$$


Funkcja zespolona sin(z)
Im(z)
Re(z)
6
4
2
0
−2
−4
−6
200
100
−100
−200


Wykres funkcji e^z
Im(z)
Re(z)
6
4
2
0
−2
−4
−6
−6
−4
−2
0
2
4
6

Liczba e w obliczeniach komputerowych.

Te wzory pokazują jak efektywnie przybliżać wartości tych (i innych) funkcji na komputerze - np. dla liczby e to

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

$$e \approx \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}.$$

To oczywiście lepsza metoda niż z definicji tej liczby - aby zwiększyć dokładność obliczeń wystarczy zastosować ujęcie rekurencyjne (z definicji - musielibyśmy liczyć całkowicie od nowa).

Ćwiczenie: Obliczyć przybliżenia e z definicji i powyższego wzoru dla $N = 100$. A teraz dla $N = 101$... Czy możemy skorzystać z poprzedniego wyniku? W którym przypadku?

A wszystko dzięki mnożeniu szeregów...

Zadania.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, (szereg harmoniczny).

R o z w i ą z a n i e. Gdyby szereg harmoniczny był zbieżny to wówczas $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_n$. Jeśli obliczymy różnicę $s_{2n} - s_n$ to otrzymujemy

$$s_{2n} - s_n = (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}) - (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) =$$
$$= \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \ .$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż z jednej strony mamy nierówność

$$s_{2n} - s_n \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

a z drugiej strony wiemy, że

$$\lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_n) = 0 \ .$$

Wykazaliśmy więc, że szereg harmoniczny jest rozbieżny.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \neq 1$, (szereg geometryczny).

R o z w i ą z a n i e. Przez indukcję obliczamy n-tą sumę częściową szeregu geometrycznego

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \ .$$

Wiemy, że ciąg (q^n) jest zbieżny do zera gdy $\mid q \mid < 1$, natomiast jest rozbieżny dla $\mid q \mid > 1$. Wynika więc, że $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \ , \qquad \text{dla} \quad \mid q \mid < 1 \ .$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

R o z w i ą z a n i e. Wyraz ogólny szeregu ma własność

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \ ,$$

a więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, czyli szereg $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$ jest rozbieżny.

(4) Podamy drugi przykład, w którym potrafimy **obliczyć** sumę szeregu...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ prawdziwy jest wzór

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

więc n-tą sumę częściową możemy zapisać w postaci

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \\ + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy wzór $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Zadanie (5).

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

R o z w i ą z a n i e. Pokażemy, że ciąg sum częściowych (s_n) posiada dwa punkty skupienia, a więc nie jest zbieżny, co oznacza, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ jest rozbieżny.

Obliczmy $$s_{2n} = (-1+1)+\ldots+(-1+1) = 0 \quad ,$$

$$s_{2n+1} = (-1+1)+\ldots+(-1+1)-1 = -1 \quad \text{, a więc}$$

$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} s_n = -1$.

Szereg jest rozbieżny.

Zadanie (6).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

R o z w i ą z a n i e. Dany szereg jest rozbieżny, ponieważ po zastosowaniu kryterium ilorazowego stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1 \ .$$

Szereg jest rozbieżny.

Zadanie (7).

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n \ln n}$$

R o z w i ą z a n i e. Dla zbadania zbieżności tego szeregu naprzemiennego zastosujemy kryterium Leibniza. W tym celu wystarczy obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$$

oraz napisać nierówność prawdziwą dla $n = 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n} \ .$$

Ciąg (a_n) jest malejący do zera, a więc szereg jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza.

Szereg anharmoniczny.

Zadanie (8).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

R o z w i ą z a n i e. Ponieważ ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ jest malejący i dąży do zera przy $n \to \infty$, więc na podstawie kryterium Leibniza stwierdzamy, że szereg anharmoniczny jest zbieżny.

Jak już wiemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2 \; .$$

Zadanie (9).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

R o z w i ą z a n i e. Wyraz ogólny szeregu możemy przedstawić w następującej postaci przy pomocy ułamków prostych

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} ,$$

a więc n-ta suma częściowa przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots \\
&\dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 4}\right) + \\
&+ \left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2\cdot 5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n}\right) + \\
&+ \left(\frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}\right) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}\right) = \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{4(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}\ .
\end{aligned}
$$

Poznaliśmy więc **sumę szeregu** (!):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

Zadanie (10). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

R o z w i ą z a n i e. Dany szereg jest zbieżny, ponieważ po zastosowaniu kryterium ilorazowego stwierdzamy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = 2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1 \ .$$

Szeregi trygonometryczne Fouriera.

Wyrażenie postaci $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ nazywamy *szeregiem trygonometrycznym*.

Sumy częściowe tego szeregu

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

to *wielomiany trygonometryczne*.

Twierdzenie. (o współczynnikach jednostajnie zbieżnego szeregu trygonometrycznego). *Jeżeli szereg trygonometryczny* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *jest zbieżny jednostajnie do funkcji* $f(x)$ *dla* $x \in < -\pi, \pi >$ *to*

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

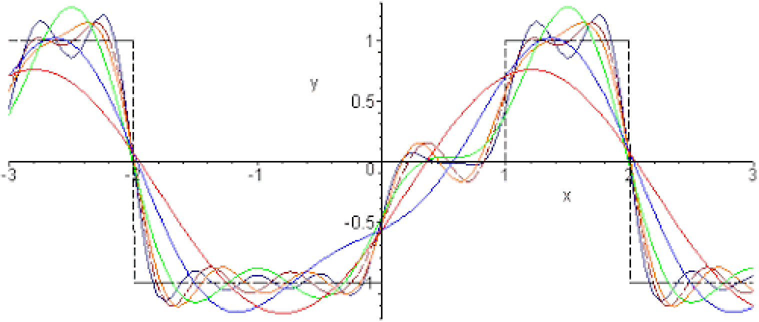
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,$$

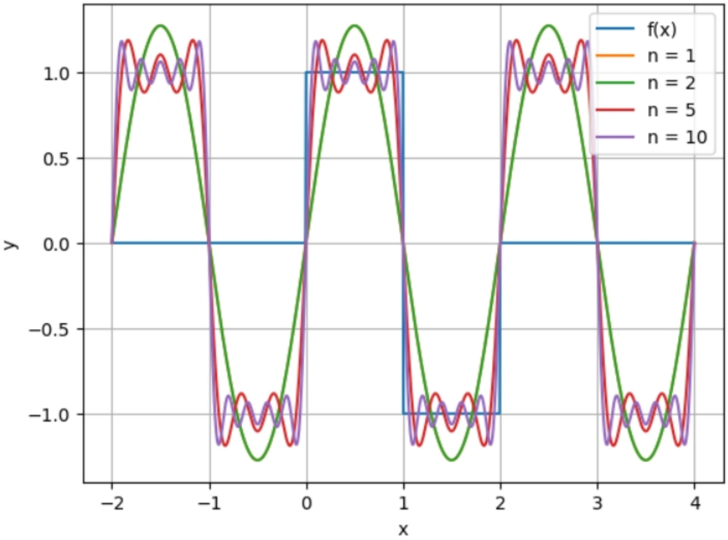
dla $n = 1, 2, \ldots$.

Powyższe wzory współczynników a_0, a_n, b_n nazywamy *wzorami Eulera - Fouriera*, a współczynniki a_0, a_n, b_n *współczynnikami Fouriera* funkcji f. Szereg $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ nazywamy jej **szeregiem Fouriera**.

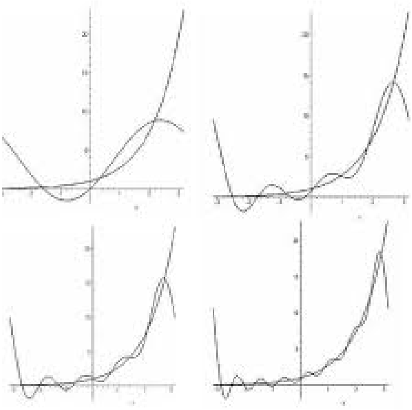
Funkcja schodkowa a szereg Fouriera.



Kolejne sumy częściowe - oznaczone różnymi kolorami.
Tu funkcja $f(x)$ jest schodkowa.


f(x)
n = 1
n = 2
n = 5
n = 10
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
y
−2
−1
0
1
2
3
4
x

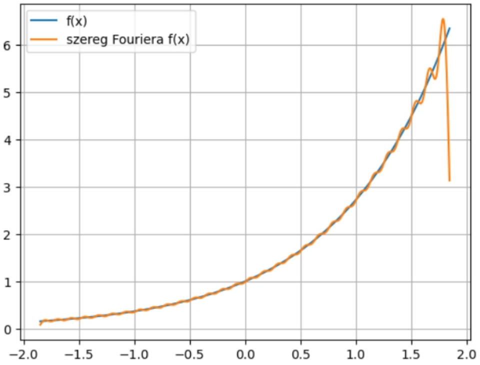
Funkcja wykładnicza e^x a szereg Fouriera.



Tu funkcja $f(x) = e^x$ jest zdefiniowana na $[-3, 3)$ (i dalej przedłużona poprzez okresowość).

Konieczne jest małe wyjaśnienie: w jakim sensie szeregi Fouriera są "potęgowe". To są szeregi definiowane dla funkcji okresowych, ale ich postać zespolona na $[-\pi, \pi]$ jest następująca:

$$f(z) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (e^{2\pi i z})^n.$$



Pamiętajmy: szeregi Fouriera dobrze aproksymują funkcje **okresowe**!

Tajne/poufne.

Przykładowe zagadnienia na egzamin - po tym wykładzie...

- Dokonujemy przybliżonych obliczeń liczby rzeczywistej e na komputerze za pomocą różnych metod:
  [a] wzoru bezpośredniego $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$,
  [b] sumy $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (wzoru rekurencyjnego: $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n!}$).
  Dla $n = 9$ wyniki wynoszą odpowiednio: 2,5811747917132 dla [a] oraz 2,71828180114638 dla [b]. Czy można - **bez wykonywania obliczeń** - wskazać ile cyfr po przecinku jest dokładnie obliczone i w którym przypadku? Odpowiedź uzasadnij. Wnioski?
- Dla danego szeregu $((a_n), (S_n))$,, gdzie $a_n > 0$ wiemy, że:
  [a] $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_6) + \ldots$,
  [b] $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots \neq (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) - (a_2 + a_4 + a_6 + \ldots)$,
  [c] $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots = (a_1 + a_3 - a_2) - (a_4 + a_6 - a_5) + \ldots$.
  Co można powiedzieć o zbieżności szeregu (zbieżny?, bezwzględnie zbieżny?, warunkowo zbieżny?, nic nie wiemy?): w każdym przypadku osobno. Odpowiedź uzasadnij.

- Oznaczmy przez a_n bok 2^n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o średnicy jeden. Z twierdzenia Pitagorasa można obliczyć, że $a_2 = \sqrt{2}/2$ oraz $a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$. Zatem obwód tego 2^n-kąta wynosi $A_n = 2^n a_n$. Z punktu widzenia obliczeń na liczbach rzeczywistych mamy oczywiście: $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi$. Dlaczego eksperyment numeryczny (obliczanie kolejnych liczb A_n) **nie daje** tego wyniku? Co jest tego przyczyną? Zaproponuj inny algorytm wyznaczania wartości liczby π.
- Podaj kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu i przykład szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dla którego kryterium te nie rozstrzyga o jego zbieżności.
- Szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny (do $\ln 2$). **Jak uzasadnić dlaczego?** Obliczając sumę pierwszych 99 wyrazów otrzymamy wynik przybliżony. Jaki jest błąd tego przybliżenia (twierdzenie!)?

Archimedes

```
import math

def inscribed_polygon(n):
    # początkowa wartość boku a_0
    a = 1.0

    # obliczenie boku a_n+1 za pomocą wzoru rekurencyjnego
    for i in range(n):
        a = 0.5 * math.sqrt(2 - math.sqrt(4 - a**2))

    # zwrócenie wyniku
    return a
```

stosujemy:

```
for n in range(3, 11):
    a = inscribed_polygon(n)
    print(f"Dla n={n} bok wielokąta wpisanego w okrąg wynosi: {a:.6f}")
```

A jak dla kolejnych $n > 10$???