Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 4.2/2023

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Punkty skupienia zbioru.

Definicja. Element $x_0 \in X$ nazywa się punktem skupienia zbioru $A \subset X$ jeżeli w każdej kuli otwartej $K(x_0, r)$ $(r > 0)$ istnieje co najmniej 1 element zbioru A różny od x_0:

$$\underset{r>0}{\forall} \quad \underset{x \in A,\ x \neq x_0}{\exists} \quad x \in (A \cap K(x_0, r))$$

Inaczej mówiąc - x_0 jest punktem skupienia zbioru A jeżeli istnieje ciąg $(x_n) \subset A$ taki, że (x_n) jest zbieżny do x_0 gdy $n \to \infty$.

Oczywiście x_0 nie musi należeć do A. Np. $A = (0, 1)$. Wówczas każdy punkt $x \in A$ jest jego punktem skupienia, ale również 0 i 1 są jego punktami skupienia.

Granica funkcji w punkcie.

Niech $f : X \to \mathbb{R}$ i niech x_0 niech będzie punktem skupienia zbioru X.

Definicja. (def. Heinego)

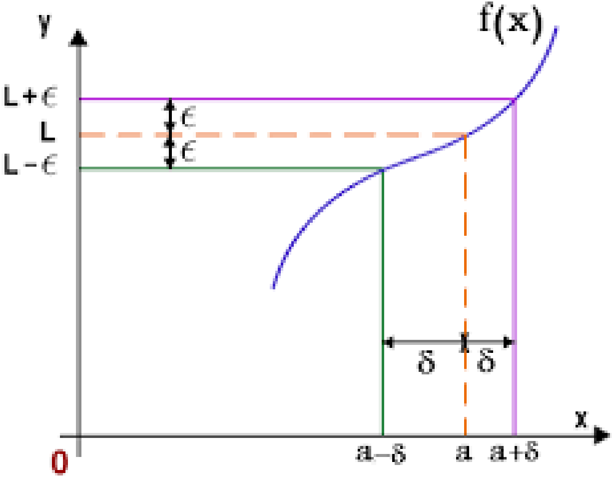
Mówimy, że element y_0 jest granicą funkcji f $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego ciągu (x_n) elementów $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ oraz $|x_n - x_0| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ odpowiedni ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do y_0, czyli $|f(x_n) - y_0| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Definicja. (def. Cauchy'ego)

Mówimy, że element y_0 jest granicą funkcji f w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla wszystkich elementów $x \neq x_0 \in X$ takich, że $|x - x_0| < \delta$ zachodzi $|f(x) - y_0| < \varepsilon$

Wówczas piszemy $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Granica funkcji w punkcie a.



Równoważność definicji granicy.

Czyli definicja Cauchy'ego ma postać:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x\in X}{\forall} \ |x-x_0|<\delta \implies |f(x)-y_0|<\varepsilon.$$

W powyższych definicjach użyliśmy tej samej nazwy: „granica funkcji f" - usprawiedliwia to następujące:

Twierdzenie. *Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji f w punkcie x_0 dla funkcji o wartościach rzeczywistych są równoważne tj. element y_0 jest granicą funkcji f w sensie definicji Heinego wtedy i tylko wtedy, gdy jest granicą funkcji f w sensie definicji Cauchy'ego.*

(C) = (H)

Definicje w przypadku funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

(def. Heinego)

$$\forall_{(x_n)} \; x_n \neq x_0 (| x_n - x_0 | \xrightarrow[n \to \infty]{} 0) \implies (| f(x_n) - y_0 | \xrightarrow[n \to \infty]{} 0)$$

(def. Cauchy'ego)

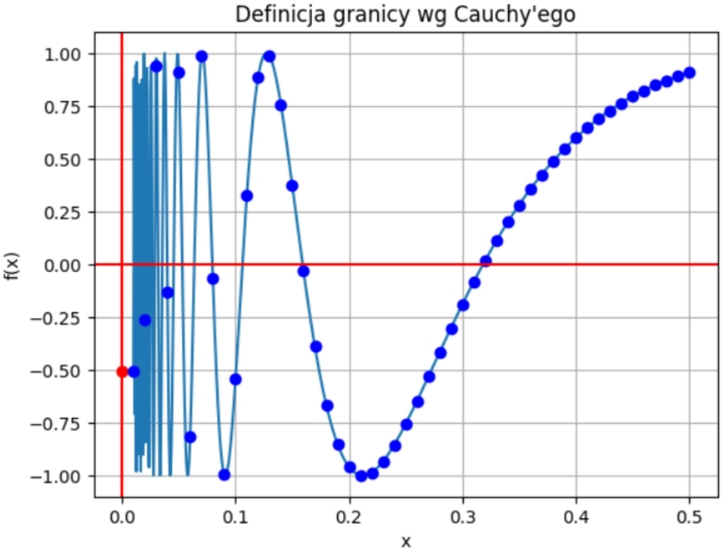
$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{\delta > 0} \; \forall_{x \in \mathbb{R}} \; | x - x_0 | < \delta \implies | f(x) - y_0 | < \varepsilon$$

Jeszcze raz podkreślmy: takich definicji **nie można weryfikować na komputerze**, a ponieważ własność posiadania przez funkcje granic w punkcie jest istotna, to **musimy** to weryfikować sami...

A dlaczego istotna? Najważniejsze zastosowanie (nie jest jedyne!) w informatyce to granica ilorazu różnicowego funkcji (= pochodnej, o czym później), a tylko takie fukcje nie sprawią *zbyt wielu* problemów w trakcie obliczeń komputerowych... O innych zastosowaniach - wkrótce...

Granica funkcji w punkcie nie musi istnieć...

```
Nie ma granicy
```



Granice jednostronne.

Dla funkcji rzeczywistych $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie P jest przedziałem można pojęcie granicy nieco uogólnić.

Definicja. Niech x_0 będzie punktem skupienia przedziału P. Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą prawostronną funkcji f w punkcie x_0 jeżeli:

(a) (def. Heinego)

dla dowolnego ciągu (x_n), $x_n \in P$, $x_n > x_0$ $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do g

(b) (def. Cauchy'ego)

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x\in P}{\forall} \ 0 < x - x_0 < \delta \implies | f(x) - g | < \varepsilon$$

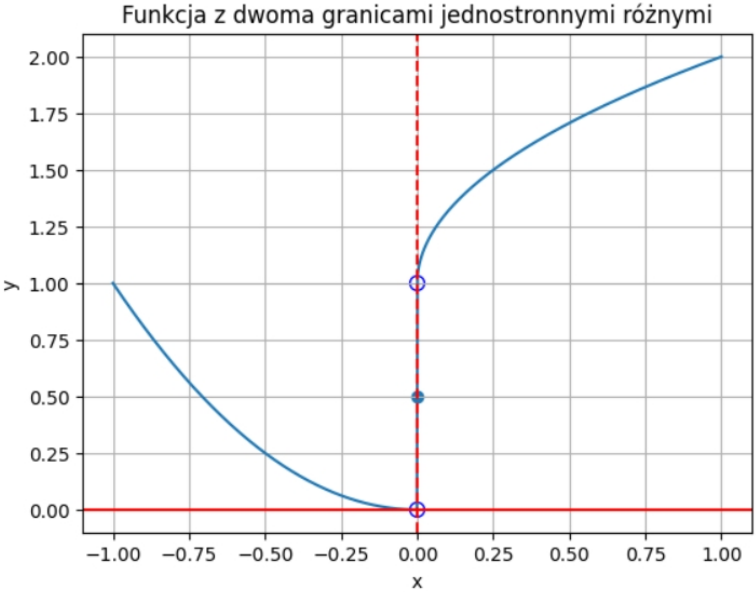
Ten fakt oznaczać będziemy: $g = \lim_{x\to x_0+} f(x)$

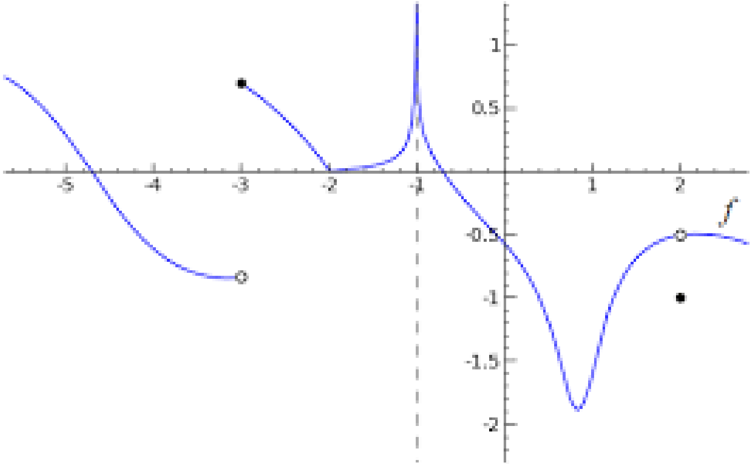
Analogicznie definiujemy granicę lewostronną h: w (a) bierzemy ciągi (x_n) takie, że $x_n < x_0$, a w (b) $x \in P$ spełniające warunek $0 < x_0 - x < \delta$.

Oznaczać ją będziemy $h = \lim_{x \to x_0 -} f(x)$ (lub $h = f(x_0 - 0) = f(x_0 -)$). Granice także nazywać będziemy łącznie **jednostronnymi.**

Twierdzenie. *Jeżeli* $\lim_{x \to x_0 +} f(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x)$, *to istnieje granica funkcji f w punkcie x_0 i równa jest wartości tych granic jednostronnych.*

W n i o s e k. Jeżeli $\lim_{x \to x_0 +} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 -} f(x)$, to funkcja f nie posiada granicy w punkcie x_0.


Funkcja z dwoma granicami jednostronnymi różnymi
y
x
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00



Różne granice w $x = -3$, w $x = 2$ granice jednostronne równe (ale granica różna od wartości funkcji)...

Granice na komputerze...

Uwaga: na ogół komputer nie pomoże nam w obliczaniu lub nawet oszacowaniu granicy funkcji! Trudnością jest fakt **braku** możliwości sprawdzenia istnienia granicy! *Dlaczego?*

Prezentacja: Skrypt ilustracyjny granic w "Mathematica" - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Wyznaczanie granic funkcji w punkcie na komputerze może napotkać na *kilka problemów*, które wynikają głównie z niedoskonałości reprezentacji liczb w pamięci komputera oraz z niedoskonałości samej implementacji algorytmów numerycznych:

1. Błąd reprezentacji liczby: Komputery nie mogą przechowywać wszystkich liczb rzeczywistych ze względu na ograniczenia pamięci i niedoskonałości reprezentacji liczb w postaci binarnej. Z tego powodu, gdy funkcja ma granicę w punkcie, w którym wartość funkcji zmienia się gwałtownie, może wystąpić błąd reprezentacji liczby, co może prowadzić do błędnych wyników.

2. Problemy z numerycznym obliczaniem granicy: Algorytmy numeryczne stosowane do obliczania granic mogą prowadzić do błędów, zwłaszcza gdy funkcja jest skomplikowana lub ma skomplikowaną strukturę. Istnieją różne sposoby obliczania granic, ale żadna z nich nie jest idealna i każda z nich ma swoje ograniczenia.

3. Błąd zaokrąglenia: Wiele algorytmów numerycznych wymaga zaokrąglenia wyników do określonej liczby miejsc po przecinku, co może prowadzić do błędów numerycznych. Błędy te mogą się kumulować i prowadzić do nieprecyzyjnych wyników.

Twierdzenie o 3 funkcjach.

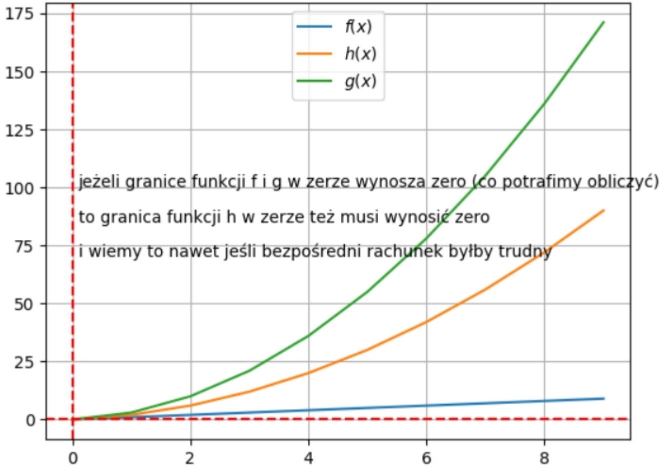
Otrzymujemy ważne (analogiczne do granic ciągów):

Twierdzenie. (o trzech funkcjach). *Jeżeli funkcje f i g mają tę samą granicę k w punkcie x_0 oraz istnieje liczba $a > 0$ taka, że*

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

dla $0 <| x - x_0 |< a$, to funkcja h ma granicę w punkcie x_0 i wynosi ona również k.

"Jeżeli obywatel h idzie pomiędzy dwoma policjantami f i g idącymi do komisariatu k, to też tam trafi..."



Dla chętnych: aby uwierzyć w siłę tego twierdzenia proszę obliczyć granicę funkcji $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}$ w $x = 0$.

Działania na granicach.

A teraz kilka własności działań na granicach:

Twierdzenie. (granica sumy, iloczynu i różnicy).
Jeżeli funkcje f i g mają granice w punkcie x_0, to funkcje $f+g$, $f-g$ oraz $f \cdot g$ mają też granice w tym punkcie i odpowiednio:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

W szczególności dla $f(x) = c = const.$

$$\lim_{x \to x_0} (c \cdot g(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)\ .$$

Ciągłość funkcji w punkcie.

Definicja. Funkcję f określoną w $(x_0 - a, x_0 + a)$, $a > 0$, nazywamy ciągłą w punkcie x_0, gdy istnieje granica funkcji f w tym punkcie i jest równa wartości funkcji $f(x_0)$:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \; .$$

Twierdzenie. *Niech $f : (x_0 - a, x_0 + a) \longrightarrow \mathbb{R}$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0, gdy zachodzi jeden z równoważnych warunków:*

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{x\in(x_0-a,x_0+a)}{\forall} \quad | \, x - x_0 \, | < \delta \quad \Longrightarrow \quad | \, f(x) - f(x_0) \, | < \varepsilon \; ,$$

$$\underset{(x_n)}{\forall} \; (x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0) \quad \Longrightarrow \quad (f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)) \; .$$

Analogicznie, jak dla granic, definicje te nazywa się odpowiednio ciągłością funkcji f w punkcie x_0 w sensie Cauchy'ego oraz w sensie Heinego.

Przykłady.

(1) $\quad f(x) = 1$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0.$

Zauważmy, że $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ (sprawdzenie tego oczywistego faktu pozostawiamy Czytelnikowi). Niemniej

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

Funkcja nie jest ciągła.

(2) Niech $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$, $g(0) = a$. Jak wiemy, nie istnieje granica funkcji g w punkcie $x_0 = 0$. Co więcej dla jakiejkolwiek wartości a nie można uzyskać równości $\lim_{x\to 0} g(x) = a$, a tak można postąpić w przykładzie (1) kładąc wartość funkcji w punkcie 0 jako $f(0) = 1$.

(3) I jeszcze jeden przypadek $h(x) = \frac{1}{x^2}$ dla $x \neq 0$ oraz $h(0) = 0$. Tu $\lim_{x\to 0} h(x) = +\infty$, a więc $\lim_{x\to x_0} h(x) \neq h(0)$.

Rodzaje punktów nieciągłości.

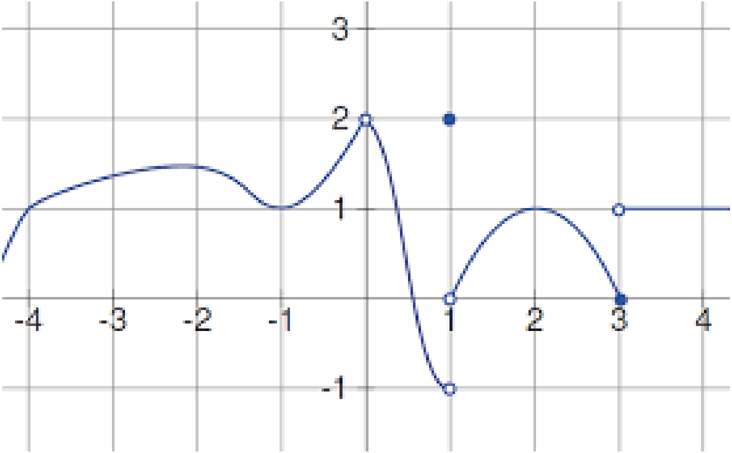
Punkty nieciągłości funkcji f w punkcie x_0 można podzielić na ważne przypadki:

Definicja. Niech $f\ :\ (x_0 - a, x_0 + a) \longrightarrow \mathbb{R}$ i niech f będzie nieciągła w punkcie x_0. Mówimy, że:

(1^0) funkcja f ma nieciągłość I rodzaju o ile istnieją granice jednostronne $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ i $\lim_{x \to x_0+} f(x)$; jeżeli przy tym istnieje $lim_{x \to x_0} f(x)$ to nieciągłość nazywamy usuwalną, a jeżeli nie - nieusuwalną,

(2^0) funkcja f ma nieciągłość II rodzaju, o ile nie istnieje choć jedna z granic jednostronnych $\lim_{x \to x_0-} f(x)$, $\lim_{x \to x_0+} f(x)$.

Punkty nieciągłości.



Nieciągłości I rodzaju (nieusuwalne) w $x = 1$ i $x = 3$ (usuwalna w $x = 0$).

Funkcja z przykładu (1) ma więc nieciągłość I rodzaju usuwalną, a funkcja $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nieciągłość I rodzaju nieusuwalną (tzw. skok). W pozostałych przykładach są nieciągłości II rodzaju.

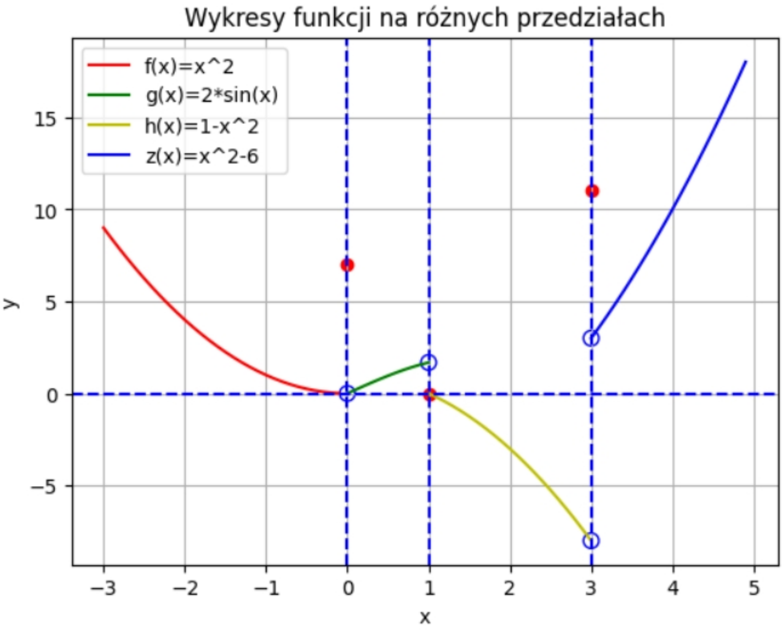
Zadanie: zbadaj ciągłość i określ typ nieciągłości, o ile funkcje są w pewnych punktach nieciągłe:

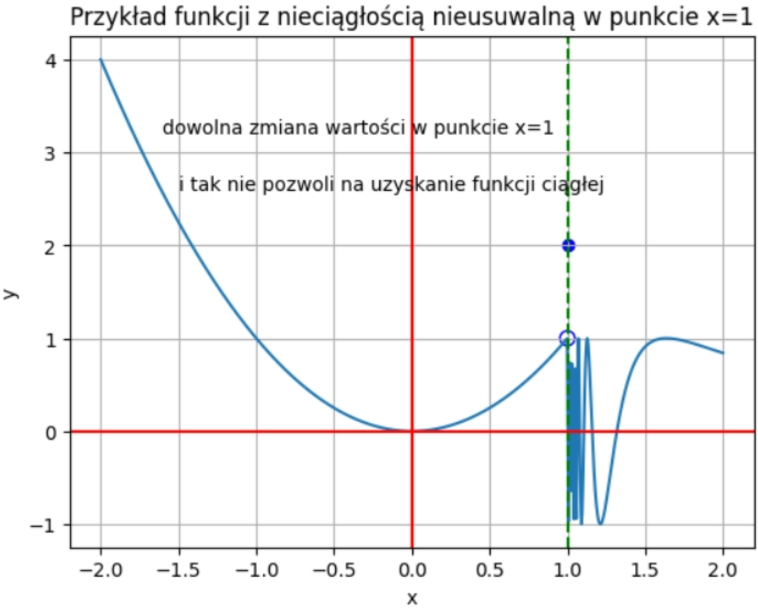
(a) $f(x) = [\sin x]$,

(b) $f(x) = x^2 \cdot ([x])^2$,

(c) $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

(uwaga: $[x] = Ent(x)$ to funkcja "entier", czyli część całkowita liczby x)


Wykresy funkcji na różnych przedziałach
f(x)=x^2
g(x)=2*sin(x)
h(x)=1-x^2
z(x)=x^2-6
y
x
15
10
5
0
−5
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5


Przykład funkcji z nieciągłością nieusuwalną w punkcie x=1
dowolna zmiana wartości w punkcie x=1
i tak nie pozwoli na uzyskanie funkcji ciągłej
y
x
4
3
2
1
0
−1
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

Badanie nieciągłości za pomocą komputera.

Badanie ciągłości (lub nie) jest akurat jedną z czynności, których komputer (programista) zbyt łatwo nie wykona.

Mamy sporo trudności do pokonania: skrypt ilustracyjny problemu ze sprawdzaniem nieciągłości nawet w "Mathematica" - potrzebny darmowy *CDF Player* lub *Mathematica*

Dla chętnych (trochę przed czasem - bo temat funkcji wielu zmiennych nie mieści się już w programie "Analizy 1"!!): skrypt ilustracyjny pokazujący problem z funkcjami wielu zmiennych - POLECAM!

Własności funkcji ciągłych I.

W związku z własnościami granic mamy oczywiście:

Twierdzenie. (o ciągłości ilorazu) *Jeżeli f i g są ciągłe w punkcie x_0, to funkcje $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ oraz $a \cdot f$ $(a \in \mathbb{R})$ są ciągłe w x_0, a jeżeli ponadto $g(x_0) \neq 0$ to także funkcja $\frac{f}{g}$ jest ciągła w x_0.*

Twierdzenie. (o ciągłości funkcji złożonej) *Niech funkcja g będzie ciągła w punkcie x_0 i niech funkcja f będzie ciągła w punkcie $y_0 = g(x_0)$. Wtedy funkcja złożona $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ jest ciągła w punkcie x_0.*

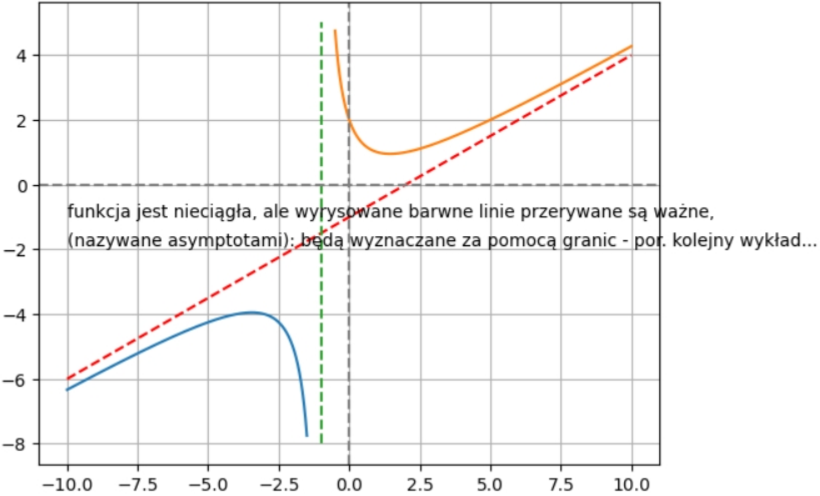
Twierdzenie. (o ciągłości funkcji odwrotnej) *Załóżmy, że funkcja $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna w tym przedziale i ciągła w każdym punkcie tego przedziału oraz niech $m = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \leqslant M = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$. Wtedy funkcja odwrotna $f^{-1} : (m,M) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna w (m,M) i ciągła w każdym punkcie przedziału (m,M).*

Ciągłość jednostronna.

Definicja.

(1^0) Funkcję $f : [x_0, x_0 + a) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a > 0)$ nazywamy prawostronnie ciągłą w pukcie x_0, gdy istnieje $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ oraz $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

(2^0) Funkcję $f : (x_0 - a, x_0] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a > 0)$ nazywamy lewostronnie ciągłą w punkcie x_0, gdy istnieje $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ oraz $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.


funkcja jest nieciągła, ale wyrysowane barwne linie przerywane są ważne,
(nazywane asymptotami): będą wyznaczane za pomocą granic - por. kolejny wykład...
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0

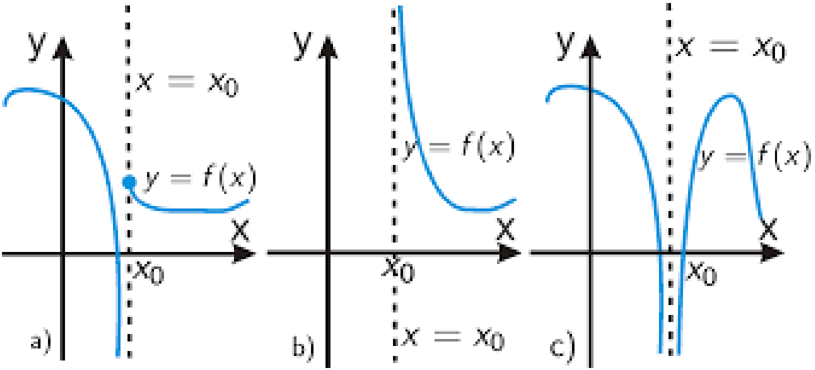
Ważną konsekwencją zastosowania pojęcia granicy funkcji w badaniach jej przebiegu jest możliwość wykorzystania tzw. **asymptot funkcji.**

Definicja. Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ $[(x_0, x_0 + \varepsilon)]$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ oraz

$$\lim_{x \to x_0 -} \mid f(x) \mid = +\infty$$

to mówimy, że prosta $x = x_0$ jest **prawostronną [lewostronną] asymptotą pionową funkcji** f.

Na ogół nie będziemy precyzować czy prosta $x = x_0$ jest prawo- czy lewostronną asymptotą pionową i jeśli zajdzie choć jeden z tych przypadków, to będziemy po prostu mówić o asymptocie pionowej funkcji f. Oczywiste jest, że funkcja f może mieć wiele asymptot pionowych np. $f(x) = \operatorname{tg} x$ ma nieskończenie wiele asymptot pionowych (obustronnych !).



a) - lewostronna, b) - prawostronna, c) - dwustronna

a) funkcja prawostronnie ciągła w x_0

Asymptoty ukośne.

Definicja. Jeżeli istnieje $M \subset \mathbb{R}$ taka, że f jest ciągła w przedziale $(M, +\infty)$ $[(-\infty, M)]$, oraz istnieje prosta $y = mx + n$ taka, że

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0 \ ,$$

$$\text{odpowiednio: } [\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0]$$

to tę prostą nazywamy **asymptotą ukośną funkcji** f przy $x \to +\infty$ [przy $x \to -\infty$]. W sytuacji, gdy $m = 0$ asymptotę nazywamy czasami poziomą. Jest widoczne, że funkcja może mieć co najwyżej 2 asymptoty ukośne.

Przykład asymptot.

Funkcja $f(x) = \mid x \mid$ ma 2 asymptoty ukośne

$$y = x \qquad \text{przy} \quad x \longrightarrow +\infty \ ,$$

oraz

$$y = -x \qquad \text{przy} \quad x \longrightarrow -\infty \ ,$$

gdyż

$$\lim_{x \to +\infty} (\mid x \mid - x) = \lim_{x \to +\infty} (x - x) = 0 \ ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} (\mid x \mid - (-x)) = \lim_{x \to -\infty} ((-x) - (-x)) = 0 \ .$$

A teraz pytanie: co z funkcją $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$?
Samodzielnie...