Analiza matematyczna dla informatyków.

Mieczysław Cichoń, ver. 4.2/2023

Mieczysław Cichoń - WMI UAM

Plan wykładów ...

Granica i ciągłość funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Punkt skupienia zbioru.

Granica funkcji w punkcie. Ciągłość funkcji (np. spline) i ciągłość jednostajna funkcji. Własność Darboux. Twierdzenie Weierstrassa o kresach.

Ciąg dalszy informacji o funkcjach zadanych szeregiem potęgowym. Wybrane funkcje elementarne. Funkcje zadane szeregami potęgowymi w informatyce (np. błędu).

Wybrane szeregi potęgowe i ich obliczanie. Błąd obliczeniowy. (na ćwiczeniach: kilka granic funkcji i badanie ciągłości funkcji zadanych klamrowo, wykorzystanie własności Darboux do obliczania miejsc zerowych równań nieliniowych.

Strony do lektury na wykłady:

Czytamy najpierw motywacje:

[K] : motywacje - strony 24-27

teraz wstępne materiały

[K] : strony 163-166, 168-171

ale tym razem głównym źródłem jest:

[W] : strony 77-96, pomocniczo 98-102
(lub alternatywnie: z tego wykładu strony 53-69).

Funkcje 1.

Fakt, że badanie funkcji jest **niezbędne informatykom** nie podlega chyba (czyżby?) dyskusji (a już funkcje logarytmiczna i wykładnicza przy szacowaniach błędów metod, to już absolutna podstawa). Ale twierdzenia o ich własnościach też będą przydatne?

Funkcja dla komputera, to w uproszczeniu (na razie) pewna reguła zgodnie z którą powinien obliczyć dla dowolnej wartości x z dziedziny jej wartość $f(x)$ - oczywiście najchętniej dokładnie. Ale to nie takie oczywiste... Skoro liczba x jest reprezentowana z pewną dokładnością, to to nie może być mowy o dokładnym wyniku $f(x)$! Przybliżanie wartości to konieczny element więszości obliczeń komputerowych. Poza tym dane x też mogą być obarczone dodatkową niepewnością np. pomiarową...

Funkcje 2.

Jeżeli liczba jest niewymierna, to ma nieskończone rozwinięcie (np. dziesiętne) i można tylko operować na przybliżeniach. Trzeba być świadomy błędu i kontrolować go. W miarę możliwości to programista ma go ograniczać. Wyobraźmy sobie, że mamy obliczyć $f(\sqrt{5})$ dla pewnej funkcji f, przesłać wynik, a odbiorca wykona dalsze obliczenie np. $g(f(\sqrt{5}))$. Po pierwsze $\sqrt{5}$ do obliczeń musi być przybliżone,czyli $f(\sqrt{5})$ też (zawsze?), teraz problem transmisji danych - to może zwiększyć błąd i znowu obliczenia przybliżone... Inny problem to m.in. czas obliczeń (niekiedy muszą być w czasie "rzeczywistym"). A może przekazać wartość $\sqrt{5}$ w dokładnej postaci i całość obliczeń wykonać po transmisji? Jak? Np. przekazać równanie $x^2 - 5 = 0$, ale to już inna historia. Jest niestety gorzej - nie wszystkie liczby rzeczywiste są pierwiastkami wielomianów o współczynnikach wymiernych (nie są *algebraiczne*) np. π. Czyli kontrola przybliżeń to wyzwanie dla informatyków.

Funkcje 3.

Proste **zastosowania**:

- twierdzenie o złożeniu funkcji obliczalnych (teoria obliczalności),
- funkcje tworzące i ich własności przy badaniach rekurencji,
- interpolacja trygonometryczna (funkcje okresowe),
- funkcje skrótów (haszujące),
- problemy złożoności obliczeniowej (np. funkcje logarytmiczne i wielomianowe),
- w metodach numerycznych własność Darboux przy badaniu istnienia rozwiązań równań nieliniowych (powiemy o tym przy okazji metody bisekcji),
- funkcje tworzące - dla “matematyki dyskretnej” zastosowanej w informatyce,
- grafika komuterowa, wizualizacja, analiza obrazów (a tam funkcje trygonometryczne, pochodne) itd.

Funkcje 4.

A jak programy obliczają wartości funkcji? Czy jest "najlepszy algorytm"? Dla zainteresowanych **przegląd** algorytmów dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ można znaleźć tu:

https://www.codeproject.com/Articles/69941/Best-Square-Root-Method-Algorithm-Function-Precisi

Tak - to ponownie obliczanie wartości pierwiastków...

I jeszcze jedno pytanie: czy nie wystarczy badać funkcji od razu *w wersji dyskretnej*? Czyli wypełnić np. tablicę wartości funkcji w pewnych punktach i to wszystko? Krótko: nie! Przy wszelkich zachowaniach "granicznych" (cokolwiek o tym pojęciu myślimy) to za mało - o czym powiemy.

Czasami jest wręcz przeciwnie: mamy wartości dyskretne (np. ciąg zadany rekurencyjnie). Ale ich obliczanie może mieć dużą złożoność obliczeniową (dla zainteresowanych: np. liczby Catalana) i wtedy **tworzymy** funkcję odpowiadającą tym wartościom (funkcja tworząca :-)) i badamy jej wartości - za pomocą różnych metod, w tym szeregów Taylora, pochodnych itp.: o czym też opowiemy... (a więcej w "Concrete Mathematics...").

Funkcje 6.

Co ważne: w wielu zastosowaniach istotne są tylko własności pewnych funkcji, a nie ich dokładne wartości lub np. wykresy!

Z bardziej zaawansowanych zastosowań (bez metod numerycznych):

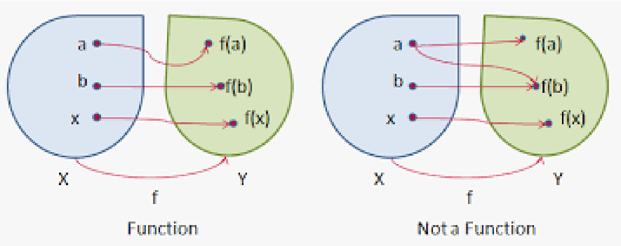
- Grafika komputerowa: interpolacja, transformaty (Fouriera w JPEG czy falkowa w formacie JPEG 2000) (i algebra liniowa),
- Optymalizacja: cały rachunek różniczkowy (i algebra liniowa),
- Robotyka (i inne modelowania fizyczne): analiza funkcji wielu zmiennych,
- Transmisja danych (np. oszczędne algorytmy przesyłu strumieniowego): rachunek różniczkowy stosowany do probabilistyki, (przesył danych - transformaty Fouriera itp.),
- Analiza algorytmów - o tym szerzej poniżej (np. asymptotyka)...
- Jako metoda komunikacji z użytkownikami oprogramowania!!
- Algorytmy kryptograficzne: istotna różnowartościowość funkcji, a także własności pewnych klasycznych funkcji (np. funkcja sinus w algorytmie MD5), ...

Odwzorowania

Niech X i Y oznaczają dowolne zbiory niepuste.

Odwzorowaniem określonym w zbiorze X o wartościach ze zbioru Y nazywamy przyporządkowanie (pewną metodą) każdemu elementowi $x \in X$ jakiegoś elementu $y \in Y$. Zapiszemy to $f \; : \; X \longrightarrow Y$, gdzie f jest symbolem tego odwzorowania.

Odwzorowanie dla którego każdemu $x \in X$ przyporządkowano dokładnie jeden $y \in Y$ nazywamy **funkcją**.



Podstawowe pojęcia.

O ile nie określono inaczej: będziemy domyślnie rozumieć, że dziedziną jest zbiór dla którego dany wzór ma sens (największy taki zbiór). Mówimy, że funkcja $f : X \longrightarrow Y$ odwzorowuje zbiór X **na** zbiór Y (f jest **surjekcją**), gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje (co najmniej jeden) element $x \in X$ taki, że $y = f(x)$. Inaczej mówiąc $f(X) = Y$.

O ile $f(X) \subsetneq Y$ (tj. $f(X) \subset Y$, ale istnieje $y \in Y \setminus f(X)$) to mówimy, że f odwzorowuje zbiór X w zbiór Y.

Przykładem funkcji f z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ jest $f(x) = 4x + 2$, a przykładem funkcji f z $\mathbb{R}$ w (nie jest to surjekcja) $\mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 1$ (wówczas zbiór wartości: $f(X) =< 1, \infty)$).

Fakt, że f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y oznaczać będziemy

$$f : X \xrightarrow{\text{na}} Y.$$

Różnowartościowość.

Będziemy mówili, że funkcja $f : X \longrightarrow Y$ jest **różnowartościowa** (inne nazwy: iniekcja, wzajemnie jednoznaczna, jedno-jednoznaczna, „jeden na jeden"), gdy zachodzi implikacja

$$(f(x) = f(y)) \Longrightarrow (x = y) \ , \quad \text{dla dowolnego} \quad x, y \in X \ .$$

Funkcją różnowartościową jest np. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$, *a nie jest nią np.* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

Fakt różnowartościowości funkcji f oznaczać będziemy

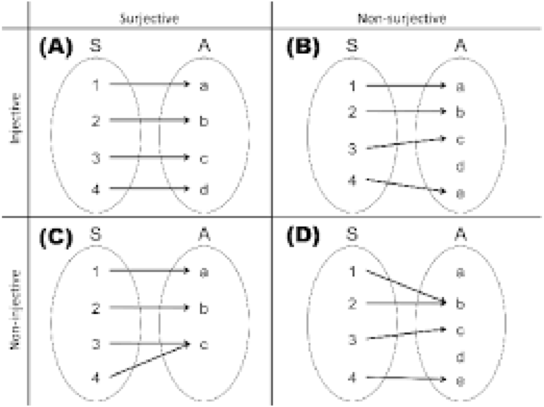
$$f : X \xrightarrow{1-1} Y.$$

Bijekcje i funkcje odwrotne.

Jeżeli funkcja $f : X \xrightarrow[\text{na}]{\text{1-1}} Y$ jest równocześnie różnowartościowa i odwzorowuje zbiór X **na** zbiór Y to nazywamy ją **bijekcją.**

W tym przypadku f określa również inną funkcję (to ważne twierdzenie i powinniśmy to wykazać !!) z Y na X nazywaną **funkcją odwrotną do** f (oznaczaną przez f^{-1}): $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

$$(f^{-1}(y) = x) \iff (f(x) = y) \ .$$



(A) - funkcja 1-1 i "na"
(B) - funkcja 1-1, ale nie "na"
(C) - funkcja nie jest 1-1 i jest "na"
(D) - funkcja nie jest ani 1-1, ani "na"

Przykład.

Niech $f(x) = 2x + 6$, pokażemy, że jest bijekcją.

Niech $x_1 \neq x_2$, czyli $x_1 - x_2 \neq 0$ oraz

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) =& 2x_1 + 6 - (2x_2 + 6) = 2x_1 + 6 - 2x_2 - 6 = \\ &= 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2) \neq 0 \quad \text{na mocy założenia.} \end{aligned}$$

Funkcja f jest więc różnowartościowa.

Weźmy teraz dowolne $y \in \mathbb{R}$. Ponieważ szukamy $x \in \mathbb{R}$ takiego, że $y = f(x)$, to uzyskamy równanie $y = 2x + 6$ i dalej $y - 6 = 2x$, czyli ostatecznie $\frac{1}{2}y - 3 = x$. Istnieje więc $x \in \mathbb{R}$ takie, że $y = f(x)$, czyli f jest "na" $\mathbb{R}$.

Stąd $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3$, i $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest bijekcją.

Ważną rolę odgrywają pewne klasy odwzorowań:

(a) Niech $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Takie funkcje, dla których dziedziną jest zbiór liczb naturalnych nazywamy **ciągami** (o ile wartości funkcji są w $\mathbb{R}$ to ciągami liczbowymi).

(b) Niech $X_1 = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $X_2 = \{1, 2, \ldots, m\}$.

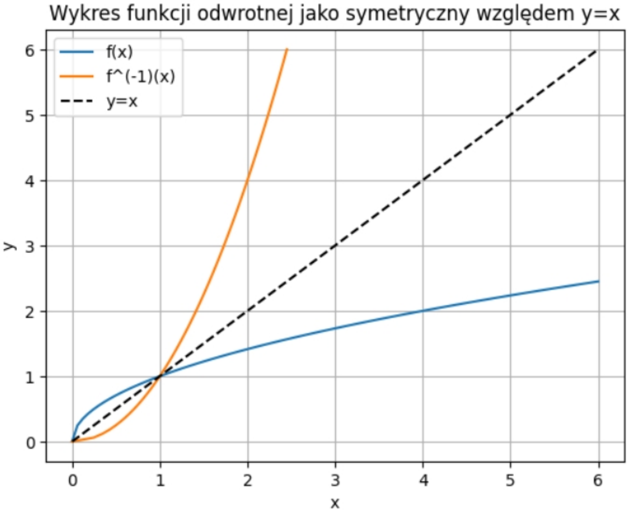
Funkcje $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywać będziemy **macierzami** $n \times m$-elementowymi.

Więcej o tych klasach odwzorowań powiemy później.

Co ważne: własności wprowadzimy dla funkcji, ale najważniejsze zastosowania w informatyce dotyczyć będą **funkcji wielu zmiennych** $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ oraz tzw. **odwzorowań** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Wykresy funkcji odwrotnych dla przypadku $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Jeżeli f^{-1} jest funkcją odwrotną dla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, to jej **wykres jest symetryczny do wykresu funkcji f względem prostej $y = x$.**



Monotoniczność.

Definicja. Niech $f : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R}, \quad A \neq \emptyset.$

Będziemy mówić, że funkcja f jest:

(a) rosnąca w A, gdy
$$(x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2) \implies f(x_1) < f(x_2),$$

(b) malejąca w A, gdy
$$(x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2) \implies f(x_1) > f(x_2),$$

(c) niemalejąca w A, gdy
$$(x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2) \implies f(x_1) \leqslant f(x_2),$$

(d) nierosnąca w A, gdy
$$(x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2) \implies f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

W przypadku, gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2)$ funkcję nazywać będziemy stałą.

Monotoniczność cd.

Oczywiście funkcja może nie mieć żadnej z powyższych własności!

(np. $f(x) = \sin x$ dla $A = \mathbb{R}$), ale:

wszystkie funkcje posiadające jedną z powyższych własności nazywamy **monotonicznymi** (funkcje z (a) i (b) - ściśle monotonicznymi).

U w a g a : Zwracamy szczególną uwagę, że własność ta zależy od zbioru (dziedziny)! Umawiamy się, że mówiąc krótko „funkcja f jest monotoniczna" oznaczać to będzie, że jest monotoniczna w całej swojej dziedzinie.

Funkcje wypukłe.

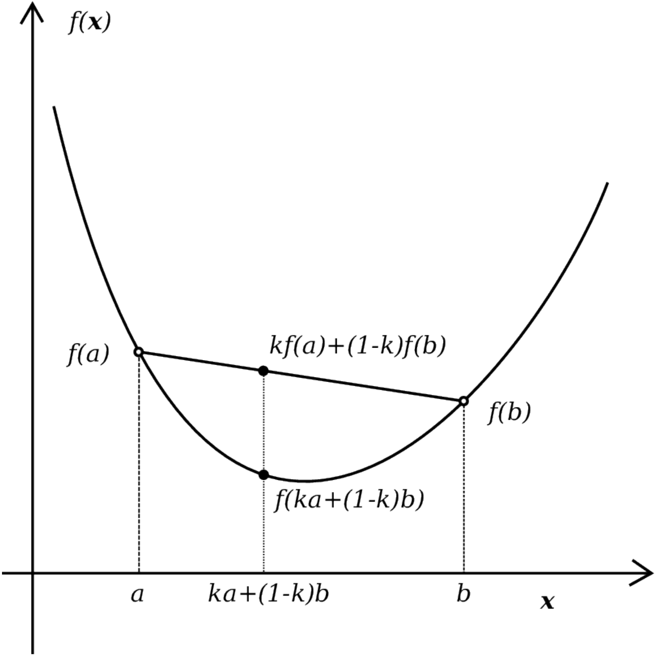
Definicja. Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Funkcję $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **wypukłą** w A gdy dla dowolnych $a, b \in A$ oraz dowolnych $s, t \in \mathbb{R}$, $k \in [0, 1]$, zachodzi nierówność

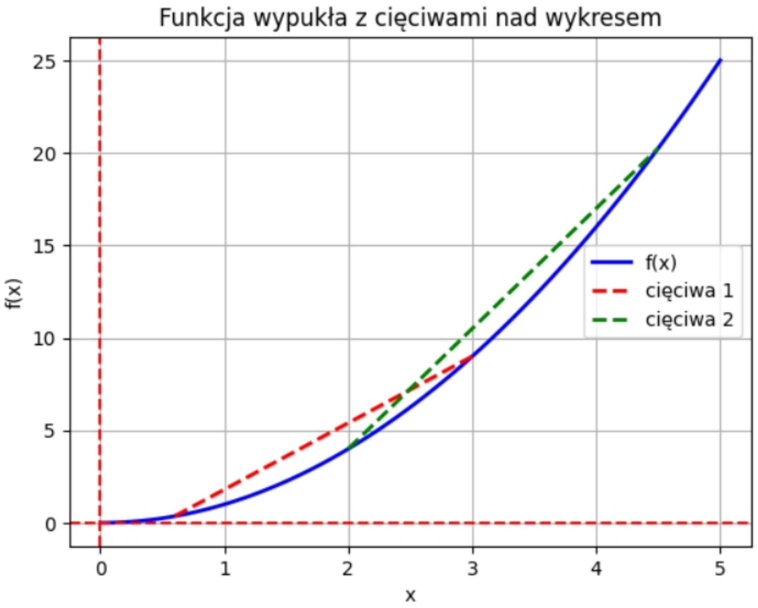
$$f(k \cdot a + (1 - k) \cdot b) \leqslant k \cdot f(a) + (1 - k) \cdot f(b) \; .$$

W przypadku, gdy nierówność zachodzi w przeciwnym kierunku funkcję nazywamy **wklęsłą** w A.

Ponownie zwracamy uwagę, że ta własność także zależy od zbioru, a nierówność jest na ogół bardzo dobrym oszacowaniem dla wartości funkcji f często wykorzystywanym w różnych zastosowaniach.

Nieco później podamy inną metodę badania wypukłości funkcji f. Ilustracją graficzną tej cechy jest fakt, iż odcinek łączący dowolne dwa punkty wykresu $\{(x, y) \; : \; x \in A, \; y = f(x)\}$ „leży nad” wykresem funkcji (dokładnie to stwierdza nierówność z definicji!! - zrobić odpowiedni rysunek).


f(x)
kf(a)+(1-k)f(b)
f(a)
f(b)
f(ka+(1-k)b)
a
ka+(1-k)b
b
x


Funkcja wypukła z cięciwami nad wykresem
f(x)
cięciwa 1
cięciwa 2
0
5
10
15
20
25
0
1
2
3
4
5
x
f(x)

Przykładami funkcji wypukłych są np. $f(x) = x^2, \;\; x \in \mathbb{R}$ czy $f(x) = e^x, \;\; x \in \mathbb{R}$, natomiast funkcja $f(x) = \sin x$ jest wypukła w $A = [\pi, 2\pi]$, ale nie jest wypukła w swojej dziedzinie. Funkcje wklęsłe to np. $f(x) = -x^2, \;\; x \in \mathbb{R}$ czy $f(x) = \log x, \;\; x \in (0, \infty)$.

Przykład. Ponieważ $2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3$, a funkcja $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$ jest wklęsła (sprawdzić !), to m.in. (!) wstawiając $a = 1$ oraz $b = 3$ do definicji uzyskamy

$$\sqrt{2} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} + \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

czyli $2\sqrt{2} - \sqrt{3} \geqslant 1$, a ta nierówność nie dla wszystkich jest oczywista...

Podobnie natychmiast mamy przydatne oszacowanie pierwiastka: $\sqrt{2} \leqslant \frac{3}{2}$ (tu: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0$, gdyż $f(x) = 2^x$ - wypukła).

Funkcje elementarne.

A teraz podamy klasę funkcji zwanych elementarnymi. Jest to niestety umowne pojęcie i można spotkać w literaturze zestawy takich funkcji nieco różniące się od naszego, ale na szczęście raczej rzadko.

Do funkcji elementarnych zaliczamy funkcje:

- potęgowe,
- wykładnicze,
- trygonometryczne,
- **odwrotne do powyższych klas funkcji**: pierwiastkowe, logarytmiczne, cyklometryczne.

Inne klasy funkcji będą uzyskiwane wykonując działania na funkcjach elementarnych, m.in.

- sumy i iloczyny: np. wielomianowe ($f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$) i hiperboliczne (!), oraz ich ilorazy (np. funkcje wymierne - ilorazy funkcji wielomianowych, a szczególny przypadek to funkcje homograficzne $f(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x}$,
- złożenia funkcji elementarnych,
- tzw. "klamrowe" (np. wartość bezwzględna, funkcje schodkowe czy funkcja $sgn(x)$) - różne wzory w różnych częściach dziedziny.

Funkcja znaku ("signum"):

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0\ , \\ 0 & x = 0\ , \\ -1 & x < 0\ . \end{cases}$$

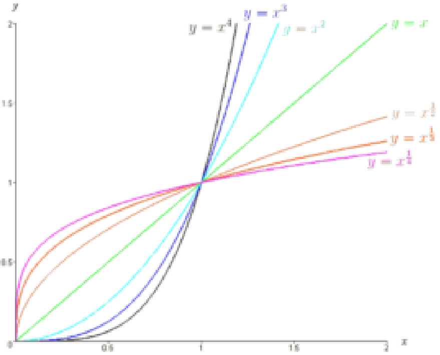
Wybrane funkcje.

Funkcja stała $f(x) = c = \text{const}$ oraz liniowa $f(x) = a \cdot x$ nie wymagają większych komentarzy (może uwaga: tzw. „funkcje liniowe” w szkole średniej $f(x) = a \cdot x + b$ posiadają nazwę od swojego wykresu - linii prostej, w rzeczywistości ta klasa funkcji nazywa się w matematyce funkcjami afinicznymi),

Jeżeli $\alpha \in \mathbb{Z}$ to funkcję $f(x) = x^\alpha$ nazywamy funkcją potęgową $X = \mathbb{R}$. Dla α nie będącego liczbą całkowitą dziedzina $X = [0, \infty)$.

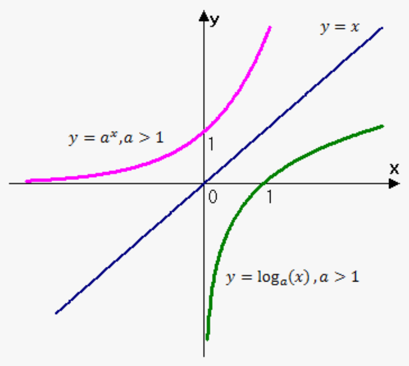
O ile $a > 0$ to funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ określoną wzorem $f(x) = a^x$ nazywamy funkcją wykładniczą. Własności takich funkcji (w zależności od a) pozostawiamy jako ćwiczenie.

Funkcje potęgowe.



Wybrane funkcje potęgowe - wykresy dla $x \geqslant 0$. Zwracam uwagę na symetrię wykresów względem prostej $y = x$ (czyli funkcje "pierwiastkowe").

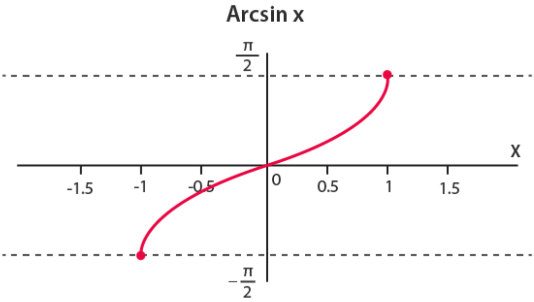
Teraz rozpatrzmy funkcję odwrotną do funkcji potęgowej (o ile $a \neq 1$) $f(x) = a^x$. Funkcja ta istnieje i jest nazywana funkcją logarytmiczną. *Szczególnie istotną funkcją jest jedna z funkcji wykładniczych:* $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ *oraz funkcja do niej odwrotna* $f^{-1}(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$.



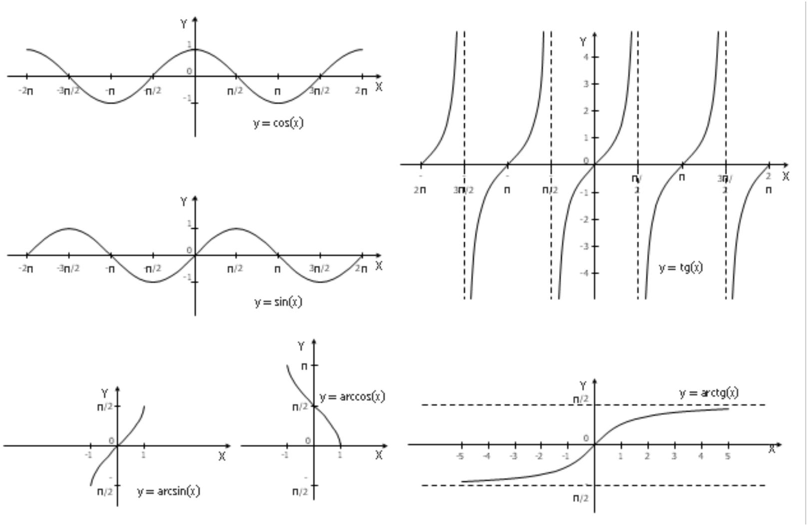
A funkcje logarytmiczne to w informatyce **absolutna podstawa**, por. materiał: takie ciekawostki dla początkujących - koniecznie przeczytać!

Znane z innych działów funkcje trygonometryczne $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \text{tg } x$, $k(x) = \text{ctg } x$ były już wspomniane przy własnościach funkcji. Proszę przypomnieć sobie JAK były definiowane w szkole średniej...

Funkcje odwrotne do nich, ich dziedziny i własności Czytelnik znajdzie częściowo w zadaniach na ćwiczeniach, a w celu poszerzenia wiadomości odsyłamy do literatury.



Funkcje trygonometryczne i odwrotne do nich...



Funkcje schodkowe i łamane.

Jeżeli $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, oraz $a \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n = t$ to funkcję f nazywamy schodkową, o ile jest stała w każdym z przedziałów (x_{i-1}, x_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$; a łamaną, gdy jest afiniczna na każdym z tych przedziałów.

Funkcje hiperboliczne.

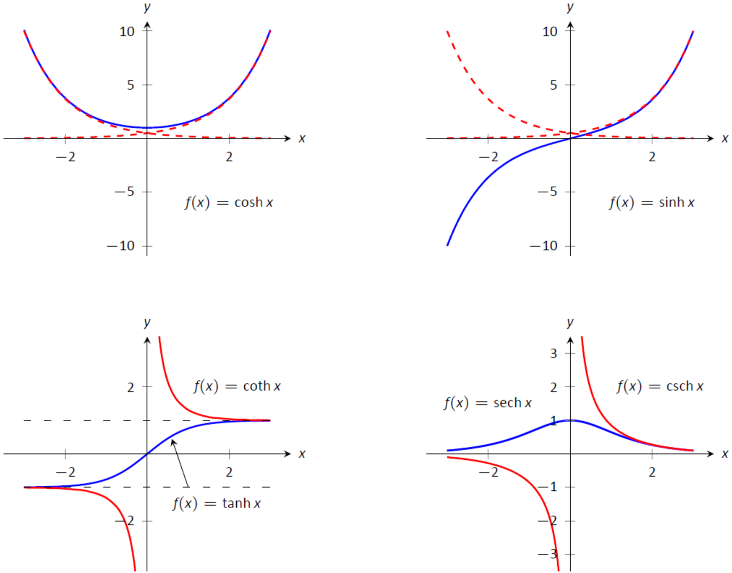
Inne przydatne w niektórych działach zastosowań funkcje **hiperboliczne:**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ , \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ,$$

$$\text{tgh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ , \qquad \text{ctgh}\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\ .$$

Pod pewnymi względami (relacje pomiędzy nimi przypominają te znane z trygonometrii - stąd nazwy) rzeczywiście przypominają funkcje trygonometryczne, ale ich wykresy są zdecydowanie inne niż funkcji trygonometrycznych...

Wykresy funkcji hiperbolicznych.



Cele operowania funkcjami w informatyce.

(1) przybliżanie jednych funkcji innymi (aproksymacja),

(2) wykorzystanie wzorów funkcji, gdy znany jej wartości jedynie w pewnych punktach ułatwia ich stosowanie (interpolacja),

(3) korzystanie z ich ciągłości i jednostajnej ciągłości (np. własność Darboux, rozwiązywanie równań nieliniowych),

(4) znajdowanie punktów charakterystycznych (np. miejsc zerowych, wartości największych itp.),

(5) badanie własności (np. monotoniczność, wypukłość), np. funkcji celu w nauczaniu maszynowym,

(6) korzystanie z granic funkcji do obliczeń granic ciągów,

(7) korzystanie z asymptot (np. symbole Landaua, asymptotyka zachowań, złożoność obliczeniowa) i inne...