AES算法详解

宋林轲 2018K8009970020

2021年1月27日

目录

第	一部分 数学基础	2							
1	有限域 1.1 加法乘法运算								
2	代码实现	3							
第	二部分 算法内容	4							
1 2	步骤分解								
	3.1 扩展	5							
	3.2 字节代换	6							
	3.3 行移位	7							
	3.4 列混合	7							
	3.5 秘钥加	9							
4	步骤组合	9							
	4.1 加密周期	9							
	4.2 解密周期	10							
5	加解密代码实现	10							

第三部分 优化与性能比较

12

6 优化 12

7 性能测试比较 12

第一部分 数学基础

1 有限域

在了解AES算法之前,需对其数学基础有所涉猎。

AES算法建立在有限域 $GF(2^8)$ 之上,其运算满足域上的规则。在AES算法中主要使用的是加法运算和乘法运算,以及将二者结合后的矩阵运算。下面将在小节中分别介绍。

1.1 加法乘法运算

有限域 $GF(2^8)$ 上的加法运算遵循模2加原则,即通过二进制表示时的逐位异或的方式计算结果。例如: $010101111 \oplus 10000011 = 11010100$ 。采用十六进制表示,即为: $0x57 \oplus 0x83 = 0xD4$ 。

有限域 $GF(2^8)$ 上的乘法运算则相对麻烦,以下面两个数为例: $A=(a_0a_1\cdots a_7)_2$ 和 $B=(b_0b_1\cdots b_7)_2$ 。同时,定义一个存放长为8-bits的结果向量C,初始值为0。若以B为被乘数,从A的高位向低位遍历,若高位为1,则对C加上一个B,与此同时将C左移一位,A则向低位遍历一位,特别注意,由于是有限域 $GF(2^8)$ 上的模乘,在左移C的过程中若出现高位溢出为1的情况,则需要减去8次不可约多项式对应的数0x11B,才能继续进行移位加法操作。最终多次加法移位后的结果C即为模乘后的结果。

语言表述可能存在不精确的地方,具体细节请参阅代码部分。

1.2 矩阵运算

有限域 $GF(2^8)$ 上的矩阵运算本质上是有限域上模乘和模2加的集合。以下面的 4×4 矩阵为例:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ b_8 & b_9 & b_{10} & b_{11} \\ b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} \\ c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \end{bmatrix}$$
(1)

2 代码实现 3

$$c_{ij} = \sum_{k}^{4} a_{ik} \cdot b_{kj} \tag{2}$$

注: 本公式均为有限域GF(28)之上的乘法和加法。

2 代码实现

下面分别给出了实现数学基础部分所用的函数,注释中可以提取出笔者的实现思路。

```
/* Author: Song link
    * ID: 2018 K8009970020
    * MTA: module two add.
    * quite easy to operate, so
    * we use it as a preprocessor
    * definition.
   \#define MTA(a, b) (a \hat{} b)
   /* GF(2^8) multiply:
10
    * Use this as the multiplication method
    * As mentioned above, to get the result
    * ,we shift one of the number step by step
    * from the highest bit to the lowest bit.
14
    * When the result happens to be larger than *
15
    * 0xff, add 0x11b to it.
16
    * To simplify this process, we transfer it
    * into uint16_t beforehand.
18
19
   static uint8_t GFM(uint8_t a, uint8_t b)
20
^{21}
           uint16_t ar, br, rt;
           ar = (uint16_t)a;
23
           br = (uint16_t)b;
^{24}
           rt = 0;
25
```

2 代码实现 4

```
while (ar)
27
                     if (ar & 1)
28
29
                              rt = rt \cdot br;
30
31
                     br \ll 1;
32
                     if(br >= 0x100)
33
34
                              br = br ^ ox11b;
35
36
                     ar >>= 1;
37
            return (uint8_t) rt;
39
40
41
   /* Multiplication for Matrix:
    * As mentioned above, we put two arrays *
43
    * to compute the vector used in Matrix
44
    * Multiplication.
45
46
   static uint8_t Matx_Multi(uint8_t c[], uint8_t a[])
48
            int i;
49
            uint8_t ret = 0x00;
50
            for (i = 0; i < 4; i++)
51
                     ret = MTA(GFM(c[i], a[i]), ret);
53
54
            return ret;
55
56 }
```

第二部分 算法内容

AES算法涉及多个步骤,总体而言分为完整的轮秘钥操作和最后一轮秘钥操作。根据不同大小的秘钥,采用的轮数和其它部分参数会有细微不同,本文为了方便起见,采用秘钥长度和明文长度均为16字节的情况。

3 步骤分解

以初始秘钥长度和明文长度块均为16字节为例,在此情况中AES的加密包含10次的完整加密轮和1次最后加密轮。完整的加密轮包含下面几个步骤:字节代换,行移位,列混合,秘钥加。最后加密轮则包含下面几个步骤:字节代换,行移位,秘钥加。然而,秘钥的长度本身不能支持如此多轮的秘钥加操作,因此,我们需要对输入的秘钥进行扩展,再去实现轮函数加密。

3.1 扩展

严格意义上的扩展包含两个部分。AES的加密会对明文进行分割,如果明文组出现不足16字节的情况,将会自动扩展至16字节以便之后的加密,这里便不再赘述。另一层意义上则是利用输入的16字节的秘钥扩展至多轮不相同的秘钥,以便每次进行轮函数加密使用。

下面将详细说明16字节轮秘钥的扩展:

首先,扩展秘钥需要从原秘钥中读取种子。利用二维数组 $expkey[N_k][MaxLen]$ 来存放相关信息。二维数组的每一行均存放秘钥的其中四个字节,记作W[i]行,扩展则是以每一行四个字节作为基本单位进行的。

在将种子秘钥的16字节填入后,之后的扩展遵循下列法则: 若行的序号不是4的倍数,如W[i]中 $i\%N_k!=0$ 的情况,则W[i]的取值为 $W[i]=W[i-N_k]\oplus W[i-1]$ 。 N_k 这里取4,表示上一个秘钥的同一行。若行的序号是4的倍数,则需要通过某个函数生成秘钥。此情况相对复杂,请参考本处所做的注释和相关的文献资料。

利用上述方式扩展至 $N_b \times (N_r + 1)$ 行时,全部的秘钥扩展即可结束。以下提供该环节的代码。

3 步骤分解 6

```
* For more information about the Rcon[], please refer*
10
    * to aes.h and the formal pdf .
11
   static void KeyExpand(uint8_t key[], uint8_t exp_key[][MaxLen])
12
13
   {
14
             uint8_t i, j;
15
             uint8_t t temp[MaxLen] = \{0\};
16
             for(i = 0; i < Nk; i++)
17
                       for (j = 0; j < 4; j++)
                                18
19
             for (i = Nk; i < Nb * (Nr + 1); i++)
20
             {
                      memcpy(temp, exp_key[i - 1], Width);
23
                      if(i\% Nk == 0)
24
                       {
                                {\tt uint8\_t~Rcon[]} \; = \; \{ \, {\tt RC\_Store} \, [\, {\tt i} \;\; / \;\; {\tt Nk}] \; , \;\; 0\, {\tt x}00 \; , \;\; 0\, {\tt x}00 \; , \;\; 0\, {\tt x}00 \; \} \, ;
25
26
                                RotByte (temp):
27
                                Array_MTA(temp, Rcon, temp, Width);
28
                                ByteSub(temp, Width);
29
                       Array_MTA(exp_key[i - Nk], temp, exp_key[i], Width);
30
                       memset(temp, 0, sizeof(temp));
31
32
             }
33
   }
```

3.2 字节代换

字节代换是加密的第一步,即通过某个*Sbox*沙盒实现对信息的置换,一般会通过构造非 线性映射的方式来实现乱序,保证安全。由于置换表过大,此处文档不会给出置换表。

总而言之,对于输入的信息数组in[]的其中一个元素i,该步骤将会通过Sbox在同一个位置利用Sbox[in[i]]来替换原本的元素。

对应的,解密时将会使用逆数组invSbox[]来实现快速还原解密。

```
1 /* ByteSub: change the plaintxt
   * very easy. BTW, s_box is put
   * in the aes.h,U can refer to it
   * Rv_ByteSub is another s_box contrary to s_box *
   * We won't shown here.
   static void ByteSub(uint8_t in[], uint8_t len)
8
   {
           int i;
10
           for(i = 0; i < len; i++)
11
                   in[i] = s_box[in[i]];
12
13
14 }
```

3 步骤分解 7

3.3 行移位

对于16字节的文本和秘钥,行移位遵循下面的原则。 利用循环的方式对后三行分别左移1位,2位,3位,即可完成该步骤。

0	1	2	3		0	1	2	3
4	5	6	7	Left shift 1 →	5	6	7	4
8	9	10	11	Left shift 2 →	10	11	8	9
12	13	14	15	<i>Left shift 3</i> →	15	12	13	14

图 1: 行移位操作

```
1 \ /* \ {
m ShiftRow: shift the row of the matrix} *
    * count the row number, and shift it to *
    * the left due to the number we get
    static void ShiftRow(uint8_t in[])
 6
   {
             7
             uint8_t tmp;
 8
             for(i = 1; i < 4; i++)
10
                      k = 0;
11
                      \textcolor{red}{\textbf{while}\,(\,k\,\,<\,\,i\,)}
12
13
                               tmp = in [Nb * i];
14
15
                               for(j = 1; j < Nb; j++)
16
                               {
                                        in[Nb * i + j - 1] = in[Nb * i + j];
17
18
                               in[Nb * i + Nb - 1] = tmp;
19
20
                               k++;
21
                      }
22
             }
23
   }
```

3.4 列混合

列混合操作涉及有限域 $GF(2^8)$ 的加法和乘法运算。利用下面的行向量 $\vec{x} = (0x02, 0x03, 0x01, 0x01)$ 的

3 步骤分解 8

移位,得到下面的M矩阵。并用先前的文本与之相乘进行加密。

$$M \cdot A = \begin{bmatrix} 0x02 & 0x03 & 0x01 & 0x01 \\ 0x01 & 0x02 & 0x03 & 0x01 \\ 0x01 & 0x01 & 0x02 & 0x03 \\ 0x03 & 0x01 & 0x01 & 0x02 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ b_8 & b_9 & b_{10} & b_{11} \\ b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \end{bmatrix}$$
(3)

对应的,解密使用的行向量 $\vec{y} = (0x0E, 0x0B, 0x0D, 0x09)$ 同样通过拼接和移位得到下面的N矩阵。不难验证在有限域 $GF(2^8)$ 下这两个矩阵是互逆的,因此可以通过M矩阵和N矩阵的相乘还原原文。

$$N \cdot M \cdot A = \begin{bmatrix} 0x0E & 0x0B & 0x0D & 0x09 \\ 0x09 & 0x0E & 0x0B & 0x0D \\ 0x0D & 0x09 & 0x0E & 0x0B \\ 0x0B & 0x0D & 0x09 & 0x0E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0x02 & 0x03 & 0x01 & 0x01 \\ 0x01 & 0x02 & 0x03 & 0x01 \\ 0x01 & 0x01 & 0x02 & 0x03 \\ 0x03 & 0x01 & 0x01 & 0x02 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix}$$

$$= I \cdot A = A \tag{4}$$

此部分代码相对复杂,请看注释部分。

```
/* coef_mult: multiplication for the matrix
    * TO SIMPLIFY IT, I DIDN'T USE polynomials
3
    * I Just count them all out.
    * please refer to the equation I given above */
4
 6
    static void coef_mult(uint8_t *a, uint8_t *b, uint8_t *d)
7
    {
            8
9
            d[3] = GFM(a[1], b[0]) ^ GFM(a[2], b[1]) ^ GFM(a[3], b[2]) ^ GFM(a[0], b[3]);
11
12
    }
   /* MixColumn: Mix the column
13
14
    * Mind the column and the row
    * the main difference is that
15
16
    * we compute column vectors for*
17
    * A matrix, for N, M matrix
    * we compute the row vectors,
    * which is in accordance with
19
    * Matrix multiplication ...
20
    static void MixColumn(uint8_t in[])
23
    {
24
            \mbox{uint8-t} \ \ \mbox{a[]} \ = \ \{ \mbox{0x02} \, , \ \ \mbox{0x03} \, , \ \ \mbox{0x01} \, , \ \ \mbox{0x01} \, \} \, ;
25
            {\tt uint8\_t\ i\ ,\ j\ ,\ col\,[4]\ ,\ res\,[4]\,;}
27
            for (j = 0; j < Nb; j++) {
28
                    for (i = 0; i < 4; i++) {
                             col[i] = in[Nb * i + j];
```

4 步骤组合 9

3.5 秘钥加

秘钥加环节非常简单,通过秘钥扩展后得到的秘钥与需加密的信息进行一次异或,即可 实现。此处不再赘述。唯一需要注意的是秘钥的挑选。这里直接看代码部分。

```
/* AddRoundKey: Simply add the key here. *
2
    * Very common
3
   static void AddRoundKey(uint8_t in[], uint8_t key[], uint8_t len)
5
   {
           int i;
6
           for(i = 0; i < len; i++)
            {
                   in[i] = MTA(in[i], key[i]);
10
           }
11
   }
```

4 步骤组合

以上梳理了AES加密的全部单位操作过程,下面将其组合以供使用。

4.1 加密周期

完整的加密周期包含字节代换,行移位,列混合以及秘钥加。而最后一轮则是不需要采 用列混合,因此代码撰写如下。

```
/* OneFullRound: *
    * FinalRound:
 2
 3
    * QUITE EASY
   static void OneFullRound(uint8_t in[], uint8_t key[])
 5
 6
   {
            ByteSub(in, Nb * Width);
 8
            ShiftRow(in);
           MixColumn(in);
 9
10
           AddRoundKey(in , key , Nb * Width);
11
   }
   static void FinalRound(uint8_t in[], uint8_t key[])
13
14
15
            ByteSub(in, Nb * Width);
            ShiftRow(in);
16
17
           AddRoundKey(in , key , Nb * Width);
```

5 加解密代码实现 10

18 }

4.2 解密周期

完整的解密周期则是完整加密周期的逆向处理,先进行秘钥加,再通过列混合,行移位,以及字节代换。因此,代码撰写如下。

```
/* Rv_FinalRound:
    * Rv_OneFullRound:
    * Quite easy: but mind that *
3
4
    * Rv_FinalRound is the first*
   * Step.
7
   static void Rv_FinalRound(uint8_t in[], uint8_t key[])
   {
9
            {\tt AddRoundKey(in\ ,\ key\ ,\ Nb\ *\ Width);}
10
            Rv_ShiftRow(in);
           Rv_ByteSub(in, Nb * Width);
11
12
   }
14
   static void Rv-OneFullRound(uint8-t in[], uint8-t key[])
15
   {
            AddRoundKey(in , key , Nb * Width);
116
17
            Rv_MixColumn(in);
           Rv_ShiftRow(in);
18
19
           Rv_ByteSub(in, Nb * Width);
20
   }
```

5 加解密代码实现

现在做好了准备,可以撰写加密和解密函数了,同时,我们可以提供16字节长度的测试用例。该程序扩展并不难,但基础功能的实现只需看16字节的情况即可验证。

下面是主体函数和调用的关键函数:

```
Init: alloc space and set all to 0.
    * Read_plain: read plaintext from a file on a given path *
4
    * Read_key: read the 16 bytes key.
    * KeyExpand: Expand the key.

* Rijndael: finish the encode work. Shown below.
6
7
    * Rv_Rijndael: finish the decode work. Shown below.
9
    * Showchar: show the output in "char" forms.
10
   int main (void)
111
12
   {
13
             Init ();
            Read_plain(in);
14
15
            Read_key(key);
           KeyExpand(key, exp_key);
            printf("Encode_result:\n");
17
            Rijndael (in);
18
```

5 加解密代码实现 11

```
PriArray(in, Width * Nb);
20
            Rv_Rijndael(in);
            printf("Decode_result:\n");
21
22
            PriArray(in, Width * Nb);
           Showchar(in, Width * Nb);
23
24 }
25
26
    /* Rijndael: ENCODE
    * Select the key for encoding.
        AddRoundKey: first step.
28
        10 times OneFullRound.
29
30
       1 time FinalRound
31
   static void Rijndael (uint8_t in [])
32
33
   {
34
           Key_Select(0, sel_key, exp_key);
           {\tt AddRoundKey(in\ ,\ sel\_key\ ,\ Nk\ *\ Width);}
36
37
           memset(sel_key, 0, sizeof(sel_key));
38
            for(rd = 1; rd < Nr; rd++)
39
           {
40
                    Key_Select(rd, sel_key, exp_key);
                    OneFullRound(in, sel_key);
41
42
                    memset(sel_key, 0, sizeof(sel_key));
44
            Key_Select(Nr, sel_key, exp_key);
45
           FinalRound(in , sel_key);
           return ;
46
47
   }
48
   /* Rv_Rijndael:
49
    * Mirror image of the Rijndael
50
   static void Rv_Rijndael(uint8_t in[])
52 {
53
           int rd;
           Key_Select(Nr, sel_key, exp_key);
55
            Rv_FinalRound(in, sel_key);
            for(rd = Nr - 1; rd > 0; rd--)
56
57
           {
158
                    Key_Select(rd, sel_key, exp_key);
                    Rv_OneFullRound(in, sel_key);
60
            }
61
            Key_Select(rd, sel_key, exp_key);
62
            {\tt AddRoundKey(in\ ,\ sel\_key\ ,\ Nk\ *\ Width);}
63
   }
```

下面展示实验结果。

```
linka@ubuntu:~/HW/CA$ ./aes
buf:cdefasefsabcdefs
in:cdefasefsabcdefs
buf = 1234567890abcdef
key = 1234567890abcdef
Encode result:
0x73,0x22,0x14,0x69,0x38,0xda,0x6c,0xe5,0x c,0xe5,0x43,0x48,0x20,0xac,0xf9,0xcb,
Decode result:
0x63,0x64,0x65,0x66,0x61,0x73,0x65,0x66,0x73,0x61,0x62,0x63,0x64,0x65,0x66,0x73,
The string form:
c,d,e,f,a,s,e,f,s,a,b,c,d,e,f,s,
```

图 2: 16比特加密结果

第三部分 优化与性能比较

仔细查阅上述加密过程,寻找可以被优化的部分。可见最耗时的步骤是列混合阶段。若能够加快这一过程,将会大大提高程序运行的速度。之后,将利用计时器和相关的评测器来 检测性能地提高水准。

6 优化

针对加密的优化,可以尝试将所有的步骤组合在一起,利用一条式子进行全部的运算。同时,为了避免系统进行乘法这一开销较大的运算,可以通过事先构造表格,通过输入进行查阅的方式,撤除乘法运算,仅通过加法和查阅,将矩阵运算的速度提高。

记录M和N矩阵的生成的向量如下: $\vec{x} = (0x02, 0x03, 0x01, 0x01)$ 以及 $\vec{y} = (0x0E, 0x0B, 0x0D, 0x09)$ 。

通过构造数据表,利用小程序打印所有的可能情况,并与输入一一对应,可以得到类似如下的表格。

图 3: 存储的运算结果数组

声明如下:本次实验生成的表格有T02Quick[],T03Quick[]等存储运算结果的数组,表示与数据0x02和0x03及其他数据相乘后得到的结果。通过此方法可以加快矩阵元素计算的速度。

与此同时,记录移位和进行SubByte查阅操作对原输入的影响,记录各个字节的位置,利用枚举法将16个字节的变换关系给出。示例如图4所示。

7 性能测试比较

由于并不涉及较复杂的乘法运算,计算秘钥拓展所耗费的时间则忽略不计,利用计时器

7 性能测试比较 13

图 4: 枚举法示例图

机制来计算运行的总时间。在加密前开始计时,在解密后结束计时,打印相关的信息。 部分代码如下:

```
int main (void)
2
    {
            Read_plain(in);
4
            Read_key(key);
            KeyExpand(key, exp_key);
            clock_t start, end;
            printf("Encode_result:\n");
9
            start = clock();
10
            Rijndael (in);
11
             //PriArray(in, Width * Nb);
            Rv_Rijndael(in);
12
13
            end = clock();
            printf("clock\_tick: \_\%ld \ n", end -start);
14
15
            printf("Decode_result:\n");
            PriArray(in, Width * Nb);
16
            Showchar(in, Width * Nb);
17
18
```

利用此代码对16字节的加解密速度进行比较,得到结果如下图5和图6所示,分别是正常运算流程和压缩查表运算流程:

事先已经验证二者在相同输入的情况下结果是一致的,从得到的clock tick数值来看,二者运行的结果相同,即便对应的只有16字节数据的加解密流程,也能看到后者通过查表的方式其运算速率有明显的提高。在第二个程序中,笔者为了一致性和强迫症,将本来不需要查表的0x01情况也通过查表进行处理了。在这么做的情况下依旧能够看到速度有巨大的提高。

本实验的普遍性情况其实并不需要证明,利用类似的方式对长字节进行加密和解密,依据算法判断,其运行时间是16字节作为单元的简单相加,因此扩展该程序为输入任意长度字

7 性能测试比较 14

```
linka@ubuntu:~/HW/CA$ ./aes
buf:cdefasefsabcdefs
in:cdefasefsabcdefs
buf = 1234567890abcdef
key = 1234567890abcdef
Encode result:
clock tick: 33
Decode result:
0x63,0x64,0x65,0x66,0x61,0x73,0x65,0x66,0x73,0x61,0x62,0x63,0x64,0x65,0x66,0x73,
The string form:
c,d,e,f,a,s,e,f,s,a,b,c,d,e,f,s,
```

图 5: 正常运算流程

```
linka@ubuntu:~/HW/CAadv$ ./aes
buf:cdefasefsabcdefs
in:cdefasefsabcdefs
buf = 1234567890abcdef
key = 1234567890abcdef
Encode result:
clock tick: 4
Decode result:
0x63,0x64,0x65,0x66,0x61,0x73,0x65,0x66,0x73,0x61,0x62,0x63,0x64,0x65,0x66,0x73,
The string form:
c,d,e,f,a,s,e,f,s,a,b,c,d,e,f,s,
```

图 6: 压缩查表运算流程

节均可进行加密的情况并不会影响最终的速率对比关系。

至此,实验结束。

参考资料:

《现代密码学基础》 杨波 (第四版)